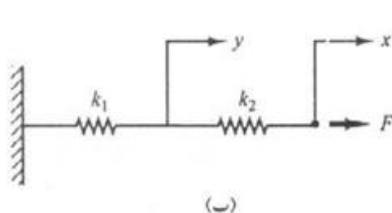


## ۱-۳ مقدمه

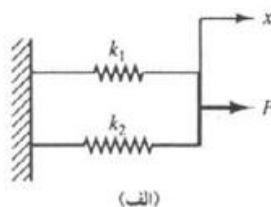
در این فصل مدلسازی ریاضی سیستمهای مکانیکی و الکتریکی را معرفی می‌کنیم. در فصل ۲ مدل‌های ریاضی یک مدار الکتریکی ساده و یک سیستم مکانیکی ساده را به دست آوردیم. در این فصل مدلسازی ریاضی سیستمهای مکانیکی و الکتریکی متنوعی را در نظر می‌گیریم که در سیستمهای کنترل با آنها روبه‌رو می‌شویم. قانون پایه‌ای حاکم بر سیستمهای مکانیکی قانون دوم نیوتن است. در بخش ۲-۳ این قانون را به سیستمهای مکانیکی مختلفی اعمال کرده، مدل تابع تبدیل و مدل فضای حالت این سیستمها را به دست می‌آوریم. قوانین بنیادی حاکم بر مدارهای الکتریکی قوانین کیرشهف هستند. در بخش ۳-۳ مدل‌های تابع تبدیل و فضای حالت مدارهای الکتریکی مختلف، و مدارهای آپامپی را به دست می‌آوریم؛ به مدارهایی نظر داریم که در سیستمهای کنترل کاربرد دارند.

## ۲-۳ مدلسازی ریاضی سیستمهای مکانیکی

در این بخش ابتدا در مورد سیستمهای ساده دارای فنر و ضربه‌گیر صحبت می‌کنیم. سپس مدل‌های تابع تبدیل و فضای حالت سیستمهای مکانیکی متنوعی را به دست می‌آوریم.



(ب)



(الف)

شکل ۱-۳

(الف) سیستم متشکل از دو فنر موازی؛ (ب) سیستم متشکل از دو فنر سری.

ثابت فنر معادل سیستمهای نشان داده شده در شکل‌های ۱-۳ (الف) و (ب) را بیابید.

مثال ۱-۳

برای فنرهای موازی [شکل ۱-۳ (الف)] ثابت فنر معادل  $k_{eq}$  را به صورت زیر می‌یابیم

$$k_1 x + k_2 x = F = k_{eq} x$$

$$k_{eq} = k_1 + k_2$$

یا

برای فنرهای سری [شکل ۱-۳ (ب)] نیروی وارد بر هر دو فنر یکی است. پس

$$k_1 y = F, \quad k_2 (x - y) = F$$

حذف  $y$  از این دو معادله به دست می‌دهد

$$k_2 \left( x - \frac{F}{k_1} \right) = F$$

$$k_2 x = F + \frac{k_2}{k_1} F = \frac{k_1 + k_2}{k_1} F$$

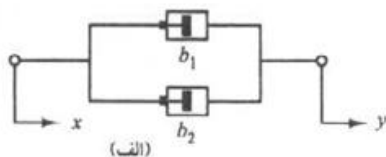
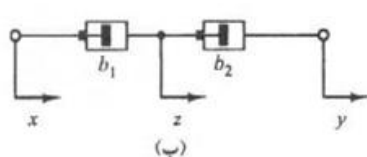
یا

پس ثابت فنر معادل  $k_{eq}$  در این حالت عبارت است از

$$k_{eq} = \frac{F}{x} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}$$

ضریب اصطکاک چسبندگی معادل  $b_{eq}$  هر یک از سیستمهای شکل ۲-۳ (الف) و (ب) را بیابید. میراساز روغنی را معمولاً ضربه‌گیر می‌نامند. ضربه‌گیر وسیله‌ای است که اصطکاک چسبندگی، یا میرایی ایجاد می‌کند. ضربه‌گیر از یک استوانه پر شده از روغن و یک پیستون تشکیل شده است. هر حرکت نسبی بین میله پیستون و استوانه با مقاومت روبه‌رو می‌شود، چرا که برای رخ دادن چنین حرکتی باید روغن از یک طرف پیستون به طرف دیگر آن برود (روغن از اطراف پیستون یا روزنه‌های تعبیه شده در آن از یک طرف پیستون به طرف دیگر آن می‌رود). ضربه‌گیر در واقع انرژی جذب می‌کند، انرژی جذب شده به گرما تبدیل می‌شود؛ ضربه‌گیر نمی‌تواند انرژی جنبشی یا پتانسیل در خود ذخیره کند.

مثال ۲-۳



شکل ۲-۳

(الف) دو میراساز موازی شده؛ (ب) دو میراساز سری شده.

(الف) نیروی فر ناشی از میراسازها عبارت است از

$$f = b_1(\dot{y} - \dot{x}) + b_2(\dot{y} - \dot{x}) = (b_1 + b_2)(\dot{y} - \dot{x})$$

نیروی فر بر حسب ضریب اصطکاک چسبندگی معادل  $b_{eq}$  عبارت است از

$$f = b_{eq}(\dot{y} - \dot{x})$$

$$b_{eq} = b_1 + b_2$$

پس

(ب) نیروی فر ناشی از هر میراساز عبارت است از

$$f = b_1(\dot{z} - \dot{x}) = b_1(\dot{y} - \dot{z}) \quad (۱-۳)$$

که در آن  $z$  جابه جایی نقطه بین میراسازهای  $b_1$  و  $b_2$  است. (توجه کنید که میله نیروی یکسانی را منتقل می کند.) با توجه به معادله (۱-۳) داریم

$$(b_1 + b_2)\dot{z} = b_2\dot{y} + b_1\dot{x}$$

یا

$$\dot{z} = \frac{1}{b_1 + b_2}(b_2\dot{y} + b_1\dot{x}) \quad (۲-۳)$$

نیروی فر بر حسب ضریب اصطکاک چسبندگی معادل  $b_{eq}$  عبارت است از

$$f = b_{eq}(\dot{y} - \dot{x})$$

با گذاشتن معادله (۲-۳) در معادله (۱-۳) به دست می آوریم

$$\begin{aligned} f &= b_2(\dot{y} - \dot{z}) = b_2 \left[ \dot{y} - \frac{1}{b_1 + b_2}(b_2\dot{y} + b_1\dot{x}) \right] \\ &= \frac{b_1 b_2}{b_1 + b_2}(\dot{y} - \dot{x}) \end{aligned}$$

$$f = b_{eq}(\dot{y} - \dot{x}) = \frac{b_1 b_2}{b_1 + b_2}(\dot{y} - \dot{x})$$

پس

و در نتیجه

$$b_{eq} = \frac{b_1 b_2}{b_1 + b_2} = \frac{1}{\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2}}$$

## مثال ۳-۳

سیستم جرم - فنر - ضربه‌گیر سوار بر گاری بی‌جرم شکل ۳-۳ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم برای این سیستم سوار بر گاری یک مدل ریاضی بیابیم. با این فرض که در  $t < 0$  گاری ساکن بوده و سیستم جرم - فنر - ضربه‌گیر سوار بر گاری نیز ساکن بوده است. در این سیستم  $u(t)$  جابه‌جایی گاری است و ورودی سیستم به حساب می‌آید. در  $t = 0$  گاری با سرعت ثابت به حرکت درمی‌آید، یعنی  $\dot{u} = \text{ثابت}$ . جابه‌جایی  $y(t)$  جرم، خروجی سیستم است. (جابه‌جایی نسبت به زمین سنجیده می‌شود) در این سیستم  $m$  جرم،  $b$  ضریب اصطکاک چسبندگی و  $k$  ثابت فنر است. فرض می‌کنیم نیروی اصطکاکی ضربه‌گیر با  $\dot{u} - \dot{y}$  متناسب است و فنر خطی است؛ یعنی نیروی فنر با  $y - u$  متناسب است.

قانون دوم نیوتن برای سیستم‌های جابه‌جا شونده می‌گوید

$$ma = \Sigma F$$

که در آن  $m$  جرم،  $a$  شتاب جرم و  $\Sigma F$  جمع نیروهای وارد بر جرم است. با اعمال قانون دوم نیوتن به این سیستم، و توجه به این که گاری بی‌جرم است به دست می‌آوریم

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -b \left( \frac{dy}{dt} - \frac{du}{dt} \right) - k(y - u)$$

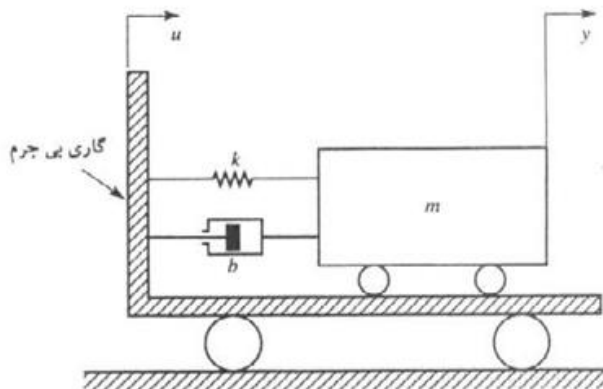
یا

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + ky = b \frac{du}{dt} + ku$$

این معادله یک مدل ریاضی برای سیستم مورد نظر است. اگر از معادله اخیر، با شرط صفر بودن شرایط اولیه، تبدیل لاپلاس بگیریم به دست می‌آوریم

$$(ms^2 + bs + k)Y(s) = (bs + k)U(s)$$

با تشکیل نسبت  $Y(s)$  به  $U(s)$  تابع تبدیل سیستم را به صورت زیر می‌یابیم



شکل ۳-۳

سیستم فنر - جرم - ضربه‌گیر  
سوار در گاری بی‌جرم.

$$\text{تابع تبدیل } G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{bs+k}{ms^2+bs+k}$$

این نوع نمایش مدل ریاضی یا تابع تبدیل در مهندسی کنترل بسیار به کار می رود. حال مدل فضای حالت این سیستم را به دست می آوریم. ابتدا معادله دیفرانسیل این سیستم، یعنی

$$\ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{b}{m}\dot{u} + \frac{k}{m}u$$

را با معادله استاندارد زیر مقایسه می کنیم

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2y = b_1\dot{u} + b_2u$$

و  $a_1, a_2, b_1, b_2$  را به صورت زیر تشخیص می دهیم

$$a_1 = \frac{b}{m}, \quad a_2 = \frac{k}{m}, \quad b_1 = \frac{b}{m}, \quad b_2 = \frac{k}{m}$$

با توجه به معادله (۲-۳۵) تعریف می کنیم

$$\beta_2 = b_2 = 0$$

$$\beta_1 = b_1 - a_1\beta_2 = \frac{b}{m}$$

$$\beta_0 = b_0 - a_1\beta_1 - a_2\beta_2 = \frac{k}{m} - \left(\frac{b}{m}\right)^2$$

حال با توجه به معادله (۲-۳۴) تعریف می کنیم

$$x_1 = y - \beta_2 u = y$$

$$x_2 = \dot{x}_1 - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \frac{b}{m}u$$

با توجه به معادله (۲-۳۶) داریم

$$\dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u = x_2 + \frac{b}{m}u$$

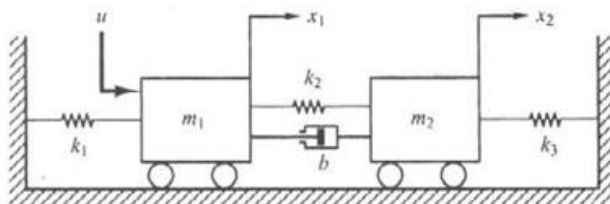
$$\dot{x}_2 = -a_2 x_1 - a_1 x_2 + \beta_0 u = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \left[\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{m}\right)^2\right]u$$

و معادله خروجی عبارت است از

$$y = x_1$$

یا

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{b}{m} \\ \frac{k}{m} - \left(\frac{b}{m}\right)^2 \end{bmatrix} u \quad (3-3)$$


 شکل ۴-۳  
سیستم مکانیکی.

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (۴-۳)$$

معادلات (۳-۳) و (۴-۳) نمایش فضای حالت سیستم را به دست می‌دهند. (توجه کنید که این تنها نمایش فضای حالت ممکن نیست. برای این سیستم بینهایت نمایش فضای حالت وجود دارد.)

تابع تبدیل  $X_1(s)/U(s)$  و  $X_2(s)/U(s)$  سیستم مکانیکی شکل ۴-۳ را بیابید.

مثال ۴-۳

معادلات حرکت سیستم شکل ۴-۳ عبارت است از

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k_2 (x_1 - x_2) - b (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + u$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 x_2 - k_2 (x_2 - x_1) - b (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

با ساده کردن به دست می‌آوریم

$$m_1 \ddot{x}_1 + b \dot{x}_1 + (k_1 + k_2) x_1 = b \dot{x}_2 + k_2 x_2 + u$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + b \dot{x}_2 + (k_2 + k_3) x_2 = b \dot{x}_1 + k_2 x_1$$

از این دو معادله با فرض صفر بودن شرایط اولیه تبدیل لاپلاس می‌گیریم و به دست می‌آوریم

$$[m_1 s^2 + bs + (k_1 + k_2)] X_1(s) = (bs + k_2) X_2(s) + U(s) \quad (۵-۳)$$

$$[m_2 s^2 + bs + (k_2 + k_3)] X_2(s) = (bs + k_2) X_1(s) \quad (۶-۳)$$

$X_2(s)$  را از معادله (۶-۳) به دست آورده آن را در معادله (۵-۳) قرار می‌دهیم، و پس از ساده کردن به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} & [(m_1 s^2 + bs + k_1 + k_2)(m_2 s^2 + bs + k_2 + k_3) - (bs + k_2)^2] X_1(s) \\ & = (m_2 s^2 + bs + k_2 + k_3) U(s) \end{aligned}$$

که به دست می‌دهد

$$\frac{X_1(s)}{U(s)} = \frac{m_2 s^2 + bs + k_2 + k_3}{(m_1 s^2 + bs + k_1 + k_2)(m_2 s^2 + bs + k_2 + k_3) - (bs + k_2)^2} \quad (۷-۳)$$

از معادلات (۶-۳) و (۷-۳) به دست می‌آوریم

$$\frac{X_2(s)}{U(s)} = \frac{bs + k_p}{(m_1 s^2 + bs + k_1 + k_p)(m_2 s^2 + bs + k_p + k_2) - (bs + k_p)^2} \quad (۸-۳)$$

معادلات (۷-۳) و (۸-۳) به ترتیب توابع تبدیل  $X_1(s)/U(s)$  و  $X_2(s)/U(s)$  هستند.

### مثال ۵-۳

شکل ۵-۳ (الف) یک آونگ وارون سوار بر ارابه موتوردار را نشان می‌دهد. این مدل سیستم کنترل راستای یک موشک در هنگام پرتاب را نشان می‌دهد. (هدف سیستم کنترل راستا، قائم نگهداشتن موشک است.) آونگ وارون ناپایدار است، یعنی در هر لحظه می‌تواند در هر جهتی واژگون شود، مگر این که نیروی کنترلی مناسبی اعمال شود. در اینجا یک مسئله دویعده‌ای را در نظر می‌گیریم که در آن آونگ در تنها صفحه کاغذ حرکت می‌کند. نیروی کنترل کننده  $u$  به ارابه اعمال می‌شود. فرض کنید مرکز گرانش میله آونگ در مرکز هندسی آن است. مدل ریاضی این سیستم را بنویسید.

زاویه میله نسبت به خط قائم را  $\theta$  فرض کنید. مختصات  $(x, y)$  مرکز گرانش میله آونگ را  $(x_G, y_G)$

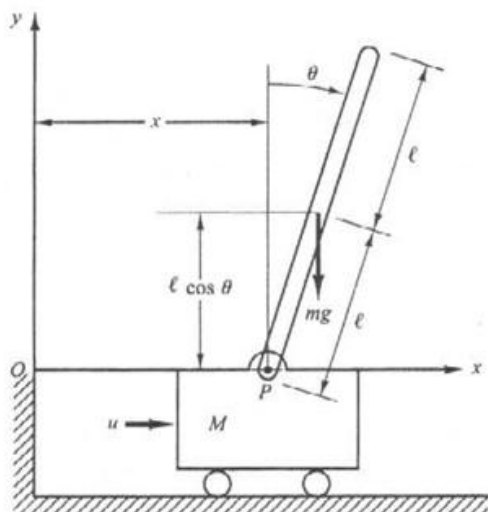
تعریف می‌کنیم. پس

$$x_G = x + l \sin \theta$$

$$y_G = l \cos \theta$$

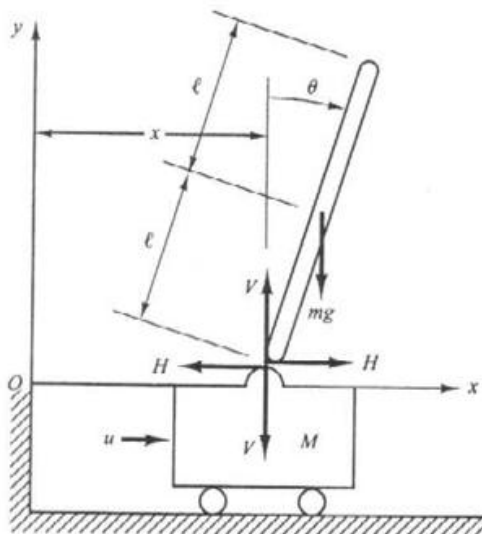
برای یافتن معادلات حرکت سیستم نمودار جسم آزاد شکل ۵-۳ (ب) را در نظر بگیرید. حرکت دورانی میله آونگ حول مرکز جرم را می‌توان به صورت زیر توصیف کرد

$$I \ddot{\theta} = V l \sin \theta - H l \cos \theta \quad (۹-۳)$$



### شکل ۵-۳

(الف) سیستم آونگ وارون



شکل ۳-۵

(ب) نمودار جسم آزاد.

که در آن  $l$  لختی دورانی میله حول مرکز گرانش آن است.

حرکت افقی مرکز گرانش میله عبارت است از

$$m \frac{d^2}{dt^2} (x + l \sin \theta) = H \quad (10-3)$$

حرکت قائم مرکز گرانش میله عبارت است از

$$m \frac{d^2}{dt^2} (l \cos \theta) = V - mg \quad (11-3)$$

حرکت افقی ارابه به صورت زیر توصیف می شود :

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = u - H \quad (12-3)$$

چون باید آونگ وارون را قائم نگه داشت ، می توان فرض کرد که  $\theta(t)$  و  $\dot{\theta}(t)$  کمیات کوچکی هستند، یعنی  $\sin \theta \approx 0$  ،  $\cos \theta \approx 1$  و  $\theta \dot{\theta}^2 \approx 0$ . پس معادلات (۹-۳) تا (۱۱-۳) را می توان خطی کرد. معادلات خطی شده عبارت اند از

$$I \ddot{\theta} = V l \theta - H l \quad (13-3)$$

$$m(\ddot{x} + l \ddot{\theta}) = H \quad (14-3)$$

$$0 = V - mg \quad (15-3)$$

از معادلات (۱۲-۳) تا (۱۴-۳) به دست می آوریم

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u \quad (16-3)$$

با توجه به معادلات (۱۳-۳)، (۱۴-۳)، و (۱۵-۳) به دست می آوریم

$$\begin{aligned}
 I\ddot{\theta} &= mgl\theta - Hl \\
 &= mgl\theta - l(m\ddot{x} - ml\ddot{\theta})
 \end{aligned}$$

یا

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} + ml\ddot{x} = mgl\theta \quad (17-3)$$

معادلات (۱۶-۳) و (۱۷-۳) حرکت سیستم آونگ وارون سوار بر اربابه را توصیف می‌کند. اینها یک مدل ریاضی برای سیستم به حساب می‌آیند.

## مثال ۳-۶

سیستم آونگ وارون شکل ۳-۶ را در نظر بگیرید. چون در این سیستم جرم در بالای میله متمرکز است، مرکز گرانش در مرکز گلوله بالای میله قرار دارد. مدل تابع تبدیل و فضای حالت این سیستم را به دست آورید.

در این حالت لختی دورانی آونگ حول مرکز گرانش کوچک است و فرض می‌کنیم در معادله (۱۷-۳) داریم  $I = 0$ . پس مدل ریاضی این سیستم به صورت زیر است

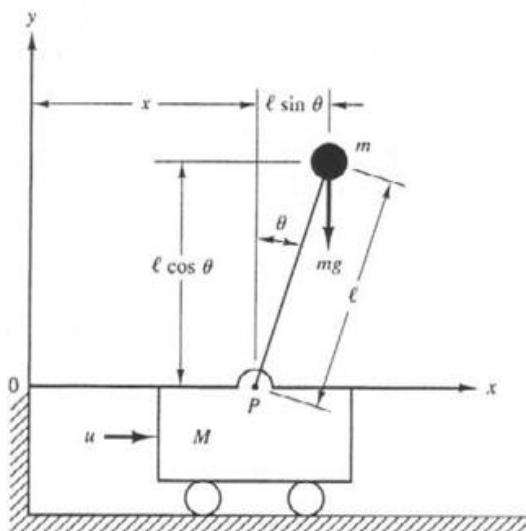
$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u \quad (18-3)$$

$$ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x} = mgl\theta \quad (19-3)$$

از معادلات (۱۸-۳) و (۱۹-۳) می‌توان نتیجه گرفت

$$Ml\ddot{\theta} = (M + m)g\theta - u \quad (20-3)$$

$$M\ddot{x} = u - m g \theta \quad (21-3)$$



شکل ۳-۶

سیستم آونگ وارون.

معادله (۲۰-۳) با حذف  $\ddot{x}$  از معادلات (۱۸-۳) و (۱۹-۳) به دست آمده است. معادله (۲۱-۳) با حذف  $\ddot{\theta}$  از معادلات (۱۸-۳) و (۱۹-۳) به دست آمده است. از معادله (۲۰-۳) می‌توان تابع تبدیل دستگاه را به صورت زیر به دست آورد

$$\frac{\Theta(s)}{-U(s)} = \frac{1}{M l s^2 - (M+m)g}$$

$$= \frac{1}{M l \left( s + \sqrt{\frac{M+m}{M l} g} \right) \left( s - \sqrt{\frac{M+m}{M l} g} \right)}$$

آونگ وارون یک قطب روی بخش منفی محور حقیقی و یک قطب روی بخش مثبت محور حقیقی، در  $s = -\left(\sqrt{M+m}/\sqrt{M l}\right)\sqrt{g}$  و  $s = \left(\sqrt{M+m}/\sqrt{M l}\right)\sqrt{g}$  دارد. پس در حالت حلقه باز ناپایدار است. متغیرهای حالت  $x_1, x_2, x_3, x_4$  و  $x_5$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x_1 = \theta$$

$$x_2 = \dot{\theta}$$

$$x_3 = x$$

$$x_4 = \dot{x}$$

توجه کنید که زاویه  $\theta$  چرخش میله آونگ حول محور  $P$  را نشان می‌دهد، و  $x$  محل اربابه است. اگر  $x$  و  $\theta$  را خروجی‌های سیستم در نظر بگیریم، داریم

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

توجه داشته باشید که هم  $x$  و هم  $\theta$  کمیاتی هستند که به راحتی می‌توان اندازه‌گیری کرد. پس طبق تعریف متغیرهای حالت و معادلات (۲۰-۳) و (۲۱-۳) به دست می‌آوریم

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{M+m}{M l} g x_1 - \frac{1}{M l} u$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = -\frac{m}{M} g x_1 + \frac{1}{M} u$$

این معادلات را می‌توان به صورت ماتریسی زیر نوشت

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{M+m}{M l} g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{m}{M} g & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{M l} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u \quad (22-3)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (۲۳-۳)$$

معادلات (۲۲-۳) و (۲۳-۳) نمایش فضای حالت سیستم آونگ وارون را به دست می‌دهد (به یاد داشته باشید که نمایش فضای حالت یک سیستم یکتا نیست. برای یک سیستم بینهایت نمایش فضای حالت وجود دارد).

### ۳-۳ مدلسازی ریاضی سیستمهای الکتریکی

قوانین پایه‌ای حاکم بر مدارهای الکتریکی قوانین ولتاژ و جریان کیرشهف هستند. قانون جریان کیرشهف (قانون گره) می‌گوید مجموع جبری جریان‌هایی که به یک گره وارد می‌شود، یا از آن خارج می‌شود، صفر است. (این قانون را می‌توان به این صورت نیز بیان کرد: مجموع جریان‌هایی که وارد یک گره می‌شود با مجموع جریان‌هایی که از گره خارج می‌شود، برابر است.) قانون ولتاژ کیرشهف (قانون حلقه) می‌گوید در هر لحظه مجموع جبری ولتاژها حول هر حلقه بسته‌ای صفر است. (این قانون را نیز می‌توان به این شکل بیان کرد: مجموع افزایش ولتاژهای حول هر حلقه با مجموع افت ولتاژهای آن حلقه برابر است.) مدل ریاضی یک مدار الکتریکی را می‌توان با اعمال یک یا هر دو قانون کیرشهف به دست آورد.

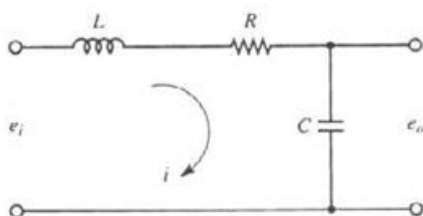
در این بخش ابتدا به مدارهای الکتریکی ساده می‌پردازیم. سپس مدلسازی ریاضی سیستم‌های آبامپی را در نظر می‌گیریم.

**مدار RCL.** مدار الکتریکی شکل ۷-۳ را در نظر بگیرید. این مدار از یک القاکنایی  $L$  هنری، یک مقاومت  $R$  اهمی، و یک خازن  $C$  فارادی تشکیل شده است. با اعمال قانون ولتاژ کیرشهف به این سیستم معادلات زیر را می‌یابیم:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = e_i \quad (۲۴-۳)$$

$$\frac{1}{C} \int i dt = e_o \quad (۲۵-۳)$$

معادلات (۲۴-۳) و (۲۵-۳) مدل ریاضی این سیستم را به دست می‌دهند.



شکل ۷-۳  
مدار الکتریکی.

مدل تابع تبدیلی مدار را می‌توان به این ترتیب به دست آورد؛ با فرض صفر بودن شرایط اولیه از معادلات (۲۴-۳) و (۲۵-۳) تبدیل لاپلاس می‌گیریم

$$LsI(s) + RI(s) + \frac{1}{C} \frac{1}{s} I(s) = E_I(s)$$

$$\frac{1}{C} \frac{1}{s} I(s) = E_O(s)$$

اگر  $e_I$  را ورودی و  $e_O$  را خروجی فرض کنیم، تابع تبدیل به صورت زیر به دست می‌آید

$$\frac{E_O(s)}{E_I(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} \quad (26-3)$$

مدل فضای حالت سیستم شکل ۳-۷ را می‌توان به این ترتیب یافت: ابتدا معادله دیفرانسیل سیستم را می‌توان از معادله (۲۶-۳) به دست آورد

$$\ddot{e}_O + \frac{R}{L} \dot{e}_O + \frac{1}{LC} e_O = \frac{1}{LC} e_I$$

متغیرهای حالت را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$x_1 = e_O$$

$$x_2 = \dot{e}_O$$

متغیرهای ورودی و خروجی عبارت‌اند از

$$u = e_I$$

$$y = e_O = x_1$$

پس به دست می‌آوریم

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} u$$

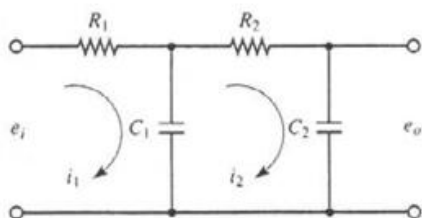
و

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

این دو معادله مدل ریاضی سیستم در فضای حالت را به دست می‌دهد.

**تابع تبدیل اجزای متوالی.** بسیاری از سیستم‌های فیدبک‌دار عناصری دارند که بر یکدیگر اثر بارگذاری دارند. سیستم شکل ۳-۸ را در نظر بگیرید.  $e_I$  را ورودی و  $e_O$  را خروجی فرض کنید. خازنها در ابتدا بدون بار هستند. در این سیستم طبقه دوم مدار (بخش  $R_2 C_2$ ) بر بخش اول (بخش  $R_1 C_1$ ) اثر بارگذاری دارد. معادلات این سیستم عبارت‌اند از

$$\frac{1}{C_1} \int (i_1 - i_2) dt + R_1 i_1 = e_I \quad (27-3)$$



شکل ۳-۸ سیستم الکتریکی.

$$\frac{1}{C_1} \int (i_2 - i_1) dt + R_1 i_1 + \frac{1}{C_2} \int i_2 dt = 0 \quad (28-3)$$

$$\frac{1}{C_2} \int i_2 dt = e_o \quad (29-3)$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس از معادلات (۲۷-۳) تا (۲۹-۳)، با فرض صفر بودن شرایط اولیه، به دست می آوریم

$$\frac{1}{C_1 s} [I_1(s) - I_2(s)] + R_1 I_1(s) = E_i(s) \quad (30-3)$$

$$\frac{1}{C_1 s} [I_2(s) - I_1(s)] + R_1 I_2(s) + \frac{1}{C_2 s} I_2(s) = 0 \quad (31-3)$$

$$\frac{1}{C_2 s} I_2(s) = E_o(s) \quad (32-3)$$

$I_1(s)$  را از معادلات (۳۰-۳) و (۳۱-۳) حذف کرده،  $E_i(s)$  را بر حسب  $I_2(s)$  می نویسیم و تابع تبدیل  $E_o(s)/E_i(s)$  را به صورت زیر می یابیم

$$\begin{aligned} \frac{E_o(s)}{E_i(s)} &= \frac{1}{R_1 C_1 s + 1 (R_2 C_2 s + 1) + R_1 C_2 s} \\ &= \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) s + 1} \end{aligned} \quad (33-3)$$

جمله  $R_1 C_2 s$  مخرج تابع تبدیل، اندرکنش دو مدار  $RC$  را بر هم نشان می دهد. چون

$$(R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2)^2 > 4 R_1 C_1 R_2 C_2$$

دو ریشه مخرج معادله (۳۳-۳) حقیقی اند.

این تحلیل نشان داد که اگر دو مدار  $RC$  متوالی شوند، به نحوی که خروجی اولی ورودی دومی به حساب آید، تابع تبدیل کل حاصل ضرب  $1/(R_1 C_1 s + 1)$  و  $1/(R_2 C_2 s + 1)$  نیست. علت این است که در یافتن تابع تبدیل یک مدار، به طور ضمنی فرض می کنیم باری به خروجی وصل نیست. به عبارت دیگر امیدانس بار بی نهایت فرض می شود، یعنی توانی از خروجی گرفته نمی شود. با اتصال مدار دوم به خروجی مدار اول توانی از خروجی گرفته می شود، بنابراین فرض نبودن اثر بارگذاری نقض می شود. پس تابع تبدیلی که با فرض صفر بودن اثر بارگذاری به دست آمده است، دیگر اعتبار ندارد. میزان اثر بارگذاری تعیین می کند که تابع تبدیل چقدر اصلاح لازم دارد.

**امپدانس مختلط.** در یافتن تابع تبدیل مدارهای الکتریکی نوشتن مستقیم معادلات مربوط به تبدیل لاپلاس کمیات مناسب‌تر از نوشتن معادلات دیفرانسیل است. سیستم شکل ۳-۹ (الف) را در نظر بگیرید. در این سیستم  $Z_1$  و  $Z_2$  امپدانسهای مختلط هستند. امپدانس مختلط  $Z(s)$  یک مدار دو پایانه‌ای نسبت تبدیل لاپلاس ولتاژ روی پایانه‌ها  $E(s)$  به تبدیل لاپلاس جریان گذرنده از پایانه‌ها  $I(s)$ ، هنگام صفر بودن شرایط اولیه، است یعنی  $Z(s) = E(s)/I(s)$ . اگر مدار دو پایانه‌ای مقاومت  $R$  خازن  $C$  یا القاگر  $L$  باشد، امپدانس مختلط به ترتیب  $R$  یا  $1/Cs$  یا  $Ls$  است. اگر امپدانسهای مختلط سری باشند، امپدانس کل با مجموع امپدانسهای مختلط برابر است.

به خاطر داشته باشید که مفهوم امپدانس تنها به شرط صفر بودن شرایط اولیه قابل اعمال است. چون تابع تبدیل به ازای شرایط اولیه صفر به دست می‌آید، برای یافتن آن می‌توان از مفهوم امپدانس استفاده کرد. این رهیافت یافتن تابع تبدیل مدارهای الکتریکی را بسیار ساده می‌کند.

مدار شکل ۳-۹ (ب) را در نظر بگیرید، ولتاژهای  $e_i$  و  $e_o$  را به ترتیب ورودی و خروجی سیستم فرض کنید. تابع تبدیل این سیستم عبارت است از

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)}$$

برای سیستم شکل ۳-۷

$$Z_1 = Ls + R \quad , \quad Z_2 = \frac{1}{Cs}$$

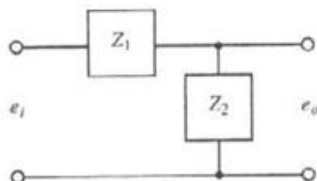
پس تابع تبدیل  $E_o(s)/E_i(s)$  را می‌توان به صورت زیر یافت

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{\frac{1}{Cs}}{Ls + R + \frac{1}{Cs}} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

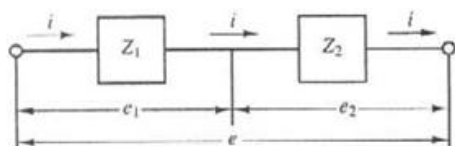
که با معادله (۳-۲۶) یکی است

باز هم سیستم شکل ۳-۸ را در نظر بگیرید. تابع تبدیل  $E_o(s)/E_i(s)$  را با استفاده از رهیافت امپدانسهای مختلط به دست آورید. (خازنهای  $C_1$  و  $C_2$  بار اولیه ندارند).

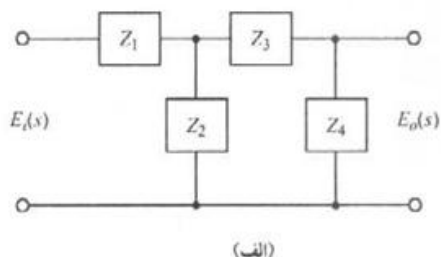
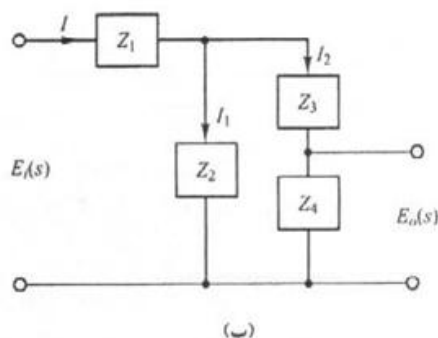
مثال ۳-۷



(ب)



(الف)



شکل ۱۰-۳ (الف) مدار شکل ۸-۳ برحسب امپدانس؛ (ب) مدار معادل.

مدار شکل ۸-۳ را می‌توان به صورت شکل ۱۰-۳ (الف) رسم کرد، که آن هم قابل تبدیل به مدار شکل ۱۰-۳ (ب) است.

در سیستم شکل ۱۰-۳ (ب) جریان  $I$  به دو جریان  $I_1$  و  $I_2$  تقسیم می‌شود. با توجه به این که

$$Z_2 I_1 = (Z_3 + Z_4) I_2, \quad I_1 + I_2 = I$$

به دست می‌آوریم

$$I_1 = \frac{Z_3 + Z_4}{Z_2 + Z_3 + Z_4} I, \quad I_2 = \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3 + Z_4} I$$

و با توجه به این که

$$E_i(s) = Z_1 I + Z_2 I_1 = \left[ Z_1 + \frac{Z_2(Z_3 + Z_4)}{Z_2 + Z_3 + Z_4} \right] I$$

$$E_o(s) = Z_4 I_2 = \frac{Z_2 Z_4}{Z_2 + Z_3 + Z_4} I$$

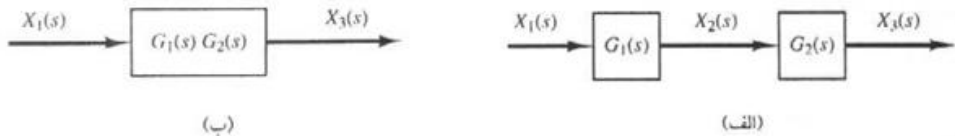
به دست می‌آوریم

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{Z_2 Z_4}{Z_1(Z_2 + Z_3 + Z_4) + Z_2(Z_3 + Z_4)}$$

با جایگذاری  $Z_1 = R_1$ ,  $Z_2 = 1/(C_1 s)$ ,  $Z_3 = R_2$ ,  $Z_4 = 1/(C_2 s)$  در معادلهٔ اخیر به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \frac{E_o(s)}{E_i(s)} &= \frac{\frac{1}{C_1 s} \cdot \frac{1}{C_2 s}}{R_1 \left( \frac{1}{C_1 s} + R_2 + \frac{1}{C_2 s} \right) + \frac{1}{C_1 s} \left( R_2 + \frac{1}{C_2 s} \right)} \\ &= \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) s + 1} \end{aligned}$$

که همان معادلهٔ (۳۳-۳) است.



شکل ۳-۱۱ (الف) سیستم متشکل از دو جزء فاقد اثر بارگذاری؛ (ب) سیستم معادل.

**تابع تبدیل عناصر متوالی فاقد اثر بارگذاری.** تابع تبدیل سیستمی را که از دو جزء متوالی شده فاقد اثر بارگذاری تشکیل شده است، می‌توان با حذف ورودی و خروجی میانی به دست آورد. مثلاً سیستم شکل ۳-۱۱ (الف) را در نظر بگیرید. تابع تبدیل اجزاء عبارت است از

$$G_1(s) = \frac{X_2(s)}{X_1(s)} \quad \text{و} \quad G_2(s) = \frac{X_3(s)}{X_2(s)}$$

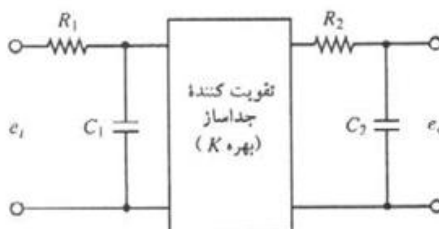
اگر امپدانس ورودی جزء دوم بی‌نهایت باشد، جزء دوم بر جزء اول اثر بارگذاری ندارد. بنابراین تابع تبدیل کل به صورت زیر است

$$G(s) = \frac{X_3(s)}{X_1(s)} = \frac{X_2(s)}{X_1(s)} \frac{X_3(s)}{X_2(s)} = G_1(s) G_2(s)$$

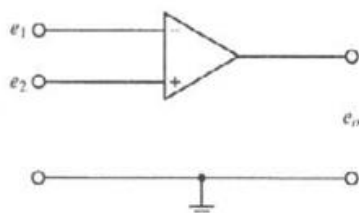
پس تابع تبدیل سیستم کل حاصلضرب توابع تبدیل اجزاء است. شکل ۳-۱۱ (ب) این هم‌ارزی را نشان می‌دهد.

سیستم شکل ۳-۱۲ را به عنوان مثال در نظر بگیرید. با گذاشتن تقویت‌کننده جداساز بین مدارها اثر بارگذاری حذف می‌شود، این کاری است که معمولاً در ترکیب مدارها انجام می‌شود. چون امپدانس ورودی تقویت‌کننده بسیار بزرگ است، وجود آن در مدار فرض نبودن اثر بارگذاری را معتبر می‌کند. دو مدار ساده RC که مطابق شکل ۳-۱۲ توسط تقویت‌کننده جداساز از هم مجزا شده‌اند، اثر بارگذاری ناچیزی دارند و تابع تبدیل کل حاصلضرب تک‌تک توابع تبدیل است، پس در این حالت

$$\begin{aligned} \frac{E_o(s)}{E_i(s)} &= \left( \frac{1}{R_1 C_1 s + 1} \right) (K) \left( \frac{1}{R_2 C_2 s + 1} \right) \\ &= \frac{K}{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1)} \end{aligned}$$



شکل ۳-۱۲ سیستم الکتریکی.



شکل ۳-۱۳ تقویت کننده عملیاتی.

**کنترل کننده های الکترونیکی.** در ادامه راجع به کنترل کننده های الکترونیکی ساخته شده با تقویت کننده های عملیاتی (آپامپ) صحبت می کنیم. کار را با یافتن تابع تبدیل یک مدار آپامپی ساده شروع می کنیم. سپس تابع تبدیل چند کنترل کننده آپامپی را به دست می آوریم. سرانجام کنترل کننده های آپامپی و توابع تبدیلیشان را به صورت یک جدول معرفی می کنیم.

**تقویت کننده عملیاتی.** تقویت کننده عملیاتی، که غالباً آپامپ خوانده می شود، برای تقویت سیگنالهای گرفته شده از حس کننده ها بسیار به کار می رود. در فیلترهایی که به عنوان جبران کننده به کار می روند نیز از آپامپ بسیار استفاده می شود. شکل ۳-۱۳ یک آپامپ را نشان می دهد. معمولاً پتانسیل زمین ۰V فرض شده و ولتاژهای ورودی  $e_1$  و  $e_2$  نسبت به آن سنجیده می شوند. ورودی  $e_1$  پایانه منفی آپامپ و ورودی  $e_2$  پایانه مثبت و ورودی  $e_2$  پایانه مثبت و ورودی  $e_1$  پایانه منفی آپامپ است. برای مدل شکل ۳-۱۳ داریم

$$e_o = K(e_2 - e_1) = -K(e_1 - e_2)$$

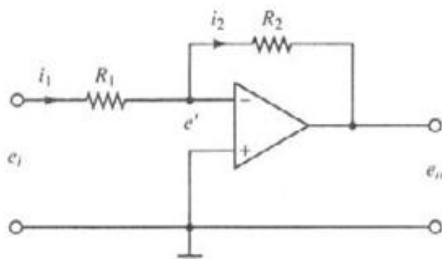
ورودیهای  $e_1$  و  $e_2$  می توانند سیگنال dc یا ac باشند و  $K$  بهره تفاضلی یا بهره ولتاژ است. اندازه  $K$  برای سیگنال dc و سیگنالهای ac دارای فرکانس کمتر از حدود ۱۰ Hz تقریباً حدود  $10^5$  تا  $10^6$  است. (بهره تفاضلی  $K$  با افزایش فرکانس کم می شود و در فرکانسهای حدود ۱ MHz تا ۵۰ MHz به یک می رسد). توجه کنید که آپامپ تفاضل ولتاژهای  $e_1$  و  $e_2$  را تقویت می کند. چنین تقویت کننده ای را تقویت کننده تفاضلی می نامند. چون بهره آپامپ بسیار بزرگ است، برای پایدار شدن تقویت کننده باید فیدبک منفی از خروجی به ورودی برقرار شود. (فیدبک از خروجی به پایانه منفی آپامپ ایجاد می شود تا نوع فیدبک منفی باشد).

در آپامپ ایده آل جریان پایانه های ورودی صفر است و بار متصل به پایانه خروجی بر خروجی اثر بارگذاری ندارد. به عبارت دیگر امپدانس ورودی آپامپ بی نهایت و امپدانس خروجی آن صفر است. در آپامپ های واقعی جریان کوچکی (تقریباً ناچیز) از پایانه های ورودی می گذرد و نمی توان از خروجی آپامپ جریان زیادی کشید. در تحلیلهایی که خواهد آمد، آپامپ ایده آل فرض می شود.

**تقویت کننده وارون ساز.** مدار آپامپی شکل ۳-۱۴ را در نظر بگیرید. بیاید ولتاژ خروجی  $e_o$  را بیابیم. معادله این مدار را می توان به صورت زیر یافت: تعریف می کنیم

$$i_1 = \frac{e_i - e'}{R_1}, \quad i_2 = \frac{e' - e_o}{R_2}$$

چون جریان وارد شده به آپامپ ناچیز است، جریان  $i_2$  باید با جریان  $i_1$  برابر باشد. پس



شکل ۳-۱۴  
تقویت کننده وارون ساز.

$$\frac{e_i - e'}{R_1} = \frac{e' - e_o}{R_2}$$

چون  $K(e' - e') = e_o$  و  $K \gg 1$ ،  $e'$  باید تقریباً برابر صفر باشد، یا  $e' \approx 0$ . پس داریم

$$\frac{e_i}{R_1} = \frac{-e_o}{R_2}$$

$$e_o = -\frac{R_2}{R_1} e_i \quad \text{یا}$$

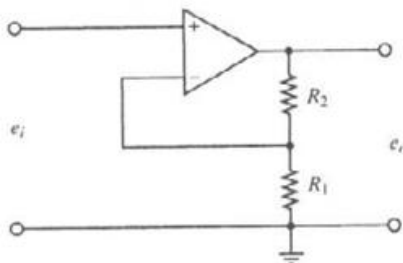
پس مدار نشان داده شده یک تقویت کننده وارون ساز است. به ازای  $R_1 = R_2$  مدار به صورت تغییر دهنده علامت عمل می کند.

تقویت کننده ناوارون ساز. شکل ۳-۱۵ (الف) یک تقویت کننده ناوارون ساز را نشان می دهد. شکل ۳-۱۵ (ب) مداری معادل با این تقویت کننده را نشان می دهد. برای مدار شکل ۳-۱۵ (ب) داریم

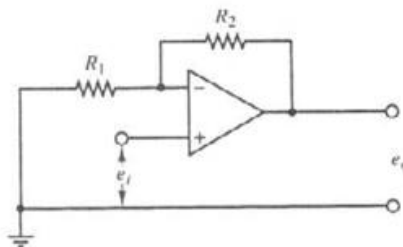
$$e_o = K \left( e_i - \frac{R_1}{R_1 + R_2} e_o \right)$$

که در آن  $K$  بهره تفاضلی آپ امپ است. از این معادله به دست می آوریم

$$e_i = \left( \frac{R_1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{K} \right) e_o$$

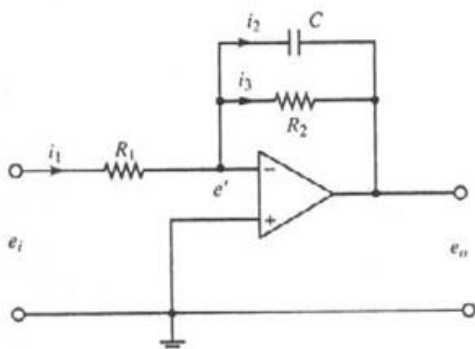


(ب)



(الف)

شکل ۳-۱۵ (الف) تقویت کننده آپ امپی ناوارون ساز (ب) مدار معادل.



شکل ۱۶-۳

مدار پسفاز مرتبه اول با آپ امپ.

چون  $K \gg 1$ ، اگر  $R_1/(R_1 + R_2) \gg (1/K)$ ، آنگاه

$$e_o = K \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) e_i$$

این معادله ولتاژ خروجی  $e_o$  را به دست می دهد. چون  $e_i$  و  $e_o$  هم علامت اند، مدار آپ امپی شکل ۱۵-۳ (الف) ناوارونساز است.

شکل ۱۶-۳ یک مدار الکتریکی آپ امپی را نشان می دهد. خروجی  $e_o$  را بنویسید.

مثال ۸-۳

تعریف می کنیم

$$i_1 = \frac{e_i - e'}{R_1}, \quad i_2 = C \frac{d(e' - e_o)}{dt}, \quad i_3 = \frac{e' - e_o}{R_2}$$

با توجه به این که جریان ورودی آپ امپ ناچیز است، داریم

$$i_1 = i_2 + i_3$$

پس

$$\frac{e_i - e'}{R_1} = C \frac{d(e' - e_o)}{dt} + \frac{e' - e_o}{R_2}$$

چون  $e' = 0$  داریم

$$\frac{e_i}{R_1} = -C \frac{de_o}{dt} - \frac{e_o}{R_2}$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس این معادله، با فرض صفر بودن شرایط اولیه، به دست می آوریم

$$\frac{E_i(s)}{R_1} = -\frac{R_2 C s + 1}{R_2} E_o(s)$$

که می‌توانیم آن را به صورت زیر بنویسیم

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\frac{R_f}{R_1} \frac{1}{R_f C s + 1}$$

مدار آپامپی شکل ۱۶-۳ یک مدار پسفاز مرتبه اول است. (در جدول ۱-۳ تعدادی مدار آپامپی و تابع تبدیلیشان نشان داده شده است).

رهیافت امپدانس برای یافتن تابع تبدیل. مدار آپامپی شکل ۱۷-۳ را در نظر بگیرید. می‌توانیم رهیافت امپدانس را، که قبلاً در مورد مدارهای الکتریکی به کار بردیم، برای یافتن تابع تبدیل مدارهای آپامپی نیز به کار ببریم. برای مدار شکل ۱۷-۳ داریم

$$\frac{E_i(s) - E'(s)}{Z_1} = \frac{E'(s) - E_o(s)}{Z_f}$$

و چون  $E'(s) \approx 0$ ، داریم

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\frac{Z_f(s)}{Z_1(s)} \quad (۳۴-۳)$$

تابع تبدیل  $E_o(s)/E_i(s)$  مدار آپامپی شکل ۱۶-۳ را با استفاده از رهیافت امپدانس بیابید.

مثال ۹-۳

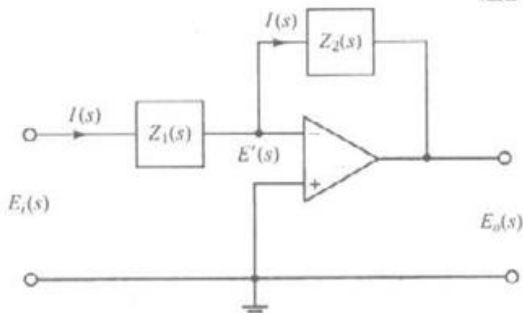
امپدانسهای مختلط  $Z_1(s)$  و  $Z_f(s)$  این مدار عبارت است از

$$Z_f(s) = \frac{1}{C s + (1/R_f)} = \frac{R_f}{R_f C s + 1}, \quad Z_1(s) = R_1$$

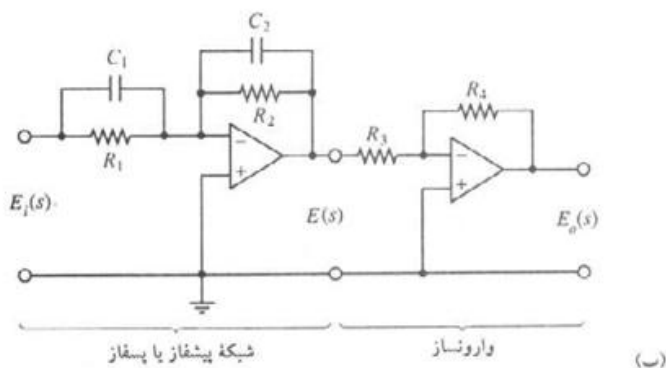
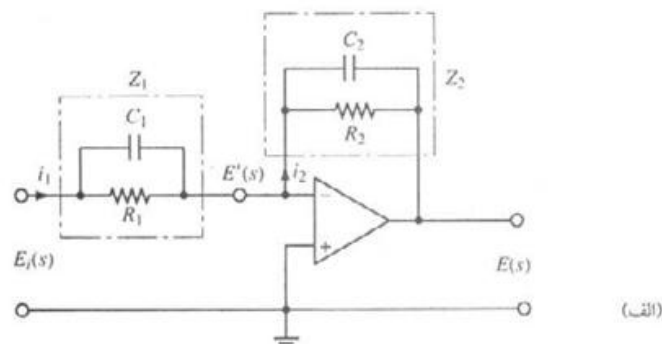
پس تابع تبدیل  $E_o(s)/E_i(s)$  به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\frac{Z_f(s)}{Z_1(s)} = -\frac{R_f}{R_1} \frac{1}{R_f C s + 1}$$

که البته همان تابع تبدیل به دست آمده در مثال ۸-۳ است.



شکل ۱۷-۳ مدار آپامپی.



شکل ۱۸-۳

(الف) مدار آپ‌امپی + (ب) مدار آپ‌امپی که به عنوان جبران‌ساز پیشفاز یا پسفاز به کار می‌رود.

شبکه‌های پیشفاز و پسفاز آپ‌امپی. شکل ۱۸-۳ (الف) یک مدار الکترونیکی آپ‌امپی را نشان می‌دهد. تابع تبدیل این مدار را به این صورت می‌یابیم: امپدانس ورودی را  $Z_1$  و امپدانس فیدبک را  $Z_2$  می‌نامیم. پس

$$Z_2 = \frac{R_2}{R_2 C_2 s + 1} \quad \text{و} \quad Z_1 = \frac{R_1}{R_1 C_1 s + 1}$$

پس با توجه به معادله (۳-۳۴) داریم

$$\frac{E(s)}{E_i(s)} = -\frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{R_1 C_1 s + 1}{R_2 C_2 s + 1} = -\frac{C_1}{C_2} \frac{s + (1/R_1 C_1)}{s + (1/R_2 C_2)} \quad (۳-۳۵)$$

توجه کنید که تابع تبدیل معادله (۳-۳۵) یک علامت منفی دارد، پس این مدار وارون‌ساز است. اگر در کاربرد مورد نظر این وارون‌ساز مطلوب نباشد، می‌توان در ورودی یا خروجی مدار شکل ۱۸-۳ (الف) یک مدار وارون‌ساز گذاشت. شکل ۱۸-۳ (ب) یک مدار نمونه را نشان می‌دهد. تابع تبدیل وارون‌ساز عبارت است از

$$\frac{E_o(s)}{E(s)} = -\frac{R_3}{R_4}$$

بهره مدار وارون‌ساز  $-R_T/R_T$  است. پس تابع تبدیل مدار شکل ۳-۱۸ (ب) به صورت زیر است:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{R_T R_T}{R_1 R_T} \frac{R_1 C_1 s + 1}{R_T C_T s + 1} = \frac{R_T C_1}{R_T C_T} \frac{s + \frac{1}{R_1 C_1}}{s + \frac{1}{R_T C_T}} \quad (3-36)$$

$$= K_c \alpha \frac{T s + 1}{\alpha T s + 1} = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}}$$

که در آن

$$T = R_1 C_1, \quad \alpha T = R_T C_T, \quad K_c = \frac{R_T C_1}{R_T C_T}$$

توجه کنید که

$$K_c \alpha = \frac{R_T C_1}{R_T C_T} \frac{R_T C_T}{R_1 C_1} = \frac{R_T R_T}{R_1 R_T}, \quad \alpha = \frac{R_T C_T}{R_1 C_1}$$

بهره dc این شبکه  $K_c \alpha = R_T R_T / (R_1 R_T)$  است.

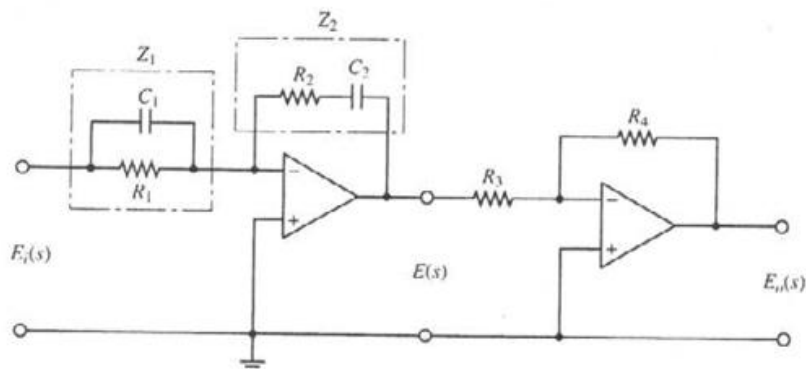
توجه کنید که این شبکه به ازای  $R_1 C_1 > R_T C_T$  یا  $\alpha < 1$  یک شبکه پیش‌ساز است. این شبکه به ازای  $R_1 C_1 < R_T C_T$  پس‌ساز است.

کنترل‌کننده  $PID$  آب/مپی. شکل ۳-۱۹ یک کنترل‌کننده تناسبی - انتگرالی - مشتقی (PID) آب/مپی را نشان می‌دهد. تابع تبدیل  $E(s)/E_i(s)$  عبارت است از

$$\frac{E(s)}{E_i(s)} = -\frac{Z_T}{Z_1}$$

که در آن

$$Z_T = \frac{R_T C_T s + 1}{C_T s}, \quad Z_1 = \frac{R_1}{R_1 C_1 s + 1}$$



شکل ۳-۱۹ کنترل‌کننده  $PID$  الکتریکی.

$$\frac{E(s)}{E_i(s)} = - \left( \frac{R_T C_T s + 1}{C_T s} \right) \left( \frac{R_1 C_1 s + 1}{R_1} \right) \quad \text{پس}$$

با توجه به این که

$$\frac{E_o(s)}{E(s)} = - \frac{R_T}{R_T}$$

داریم

$$\begin{aligned} \frac{E_o(s)}{E_i(s)} &= \frac{E_o(s)}{E(s)} \frac{E(s)}{E_i(s)} = \frac{R_T R_T}{R_1 R_T} \frac{(R_1 C_1 s + 1)(R_T + C_T s + 1)}{R_T C_T s} \\ &= \frac{R_T R_T}{R_1 R_T} \left( \frac{R_1 C_1 + R_T C_T}{R_T C_T} + \frac{1}{R_T C_T s} + R_1 C_1 s \right) \\ &= \frac{R_T (R_1 C_1 + R_T C_T)}{R_T R_1 C_T} \left[ 1 + \frac{1}{(R_1 C_1 + R_T C_T)s} + \frac{R_1 C_1 R_T C_T}{R_1 C_1 + R_T C_T} s \right] \quad (37-3) \end{aligned}$$

توجه کنید که مدار آپامپی دوم هم به عنوان وارون‌ساز و هم به عنوان تنظیم‌کننده بهره عمل می‌کند.

هنگام بیان کنترل‌کننده PID به صورت

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = K_p \left( 1 + \frac{T_i}{s} + T_d s \right)$$

$K_p$  بهره تناسبی،  $T_i$  زمان انتگرال، و  $T_d$  زمان مشتق نامیده می‌شود. با توجه به معادله (37-3) بهره تناسبی

$K_p$ ، زمان انتگرال  $T_i$ ، و زمان مشتق  $T_d$  را به صورت زیر می‌یابیم

$$K_p = \frac{R_T (R_1 C_1 + R_T C_T)}{R_T R_1 C_T}$$

$$T_i = \frac{1}{R_1 C_1 + R_T C_T}$$

$$T_d = \frac{R_1 C_1 R_T C_T}{R_1 C_1 + R_T C_T}$$

اگر کنترل‌کننده PID به صورت زیر بیان شود

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s$$

$K_p$  را بهره تناسبی،  $K_i$  را بهره انتگرال‌گیری، و  $K_d$  را بهره مشتق‌گیری می‌نامند. در این صورت برای این

کنترل‌کننده

$$K_p = \frac{R_T (R_1 C_1 + R_T C_T)}{R_T R_1 C_T}$$

$$K_i = \frac{R_T}{R_T R_1 C_T}$$

$$K_d = \frac{R_f R_f C_1}{R_f}$$

جدول ۳-۱ سیاهه‌ای از مدارهای آب‌امپی را که می‌توانند به عنوان کنترل‌کننده یا جبران‌ساز به کار روند نشان می‌دهد.

## مسائل نمونه و حلشان

الف ۳-۱ شکل ۳-۲۰ (الف) نمودار طرح گونه سیستم تعلیق یک خودرو را نشان می‌دهد. با حرکت خودرو در جاده، جابه‌جایی قائم تیرها به عنوان حرکت تحریک کننده سیستم تعلیق خودرو عمل می‌کند. حرکت این سیستم از یک حرکت انتقالی مرکز جرم و یک حرکت دورانی حول مرکز جرم تشکیل شده است. مدلسازی ریاضی سیستم کامل بسیار پیچیده است.

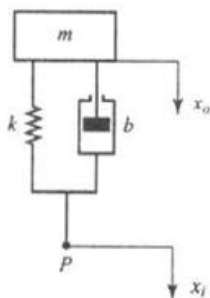
شکل ۳-۲۰ (ب) گونه بسیار ساده شده‌ای از این سیستم تعلیق را نشان می‌دهد. با فرض این که حرکت  $x_i$  نقطه  $P$  ورودی سیستم و حرکت قائم  $x_o$  خروجی سیستم است، تابع تبدیل  $X_o(s)/X_i(s)$  را بیابید. (تنها حرکت در راستای قائم را در نظر بگیرید.) جابه‌جایی  $x_o$  نسبت به وضعیت تعادل حاصل از صفر بودن ورودی  $x_i$  سنجیده می‌شود.

حل: معادله حرکت سیستم شکل ۳-۲۰ (ب) عبارت است از

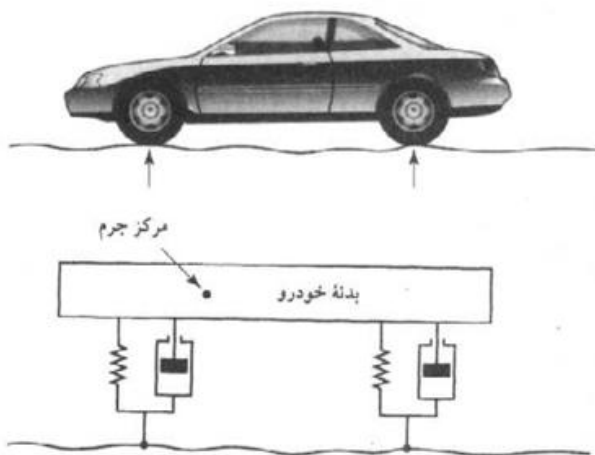
$$m \ddot{x}_o + b(\dot{x}_o - \dot{x}_i) + k(x_o - x_i) = 0$$

$$m \ddot{x}_o + b \dot{x}_o + k x_o = b \dot{x}_i + k x_i$$

یا



(ب)



(الف)

(الف) سیستم تعلیق خودرو. (ب) سیستم تعلیق ساده شده.

شکل ۳-۲۰

جدول ۱-۳ مدارهای آپامپی که می‌توان به عنوان جبران‌ساز به کار برد.

|   | عمل کنترلی        | $G(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)}$                                                                                          | مدار تقویت کننده آپامپی |
|---|-------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|
| 1 | P                 | $\frac{R_4}{R_3} \frac{R_2}{R_1}$                                                                                       |                         |
| 2 | I                 | $\frac{R_4}{R_3} \frac{1}{R_1 C_2 s}$                                                                                   |                         |
| 3 | PD                | $\frac{R_4}{R_3} \frac{R_2}{R_1} (R_1 C_1 s + 1)$                                                                       |                         |
| 4 | PI                | $\frac{R_4}{R_3} \frac{R_2}{R_1} \frac{R_2 C_2 s + 1}{R_2 C_2 s}$                                                       |                         |
| 5 | PID               | $\frac{R_4}{R_3} \frac{R_2}{R_1} \frac{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1)}{R_2 C_2 s}$                                      |                         |
| 6 | پیش‌فاز یا پس‌فاز | $\frac{R_4}{R_3} \frac{R_2}{R_1} \frac{R_1 C_1 s + 1}{R_2 C_2 s + 1}$                                                   |                         |
| 7 | پیش‌فاز - پیش‌فاز | $\frac{R_6}{R_5} \frac{R_4}{R_3} \frac{[(R_1 + R_3) C_1 s + 1](R_2 C_2 s + 1)}{(R_1 C_1 s + 1)[(R_2 + R_4) C_2 s + 1]}$ |                         |

از معادله اخیر با فرض صفر بودن شرایط اولیه تبدیل لاپلاس می گیریم

$$(ms^2 + bs + k)X_o(s) = (bs + k)X_i(s)$$

پس تابع تبدیل  $X_o(s)/X_i(s)$  عبارت است از

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{bs + k}{ms^2 + bs + k}$$

الف ۳-۲ تابع تبدیل  $Y(s)/U(s)$  سیستم شکل ۳-۲۱ را در نظر بگیرید. (این سیستم نیز مانند سیستم مسئله الف-۳-۱ گونه ساده شده ای از سیستم تعلیق خودرو یا موتور سیکلت است.)

حل: فرض می کنیم جابه جایی های  $x$  و  $y$  نسبت به وضعیت حالت ماندگار، در نبود ورودی  $u$ ، سنجیده می شود. با اعمال قانون دوم نیوتن به این سیستم به دست می آوریم

$$m_1 \ddot{x} = k_T(y - x) + b(\dot{y} - \dot{x}) + k_1(u - x)$$

$$m_T \ddot{y} = -k_T(y - x) - b(\dot{y} - \dot{x})$$

پس داریم

$$m_1 \ddot{x} + b \dot{x} + (k_1 + k_T)x = b \dot{y} + k_T y + k_1 u$$

$$m_T \ddot{y} + b \dot{y} + k_T y = b \dot{x} + k_T x$$

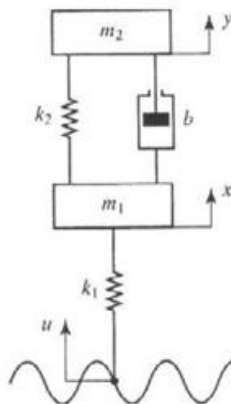
با فرض صفر بودن شرایط اولیه از این دو معادله تبدیل لاپلاس می گیریم

$$[m_1 s^2 + bs + (k_1 + k_T)]X(s) = [bs + k_T]Y(s) + k_1 U(s)$$

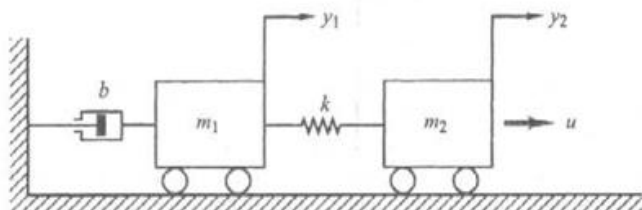
$$[m_T s^2 + bs + k_T]Y(s) = (bs + k_T)X(s)$$

از دو معادله بالا  $X(s)$  را حذف کرده، به دست می آوریم

$$(m_1 s^2 + bs + k_1 + k_T) \frac{m_T s^2 + bs + k_T}{bs + k_T} Y(s) = (bs + k_T)Y(s) + k_1 U(s)$$



شکل ۳-۲۱ سیستم تعلیق.



شکل ۳-۲۲

سیستم مکانیکی.

که نتیجه می‌دهد

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_1(bs + k_2)}{m_1 m_2 s^2 + (m_1 + m_2)bs + [k_1 m_2 + (m_1 + m_2)k_2]s + k_1 b s + k_1 k_2}$$

الف ۳-۳ برای سیستم شکل ۳-۲۲ یک نمایش فضای حالت به دست آورید.

حل: معادلات سیستم عبارت است از

$$m_1 \ddot{y}_1 + b \dot{y}_1 + k(y_1 - y_2) = 0$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + k(y_2 - y_1) = u$$

متغیرهای خروجی این سیستم  $y_1$  و  $y_2$  هستند. متغیرهای حالت را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$x_1 = y_1$$

$$x_2 = \dot{y}_1$$

$$x_3 = y_2$$

$$x_4 = \dot{y}_2$$

و معادلات زیر را به دست می‌آوریم

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m_1} [-b\dot{y}_1 - k(y_1 - y_2)] = -\frac{k}{m_1} x_1 - \frac{b}{m_1} x_2 + \frac{k}{m_1} x_3$$

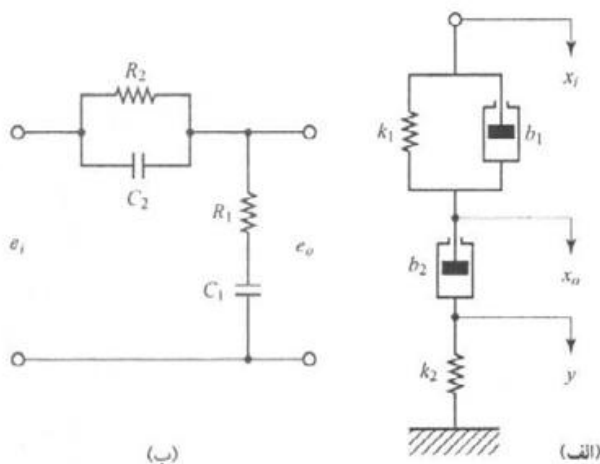
$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{m_2} [-k(y_2 - y_1) + u] = \frac{k}{m_2} x_1 - \frac{k}{m_2} x_3 + \frac{1}{m_2} u$$

پس معادلات حالت عبارت است از

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{m_1} & -\frac{b}{m_1} & \frac{k}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{m_2} & 0 & -\frac{k}{m_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} u$$

و معادله خروجی به صورت زیر است



شکل ۳-۲۳

(الف) سیستم مکانیکی؛

(ب) سیستم الکتریکی متشابه.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

الف ۳-۴ تابع تبدیل  $X_O(s)/X_I(s)$  سیستم مکانیکی شکل ۳-۲۳ (الف) را بیابید. همچنین تابع تبدیل  $E_O(s)/E_I(s)$  سیستم الکتریکی شکل ۳-۲۳ (ب) را بیابید. نشان دهید که تابع تبدیل دو سیستم شکل یکسانی دارند و بنابراین دو سیستم متشابه هستند.

حل: در شکل ۳-۲۳ (الف) فرض می‌کنیم جابه‌جایی‌های  $x_I$ ،  $x_O$ ، و  $y$  نسبت به موقعیت حالت ماندگارشان سنجیده می‌شوند. پس معادلات حرکت سیستم مکانیکی شکل ۳-۲۳ (الف) عبارت است از

$$b_1(\dot{x}_I - \dot{x}_O) + k_1(x_I - x_O) = b_2(\dot{x}_O - \dot{y})$$

$$b_2(\dot{x}_O - \dot{y}) = k_2 y$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس از این دو معادله، با فرض صفر بودن شرایط اولیه، به دست می‌آوریم

$$b_1[sX_I(s) - sX_O(s)] + k_1[X_I(s) - X_O(s)] = b_2[sX_O(s) - sY(s)]$$

$$b_2[sX_O(s) - sY(s)] = k_2 Y(s)$$

اگر از دو معادله بالا  $Y(s)$  را حذف کنیم، نتیجه می‌گیریم

$$b_1[sX_I(s) - sX_O(s)] + k_1[X_I(s) - X_O(s)] = b_2 s X_O(s) - b_2 s \frac{b_2 s X_O(s)}{b_2 s + k_2}$$

یا

$$(b_1 s + k_1) X_I(s) = \left( b_1 s + k_1 + b_2 s - b_2 s \frac{b_2 s}{b_2 s + k_2} \right) X_O(s)$$

پس تابع تبدیل  $X_o(s)/X_i(s)$  را می‌توان به صورت زیر یافت

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{\left(\frac{b_1}{k_1}s+1\right)\left(\frac{b_2}{k_2}s+1\right)}{\left(\frac{b_1}{k_1}s+1\right)\left(\frac{b_2}{k_2}s+1\right) + \frac{b_2}{k_1}s}$$

برای سیستم الکتریکی شکل ۳-۲۳ (ب) تابع تبدیل  $E_o(s)/E_i(s)$  به صورت زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned}\frac{E_o(s)}{E_i(s)} &= \frac{R_1 + \frac{1}{C_1 s}}{\frac{1}{(1/R_2) + C_2 s} + R_1 + \frac{1}{C_1 s}} \\ &= \frac{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1)}{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1) + R_2 C_1 s}\end{aligned}$$

مقایسه دو تابع تبدیل نشان می‌دهد که سیستمهای داده شده در شکلهای ۳-۲۳ (الف) و (ب) مشابه‌اند.

الف ۳-۵ توابع تبدیل  $E_o(s)/E_i(s)$  شبکه‌های  $T$  پل‌دار نشان داده شده در شکلهای ۳-۲۴ (الف) و (ب) را بیابید.

حل: هر دو شبکه  $T$  پل‌دار را می‌توان به صورت شبکه شکل ۳-۲۵ (الف) نشان داد. سپس این شبکه را می‌توان به صورت شبکه شکل ۳-۲۵ (ب) ساده کرد.

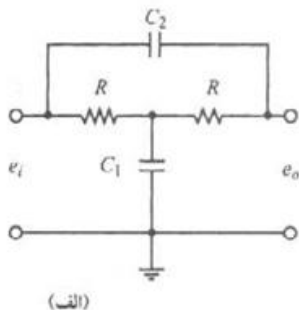
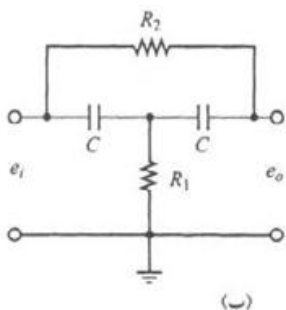
در شکل ۳-۲۵ (ب) داریم

$$I_1 = I_2 + I_3, \quad I_2 Z_1 = (Z_2 + Z_3) I_3$$

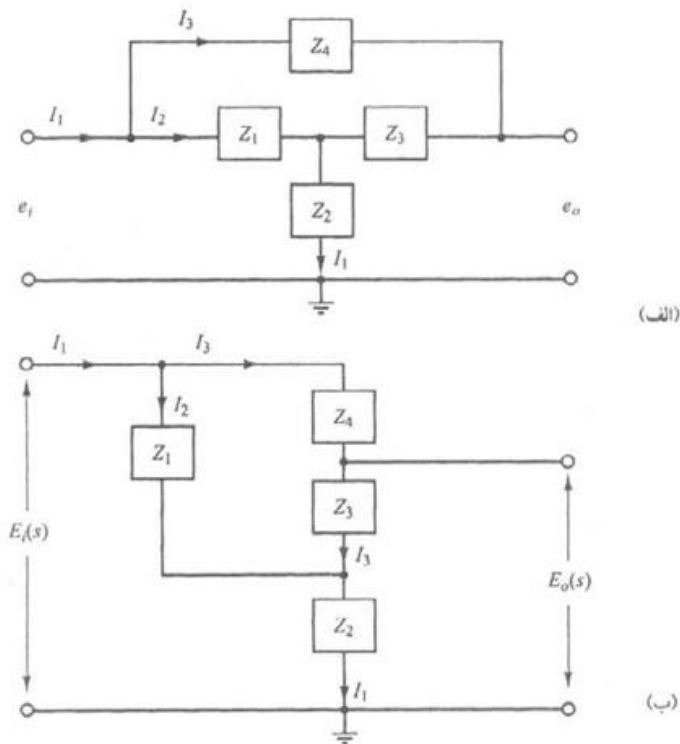
بنابراین

$$I_2 = \frac{Z_2 + Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3} I_1, \quad I_3 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2 + Z_3} I_1$$

اکنون می‌توانیم ولتاژهای  $E_i(s)$  و  $E_o(s)$  را به صورت زیر بیابیم:



شکل ۳-۲۴ شبکه‌های  $T$  پل‌دار.



شکل ۳-۲۵

(الف) شبکه  $T$  پل دار بر حسب

امپدانسهای مختلط؛ (ب) شبکه معادل.

$$\begin{aligned}
 E_i(s) &= Z_1 I_1 + Z_2 I_1 \\
 &= \left[ Z_2 + \frac{Z_1(Z_3 + Z_4)}{Z_1 + Z_3 + Z_4} \right] I_1 \\
 &= \frac{Z_2(Z_1 + Z_3 + Z_4) + Z_1(Z_3 + Z_4)}{Z_1 + Z_3 + Z_4} I_1 \\
 E_o(s) &= Z_3 I_1 + Z_4 I_1 \\
 &= \frac{Z_3 Z_1}{Z_1 + Z_3 + Z_4} I_1 + Z_4 I_1 \\
 &= \frac{Z_3 Z_1 + Z_4(Z_1 + Z_3 + Z_4)}{Z_1 + Z_3 + Z_4} I_1
 \end{aligned}$$

پس تابع تبدیل  $E_o(s)/E_i(s)$  شبکه شکل ۳-۲۵ (الف) به صورت زیر است

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{Z_3 Z_1 + Z_4(Z_1 + Z_3 + Z_4)}{Z_2(Z_1 + Z_3 + Z_4) + Z_1 Z_3 + Z_1 Z_4} \quad (3-38)$$

برای شبکه  $T$  پل دار شکل ۳-۲۴ (الف)، در معادله (۳-۳۸) قرار می دهیم

$$Z_1 = R, \quad Z_2 = \frac{1}{C_1 s}, \quad Z_3 = R, \quad Z_4 = \frac{1}{C_2 s}$$

به این ترتیب تابع تبدیل  $E_o(s)/E_i(s)$  زیر را به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \frac{E_o(s)}{E_i(s)} &= \frac{R^2 + \frac{1}{C_1 s} \left( R + R + \frac{1}{C_2 s} \right)}{\frac{1}{C_1 s} \left( R + R + \frac{1}{C_2 s} \right) + R^2 + R \frac{1}{C_2 s}} \\ &= \frac{RC_1 RC_2 s^2 + 2RC_2 s + 1}{RC_1 RC_2 s^2 + (2RC_2 + RC_1)s + 1} \end{aligned}$$

به نحوی مشابه برای شبکه  $T$  پل‌دار شکل ۳-۲۴ (ب) در معادله (۳-۲۸) قرار می‌دهیم

$$Z_1 = \frac{1}{Cs}, \quad Z_2 = R_1, \quad Z_3 = \frac{1}{Cs}, \quad Z_4 = R_2$$

و تابع تبدیل  $E_o(s)/E_i(s)$  زیر را می‌یابیم

$$\begin{aligned} \frac{E_o(s)}{E_i(s)} &= \frac{\frac{1}{Cs} \frac{1}{Cs} + R_1 \left( \frac{1}{Cs} + \frac{1}{Cs} + R_2 \right)}{R_1 \left( \frac{1}{Cs} + \frac{1}{Cs} + R_2 \right) + \frac{1}{Cs} \frac{1}{Cs} + R_2 \frac{1}{Cs}} \\ &= \frac{R_1 C R_2 C s^2 + 2R_1 C s + 1}{R_1 C R_2 C s^2 + (2R_1 C + R_2 C)s + 1} \end{aligned}$$

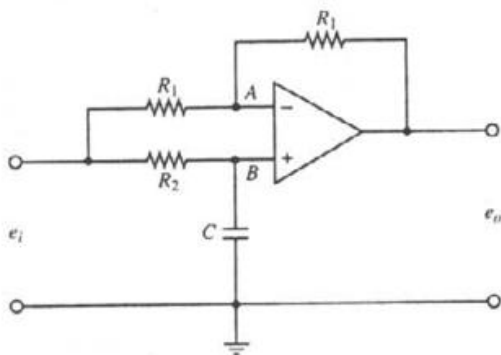
الف ۳-۶ تابع تبدیل  $E_o(s)/E_i(s)$  مدار آپ‌امپی شکل ۳-۲۶ را بیابید.

حل: ولتاژ گره  $A$  عبارت است از

$$e_A = \frac{1}{2}(e_i - e_o) + e_o$$

شکل تبدیل لاپلاسی این معادله به صورت زیر است

$$E_A(s) = \frac{1}{2}[E_i(s) + E_o(s)]$$



شکل ۳-۲۶ مدار آپ‌امپی.

ولتاژ گره  $B$  عبارت است از

$$E_B(s) = \frac{(1/Cs)}{(1/Cs) + R_T} E_I(s) = \frac{1}{R_T Cs + 1} E_I(s)$$

چون  $[E_B(s) - E_A(s)] = K = E_o$  و  $K \gg 1$ ، باید داشته باشیم  $E_B(s) = E_A(s)$  پس

$$\frac{1}{T} [E_I(s) + E_o(s)] = \frac{1}{R_T Cs + 1} E_I(s)$$

$$\frac{E_o(s)}{E_I(s)} = -\frac{R_T Cs - 1}{R_T Cs + 1} = -\frac{s - \frac{1}{R_T C}}{s + \frac{1}{R_T C}}$$

بنابراین

الف ۳-۷ تابع تبدیل  $E_o(s)/E_I(s)$  سیستم آپامی شکل ۳-۲۷ را برحسب امپدانسهای مختلف  $Z_1$ ،  $Z_2$ ،  $Z_3$  و  $Z_4$  را بیابید. با استفاده از نتایج به دست آمده تابع تبدیل  $E_o(s)/E_I(s)$  سیستم آپامی شکل ۳-۲۶ را بیابید.

حل: با توجه به شکل ۳-۲۷ داریم

$$\frac{E_I(s) - E_A(s)}{Z_T} = \frac{E_A(s) - E_o(s)}{Z_T}$$

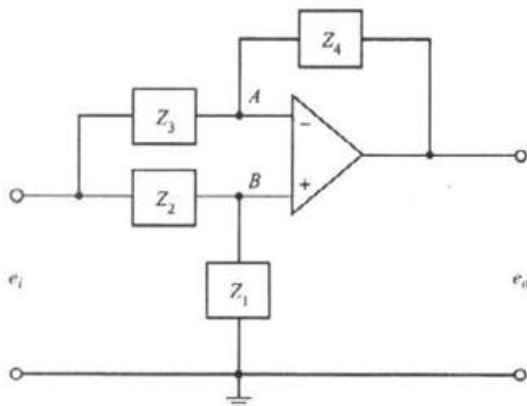
یا

$$E_I(s) - \left(1 + \frac{Z_T}{Z_T}\right) E_A(s) = -\frac{Z_T}{Z_T} E_o(s) \quad (3-39)$$

چون

$$E_A(s) = E_B(s) = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_T} E_I(s) \quad (3-40)$$

با گذاشتن معادله (۳-۴۰) در معادله (۳-۳۹) به دست می آوریم



شکل ۳-۲۷

مدار تقویت کننده عملیاتی.

$$\left[ \frac{Z_F Z_1 + Z_F Z_F - Z_F Z_1 - Z_F Z_1}{Z_F (Z_1 + Z_F)} \right] E_i(s) = -\frac{Z_F}{Z_F} E_o(s)$$

که از آن می‌توانیم تابع تبدیل  $E_o(s)/E_i(s)$  را به صورت زیر بیابیم:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\frac{Z_F Z_F - Z_F Z_1}{Z_F (Z_1 + Z_F)} \quad (۴۱-۳)$$

برای یافتن تابع تبدیل مدار شکل ۳-۲۶ باید در معادله (۴۱-۳) قرار دهیم

$$Z_1 = \frac{1}{Cs}, \quad Z_F = R_F, \quad Z_F = R_1, \quad Z_F = R_1$$

نتیجه عبارت است از

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\frac{R_1 R_F - R_1 \frac{1}{Cs}}{R_1 \left( \frac{1}{Cs} + R_F \right)} = -\frac{R_F Cs - 1}{R_F Cs + 1}$$

که صد البته با نتیجه به دست آمده در مسئله الف-۳-۶ یکی است.

الف ۳-۸ تابع تبدیل مدار آپامپی شکل ۳-۲۸ را بیابید.

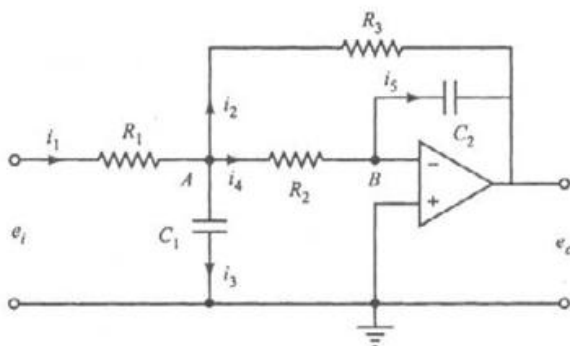
حل: ابتدا جریانهای  $i_1, i_2, i_3, i_4, i_5$  و  $i_o$  را می‌یابیم. سپس معادلات گره در گره‌های A و B را به کار می‌بریم.

$$i_1 = \frac{e_i - e_A}{R_1}, \quad i_2 = \frac{e_A - e_o}{R_F}, \quad i_3 = \frac{de_A}{dt}$$

$$i_4 = \frac{e_A}{R_F}, \quad i_5 = C_2 \frac{-de_o}{dt}$$

در گره A داریم  $i_1 = i_2 + i_3 + i_4$  یا

$$\frac{e_i - e_A}{R_1} = \frac{e_A - e_o}{R_F} + C_2 \frac{de_A}{dt} + \frac{e_A}{R_F} \quad (۴۲-۳)$$



شکل ۳-۲۸  
مدار آپامپی.

در گره B داریم  $i_4 = i_5$  ، یا

$$\frac{e_A}{R_T} = C_T \frac{-de_o}{dt} \quad (۴۳-۳)$$

از معادله (۴۲-۳) به دست می‌آوریم

$$C_1 \frac{de_A}{dt} + \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_T} + \frac{1}{R_T} \right) e_A = \frac{e_i}{R_1} + \frac{e_o}{R_T} \quad (۴۴-۳)$$

از معادله (۴۳-۳) به دست می‌آوریم

$$e_A = -R_T C_T \frac{de_o}{dt} \quad (۴۵-۳)$$

با گذاشتن معادله (۴۵-۳) در معادله (۴۴-۳) به دست می‌آوریم

$$C_1 \left( -R_T C_T \frac{d^2 e_o}{dt^2} \right) + \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_T} + \frac{1}{R_T} \right) (-R_T C_T) \frac{de_o}{dt} = \frac{e_i}{R_1} + \frac{e_o}{R_T}$$

از این معادله با فرض صفر بودن شرایط اولیه تبدیل لاپلاس می‌گیریم

$$-C_1 C_T R_T s^2 E_o(s) + \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_T} + \frac{1}{R_T} \right) (-R_T C_T) s E_o(s) - \frac{1}{R_T} E_o(s) = \frac{E_i(s)}{R_1}$$

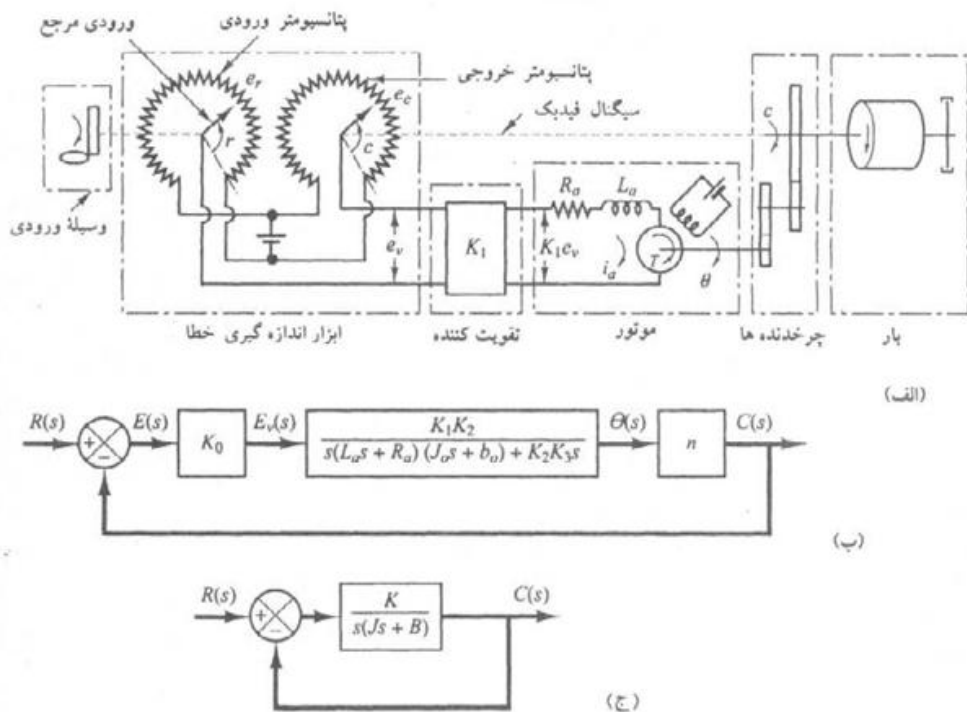
که تابع تبدیل  $E_o(s)/E_i(s)$  را به صورت زیر به دست می‌دهد

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = - \frac{1}{R_1 C_1 R_T C_T s^2 + [R_T C_T + R_1 C_T + (R_1/R_T) R_T C_T] s + (R_1/R_T)}$$

الف ۳-۹ سیستم سرووی نشان داده شده در شکل ۳-۲۹ (الف) را در نظر بگیرید. موتور نشان داده شده یک سرووموتور است، یک موتور dc که مخصوص سیستم‌های کنترلی طراحی شده است. طرز کار سیستم به این ترتیب است: دو پتانسیومتر به صورت ابزارهای اندازه‌گیری خطا عمل می‌کنند. اینها محلهای ورودی و خروجی را به سیگنالهای الکتریکی متناسب تبدیل می‌کنند. سیگنال فرمان ورودی موقعیت زاویه‌ای  $r$  جاروی پتانسیومتر ورودی را تعیین می‌کند. موقعیت زاویه‌ای  $r$  ورودی مرجع سیستم است و پتانسیل الکتریکی روی جارو با موقعیت زاویه‌ای آن متناسب است. موقعیت محور خروجی، موقعیت زاویه‌ای  $c$  جاروی پتانسیومتر خروجی را تعیین می‌کند. تفاضل بین موقعیت زاویه‌ای ورودی  $r$  و موقعیت زاویه‌ای خروجی  $c$  سیگنال خطای  $e$  است، یعنی

$$e = r - c$$

اختلاف پتانسیل  $e_r - e_c = e_o$  ولتاژ خطا است. در این رابطه  $e_r$  با  $r$  و  $e_c$  با  $c$  متناسب است؛ یعنی  $e_r = K_r r$  و  $e_c = K_c c$ ، که در آنها  $K_r$  ثابت تناسب است. ولتاژ خطای ایجاد شده در پایانه‌های پتانسیومترها توسط تقویت‌کننده‌ای با بهره  $K_1$  تقویت می‌شود. ولتاژ خروجی این تقویت‌کننده به مدار آرمیچر موتور dc اعمال می‌شود. ولتاژ ثابتی به پیچک میدان اعمال شده است. اگر خطایی وجود داشته باشد،



شکل ۳-۲۹ (الف) نمودار شماتیک سیستم سروو؛ (ب) نمودار بلوکی سیستم؛ (ج) نمودار بلوکی ساده شده.

موتور گشتاوری برای چرخاندن بار، در جهت کاهش خطا به صفر ایجاد می‌کند. گشتاور موتور به ازای جریان ثابت عبارت است از

$$T = K_T i_a$$

که در آن  $K_T$  ثابت گشتاور موتور و  $i_a$  جریان آرمیچر است.

با چرخش آرمیچر ولتاژی متناسب با حاصلضرب شار و سرعت زاویه‌ای در آرمیچر القا می‌شود. به ازای شار ثابت ولتاژ  $e_b$  القا شده با سرعت زاویه‌ای  $d\theta/dt$  تناسب مستقیم دارد، یعنی

$$e_b = K_V \frac{d\theta}{dt}$$

که در آن  $e_b$  نیروی محرکه القایی emf معکوس،  $K_V$  ثابت emf موتور، و  $\theta$  جابجایی زاویه‌ای موتور است. تابع تبدیل بین جابجایی زاویه‌ای محور موتور  $\theta$  و ولتاژ خطای  $e_v$  را بیابید. همچنین یک نمودار بلوکی برای سیستم رسم کنید و آن را به ازای  $L_a$  ناچیز ساده کنید.

حل: سرعت سروو موتور dc کنترل شده با جریان آرمیچر توسط ولتاژ آرمیچر  $e_a$  کنترل می‌شود. (ولتاژ آرمیچر  $e_a = K_1 e_v$  خروجی تقویت کننده است.) معادله دیفرانسیل مدار آرمیچر عبارت است از

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + e_b = e_a$$

یا

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_T \frac{d\theta}{dt} = K_V e_v \quad (۴۶-۳)$$

معادله موازنه گشتاورها عبارت است از

$$J_s \frac{d^2\theta}{dt^2} + b_s \frac{d\theta}{dt} = T = K_T i_a \quad (۴۷-۳)$$

که در آن  $J_s$  لختی کل موتور، بار، و جعبه دنده است که به محور منتقل شده باشد، و  $b_s$  ضریب چسبندگی کل موتور، بار، و جعبه دنده است که آن هم به محور منتقل شده باشد.

تابع تبدیل بین جابه‌جایی محور موتور و ولتاژ خطا با حذف  $i_a$  از معادلات بالا به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\Theta(s)}{E_v(s)} = \frac{K_V K_T}{s(L_a s + R_a)(J_s s + b_s) + K_T K_T s} \quad (۴۸-۳)$$

فرض می‌کنیم نسبت تبدیل دور در جعبه دنده به نحوی است که با چرخش یک دور موتور، محور خروجی  $n$  دور می‌چرخد. یعنی

$$C(s) = n\Theta(s) \quad (۴۹-۳)$$

رابطه بین  $E_v(s)$ ،  $R(s)$ ، و  $C(s)$  عبارت است از

$$E_v(s) = K_s [R(s) - C(s)] = K_s E(s) \quad (۵۰-۳)$$

نمودار بلوکی این سیستم را می‌توان با توجه به معادلات (۴۸-۳)، (۴۹-۳)، و (۵۰-۳) به صورت نشان داده شده در شکل ۳-۲۹ (ب) رسم کرد. تابع تبدیل در مسیر پیش‌خورد این سیستم عبارت است از

$$G(s) = \frac{C(s)}{\Theta(s)} \frac{\Theta(s)}{E_v(s)} \frac{E_v(s)}{E(s)} = \frac{K_s K_V K_T n}{s[(L_a s + R_a)(J_s s + b_s) + K_T K_T]}$$

اگر  $L_a$  کوچک باشد می‌توان آن را نادیده گرفت و تابع تبدیل مسیر پیش‌خورد را به صورت زیر به دست آورد

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{K_s K_V K_T n}{s[R_a (J_s s + b_s) + K_T K_T]} \\ &= \frac{K_s K_V K_T n / R_a}{J_s s^2 + [b_s + (K_T K_T / R_a)]s} \end{aligned} \quad (۵۱-۳)$$

جمله  $[b_s + (K_T K_T / R_a)]s$  نشان می‌دهد که emf معکوس معادل افزایش اصطکاک چسبندگی موثر می‌ست. لختی  $J_s$  و ضریب اصطکاک چسبندگی  $b_s + (K_T K_T / R_a)$  در محور موتور محاسبه شده‌اند. اگر  $J_s$  و  $b_s + (K_T K_T / R_a)$  در  $1/n^2$  ضرب شوند، لختی و ضریب اصطکاک چسبندگی در محور خروجی به دست

می آید. پارامترهای جدید زیر را معرفی می کنیم

$$J = J_s / n^2 = \text{لختی دورانی در محور خروجی}$$

$$B = [b_s + (K_f K_r / R_a)] / n^2 = \text{ضریب اصطکاک چسبندگی در محور خروجی}$$

$$K = K_s K_r K_f / n R_a$$

به این ترتیب می توانیم تابع تبدیل  $G(s)$  معادله (۳-۵۱) را به شکل زیر ساده کنیم

$$G(s) = \frac{K}{Js^2 + Bs}$$

یا

$$G(s) = \frac{K_m}{s(T_m s + 1)}$$

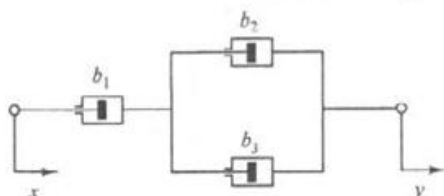
که در آن

$$T_m = \frac{J}{B} = \frac{R_a J_s}{R_a b_s + K_f K_r} \quad , \quad K_m = \frac{K}{B}$$

پس نمودار بلوکی نشان داده شده در شکل ۳-۲۹ (ب) را می توان به صورت نمودار بلوکی شکل ۳-۲۹ (ج) ساده کرد.

## مسائل

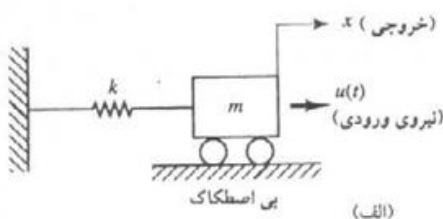
ب ۳-۱ ضریب اصطکاک چسبندگی معادل سیستم شکل ۳-۳۰ را بیابید.



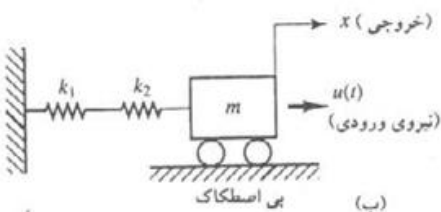
شکل ۳-۳۰ سیستم میراساز.

ب ۳-۲ مدل ریاضی سیستمهای مکانیکی شکلهای ۳-۳۱ (الف) و (ب) را بیابید.

ب ۳-۳ نمایش فضای حالت سیستم مکانیکی شکل ۳-۳۲ را بیابید.  $u_1$  و  $u_2$  ورودیهای سیستم، و  $y_1$  و  $y_2$  خروجیهای آن هستند.

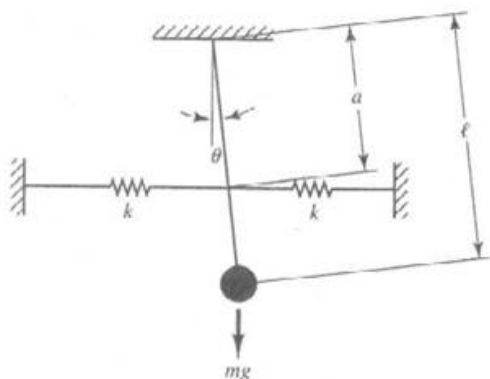


(الف)

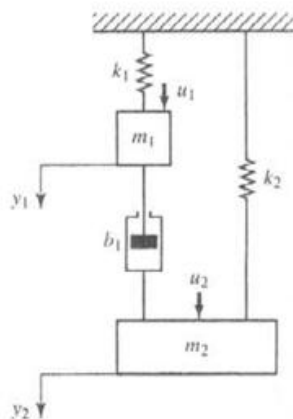


(ب)

شکل ۳-۳۱ سیستمهای مکانیکی.



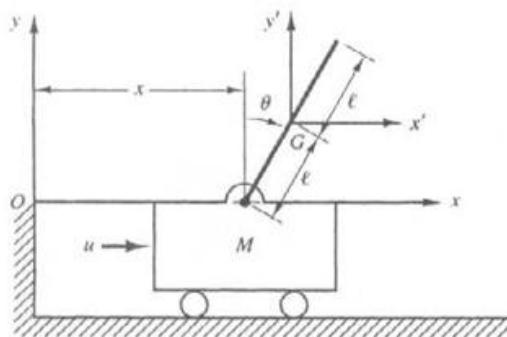
شکل ۳-۳۳ سیستم آونگ فنر دار.



شکل ۳-۳۲ سیستم مکانیکی.

سیستم را به صورت معادله دیفرانسیل، تابع تبدیل، و نمایش فضای حالت بیابید.

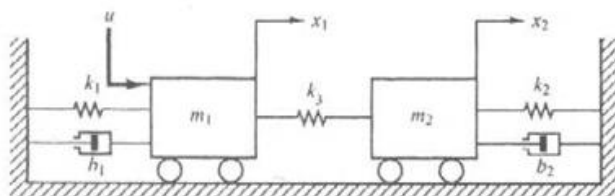
ب ۳-۶ برای سیستم مکانیکی شکل ۳-۳۵ توابع تبدیل  $X_1(s)/U(s)$  و  $X_2(s)/U(s)$  را بیابید.



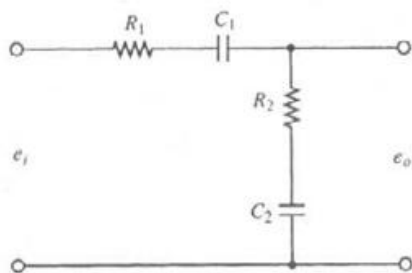
شکل ۳-۳۴ سیستم آونگ وارون.

ب ۳-۴ سیستم آونگ فنر دار شکل ۳-۳۳ را در نظر بگیرید. فرض کنید نیروی فنرها در حالت قائم بودن آونگ یا  $\theta = 0$  صفر است. همچنین فرض کنید اصطکاک ناچیز و زاویه نوسان  $\theta$  کوچک است. مدل ریاضی این سیستم را بیابید.

ب ۳-۵ با توجه به مثالهای ۳-۵ و ۳-۶ سیستم آونگ وارون شکل ۳-۳۴ را در نظر بگیرید. جرم آونگ وارون  $m$  و به طور یکنواخت در تمام طول آونگ توزیع شده است (مرکز گرانش آونگ وسط میله آن است.) با فرض کوچک بودن  $\theta$  مدل ریاضی

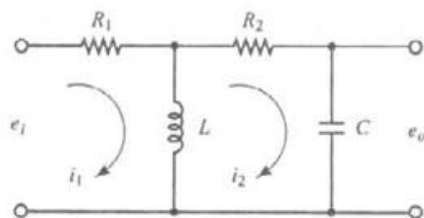


شکل ۳-۳۵ سیستم مکانیکی.



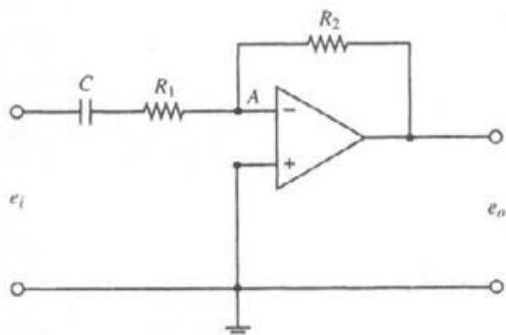
شکل ۳-۳۸ مدار الکتریکی.

ب ۷-۳ تابع تبدیل  $E_o(s)/E_i(s)$  مدار الکتریکی شکل ۳-۳۶ را بیابید.



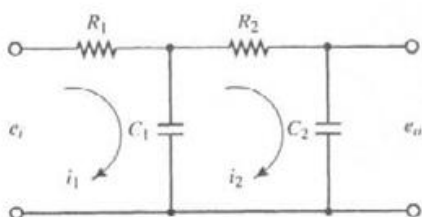
شکل ۳-۳۶ مدار الکتریکی.

ب ۱۰-۳ تابع تبدیل  $E_o(s)/E_i(s)$  مدار آپامپی شکل ۳-۳۹ را بیابید.



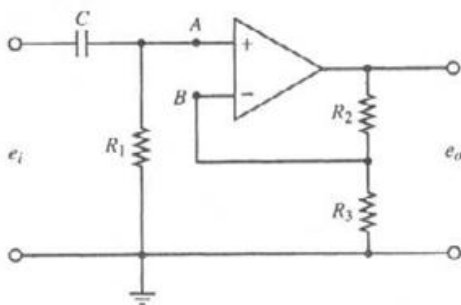
شکل ۳-۳۹ مدار آپامپی.

ب ۸-۳ تابع تبدیل  $E_o(s)/E_i(s)$  مدار الکتریکی شکل ۳-۳۷ را با استفاده از رهیافت نمودار بلوکی بیابید.



شکل ۳-۳۷ مدار الکتریکی.

ب ۹-۳ تابع تبدیل سیستم الکتریکی شکل ۳-۳۸ را بیابید. نمودار طرح گونه یک سیستم مکانیکی معادل را رسم کنید.

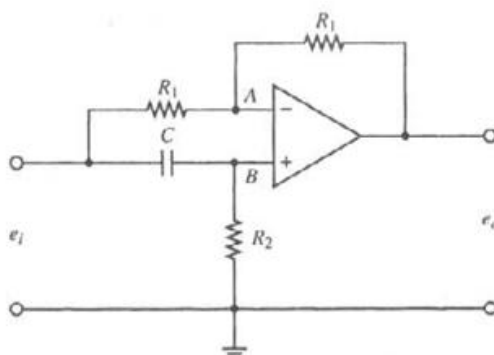


شکل ۳-۴۰ مدار آپامپی.

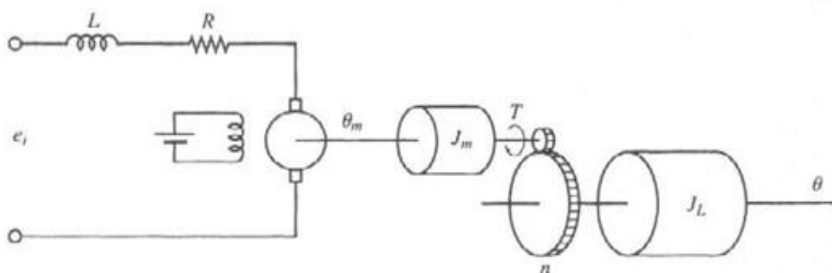
پ ۳-۱۲ تابع تبدیل  $E_o(s)/E_i(s)$  مدار آپامپی شکل ۳-۴۱ را با استفاده از رهیافت امپدانس بیابید.

پ ۳-۱۳ سیستم مکانیکی شکل ۳-۴۲ را در نظر بگیرید. یک سروو موتور dc کنترل شده با آرمیچر باری متشکل از لغتی دورانی  $J_L$  را حرکت می‌دهد.

گشتاوری که موتور تولید می‌کند  $T$  است. لغتی دورانی موتور  $J_m$  است. جابه‌جایی دورانی موتور و بار به ترتیب  $\theta_m$  و  $\theta$  است. نسبت چرخندنده  $n = \theta/\theta_m$  است. تابع تبدیل  $\Theta(s)/E_i(s)$  را بیابید.



شکل ۳-۴۱ مدار آپامپی.



شکل ۳-۴۲ سیستم سروو موتور dc کنترل شده با آرمیچر.