

مدلسازی ریاضی سیستمهای سیالاتی و گرمایی

۱-۴ مقدمه

این فصل به مدلسازی ریاضی سیستمهای سیالاتی و گرمایی می‌پردازد. سیالات، گازها و مایعات، به عنوان بهترین محیط انتقال سیگنال کاربرد وسیعی در صنعت دارند. وجه تمایز اساسی مایع و گاز تراکم‌پذیری نسبی است و این که مایع می‌تواند سطح مشخصی داشته باشد، ولی گاز منبسط می‌شود تا تمام ظرف را پر کند. در حیطه مهندسی سیستمهای سیالاتی که در آنها از گاز استفاده می‌شود سیستمهای نیوماتیکی و سیستمهایی که با روغن کار می‌کنند سیستمهای هیدرولیکی خوانده می‌شوند.

ابتدا در مورد سیستمهای سطح مایع که در فرایندهای کنترلی زیاد به کار می‌روند صحبت می‌کنیم. مفاهیم مقاومت و ظرفیت برای توصیف رفتار دینامیکی این سیستمها را معرفی می‌کنیم. سپس به سیستمهای نیوماتیکی می‌پردازیم. این سیستمها در خودکارسازی (اتوماسیون) سیستمهای تولیدی و کنترل‌کننده‌های خودکار بسیار کاربرد دارند. مثلاً مدارهای نیوماتیکی تبدیل‌کننده انرژی هوای فشرده به انرژی مکانیکی کاربرد وسیعی دارند. انواع مختلف کنترل‌کننده‌های نیوماتیکی نیز در صنعت بسیار به کار می‌روند. سپس سیستمهای سرووی هیدرولیکی را معرفی می‌کنیم. اینها در سیستمهای ماشین ابزار، سیستمهای کنترل هواپیما، و سیستمهای دیگر کاربرد دارند. جنبه‌های پایه‌ای سیستمهای سرووی و کنترل‌کننده‌های هیدرولیکی را مورد بحث قرار خواهیم داد. سیستمهای نیوماتیکی و هیدرولیکی را می‌توان با استفاده از مفاهیم مقاومت و ظرفیت به سادگی مدل کرد.

سرانجام سیستم های گرمایی ساده را بررسی می کنیم. در این سیستم ها گرما از یک ماده به ماده ای دیگر منتقل می شود. برای یافتن مدل ریاضی این سیستم ها می توان از مقاومت گرمایی و ظرفیت گرمایی استفاده کرد.

نمای کلی فصل. بخش ۱-۴ مطالب مقدماتی این فصل را دربر دارد. بخش ۲-۴ به سیستم های سطح مایع اختصاص دارد. در بخش ۳-۴ سیستم های نیوماتیکی، و خصوصاً اصل بنیادی کنترل کننده های نیوماتیکی مورد بررسی قرار می گیرد. در بخش ۴-۴ ابتدا سیستم های سرووی هیدرولیکی و سپس کنترل کننده های هیدرولیکی معرفی می شوند. سرانجام در بخش ۵-۴ سیستم های گرمایی تحلیل شده، مدل های ریاضی شان به دست آورده می شود.

۲-۴ سیستم های سطح مایع

در تحلیل سیستم های مربوط به جریان سیال باید رژیم های عبور سیال را بسته به اندازه عدد رینولدز به جریان لایه ای (آرام) و جریان متلاطم تقسیم کنیم. اگر عدد رینولدز از حدود ۳۰۰۰ تا ۴۰۰۰ بزرگتر باشد جریان متلاطم است. اگر عدد رینولدز از ۲۰۰۰ کمتر باشد، جریان لایه ای است. در حالت لایه ای (آرام) سیال بدون آشفتگی و در خطوط شار عبور می کند. سیستم های مشتمل بر جریان متلاطم را می توان با معادلات دیفرانسیل غیرخطی توصیف کرد.

در فرایندهای صنعتی غالباً سیال در لوله ها و مخزن های متصل به هم جریان دارد. در چنین فرایندهایی جریانها غالباً متلاطم اند نه لایه ای. سیستم های مشتمل بر جریان متلاطم را باید با معادلات دیفرانسیل غیرخطی توصیف کرد. ولی اگر ناحیه کار محدود باشد، می توان این معادلات غیرخطی را خطی کرد. در این بخش راجع به این مدل های ریاضی خطی شده صحبت می کنیم. توجه کنید که معرفی مفاهیم مقاومت و ظرفیت برای سیستم های سطح مایع قادرمان می کند ویژگی های دینامیکی این سیستم ها را به ساده ترین شکل بیان کنیم.

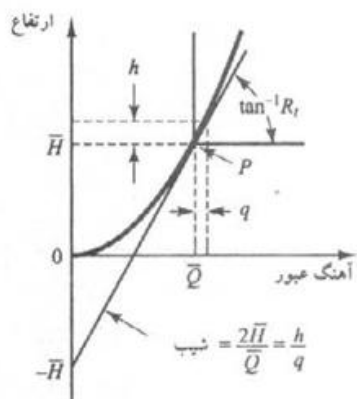
مقاومت و ظرفیت سیستم های سطح مایع. جریانی را که از یک لوله کوتاه واصل بین دو مخزن می گذرد در نظر بگیرید. مقاومت R این لوله یا مانع در مقابل عبور سیال، به صورت تغییر اختلاف سطح لازم (اختلاف سطح مایع در دو مخزن) برای ایجاد یک واحد تغییر در آهنگ جریان تعریف می شود؛ یعنی

$$R = \frac{\text{تغییر اختلاف سطح } m}{\text{تغییر آهنگ عبور } m^3/sec}$$

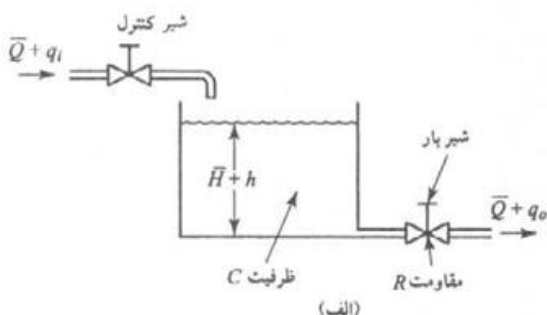
چون رابطه آهنگ جریان و اختلاف سطح برای جریانهای لایه ای و متلاطم تفاوت دارد، در ادامه هر دو را در نظر می گیریم.

سیستم سطح مایع شکل ۱-۴ (الف) را در نظر بگیرید. در این سیستم مایع از طریق شیر کنار مخزن خالی می شود. اگر جریان از این مانع به صورت لایه ای بگذرد، رابطه آهنگ جریان و اختلاف سطح در حالت ماندگار عبارت است از

$$Q = K H$$



(ب)



شکل ۱-۴ (الف) سیستم سطح مایع؛
(ب) منحنی ارتفاع بر حسب آهنگ جریان

که در آن $Q =$ آهنگ جریان مایع در حالت ماندگار، m^3/sec
 $K =$ ضریب، m^3/sec

$H =$ ارتفاع در حالت ماندگار، m

برای جریان لایه‌ای مقاومت R_I به صورت زیر به دست می‌آید

$$R_I = \frac{dH}{dQ} = \frac{H}{Q}$$

مقاومت جریان لایه‌ای ثابت و مشابه مقاومت الکتریکی است.

اگر جریان از مانع به صورت متلاطم بگذرد، آهنگ جریان در حالت ماندگار از رابطه زیر به دست می‌آید

$$Q = K\sqrt{H} \quad (۱-۴)$$

که در آن $Q =$ آهنگ جریان مایع در حالت ماندگار، m^3/sec
 $K =$ ضریب، $m^{3/2}/sec$

$H =$ ارتفاع در حالت ماندگار، m

برای جریان لایه‌ای مقاومت R_I به صورت زیر به دست می‌آید

$$R_I = \frac{dH}{dQ}$$

از معادله (۱-۴) به دست می‌آوریم

$$dQ = \frac{K}{2\sqrt{H}} dH$$

پس داریم

$$\frac{dH}{dQ} = \frac{2\sqrt{H}}{K} = \frac{2\sqrt{H}\sqrt{H}}{Q} = \frac{2H}{Q}$$

$$R_I = \frac{2H}{Q}$$

یا

مقاومت R_f جریان متلاطم به آهنگ جریان و ارتفاع بستگی دارد. ولی اگر تغییرات ارتفاع و آهنگ جریان کوچک باشد، می‌توان R_f را ثابت فرض کرد.

با استفاده از مقاومت جریان متلاطم، رابطه بین H و Q را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$Q = \frac{\sqrt{H}}{R_f}$$

اگر تغییر آهنگ جریان و ارتفاع نسبت به مقادیر ماندگارشان کوچک باشد، این خطی‌سازی معتبر است. در بسیاری از موارد عملی مقدار ضریب K معادله (۴-۱)، که به ضریب جریان و سطح مایع بستگی دارد، معلوم نیست. بنابراین مقاومت را می‌توان با رسم منحنی ارتفاع برحسب آهنگ جریان، براساس داده‌های تجربی، و اندازه‌گیری شیب منحنی در نقطه کار به دست آورد. شکل ۴-۱ (ب) نمونه‌ای از این منحنی‌ها را نشان می‌دهد. در این شکل نقطه P نقطه کار حالت ماندگار است. خط مماس بر منحنی در نقطه P محور قائم را در $(\bar{H}-0)$ قطع می‌کند. پس شیب این خط مماس $\bar{H}/\bar{Q}$ است. چون مقاومت R_f در نقطه کار P برابر $\bar{H}/\bar{Q}$ است، مقاومت R_f شیب منحنی در نقطه کار است.

شرایط کار در حول نقطه P را در نظر بگیرید. انحراف کوچک ارتفاع نسبت به حالت ماندگار را h ، و تغییر متناظر با آن در آهنگ جریان را q بنامید. پس شیب منحنی در نقطه P عبارت است از

$$\text{شیب منحنی در نقطه } P = \frac{h}{q} = \frac{\sqrt{\bar{H}}}{\bar{Q}} = R_f$$

تقریب خطی براین اساس صورت گرفته که اگر شرایط نقطه کار زیاد تغییر نکند منحنی واقعی و خط مماس در نقطه کار تفاوت زیادی با هم ندارند.

ظرفیت مخزن C طبق تعریف نسبت تغییر مایع ذخیره شده در مخزن به تغییر پتانسیل (ارتفاع) است. (پتانسیل کمیتی است که سطح انرژی ذخیره شده در سیستم را نشان می‌دهد).

$$C = \frac{\text{تغییر حجم مایع ذخیره شده } m^3}{\text{تغییر ارتفاع } m}$$

توجه کنید که حجم (m^3) با ظرفیت (m^3) تفاوت دارد. ظرفیت مخزن با مساحت سطح مقطع آن برابر است. اگر سطح مقطع ثابت باشد، ظرفیت نیز به ازای هر ارتفاعی یکسان است.

سیستم‌های سطح مایع. سیستم شکل ۴-۱ (الف) را در نظر بگیرید. متغیرها را به صورت زیر تعریف

می‌کنیم

$$\bar{Q} = \text{آهنگ جریان در حالت ماندگار (قبل از بروز تغییرات)}, m^3/sec$$

$$q_f = \text{تغییرات کوچک آهنگ جریان ورودی نسبت به مقدار حالت ماندگار}, m^3/sec$$

$$q_o = \text{تغییرات کوچک آهنگ جریان خروجی نسبت به مقدار حالت ماندگار}, m^3/sec$$

$$\bar{H} = \text{ارتفاع حالت ماندگار (قبل از بروز تغییرات)}, m$$

$$h = \text{تغییرات کوچک ارتفاع نسبت به مقدار حالت ماندگار}, m$$

چنانچه قبلاً گفتیم اگر جریان لایه‌ای باشد، سیستم را می‌توان خطی فرض کرد. حتی در صورت متلاطم بودن جریان نیز می‌توان به ازای تغییرات کوچک سیستم را خطی کرد. براساس فرض خطی بودن یا خطی شدن سیستم می‌توان معادله دیفرانسیل این سیستم را به این صورت یافت: چون تفاضل آهنگ جریان ورودی و آهنگ جریان خروجی در فاصله زمانی dt با تغییر مایع ذخیره شده در مخزن برابر است، داریم

$$C dh = (q_i - q_o) dt$$

با توجه به تعریف مقاومت، رابطه q_o و h عبارت است از

$$q_o = \frac{h}{R}$$

معادله دیفرانسیل این سیستم به ازای R ثابت عبارت است از

$$RC \frac{dh}{dt} + h = Rq_i \quad (2-4)$$

توجه کنید که RC ثابت زمانی این سیستم است. با گرفتن تبدیل لاپلاس دو طرف معادله (۲-۴)، با فرض صفر بودن شرایط اولیه، به دست می‌آوریم

$$(RCs + 1)H(s) = RQ_i(s)$$

که در آن

$$H(s) = \mathcal{L}[h] \quad \text{و} \quad Q_i(s) = \mathcal{L}[q_i]$$

اگر q_i را ورودی و h را خروجی فرض کنیم، تابع تبدیل به صورت زیر است

$$\frac{H(s)}{Q_i(s)} = \frac{R}{RCs + 1}$$

اگر q_o را خروجی و q_i را ورودی فرض کنیم، تابع تبدیل زیر را داریم

$$\frac{Q_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{RCs + 1}$$

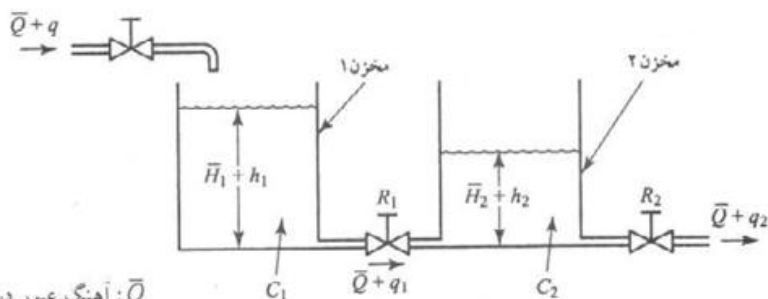
در یافتن این معادله رابطه زیر را به کار برده‌ایم

$$Q_o(s) = \frac{1}{R}H(s)$$

سیستمهای سطح مایع دارای اندرکنش. سیستم شکل ۲-۴ را در نظر بگیرید. در این سیستم دو مخزن اندرکنش دارند. پس تابع تبدیل سیستم حاصلضرب دو تابع تبدیل مرتبه اول نیست.

در آنچه می‌آید فرض کرده‌ایم متغیرها حول مقادیر حالت ماندگارشان تغییرات کوچکی دارند. با استفاده از نمادهای تعریف شده در شکل ۲-۴ معادلات زیر را برای سیستم به دست می‌آوریم

$$\frac{h_1 - h_2}{R_1} = q_1 \quad (3-4)$$



$\bar{Q}$: آهنگ عبور در حالت ماندگار

$\bar{H}_1$: ارتفاع مایع مخزن ۱ در حالت ماندگار

$\bar{H}_2$: ارتفاع مایع مخزن ۲ در حالت ماندگار

شکل ۴-۲ سیستم سطح مایع دارای اندرکنش.

$$C_1 \frac{dh_1}{dt} = q - q_1 \quad (4-4)$$

$$\frac{h_2}{R_2} = q_2 \quad (5-4)$$

$$C_2 \frac{dh_2}{dt} = q_1 - q_2 \quad (6-4)$$

اگر q را ورودی و q_2 را خروجی در نظر بگیریم، تابع تبدیل سیستم به صورت زیر درمی‌آید

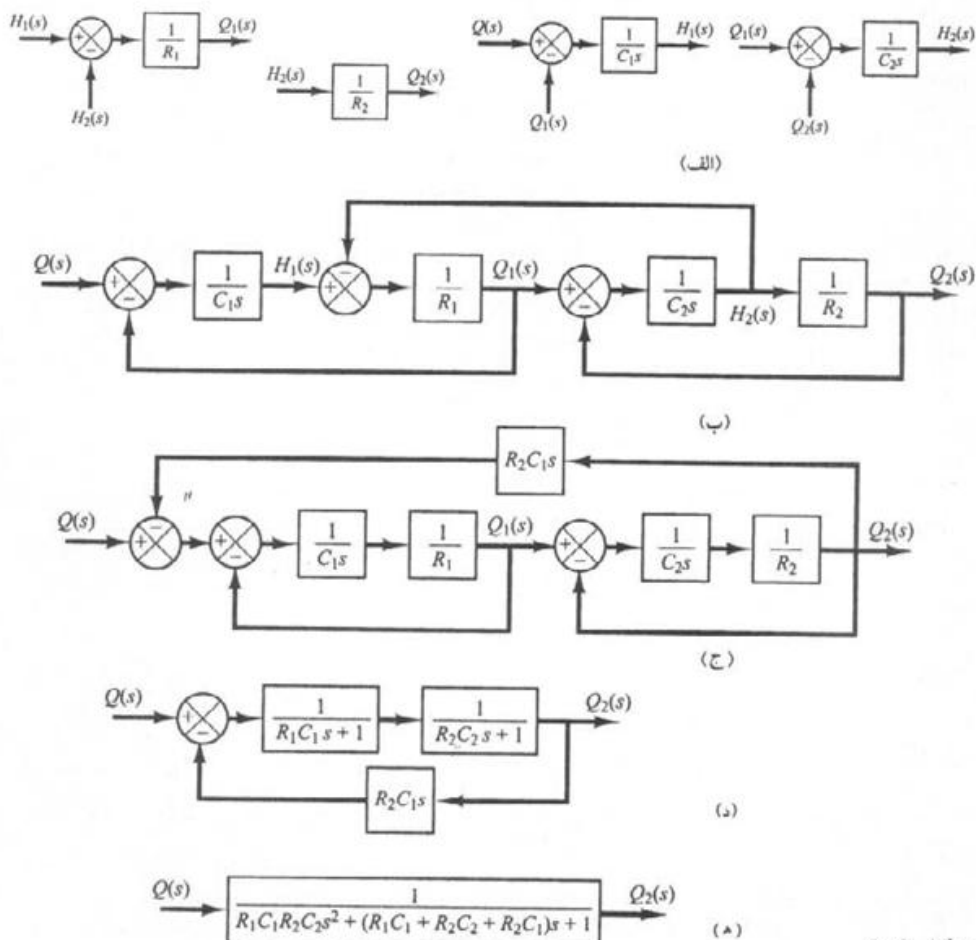
$$\frac{Q_2(s)}{Q(s)} = \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_2 C_1)s + 1} \quad (7-4)$$

یافتن معادله (۷-۴) یعنی تابع تبدیل سیستم شکل ۴-۲ با استفاده از ساده کردن نمودار بلوکی آموزنده است. با توجه به معادلات (۳-۴) تا (۶-۴) اجزاء نمودار بلوکی را مطابق شکل ۴-۳ (الف) به دست می‌آوریم. با اتصال مناسب سیگنال‌ها نمودار بلوکی شکل ۴-۳ (ب) را می‌یابیم. این نمودار بلوکی را می‌توان به صورت نشان داده شده در شکل ۴-۳ (ج) ساده کرد. ساده‌سازی‌های متوالی شکل‌های ۴-۳ (د) و (ه) را به دست می‌دهد. شکل ۴-۳ (ه) با معادله (۷-۴) هم‌ارز است.

به شباهت‌ها و تفاوت‌های بین تابع تبدیل معادله (۷-۴) و تابع تبدیل معادله (۳-۳) توجه کنید. جمله $R_2 C_1 s$ موجود در مخرج معادله (۷-۴) نشانه‌ای از اندرکنش بین دو مخزن است. به نحوی مشابه جمله $R_1 C_2 s$ موجود در مخرج معادله (۳-۳) اندرکنش بین دو مدار RC شکل ۳-۸ را نشان می‌دهد.

۴-۳ سیستم‌های نیوماتیکی

در صنعت کنترل‌کننده‌های نیوماتیکی متروقی یافت می‌شود. غالباً سیستم‌های نیوماتیکی با سیستم‌های هیدرولیکی مقایسه می‌شوند، در زیر مقایسه مختصری بین این دو سیستم به عمل آمده است.



شکل ۳-۴

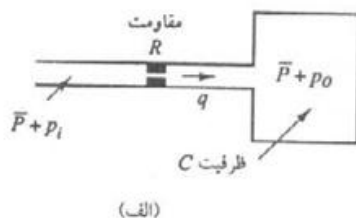
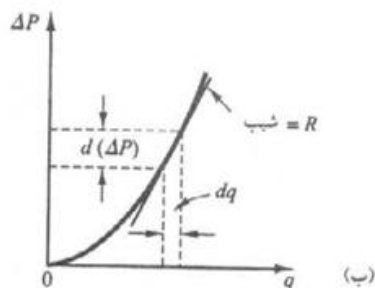
(الف) اجزاء نمودار بلوکی شکل ۳-۴؛ (ب) نمودار بلوکی سیستم؛ (ج) تا (ه) ساده‌سازیهای مکرر نمودار بلوکی.

مقایسه سیستم‌های نیوماتیکی و سیستم‌های هیدرولیکی. سیال متداول در سیستم‌های نیوماتیکی هوا و در سیستم‌های هیدرولیکی روغن است. اساساً مشخصه‌های متفاوت این دو سیال است که باعث می‌شود تفاوت‌های زیر بین دو سیستم به وجود آید:

۱. هوا و گازها تراکم‌پذیرند، ولی روغن تراکم‌ناپذیر است (مگر در فشارهای بالا).
۲. هوا خاصیت روغنکاری ندارد و همیشه مقداری بخار آب دارد، روغن هم به عنوان سیال عمل می‌کند و هم بخش‌های متحرک را روغنکاری می‌کند.
۳. فشار عادی سیستم‌های نیوماتیکی از فشار عادی سیستم‌های هیدرولیکی بسیار پایینتر است.
۴. توان خروجی سیستم‌های نیوماتیکی بسیار کمتر از توان خروجی سیستم‌های هیدرولیکی است.

۵. دقت کاراندازهای نیوماتیکی در سرعتهای پایین بد است، ولی سیستمهای هیدرولیکی می‌توانند در تمام سرعتها دقتی قابل قبول داشته باشند.
 ۶. در سیستمهای نیوماتیکی نشت به خارج تا حد معینی مجاز است، ولی باید جلوی نشت داخلی گرفته شود، زیرا اختلاف فشار موثر نسبتاً کم است. در سیستمهای هیدرولیکی نشت داخلی تا حد معینی مجاز است، ولی باید جلوی نشت خارجی گرفته شود.
 ۷. در سیستمهای نیوماتیکی که از هوا استفاده می‌شود، لوله برگشت لازم نیست، ولی برای سیستمهای هیدرولیکی باید مسیر برگشت روغن تأمین شود.
 ۸. درجه حرارت عادی کار سیستمهای نیوماتیکی 5°C تا 60°C است، ولی سیستمهای هیدرولیکی می‌توانند در گستره 0°C تا 200°C کار کنند. سیستمهای نیوماتیکی به تغییر دما حساس نیستند، ولی سیستمهای هیدرولیکی این طور نیستند، زیرا در این سیستمها اصطکاک سیال که از چسبندگی ناشی می‌شود به درجه حرارت بسیار وابسته است. درجه حرارت عادی کار سیستمهای هیدرولیکی 20°C تا 70°C است.
 ۹. در سیستمهای نیوماتیکی خطر آتش گرفتگی و انفجار وجود ندارد، ولی سیستمهای هیدرولیکی این طور نیستند.
- در ادامه کار را با مدلسازی ریاضی سیستمهای نیوماتیکی شروع می‌کنیم. سپس یک کنترل‌کننده تناسبی نیوماتیکی را معرفی می‌کنیم.
- ابتدا در مورد اصل عملکرد کنترل‌کننده‌های تناسبی به تفصیل بحث خواهیم کرد. سرانجام راههای دستیابی به عملهای کنترلی مشتقی و انتگرالی را بررسی می‌کنیم. در تمام این مباحث تأکید روی اصول پایه‌ای است نه جزئیات عملکرد مکانیسمهای درگیر.
- سیستمهای نیوماتیکی.** در دهه‌های اخیر شاهد پیشرفتهای بزرگی در کنترل‌کننده‌های نیوماتیکی کم فشار برای سیستمهای کنترل صنعتی بوده‌ایم، و اکنون این کنترل‌کننده‌ها در فرایندهای صنعتی بسیار به کار می‌روند. از دلایل جاذبه بسیار اینها می‌توان منفجر نشدن، سادگی، و سهولت نگهداری‌شان را برشمرد.
- مقاومت و ظرفیت سیستمهای فشار.** در بسیاری از فرایندهای صنعتی و کنترل‌کننده‌های نیوماتیکی گاز یا هوا از لوله‌های متصل و انباره‌های فشار می‌گذرد.
- سیستم فشار شکل ۴-۴ (الف) را در نظر بگیرید. گذر گاز از موانع تابعی از اختلاف فشار $p_i - p_o$ است. این سیستم فشار را می‌توان برحسب یک مقاومت و یک ظرفیت مشخص کرد.
- مقاومت عبور گاز R را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد

$$R = \frac{\text{تغییر اختلاف فشار گاز, lb}_f/\text{ft}^2}{\text{تغییر آهنگ عبور گاز, lb/sec}}$$



شکل ۴-۴ (الف) نمودار شماتیک یک سیستم فشار؛ (ب) منحنی اختلاف فشار بر حسب آهنگ عبور.

$$R = \frac{d(\Delta P)}{dq} \quad (۸-۴)$$

که $d(\Delta P)$ تغییر کوچکی در اختلاف فشار گاز و dq تغییر کوچک آهنگ عبور گاز است. محاسبه مقاومت عبور گاز می‌تواند کاملاً وقت‌گیر باشد، ولی تعیین تجربی آن به سادگی و با توجه به نمودار اختلاف فشار بر حسب آهنگ عبور صورت می‌گیرد، برای این کار باید شیب منحنی در نقطه کار، به صورت نشان داده شده در شکل ۴-۴ (ب) حساب شود.

ظرفیت محفظه فشار را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد

$$C = \frac{\text{تغییر گاز ذخیره شده، lb}}{\text{تغییر فشار گاز، lb}_f/\text{ft}^2}$$

یا

$$C = \frac{dm}{dp} = V \frac{d\rho}{dp} \quad (۹-۴)$$

که در آن $C = \text{ظرفیت lb}_f/\text{ft}^2$

$m = \text{جرم گاز محفظه lb}$

$p = \text{فشار گاز lb}_f/\text{ft}^2$

$V = \text{حجم محفظه ft}^3$

$\rho = \text{چگالی lb}_f/\text{ft}^3$

ظرفیت سیستم فشار به فرایند انبساط در آن بستگی دارد. ظرفیت را می‌توان با استفاده از قانون گازهای ایده‌آل حساب کرد. اگر فرایند انبساط گاز چندسانگرد بوده، تغییر حالت گاز به صورتی بین همدمای و بی‌در رو صورت گیرد، آنگاه

$$p \left(\frac{V}{m} \right)^n = \frac{p}{\rho^n} = \text{ثابت} = K \quad (۱۰-۴)$$

که در آن $n = \text{نمای چند سانگردی}$.

برای گازهای ایده‌آل

$$p\bar{v} = \bar{R}T \quad \text{یا} \quad p\bar{v} = \bar{R}T$$

که در آن p = فشار مطلق lb_f/ft^2

$\bar{v}$ = حجم یک مول گاز، $\text{ft}^3/\text{lb}_f\text{-mole}$

$\bar{R}$ = ثابت عمومی گاز $\text{ft-lb}_f/\text{lb-mole}^{\circ}\text{R}$

T = دمای مطلق $^{\circ}\text{R}$

v = حجم ویژه گاز ft^3/lb_f

M = وزن مولکولی گاز بر مول $\text{lb}/\text{lb-mole}$

پس

$$pv = \frac{p}{\rho} = \frac{\bar{R}}{M} T = R \text{ گاز} \quad (۱۱-۴)$$

که در آن R گاز = ثابت گاز، $\text{ft-lb}_f/\text{lb-mole}^{\circ}\text{R}$

ثابت چند سانگردی n برای انبساط همدمای یک است. برای انبساط بی‌دررو n با نسبت گرمایی ویژه c_p/c_v برابر است، c_p گرمای ویژه در فشار ثابت و c_v گرمای ویژه در حجم ثابت است. در بسیاری از موارد عملی n تقریباً ثابت است، بنابراین ظرفیت را می‌توان ثابت در نظر گرفت.

مقدار dp/dp از معادله (۱۰-۴) یا (۱۱-۴) به دست می‌آید. با توجه به معادله (۱۰-۴) داریم

$$dp = K n p^{n-1} dp$$

یا

$$\frac{dp}{dp} = \frac{1}{K n p^{n-1}} = \frac{p^n}{p n p^{n-1}} = \frac{p}{pn}$$

با جایگذاری از معادله (۱۱-۴) به دست می‌آوریم

$$\frac{dp}{dp} = \frac{1}{n R \text{ گاز} T}$$

پس ظرفیت عبارت است از

$$C = \frac{V}{n R \text{ گاز} T} \quad (۱۲-۴)$$

اگر دما ثابت باشد، ظرفیت محفظه ثابت است. (در بسیاری از موارد عملی نمای چند سانگردی n برای گازهای موجود در محفظه‌های فلزی مجزا نشده تقریباً $1/2$ تا $1/3$ است.)

سیستمهای فشار. سیستم شکل ۴-۴ (الف) را در نظر بگیرید. اگر فرض کنیم متغیرها نسبت به مقادیر ماندگارشان تغییراتی اندک دارند، می‌توانیم این سیستم را خطی فرض کنیم.

کمیات زیر را تعریف می‌کنیم

$\bar{P}$ = فشار گاز محفظه در حالت ماندگار (قبل از تغییر فشار)، lb_f/ft^2

p_i = تغییر کوچک فشار گاز ورودی، lb_f/ft^2

p_o = تغییر کوچک فشار گاز محفظه، lb_f / ft^2

V = حجم محفظه، ft^3

m = جرم گاز داخل محفظه، lb

q = آهنگ عبور گاز، lb/s

ρ = چگالی گاز، lb/ft^3

به ازای p_i و p_o کوچک، مقاومتی که معادله (۴-۸) به دست می‌دهد ثابت است و می‌توان آن را به شکل زیر نوشت

$$R = \frac{p_i - p_o}{q}$$

ظرفیت C از معادله (۴-۹) به دست می‌آید

$$C = \frac{dm}{dp}$$

چون حاصل ضرب تغییر فشار dp_o در ظرفیت C با گاز اضافه شده به مخزن در فاصله dt برابر است، داریم

$$C dp_o = q dt$$

یا

$$C = \frac{dp_o}{dt} = \frac{p_i - p_o}{R}$$

که می‌توان آن را به شکل زیر نوشت

$$RC \frac{dp_o}{dt} + p_o = p_i$$

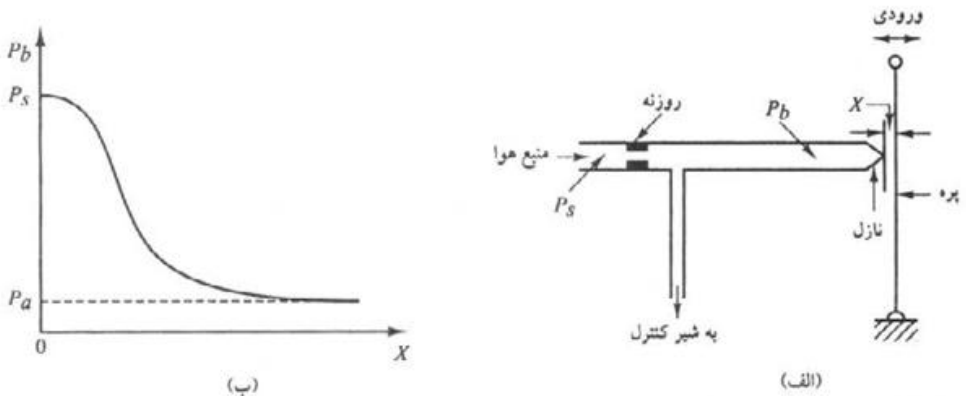
اگر p_i و p_o را به ترتیب ورودی و خروجی فرض کنیم، تابع تبدیل سیستم به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{P_o(s)}{P_i(s)} = \frac{1}{RCs + 1}$$

که RC دارای بعد زمان است و ثابت زمانی سیستم خوانده می‌شود.

تقویت کننده نیوماتیکی نازل - پره. شکل ۴-۵ (الف) نمودار طرح گونه یک تقویت کننده نیوماتیکی نازل - پره را نشان می‌دهد. منبع توان این تقویت کننده منبعی از هوا با فشار ثابت است. تقویت کننده نازل - پره تغییرات کوچک موقعیت پره را به تغییرات بزرگ پس فشار نازل تبدیل می‌کند. به این ترتیب می‌توان با توان اندک لازم برای جابه‌جا کردن پره، توان خروجی بزرگی را کنترل کرد.

در شکل ۴-۵ (الف) هوای فشرده از طریق روزنه داخل شده، و از طریق نازل به سمت پره رانده می‌شود. فشار منبع P_s این کنترل کننده‌ها عموماً 20 psig ($1/4 \text{ kg}_f / \text{cm}^2$) است. قطر روزنه در حدود 0.01 اینچ (0.25 mm) و قطر نازل در رده 0.016 اینچ (0.4 mm) است. برای اطمینان از عملکرد تقویت کننده، قطر نازل باید از قطر روزنه بزرگتر باشد.



شکل ۴-۵ (الف) نمودار طرح گونه تقویت کننده نیوماتیکی نازل - پره؛ (ب) منحنی مشخصه ارتباط دهنده پس فشار نازل و فاصله نازل - پره.

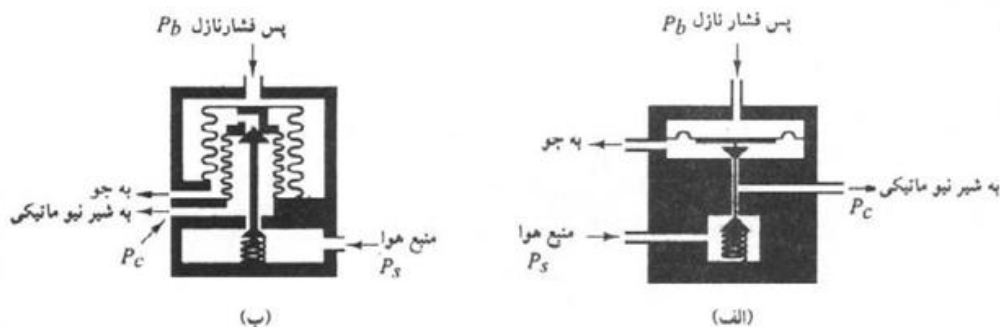
برای این که سیستم کار کند، پره در مقابل دهانه نازل قرار می‌گیرد. پس فشار نازل P_b توسط فاصله نازل - پره X کنترل می‌شود. هر چه پره نازل باریکتر شود، مقاومت در مقابل خروجی هوا بیشتر شده، پس فشار نازل P_b نیز زیاد می‌شود. اگر پره کاملاً دهانه نازل را بپوشاند، پس فشار نازل P_b با فشار تغذیه P_s برابر می‌شود. اگر پره از نازل دور و فاصله بینشان زیاد (حدود ۱ تا ۱۰ اینچ) شود، دیگر عملاً مقاومتی در برابر عبور گاز وجود نداشته، پس فشار نازل P_b به می‌نیم مقدار خود، که به سیستم نازل - پروانه بستگی دارد، می‌رسد. (کمترین فشار قابل دسترس فشار محیط P_a است.)

توجه کنید که چون فوران هوا به پره نیرو وارد می‌کند، باید قطر نازل تا حد ممکن کوچک ساخته شود. شکل ۴-۵ (ب) منحنی نوعی پس فشار نازل P_b بر حسب فاصله نازل - پره X را نشان می‌دهد. در عمل از بخش شیب تند و تقریباً خطی منحنی برای تقویت‌کننده استفاده می‌شود. چون گستره جابه‌جایی پره به ناحیه کوچکی محدود شده، تغییر فشار نیز کوچک است، مگر این که شیب منحنی خیلی تند باشد.

تقویت کننده نازل - پره جابه‌جایی را به سیگنال فشار تبدیل می‌کند. چون در سیستم‌های کنترل فرایند‌های صنعتی برای کار انداختن شیرهای نیوماتیکی بزرگ توان خروجی زیادی لازم است، تقویت توان حاصل از تقویت کننده نازل - پره معمولاً کافی نیست. به همین دلیل غالباً به همراه تقویت کننده نازل - پره یک رله نیوماتیکی به عنوان تقویت کننده به کار می‌رود.

رله‌های نیوماتیکی. در کنترل‌کننده‌های نیوماتیکی عملی، تقویت کننده نازل - پره به عنوان تقویت کننده طبقه اول و رله نیوماتیکی به عنوان تقویت کننده طبقه دوم به کار می‌رود. رله نیوماتیکی می‌تواند روی جریانهای بزرگ هوا عمل کند.

شکل ۴-۶ (الف) نمودار طرح گونه یک رله نیوماتیکی را نشان می‌دهد. با افزایش پس فشار نازل P_b دیافراگم متصل به توپی پایین می‌رود، ارتباط با جو کاهش می‌یابد و ارتباط با شیر نیوماتیکی قویتر می‌شود؛ به این ترتیب فشار کنترل‌کننده P_c افزایش می‌یابد. اگر توپی متصل به دیافراگم راه به جو را مسدود کند، فشار



شکل ۴-۶ (الف) نمودار طرح گونه یک رله نشت دار؛ (ب) نمودار طرح گونه یک رله بودن نشت.

کنترل کننده P_c با فشار تغذیه P_s برابر می شود. با کاهش پس فشار نازل P_b دیافراگم بالا می رود و راه هوای تغذیه مسدود می شود، به این ترتیب کنترل کننده P_c افت کرده به فشار جو P_a می رسد. بنابراین فشار کنترل کننده P_c می تواند بین فشار 0 psig و فشار تغذیه، که معمولاً 20 psig است، تغییر کند.

جابه جایی کل دیافراگم بسیار کوچک است. تویی در هر وضعیتی باشد، بجز وقتی راه هوای تغذیه مسدود می شود، هوای فشرده به محیط اطراف نشت می کند، حتی پس از این که بین پس فشار نازل و فشار کنترل کننده تعادل برقرار می شود. به همین دلیل رله شکل ۴-۶ (الف) رله نشت دار خوانده می شود.

نوع دیگری از رله، موسوم به رله بدون نشت، هم وجود دارد. در این رله ها پس از برقراری تعادل نشت هوا متوقف می شود، بنابراین در حالت ماندگار هوای فشرده تلف نمی شود. ولی توجه کنید که رله بدون نشت باید یک شیر تخلیه به جو داشته باشد تا هوای فشرده ایجاد کننده فشار کنترل P_c راهی برای تخلیه داشته باشد. شکل ۴-۶ (ب) یک رله بدون نشت را نشان می دهد.

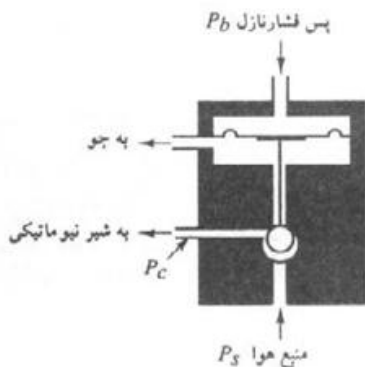
در هر دو رله منبع هوای فشرده با یک شیر کنترل می شود، و این شیر نیز به نوبه خود با پس فشار نازل کنترل می شود. به این ترتیب پس فشار نازل پس از تقویت توان به فشار کنترل کننده تبدیل می شود.

چون با تغییر پس فشار P_b ، فشار کنترل کننده P_c تقریباً بلافاصله تغییر می کند، ثابت زمانی رله نیوماتیکی در مقایسه با ثابت زمانی های بزرگتر کنترل کننده نیوماتیکی و سیستم تحت کنترل ناچیز است.

باید تذکر دهیم که بعضی رله های نیوماتیکی معکوس عمل می کنند. رله شکل ۴-۷ نمونه ای از رله های معکوس است. در این رله با افزایش پس فشار نازل P_b ساچمه به سمت پایین رانده شده، فشار کنترل کننده P_c کم می شود، پس رله معکوس عمل می کند.

کنترل کننده های تناسبی نیوماتیکی (نوع نیرو - فاصله). دو نوع کنترل کننده نیوماتیکی در صنعت کاربرد زیادی دارند، یکی نوع نیرو - فاصله و دیگری نوع نیرو - تعادل. به رغم اختلاف ظاهری کنترل کننده های نیوماتیکی صنعتی، با مطالعه دقیق شباهتهای عملکرد این مدارهای نیوماتیکی آشکار می شود. در اینجا کنترل کننده های نیوماتیکی نوع نیرو - فاصله را در نظر می گیریم.

شکل ۴-۸ (الف) نمودار طرح گونه یک کنترل کننده تناسبی را نشان می دهد. تقویت کننده نازل - پره تقویت کننده طبقه اول را تشکیل می دهد، پس فشار نازل توسط فاصله نازل - پره کنترل می شود. رله نیوماتیکی



شکل ۴-۷ رله معکوس.

تقویت‌کننده طبقه دوم را تشکیل می‌دهد. پس فشار نازل محل تویی تقویت‌کننده طبقه دوم را تعیین می‌کند، که می‌تواند از پس مقدار زیادی هوا برآید.

در اغلب کنترل‌کننده‌های نیوماتیکی نوعی فیدبک نیوماتیکی به کار می‌رود. این فیدبک مقدار جابه‌جایی پره را کمتر می‌کند. به جای نصب پره در محلی ثابت، مانند شکل ۴-۸ (ب)، آن را مطابق شکل ۴-۸ (ج) روی یک فانوسک سوار می‌کنند. میزان فیدبک را می‌توان با ایجاد یک اتصال متغیر بین فانوسک و نقطه اتصال پره تنظیم کرد. به این ترتیب پره یک اتصال شناور می‌شود و هم سیگنال خطا و هم سیگنال فیدبک می‌توانند آن را جابه‌جا کنند.

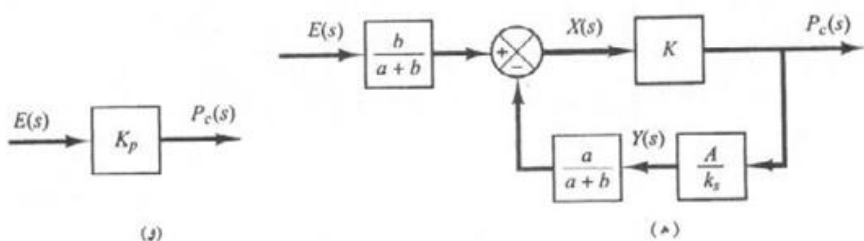
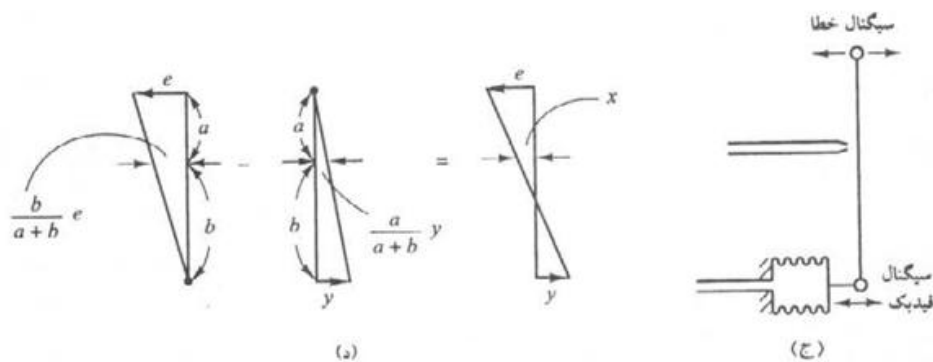
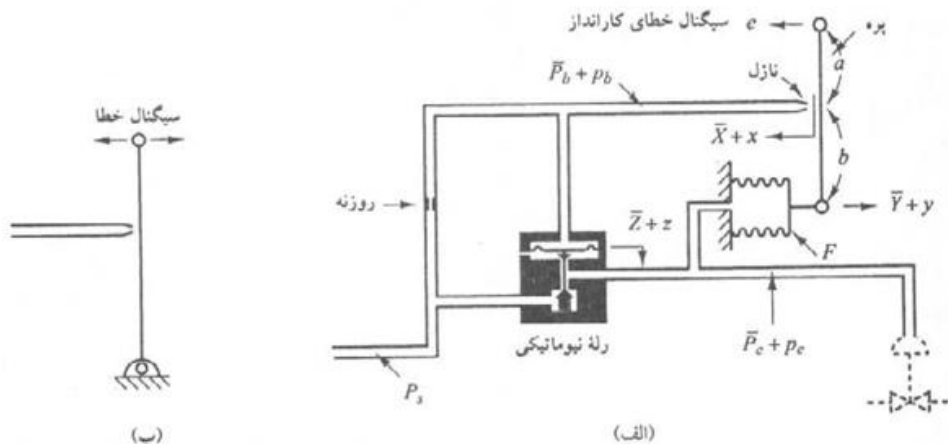
طرز کار کنترل‌کننده شکل ۴-۸ (الف) از این قرار است: سیگنال ورودی تقویت‌کننده دو طبقه نیوماتیکی سیگنال خطاست. افزایش سیگنال خطا پره را به سمت چپ می‌برد. این حرکت پس فشار نازل را افزایش می‌دهد و تویی متصل به دیافراگم پایین می‌رود. بنابراین فشار کنترل زیاد می‌شود. این افزایش فشار باعث انبساط فانوسک شده، پره را به سمت راست می‌برد، و دهانه نازل بازتر می‌شود. به خاطر وجود این فیدبک جابه‌جایی پره خیلی کوچک است، ولی تغییر فشار کنترل می‌تواند بزرگ باشد.

باید تذکر دهیم که برای درست کار کردن کنترل‌کننده باید میزان جابه‌جایی پره در اثر فانوسک فیدبک کمتر از جابه‌جایی ناشی از سیگنال خطا، هنگامی که به تنهایی عمل می‌کند، باشد. (اگر این دو جابه‌جایی برابر باشند هیچ عمل کنترلی ممکن نیست.)

معادلات این کنترل‌کننده را می‌توان به صورت زیر یافت. به ازای سیگنال خطای صفر، یعنی $e=0$ حالت تعادلی وجود دارد که در آن فاصله پره - نازل برابر $\bar{X}$ ، جابه‌جایی فانوسک برابر $\bar{Y}$ ، جابه‌جایی دیافراگم برابر $\bar{Z}$ ، پس فشار نازل برابر $\bar{P}_b$ ، و فشار کنترل‌کننده برابر $\bar{P}_c$ است. با اعمال سیگنال خطا، فاصله نازل - پره، جابه‌جایی فانوسک، جابه‌جایی دیافراگم، پس فشار نازل و فشار کنترل‌کننده نسبت به این مقادیر حالت ماندگار تغییر می‌کنند. این تغییرات را به ترتیب x, y, z, p_b ، و p_c فرض کنید. (روی نمودار، جهت مثبت متغیرهای جابه‌جایی با پیکان مشخص شده است.)

با فرض خطی بودن رابطه بین تغییرات پس فشار نازل و فاصله نازل - پره داریم

$$p_b = K_1 x \quad (۴-۱۳)$$



شکل ۳-۴ (الف) نمودار طرح گونه یک کنترل کننده تناسبی نیوماتیکی از نوع نیرو-فاصله؛ (ب) نصب پره در نقطه ثابت؛ (ج) نصب پره روی فانوسک فیدبک؛ (د) جابه‌جایی x ناشی از جمع دو جابه‌جایی کوچک؛ (ه) نمودار بلوکی کنترل کننده؛ (و) نمودار ساده شده کنترل کننده.

که K_1 مقداری ثابت و مثبت است. برای دیافراگم

$$p_b = K_1 z \quad (۱۴-۴)$$

که K_2 مثبت و ثابت است. محل دیافراگم فشار کنترل کننده را تعیین می‌کند. اگر در شیر دیافراگمی رابطه P_c و z خطی باشد، داریم

$$p_c = K_p z \quad (۱۵-۴)$$

که K_p نیز مثبت و ثابت است. از معادلات (۱۳-۴)، (۱۴-۴)، و (۱۵-۴) به دست می‌آوریم

$$p_c = \frac{K_p}{K_p} p_b = \frac{K_1 K_p}{K_p} x = K x \quad (۱۶-۴)$$

که در آن $K = K_1 K_p / K_p$ ثابت و مثبت است. برای پره، چون دو جابه‌جایی کوچک (e و y) در جهت مثبت هستند، می‌توانیم آنها را جدا جدا در نظر بگیریم و با جمع کردن آنها جابه‌جایی x را بیابیم. شکل ۸-۴ (د) را ببینید. پس برای جابه‌جایی پره داریم

$$x = \frac{b}{a+b} e - \frac{a}{a+b} y \quad (۱۷-۴)$$

فانوسک همانند فنر عمل می‌کند و رابطه زیر در مورد آن صادق است:

$$A p_c = k_s y \quad (۱۸-۴)$$

که در آن A سطح موثر فانوسک و K_s ثابت فنر معادل آن، یعنی انعطاف‌پذیری ناشی از سطح جانبی موجدار آن، است.

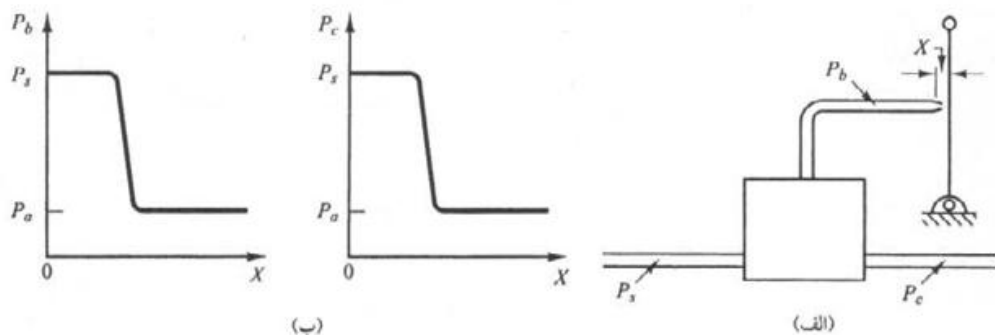
با فرض این که تمام متغیرها در محدوده عملکرد خطی تغییر می‌کنند، با توجه به معادلات (۱۶-۴) و (۱۷-۴) و (۱۸-۴) نمودار بلوکی شکل ۸-۴ (ه) را به دست می‌آوریم. شکل ۸-۴ (ه) به وضوح نشان می‌دهد که کنترل‌کننده نیوماتیکی شکل ۸-۴ (الف) خود یک سیستم فیدبک‌دار است. تابع تبدیل بین p_c و e عبارت است از

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = \frac{\frac{b}{a+b} K}{1 + K \frac{a}{a+b} \frac{A}{k_s}} = K_p \quad (۱۹-۴)$$

شکل ۸-۴ (و) نمودار بلوکی ساده را نشان می‌دهد. چون p_c و e متناسب‌اند، کنترل‌کننده شکل ۸-۴ (الف) کنترل‌کننده تناسبی نامیده می‌شود. چنانچه معادله (۱۹-۴) نشان می‌دهد بهره کنترل‌کننده تناسبی نیوماتیکی را می‌توان با تنظیم محل لولای اتصال پره در گستره وسیعی دارد. [در شکل ۸-۴ (الف) اتصال لولایی پره نشان داده نشده است.] در اکثر کنترل‌کننده‌های تناسبی تجاری یک پیچ تنظیم یا مکانیسم دیگری برای تغییر بهره با تنظیم محل لولا تعبیه شده است.

چنانچه قبلاً گفتیم سیگنال خطا پره را در یک جهت و فانوسک فیدبک آن را در جهت مخالف، ولی به میزان کمتر، جابه‌جا می‌کند. بنابراین اثر فانوسک فیدبک کاهش حساسیت کنترل‌کننده است. فیدبک معمولاً برای دستیابی به گستره بزرگ عملکرد تناسبی (خطی) به کار می‌رود.

کنترل‌کننده‌های تناسبی فاقد مکانیسم فیدبک [که در آنها یک انتهای پره، مطابق شکل ۹-۴ (الف) ثابت است] حساسیت زیادی دارند و کنترل‌کننده‌های نیوماتیکی دو وضعیتی یا کنترل‌کننده‌های خاموش - روشن نامیده می‌شوند. در این کنترل‌کننده‌ها تغییر اندکی در فاصله نازل - پره برای تغییر فشار کنترل‌کننده از حد ماکزیمم به حد می‌نیمم، و برعکس کافی است. شکل ۹-۴ (ب) منحنی‌های P_b را بر حسب X و P_c بر حسب X را نشان



شکل ۴-۹ (الف) کنترل کننده تناسبی فاقد مکانیسم فیدبک؛ (ب) منحنی‌های P_b بر حسب X و P_c بر حسب X .

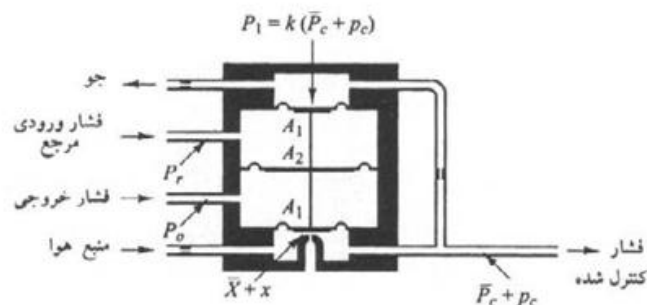
می‌دهد. دقت کنید که تغییر کوچکی در X می‌تواند تغییر بزرگی در P_b ایجاد کند، که به نوبه خود باعث باز شدن یا بسته شدن کامل شیر دیافراگمی می‌شود.

کنترل کننده‌های تناسبی نیوماتیکی (نوع نیرو - تعادل). شکل ۴-۱۰ نمودار طرح گونه یک کنترل کننده تناسبی نیوماتیکی، از نوع نیرو - تعادل را نشان می‌دهد. کنترل کننده‌های نیرو - تعادل در صنعت بسیار به کار می‌روند. اینها را کنترل کننده‌های پشته‌ای می‌نامند. اصول اساسی کار اینها با کنترل کننده‌های نیرو - فاصله تفاوتی ندارد. مزیت اصلی کنترل کننده نیرو - تعادل حذف اتصالات مکانیکی و محورهای متعدد است که اثرات ناشی از اصطکاک را کاهش می‌دهد.

در زیر اصول کنترل کننده‌های نیرو - تعادل را در نظر می‌گیریم. در کنترل کننده شکل ۴-۱۰ فشار ورودی مرجع P_r و فشار خروجی P_o به محفظه‌های بزرگ دیافراگم‌دار داده می‌شوند. دقت کنید که کنترل کننده‌های نیوماتیکی نیرو - تعادل تنها روی سیگنالهای فشار عمل می‌کنند. بنابراین باید ورودی مرجع و خروجی سیستم به سیگنال فشار تبدیل شوند.

این کنترل کننده نیز همانند کنترل کننده نیرو - فاصله یک پره، یک نازل، و چند روزنه دارد. در شکل ۴-۱۰ نازل همان سوراخ ایجاد شده در زیر کنترل کننده است. دیافراگم بالای نازل به عنوان پره عمل می‌کند.

طرز کار کنترل کننده نیرو - تعادل شکل ۴-۱۰ را می‌توان به شرح زیر خلاصه کرد: هوایی با فشار ۲۰ psig از یک روزنه عبور کرده، فشار کاهش یافته‌ای در محفظه پایین ایجاد می‌کند. این هوا از طریق نازل به جو تخلیه



شکل ۴-۱۰

نمودار طرح گونه یک کنترل کننده نیوماتیکی نوع نیرو - تعادل.

می‌شود. میزان عبور از نازل به شکاف و افت فشار روی آن بستگی دارد. با افزایش فشار مرجع ورودی P_r (در صورتی که فشار خروجی P_o ثابت باشد) میله متصل به دیافراگم پایین می‌آید و شکاف بین پره و نازل کم می‌شود. این امر باعث افزایش فشار کنترل‌کننده P_c می‌شود. فرض کنید

$$P_e = P_r - P_o \quad (20-4)$$

به ازای $p_e = 0$ تعادل برقرار است، فاصله نازل - پره برابر $\bar{X}$ و فشار کنترل‌کننده برابر $\bar{P}_c$ است. در این حالت تعادل $P_1 = \bar{P}_c k$ (که $k < 1$) و

$$\bar{X} = \alpha(\bar{P}_c A_1 - \bar{P}_c k A_1) \quad (21-4)$$

که در آن α مقدار ثابتی است.

حال فرض می‌کنیم $p_e \neq 0$ و تغییرات کوچک فاصله نازل - پره و فشار کنترل‌کننده را به ترتیب x و p_e

می‌نامیم. در این صورت به دست می‌آوریم

$$\bar{X} + x = \alpha[(\bar{P}_c + p_e)A_1 - (\bar{P}_c + p_e)k A_1 - p_e(A_1 - A_1)] \quad (22-4)$$

از معادلات (21-4) و (22-4) به دست می‌آوریم

$$x = \alpha[p_e(1-k)A_1 - p_e(A_1 - A_1)] \quad (23-4)$$

در اینجا باید به بررسی کمیت x بپردازیم. در طراحی کنترل‌کننده‌های نیوماتیکی فاصله نازل - پره خیلی کوچک است. به این خاطر x/α در مقابل $p_e(1-k)A_1$ یا $p_e(A_1 - A_1)$ جمله مرتبه بالا حساب می‌شود، یعنی به ازای $p_e \neq 0$

$$\frac{x}{\alpha} \ll p_e(1-k)A_1$$

$$\frac{x}{\alpha} \ll p_e(A_1 - A_1)$$

پس می‌توانیم در تحلیل از جمله شامل x چشم‌پوشی کنیم. به این ترتیب می‌توانیم معادله (23-4) را به صورت زیر بنویسیم

$$p_e(1-k)A_1 = p_e(A_1 - A_1)$$

و تابع تبدیل بین p_e و p_o را به صورت زیر بیابیم

$$\frac{P_e(s)}{P_o(s)} = \frac{A_1 - A_1}{A_1} \frac{1}{1-k} = K_p$$

در معادله (20-4) تعریف شده است. کنترل‌کننده شکل 4-10 یک کنترل‌کننده تناسبی است. هر چه k به یک نزدیکتر شود، بهره K_p بزرگتر می‌شود. توجه کنید که مقدار k به قطر روزنه‌های تعبیه شده در لوله‌های ورودی و خروجی محفظه فیدبک بستگی دارد. (هر چه مقاومت در مقابل عبور روزنه لوله ورودی کمتر شود، k به یک نزدیکتر می‌شود.)

شیرهای کارانداز نیوماتیکی. یکی از مشخصات کنترل نیوماتیکی این است که در آن منحصرأ از شیرهای کارانداز نیوماتیکی استفاده می‌شود. شیر کارانداز می‌تواند توان خروجی بزرگی تأمین کند. (چون کارانداز نیوماتیکی برای ایجاد توان خروجی بزرگ، توان ورودی بزرگی می‌خواهد، باید هوای فشرده کافی وجود داشته باشد.) در شیرهای کارانداز عملی ممکن است مشخصه شیر خطی نباشد؛ یعنی میزان عبور با موقعیت میله شیر نسبت مستقیم نداشته باشد، همچنین اثرهای غیرخطی دیگری مثل هیستریزس هم می‌تواند وجود داشته باشد.

نمودار طرح گونه شیر کارانداز نیوماتیکی شکل ۴-۱۱ را در نظر بگیرید. فرض کنید مساحت دیافراگم A است. همچنین فرض کنید که سیگنال خطا صفر و فشار کنترل‌کننده $\bar{P}_c$ و جابه‌جایی شیر برابر $\bar{X}$ است. در تحلیل زیر متغیرها را کوچک فرض کرده، شیر کارانداز نیوماتیکی را خطی می‌کنیم. تغییرات کوچک فشار کنترل‌کننده و جابه‌جایی شیر را به ترتیب با p_c و x نشان می‌دهیم. تغییر کوچک فشار نیوماتیکی اعمال شده به دیافراگم باعث تغییر مکان بار می‌شود، بار از فنر، اصطکاک چسبندگی، و جرم تشکیل شده است، پس معادله تعادل نیروها عبارت است از

$$A p_c = m\ddot{x} + b\dot{x} + kx$$

که در آن m = جرم توپی و میله شیر

b = ضریب اصطکاک چسبندگی

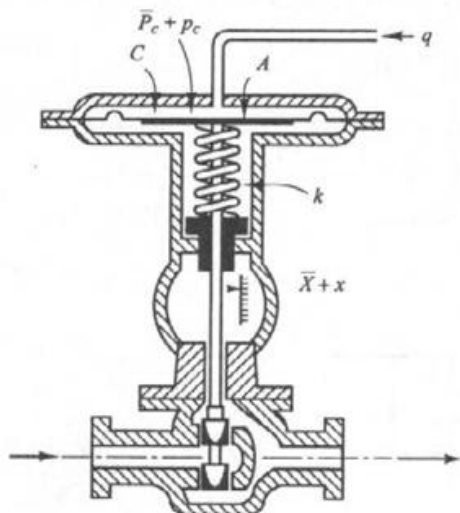
k = ثابت فنر

اگر نیروی ناشی از جرم و اصطکاک چسبندگی ناچیز باشد، معادله اخیر به شکل زیر ساده می‌شود:

$$A p_c = kx$$

پس تابع تبدیل بین p_c و x عبارت است از

$$\frac{X(s)}{P_c(s)} = \frac{A}{k} = K_c$$



شکل ۴-۱۱

نمودار طرح گونه یک شیر کارانداز نیوماتیکی.

که در آن $X(s) = \mathcal{L}[x]$ و $P_c(s) = \mathcal{L}[p_c]$. اگر q_i تغییر میزان عبور از شیر کارانداز نیوماتیکی، با x ، جابه‌جایی میله شیر، متناسب باشد، آنگاه

$$\frac{Q_i(s)}{X(s)} = K_q$$

که در آن $Q_i(s) = \mathcal{L}[q_i]$ و K_q ثابت است. تابع تبدیل بین q_i و p_c به شکل زیر درمی‌آید

$$\frac{Q_i(s)}{P_c(s)} = K_c K_q = K_v$$

که K_v مقداری ثابت است.

فشار کنترل‌کننده استاندارد این نوع شیرهای کارانداز بین ۳ psig تا ۱۵ psig است. جابه‌جایی میله شیر توسط کورس دیافراگم تعیین می‌شود و تنها چند اینچ است. در صورت نیاز به کورس بزرگتر می‌توان از ترکیبهای فنر - پیستون استفاده کرد.

در شیرهای کارانداز نیوماتیکی نیروی اصطکاک ایستا باید به یک مقدار کوچک محدود شود تا هیستریزس بزرگی حاصل نشود. به خاطر تراکم‌پذیری هوا عمل کنترلی ممکن است مثبت نباشد، یعنی محل میله شیر می‌تواند خطا داشته باشد. استفاده از یک راه‌انداز شیر عملکرد شیرهای کارانداز نیوماتیکی را بهبود می‌بخشد.

اصول پایه‌ای دستیابی به کنترل مشتقی. اکنون روشهایی برای دستیابی به کنترل مشتقی را معرفی می‌کنیم. باز هم تأیید بر اصول است، نه جزئیات مکانیسمهای درگیر.

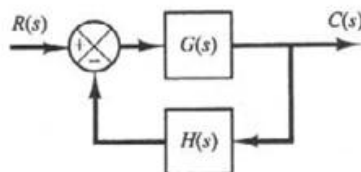
اصل اساسی دستیابی به عمل کنترلی مطلوب قرار دادن عکس تابع تبدیل مطلوب در مسیر فیدبک است. برای سیستم شکل ۴-۱۲ تابع تبدیل حلقه بسته است عبارت است از

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

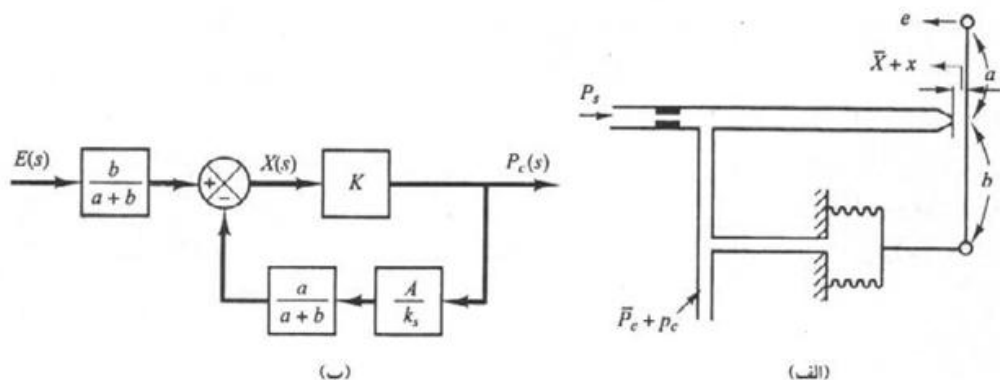
اگر $|G(s)H(s)| \gg 1$ ، $C(s)/R(s)$ را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{H(s)}$$

پس برای داشتن کنترل تناسبی - مشتقی، عنصری با تابع تبدیل $1/(Ts+1)$ در مسیر فیدبک قرار می‌دهیم. کنترل‌کننده نیوماتیکی شکل ۴-۱۳ (الف) را در نظر بگیرید. با فرض کوچک بودن تغییر متغیرها می‌توانیم نمودار بلوکی شکل ۴-۱۳ (ب) را برای این کنترل‌کننده رسم کنیم. نمودار بلوکی نشان می‌دهد که کنترل‌کننده از نوع تناسبی است.



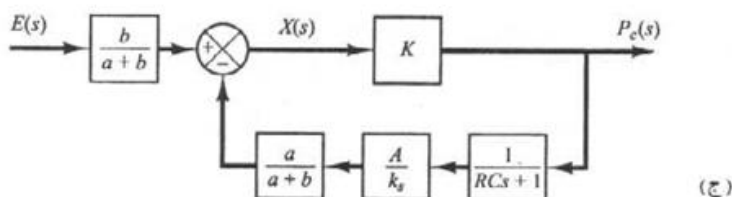
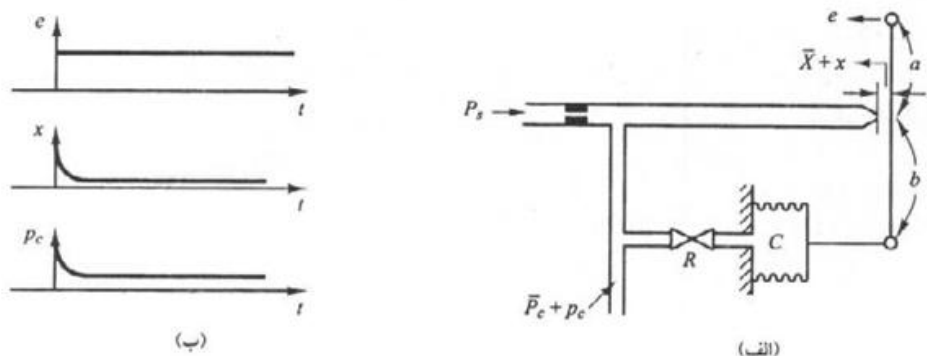
شکل ۴-۱۲ سیستم کنترل.



شکل ۴-۱۳ (الف) کنترل کننده تناسبی نیوماتیکی؛ (ب) نمودار بلوکی کنترل کننده.

حال نشان می‌دهیم که گذاشتن مانعی در مسیر فیدبک منفی، این کنترل کننده را به یک کنترل کننده تناسبی - مشتقی، که معمولاً کنترل کننده PD خوانده می‌شود، تبدیل می‌کند.

کنترل کننده نیوماتیکی شکل ۴-۱۴ (الف) را در نظر بگیرید. باز با فرض کوچک بودن تغییرات سیگنال خطا، فاصله نازل - پره و فشار کنترل کننده می‌توانیم طرز کار این کنترل کننده را به این شرح بیان کنیم: ابتدا فرض می‌کنیم یک تغییر پله‌ای کوچک در e رخ می‌دهد. فشار کنترل کننده p_c نیز بی‌درنگ تغییر می‌کند. مانع R نمی‌گذارد فانوسک فیدبک این تغییر فشار را به طور آنی حس کند. پس فانوسک فیدبک بی‌درنگ پاسخ



شکل ۴-۱۴ (الف) کنترل کننده تناسبی - مشتقی نیوماتیکی؛ (ب) تغییر پله‌ای e و تغییرات متناظر در x و p_c بر حسب t ؛ (ج) نمودار بلوکی کنترل کننده.

نمی‌دهد و تمام جابه‌جایی پره توسط شیر کارانداز نیوماتیکی حس می‌شود. با گذشت زمان فانوسک منبسط یا منقبض می‌شود. تغییر فاصله نازل - پره x و تغییر فشار کنترل‌کننده p_c بر حسب زمان را می‌توان به صورت نشان داده شده در شکل ۴-۱۴ (ب) رسم کرد. در حالت ماندگار فانوسک مانند یک مکانیسم فیدبک عادی عمل می‌کند. منحنی p_c بر حسب t نشان می‌دهد که این کنترل‌کننده از نوع تناسبی - مشتقی است.

شکل ۴-۱۴ (ج) نمودار بلوکی مربوط به این کنترل‌کننده را نشان می‌دهد. در این نمودار بلوکی K یک ثابت، A سطح فانوسک، و k_s ثابت فنر معادل فانوسک است. تابع تبدیل بین p_c و e را می‌توان با توجه به نمودار بلوکی به صورت زیر یافت

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = \frac{\frac{b}{a+b} K}{1 + \frac{Ka}{a+b} \frac{A}{k_s} \frac{1}{RCs+1}}$$

در چنین کنترل‌کننده‌ای بهره حلقه $\left| \frac{KaA}{(a+b)k_s(RCs+1)} \right|$ معمولاً خیلی از یک بزرگ‌تر است. بنابراین تابع تبدیل $P_c(s)/E(s)$ را می‌توان به شکل زیر ساده کرد.

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = K_p(1 + T_d s)$$

که در آن

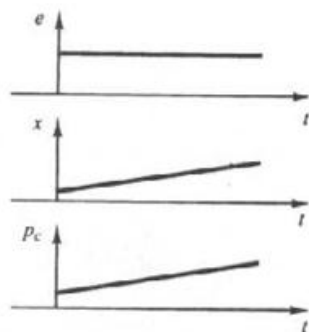
$$T_d = RC \quad \text{و} \quad K_p = \frac{b k_s}{a A}$$

پس فیدبک منفی تأخیر یافته، یا وجود تابع تبدیل $1/(RCs+1)$ در مسیر فیدبک، کنترل‌کننده تناسبی را به کنترل‌کننده تناسبی - مشتقی تبدیل می‌کند.

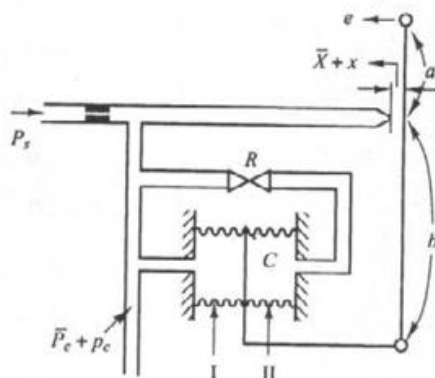
توجه کنید که اگر شیر فیدبک کاملاً باز باشد یک کنترل‌کننده تناسبی داریم. اگر شیر فیدبک کاملاً بسته باشد، عمل کنترلی دو وضعیتی (تناسبی باند باریک یا خاموش و روشن) خواهیم داشت.

دستیابی به عمل کنترل تناسبی - انتگرالی. کنترل‌کننده تناسبی شکل ۴-۱۳ (الف) را در نظر بگیرید. اگر تغییر متغیرها کوچک باشد، افزودن فیدبک مثبت تأخیر یافته این کنترل‌کننده را به یک کنترل‌کننده تناسبی - انتگرالی تبدیل می‌کند، چنین کنترل‌کننده‌ای معمولاً کنترل‌کننده PI نامیده می‌شود.

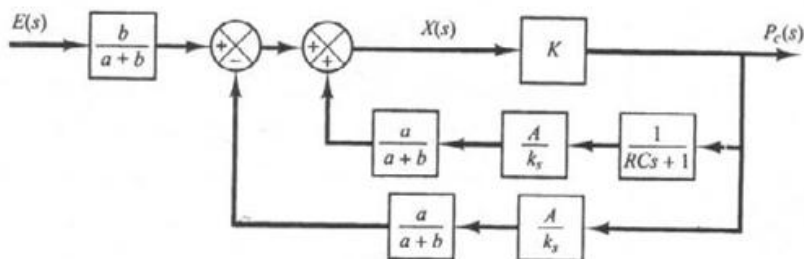
کنترل‌کننده نیوماتیکی شکل ۴-۱۵ (الف) را در نظر بگیرید. طرز کار این کنترل‌کننده به این شرح است: فانوسک I بدون مانع به فشار کنترل‌کننده متصل است. فانوسک II از طریق یک مانع به فشار کنترل‌کننده وصل است. فرض می‌کنیم یک تغییر پله‌ای کوچک در سیگنال خطا رخ می‌دهد. به این ترتیب پس فشار نازل فوراً تغییر می‌کند. در نتیجه در فشار کنترل‌کننده P_c نیز تغییری ناگهانی رخ می‌دهد. به خاطر مانعی که شیر واقع در مسیر فانوسک II ایجاد می‌کند، یک اختلاف فشار روی شیر ایجاد می‌شود. با گذشت زمان هوا از شیر عبور می‌کند تا فشار فانوسک II به P_c برسد. بنابراین فانوسک II با گذشت زمان منبسط یا منقبض شده، پره را در جهت جابه‌جایی اولیه‌اش حرکت می‌دهد. به این ترتیب پس فشار نازل p_c به صورت نشان داده شده در شکل ۴-۱۵ (ب) تغییری پیوسته دارد.



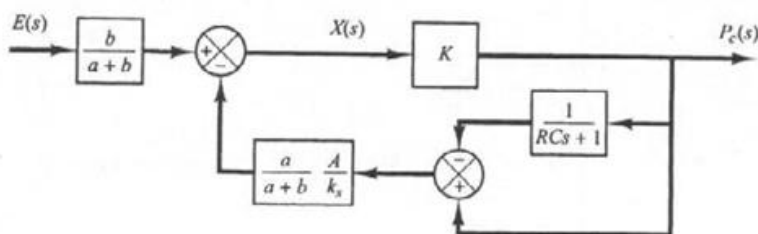
(پ)



(الف)



(ج)



(د)

شکل ۴-۱۵ (الف) کنترل کننده نیوماتیکی تناسبی - انتگرالی؛ (ب) تغییر پله‌ای e و تغییرات متناظر در x و p_c ؛ (ج) نمودار بلوکی کنترل کننده، (د) نمودار بلوکی ساده شده.

توجه کنید که عمل کنترل انتگرالی به صورتی انجام می‌شود که کم‌کم فیدبک ناشی از عمل کنترل تناسبی را از بین ببرد.

نمودار بلوکی این کنترل کننده، با فرض کوچک بودن تغییرات در شکل ۴-۱۵ (ج) نشان داده شده است. با ساده کردن این نمودار بلوکی شکل ۴-۱۵ (د) به دست می‌آید. تابع تبدیل این کنترل کننده عبارت است از

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = \frac{\frac{b}{a+b} K}{1 + \frac{Ka}{a+b} \frac{A}{k_s} \left(1 - \frac{1}{RCs+1}\right)}$$

که در آن K ثابت، A مساحت فانوسک و k_s ثابت فنر معادل فانوسک مرکب است. اگر

$$|Ka ARCs / [(a+b)k_s(RCs+1)]| \gg 1$$

که معمولاً ارضا می‌شود، تابع تبدیل را می‌توان به شکل زیر ساده کرد

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_I s}\right)$$

که در آن

$$K_p = \frac{b k_s}{a A} \quad T_I = RC$$

دستیابی به عمل کنترل تناسبی - انتگرالی - مشتقی. ترکیب کنترل‌کننده‌های نیوماتیکی شکل ۴-۱۴ (الف) و

شکل ۴-۱۵ (الف) یک کنترل‌کننده تناسبی - انتگرالی - مشتقی، موسوم به کنترل‌کننده PID به دست می‌دهد.

شکل ۴-۱۶ (الف) نمودار طرح گونه چنین کنترل‌کننده ای را نشان می‌دهد. شکل ۴-۱۶ (ب) نمودار بلوکی این

کنترل‌کننده را با فرض کوچک بودن تغییر متغیرها نشان می‌دهد.

تابع تبدیل این کنترل عبارت است از

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = \frac{\frac{b}{a+b} K}{1 + \frac{Ka}{a+b} \frac{A}{k_s} \frac{(R_I C - R_d C)s}{(R_d C s + 1)(R_I C s + 1)}}$$

با تعریف

$$T_I = R_I C \quad \text{و} \quad T_d = R_d C$$

و توجه به این که معمولاً $|Ka A(T_I - T_d)s / [(a+b)k_s(T_d s + 1)(T_I s + 1)]| \gg 1$ و $T_I \gg T_d$ ، به دست

می‌آوریم

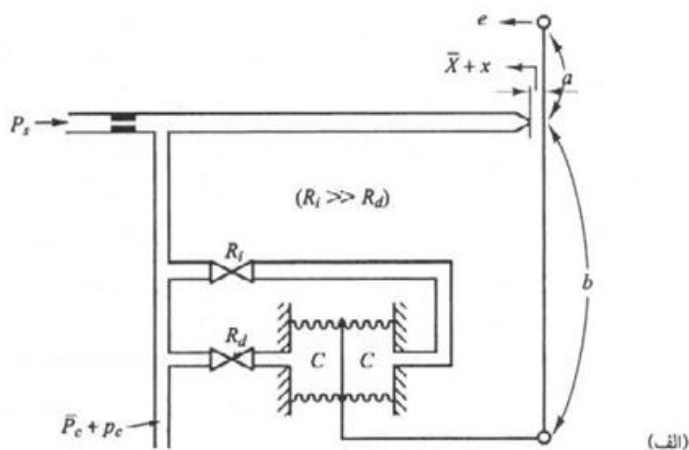
$$\begin{aligned} \frac{P_c(s)}{E(s)} &\approx \frac{b k_s}{a A} \frac{(T_d s + 1)(T_I s + 1)}{(T_I - T_d)s} \\ &\approx \frac{b k_s}{a A} \frac{T_d T_I s^2 + T_I s + 1}{T_I s} \end{aligned}$$

و سرانجام

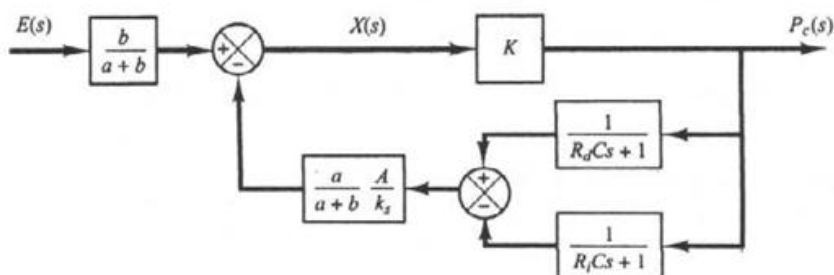
$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_d s\right) \quad (۴-۲۴)$$

که در آن

$$K_p = \frac{b k_s}{a A}$$



(الف)



(ب)

شکل ۴-۱۶ (الف) کنترل کننده نیوماتیکی - تناسبی - انتگرالی - مشتقی؛ (ب) نمودار بلوکی کنترل کننده.

معادله (۴-۲۴) نشان می دهد که کنترل کننده شکل ۴-۱۶ (الف) یک کنترل کننده تناسبی - انتگرالی - مشتقی (کنترل کننده PID) است.

۴-۴ سیستمهای هیدرولیکی

هوای فشرده، بجز برای کنترل کننده های نیوماتیکی، به ندرت در کنترل پیوسته وسایل متحرک سنگین دارای بار خارجی به کار می رود. در این موارد معمولاً کنترل کننده های هیدرولیکی ترجیح داده می شوند.

سیستمهای هیدرولیکی. مدارهای هیدرولیکی در ماشینهای ابزار، سیستمهای کنترل هواپیما و موارد مشابه کاربرد زیادی دارد. عواملی چون دقت، انعطاف پذیری، بزرگ بودن نسبت توان به وزن، شروع، توقف و تغییر جهت سریع، یکنوا و دقیق و سادگی کار از دلایل این کاربرد وسیع شمرده می شوند.

فشار مورد استفاده در سیستمهای هیدرولیکی چیزی بین $145 \text{ lb}_f/\text{in}^2$ تا $5000 \text{ lb}_f/\text{in}^2$ (یعنی بین 1 MPa تا 35 MPa) است. در بعضی کاربردهای خاص فشار تا $10000 \text{ lb}_f/\text{in}^2$ (70 MPa) هم می‌رسد. برای دستیابی به یک توان خاص، هر چه فشار تغذیه بزرگتر باشد، می‌توان از وسیله هیدرولیکی کوچکتر و سبکتری استفاده کرد. با استفاده از سیستمهای هیدرولیکی فشار بالا می‌توان نیروی بسیار بزرگی اعمال کرد. با استفاده از سیستمهای هیدرولیکی به سرعت و با دقت می‌توان وضعیت بارهای سنگین را تغییر داد. ترکیب سیستمهای الکترونیکی و هیدرولیکی نیز استفاده زیادی دارد، زیرا به این ترتیب مزایای کنترل الکترونیکی و توان هیدرولیکی با هم جمع می‌شود.

مزایا و معایب سیستمهای هیدرولیکی. کاربرد سیستمهای هیدرولیکی به جای سیستمهای دیگر مزایا و معایب خاص خود را دارد. بعضی از مزایای این قرارند:

۱. روغن به کار رفته در سیستمهای هیدرولیکی هم عمل روغنکاری را انجام می‌دهد و هم گرمای تولید شده در سیستم را به یک مبدل حرارتی مناسب می‌برد.
 ۲. کاراندازهای هیدرولیکی نسبتاً کوچک می‌توانند نیرو یا گشتاور بزرگی اعمال کنند.
 ۳. کاراندازهای هیدرولیکی پاسخ سریعی دارند، و شروع، توقف، و تغییر جهتشان به سرعت انجام می‌شود.
 ۴. عملگرهای هیدرولیکی می‌توانند در شرایط پیوسته، رفت و برگشتی، معکوس شدن جهت و گیر کردن کار کنند، بدون این که خراب شوند.
 ۵. وجود کاراندازهای خطی و چرخشی کار طراحی را انعطاف‌پذیر می‌کند.
 ۶. چون کاراندازهای هیدرولیکی نشت کمی دارند، افت سرعت در هنگام اعمال بار کم است.
- معایبی که کاربرد این سیستمها را محدود می‌کند عبارت است از:
۱. توان هیدرولیکی در مقایسه با توان الکتریکی کمتر در دسترس است.
 ۲. هزینه سیستم هیدرولیکی از یک سیستم الکتریکی که همان کار را انجام می‌دهد بیشتر است.
 ۳. خطر آتش و انفجار وجود دارد، مگر این که روغنهای ضدآتش به کار برده شود.
 ۴. ساخت سیستم هیدرولیکی بدون نشت مشکل است، یعنی سیستم هیدرولیکی باید مرتباً تمیز شود.
 ۵. روغن ناخالص می‌تواند در عملکرد صحیح سیستم اختلال ایجاد کند.
 ۶. به خاطر مشخصه‌های غیرخطی و پیچیده عناصر هیدرولیکی، طراحی یک سیستم هیدرولیکی پیچیده بسیار مشکل است.
 ۷. مدارهای هیدرولیکی معمولاً مشخصه میرایی بدی دارند. اگر سیستم هیدرولیکی خوب طراحی نشود بسته به شرایط کار ممکن است پدیده‌های ناپایدار به وجود آید یا از بین برود.

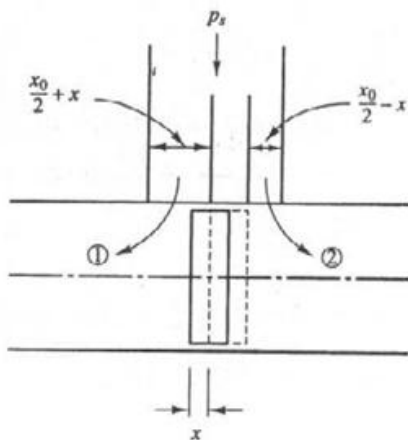
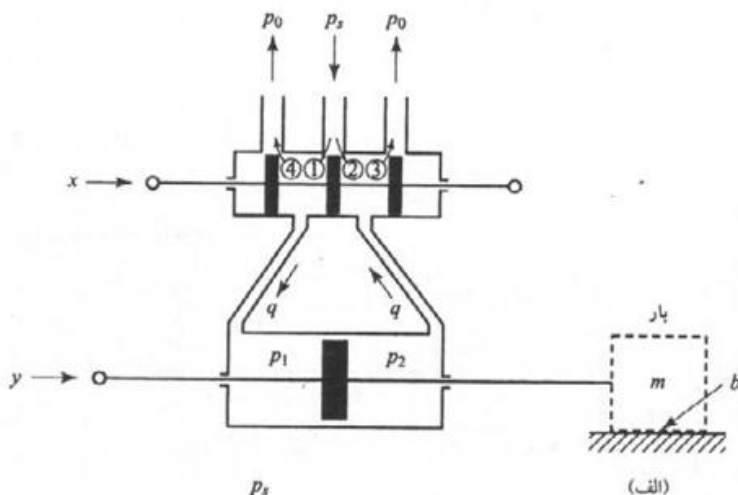
ملاحظات. باید بسیار توجه کرد که سیستم هیدرولیکی تحت تمام شرایط کاری پایدار و رضایتبخش باشد. چون چسبندگی سیالات هیدرولیکی می‌تواند بر میرایی و اصطکاک مدار هیدرولیکی تأثیر بسیاری داشته باشد،

آزمونهای پایداری باید در بالاترین درجه حرارت کاری ممکن انجام شود.

توجه کنید که اکثر سیستمهای هیدرولیکی غیرخطی‌اند. ولی گاهی اوقات می‌توان سیستمهای غیرخطی را خطی کرد تا از پیچیدگی‌شان کاسته شود و بتوان جوابهای نسبتاً دقیقی برای اکثر مقاصد به دست آورد. در بخش ۷-۲ روش خطی‌سازی مفیدی برای کار با سیستمهای غیرخطی معرفی شد.

سیستم سرووی هیدرولیکی. شکل ۴-۱۷ (الف) یک سروو موتور هیدرولیکی را نشان می‌دهد. این سیستم در اساس یک تقویت کننده توان هیدرولیکی کنترل شده با شیر تنظیم است. شیر تنظیم یک شیر متعادل است، از این لحاظ که نیروهای فشاری وارد بر آن همگی متعادل‌اند. با شیر تنظیمی که توان کمی برای به کار انداختنش لازم است می‌توان خروجی بسیار بزرگی را کنترل کرد.

در عمل دهانه‌های شیر شکل ۴-۱۷ (الف) بهتر از عرض پیستون‌های شیر است. در این حالت شیر همواره نشی دارد. این نشی هم حساست و هم میزان خطی بودن سروو و موتور هیدرولیکی را بهبود می‌بخشد. در این تحلیل فرض می‌کنیم دهانه‌ها بهتر از عرض پیستونهاست، یعنی شیر کم‌پوش است. [گاهی یک سیگنال



شکل ۴-۱۷ (الف) سیستم سرووی هیدرولیکی. (ب) نمودار بزرگ شده سطح روزنه شیر.

فرکانس بالا و کم دامنه (نسبت به ماکزیمم جابه‌جایی شیر) با سیگنال جابه‌جا کننده شیر جمع می‌شود. این کار نیز حساسیت و میزان خطی بودن شیر را بهبود می‌بخشد. در این حالت نیز شیر نشتی دارد.]

برای یافتن یک مدل خطی برای سروو موتور هیدرولیکی روش خطی کردن بیان شده در بخش ۲-۷ را به کار می‌بریم. فرض می‌کنیم شیر کم‌پوش و متقارن است و روغن هیدرولیکی پرفشار را به سیلندر قدرت هدایت می‌کند، این سیلندر نیروی هیدرولیکی بزرگی برای حرکت دادن بار فراهم می‌کند. لختی و اصطکاک بار را در مقایسه با نیروی لختی پیستون قدرت قابل اغماض در نظر می‌گیریم. همچنین فرض می‌کنیم مساحت روزنه هر دهانه با جابه‌جایی شیر x متناسب است.

شکل ۴-۱۷ (ب) نمودار بزرگ شده سطح روزنه را نشان می‌دهد. مساحت روزنه‌های دهانه‌های ۱، ۲، ۳، و ۴ را به ترتیب A_1, A_2, A_3, A_4 ، و A_5 تعریف می‌کنیم. آهنگ عبور سیال از این دهانه‌ها را نیز به ترتیب q_1, q_2, q_3, q_4 و q_5 در نظر می‌گیریم. توجه کنید که به علت متقارن بودن شیر $A_1 = A_3$ و $A_2 = A_4$ ، با فرض کوچک بودن جابه‌جایی x به دست می‌آوریم

$$A_1 = A_3 = k \left(\frac{x_s}{\gamma} + x \right)$$

$$A_2 = A_4 = k \left(\frac{x_s}{\gamma} - x \right)$$

که در آن k ثابت است.

فشار روغن برگشتی p_s را کوچک فرض کرده، آن را ندیده می‌گیریم. پس با توجه به شکل ۴-۱۷ (الف) آهنگ عبور از روزنه‌ها عبارت است از

$$q_1 = c_1 A_1 \sqrt{\frac{\gamma g}{\gamma} (p_s - p_1)} = C_1 \sqrt{p_s - p_1} \left(\frac{x_s}{\gamma} + x \right)$$

$$q_2 = c_1 A_2 \sqrt{\frac{\gamma g}{\gamma} (p_s - p_2)} = C_2 \sqrt{p_s - p_2} \left(\frac{x_s}{\gamma} - x \right)$$

$$q_3 = c_1 A_3 \sqrt{\frac{\gamma g}{\gamma} (p_2 - p_s)} = C_1 \sqrt{p_2 - p_s} \left(\frac{x_s}{\gamma} + x \right) = C_1 \sqrt{p_2} \left(\frac{x_s}{\gamma} + x \right)$$

$$q_4 = c_2 A_4 \sqrt{\frac{\gamma g}{\gamma} (p_1 - p_s)} = C_2 \sqrt{p_1 - p_s} \left(\frac{x_s}{\gamma} - x \right) = C_2 \sqrt{p_1} \left(\frac{x_s}{\gamma} - x \right)$$

که در آنها $C_1 = c_1 k \sqrt{\gamma g / \gamma}$ ، $C_2 = c_2 k \sqrt{\gamma g / \gamma}$ ، و γ وزن مخصوص و برابر ρg است، ρ چگالی جرمی و g شتاب گرانش است. آهنگ عبور q به سمت چپ پیستون قدرت عبارت است از

$$q = q_1 - q_2 = C_1 \sqrt{p_s - p_1} \left(\frac{x_s}{\gamma} + x \right) - C_2 \sqrt{p_1} \left(\frac{x_s}{\gamma} - x \right) \quad (۴-۲۵)$$

آهنگ عبور روغن خارج شده از سمت راست پیستون قدرت نیز برابر q است و از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$q = q_3 - q_4 = C_1 \sqrt{p_2} \left(\frac{x_s}{\gamma} + x \right) - C_2 \sqrt{p_s - p_2} \left(\frac{x_s}{\gamma} - x \right)$$

در این تحلیل فرض می‌کنیم که روغن تراکم‌ناپذیر است. چون شیر متقارن است، داریم $q_1 = q_3$ و $q_2 = q_4$. با برابر قرار دادن q_1 و q_3 به دست می‌آوریم

$$p_s - p_1 = p_2$$

یا

$$p_s = p_1 + p_2$$

اگر اختلاف فشار روی پیستون قدرت را Δp بنامیم، داریم

$$\Delta p = p_1 - p_2$$

پس

$$p_1 = \frac{p_s + \Delta p}{2} \quad p_2 = \frac{p_s - \Delta p}{2}$$

برای شیر متقارن شکل ۴-۱۷ (الف) در بی‌باری فشار دو طرف پیستون قدرت p_s (۱/۲) است، یعنی $\Delta p = 0$. با جابه‌جا شدن میله شیر، فشار یک طرف اضافه و فشار طرف دیگر به همان اندازه کم می‌شود. آهنگ عبور q معادله (۴-۲۵) را برحسب p_s و Δp را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$q = q_1 - q_2 = C_1 \sqrt{\frac{p_s - \Delta p}{2}} \left(\frac{x_s}{2} + x \right) - C_2 \sqrt{\frac{p_s + \Delta p}{2}} \left(\frac{x_s}{2} - x \right)$$

توجه کنید که فشار منبع p_s ثابت است. آهنگ عبور q را می‌توان به صورت تابعی از جابه‌جایی x و اختلاف فشار Δp نوشت

$$q = C_1 \sqrt{\frac{p_s - \Delta p}{2}} \left(\frac{x_s}{2} + x \right) - C_2 \sqrt{\frac{p_s + \Delta p}{2}} \left(\frac{x_s}{2} - x \right) = f(x, \Delta p)$$

با اعمال روش خطی کردن معرفی شده در بخش ۲-۷، معادله خطی حول نقطه $x = \bar{x}$ ، $\Delta p = \Delta \bar{p}$ ، $q = \bar{q}$ عبارت است از

$$q - \bar{q} = a(x - \bar{x}) + b(\Delta p - \Delta \bar{p}) \quad (۴-۲۶)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \bar{q} &= f(\bar{x}, \Delta \bar{p}) \\ a &= \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}, \Delta p=\Delta \bar{p}} = C_1 \sqrt{\frac{p_s - \Delta \bar{p}}{2}} + C_2 \sqrt{\frac{p_s + \Delta \bar{p}}{2}} \\ b &= \left. \frac{\partial f}{\partial \Delta p} \right|_{x=\bar{x}, \Delta p=\Delta \bar{p}} = - \left[\frac{C_1}{2\sqrt{2} \sqrt{p_s - \Delta \bar{p}}} \left(\frac{x_s}{2} + \bar{x} \right) + \frac{C_2}{2\sqrt{2} \sqrt{p_s + \Delta \bar{p}}} \left(\frac{x_s}{2} - \bar{x} \right) \right] < 0 \end{aligned}$$

ضرایب a و b را ضرایب شیر می‌نامند. معادله (۴-۲۶) مدل ریاضی خطی شده شیر تنظیم در نقطه کار $q = \bar{q}$, $\Delta p = \Delta \bar{p}$, $x = \bar{x}$ است. با تغییر نقطه کار ضرایب a و b تغییر می‌کنند. توجه کنید که چون $\partial f / \partial \Delta p$ منفی است، b منفی است.

چون نقطه کار عادی نقطه‌ای است که در آن $\bar{q} = 0$, $\Delta \bar{p} = 0$, $\bar{x} = 0$ ، در نزدیک‌ترین نقطه کار عادی معادله (۴-۲۶) به صورت زیر درمی‌آید

$$q = K_1 x - K_2 \Delta p \quad (۲۷-۴)$$

که در آن

$$K_1 = (C_1 + C_2) \sqrt{\frac{p_s}{\gamma}} > 0$$

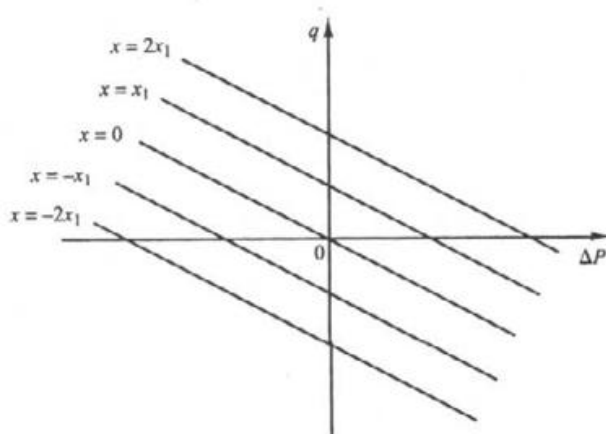
$$K_2 = (C_1 + C_2) \frac{x_s}{4 \sqrt{\gamma} \sqrt{p_s}} > 0$$

معادله (۴-۲۷) مدل ریاضی خطی شیر تنظیم در نزدیکی مبدأ ($\bar{q} = 0$, $\Delta \bar{p} = 0$, $\bar{x} = 0$) است. ناحیه حول مبدأ این نوع سیستم مهمترین ناحیه است، زیرا این سیستم معمولاً در نزدیکی مبدأ کار می‌کند.

شکل ۴-۱۸ این رابطه خطی بین q ، x و Δp را نشان می‌دهد. خطوط راست منحنی‌های مشخصه سروو موتورهای هیدرولیکی خطی شده هستند. این دسته منحنی خطوط راست موازی‌یی با پارامتر x هستند. در این تحلیل فرض کردیم که نیروهای واکنشی بار آنقدر کوچک هستند که می‌توان از آهنگ نشی و تراکم پذیری روغن چشم‌پوشی کرد.

با توجه به شکل ۴-۱۷ الف می‌بینیم که آهنگ عبور روغن q ضربدر dt با حاصلضرب جابه‌جایی پیستون قدرت dy ، مساحت پیستون A ، و چگالی روغن ρ برابر است. پس

$$A \rho dy = q dt$$



شکل ۴-۱۸

منحنی‌های مشخصه سروو موتورهای هیدرولیکی خطی شده.

توجه کنید که به ازای یک آهنگ عبور q مشخص، هر چه سطح پیستون A بزرگتر باشد، سرعت dy/dt کمتر است. پس اگر مساحت پیستون کوچکتر شده، بقیه متغیرها ثابت بمانند، سرعت dy/dt بزرگتر می‌شود. همچنین افزایش آهنگ عبور q نیز باعث افزایش سرعت پیستون قدرت شده، زمان پاسخ را کمتر می‌کند. اکنون می‌توان معادله (۲۷-۴) را به صورت زیر نوشت

$$\Delta P = \frac{1}{K_r} \left(K_1 x - A \rho \frac{dy}{dt} \right)$$

نیروی اعمال شده توسط پیستون قدرت با حاصلضرب اختلاف فشار ΔP در مساحت پیستون برابر است، یا

$$\begin{aligned} A \Delta P &= \text{نیروی اعمال شده توسط پیستون} \\ &= \frac{A}{K_r} \left(K_1 x - A \rho \frac{dy}{dt} \right) \end{aligned}$$

به ازای یک مقدار ماکزیمم برای نیرو، اگر اختلاف فشار به حد کافی بزرگ باشد، می‌توان مساحت پیستون یا حجم روغن سیلندر را کاهش داد. پس برای می‌نیم کردن وزن کنترل‌کننده باید فشار را به حد کافی بالا برد. فرض کنید که پیستون قدرت باری دارای جرم و اصطکاک چسبندگی را حرکت می‌دهد. پس نیروی پیستون به این بار اعمال می‌شود و داریم

$$m\ddot{y} + b\dot{y} = \frac{A}{K_r} (K_1 x - A \rho \dot{y})$$

یا

$$m\ddot{y} + \left(b + \frac{A^2 \rho}{K_r} \right) \dot{y} = \frac{A K_1}{K_r} x \quad (28-4)$$

که در آن m جرم بار و b ضریب اصطکاک چسبندگی است. با فرض این که جابه‌جایی شیر تنظیم x ورودی، و جابه‌جایی پیستون قدرت y خروجی است، تابع تبدیل سرووموتور هیدرولیکی را از معادله (۲۸-۴) به صورت زیر می‌یابیم.

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{X(s)} &= \frac{1}{s \left[\left(\frac{m K_r}{A K_1} \right) s + \frac{b K_r}{A K_1} + \frac{A \rho}{K_1} \right]} \\ &= \frac{K}{s(Ts + 1)} \end{aligned} \quad (29-4)$$

که در آن

$$K = \frac{1}{\frac{b K_r}{A K_1} + \frac{A \rho}{K_1}} \quad T = \frac{m K_r}{b K_r + A^2 \rho}$$

معادله (۲۹-۴) نشان می‌دهد که تابع تبدیل مرتبه دوم است. اگر نسبت $m K_r / (b K_r + A^2 \rho)$ به حد ناچیزی کوچک باشد، یا ثابت زمانی T قابل اغماض باشد، تابع تبدیل $Y(s)/X(s)$ را می‌توان به صورت زیر ساده

کرد

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{s}$$

متذکر می‌شویم که تحلیل دقیق نشان می‌دهد که در نظر گرفتن نشی روغن، تراکم‌پذیری (شامل اثرات هوا) انبساط لوله‌ها، و اثرات مشابه تابع تبدیل به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

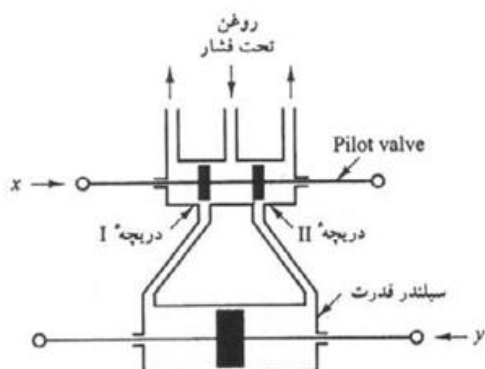
که در آن T_1 و T_2 ثابت زمانی هستند. در واقع این ثابت زمانی‌ها به حجم روغن موجود در مدار بستگی دارد. هر چه این حجم کمتر باشد، ثابت زمانها کوچکترند.

کنترل‌کننده هیدرولیکی انتگرالی. سرووموتور هیدرولیکی شکل ۴-۱۹ یک تقویت‌کننده هیدرولیکی قدرتی کنترل شده با شیر تنظیم و یک عملگر است. این سرووموتور نیز مانند سیستم سرووی هیدرولیکی شکل ۴-۱۷، در صورت کوچک بودن جرم بار به صورت یک انتگرالگیر یا کنترل‌کننده انتگرالی عمل می‌کند. این سروو موتور اساس مدارهای کنترل هیدرولیکی را تشکیل می‌دهد.

در سرووموتور هیدرولیکی شکل ۴-۱۹ روی میله شیر تنظیم (که یک شیر چهار طرفه است) دو پیستون وجود دارد. اگر عرض پیستون از عرض دهانه بدنه شیر کوچکتر باشد، شیر را کم‌پوش می‌نامند. اگر عرض پیستون بزرگتر از عرض دهانه بدنه شیر باشد، شیر را بیش‌پوش می‌نامند. شیر صفرپوش شیری است که عرض پیستون آن با عرض دهانه بدنه شیر برابر باشد. (اگر شیر صفر پوش باشد، تحلیل سروو موتور هیدرولیکی بسیار ساده‌تر می‌شود).

در این تحلیل فرض می‌کنیم روغن به کار رفته تراکم‌ناپذیر است و نیروی لختی پیستون قدرت و بار در مقایسه با نیروی هیدرولیکی پیستون قدرت ناچیز است. همچنین فرض می‌کنیم شیر صفرپوش است و آهنگ عبور روغن با جابه‌جایی میله شیر تنظیمی متناسب است.

این سرووموتور هیدرولیکی به صورت زیر کار می‌کند: اگر ورودی x میله شیر تنظیم را به سمت راست براند، دهانه II باز می‌شود و روغن پرفشار به سمت راست پیستون قدرت وارد می‌شود. چون دهانه I به دهانه



شکل ۴-۱۹ سرووموتور هیدرولیکی.

برگشت وصل است، روغن سمت چپ پیستون تخلیه می‌شود. روغن وارد شده به پیستون قدرت فشار زیادی دارد، ولی روغنی که از آن خارج می‌شود فشار کمی دارد. اختلاف فشار دو طرف پیستون قدرت، آن را به سمت چپ حرکت می‌دهد.

حاصلضرب آهنگ عبور روغن q (kg/s) در زمان dt (s) با حاصلضرب جابه‌جایی پیستون قدرت dy (m) در سطح پیستون A (m²) در چگالی روغن ρ (kg/m³) برابر است. پس

$$A \rho dy = q dt \quad (30-4)$$

چون فرض کرده‌ایم عبور روغن q با جابه‌جایی شیر تنظیم x متناسب است، داریم

$$q = K_1 x \quad (31-4)$$

که در آن K_1 عددی ثابت و مثبت است. با توجه به معادلات (30-4) و (31-4) به دست می‌آوریم

$$A \rho \frac{dy}{dt} = K_1 x$$

تبدیل لاپلاس معادله اخیر، با فرض شرایط اولیه صفر، به دست می‌دهد

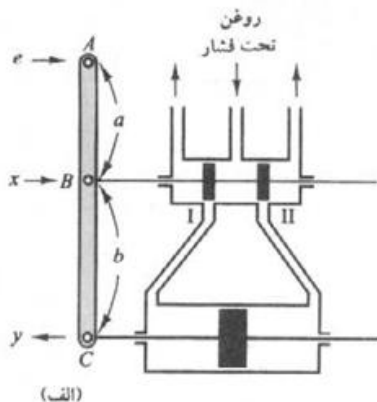
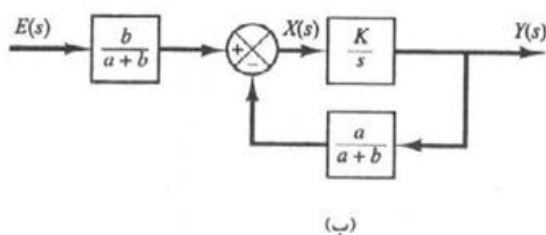
$$A \rho s Y(s) = K_1 X(s)$$

یا

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K_1}{A \rho s} = \frac{K}{s}$$

که در آن $K = K_1 / (A \rho)$ ، پس سرووموتور شکل ۴-۱۹ به صورت یک کنترل‌کننده انتگرالی عمل می‌کند.

کنترل‌کننده هیدرولیکی تناسبی. نشان دادیم که سروو موتور شکل ۴-۱۹ به صورت کنترل‌کننده انتگرالی عمل می‌کند. این سرووموتور را می‌توان با استفاده از یک اتصال فیدبک به صورت کنترل‌کننده تناسبی درآورد. کنترل‌کننده هیدرولیکی شکل ۴-۲۰ (الف) را در نظر بگیرید. سمت چپ میله شیر تنظیم توسط اتصال ABC به



شکل ۴-۲۰ (الف) سروو موتوری که به صورت کنترل‌کننده تناسبی عمل می‌کند؛ (ب) نمودار بلوکی سروو موتور.

سمت چپ پیستون قدرت وصل شده است. این اتصال شناور است و محور ثابتی ندارد.

این کنترل‌کننده طرز کاری اینچنین دارد: اگر ورودی e میله شیر تنظیم را به سمت راست براند، دهانه II باز شده، روغن پرفشار از طریق آن به سمت راست پیستون قدرت وارد می‌شود و آن را به سمت چپ می‌راند. پیستون قدرت در حرکت به سمت چپ اتصال فیدبک ABC را نیز به سمت چپ برده، میله شیر تنظیم نیز به سمت چپ می‌رود. این عمل تا آنجا ادامه می‌یابد که پیستون شیر دوباره دهانه‌های I و II را ببوشاند. نمودار بلوکی سیستم را می‌توان به صورت شکل ۴-۲۰ (ب) رسم کرد. تابع تبدیل بین $Y(s)$ و $E(s)$ عبارت است از

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{\frac{b}{a+b} \frac{K}{s}}{1 + \frac{K}{s} \frac{a}{a+b}}$$

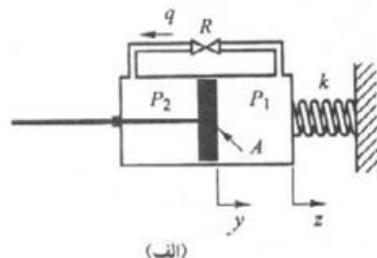
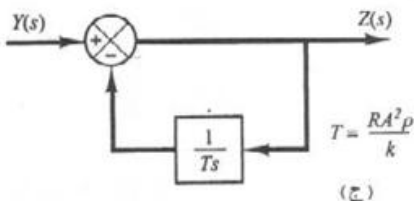
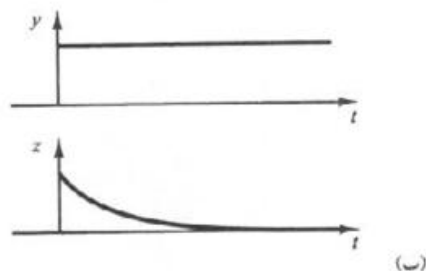
چون در شرایط عادی کار $|Ka/[s(a+b)]| \gg 1$ معادله آخری به شکل زیر ساده می‌شود:

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{b}{a} = K_p$$

تابع تبدیل بین y و e ثابت است. پس کنترل‌کننده هیدرولیکی شکل ۴-۲۰ (الف) به صورت کنترل‌کننده تناسبی عمل می‌کند و بهره آن K_p است. این بهره را می‌توان با تغییر بهره اهرم b/a تنظیم کرد. (مکانیسم تنظیم در این عمل نشان داده نشده است).

پس دیدیم که با افزودن اتصال فیدبک سروو موتور هیدرولیکی به صورت کنترل‌کننده تناسبی عمل می‌کند.

ضربه گیر. ضربه گیر (یا کمک فنر) شکل ۴-۲۱ (الف) به صورت عنصر مشتغیر عمل می‌کند. فرض کنید مکان پیستون y یک تغییر پله‌ای بکند. به این ترتیب z هم به طور لحظه‌ای تغییر مکانی برابر y پیدا می‌کند. ولی به خاطر وجود نیروی فنر روغن از مقاومت R عبور کرده، سیلندر به وضعیت اول خود برمی‌گردد. شکل ۴-۲۱ (ب) منحنی‌های y برحسب t و z برحسب t را نشان می‌دهد.



شکل ۴-۲۱ (الف) ضربه گیر؛
(ب) تغییر پله‌ای x و تغییر متناظر z
برحسب t ؛ (ج) نمودار بلوکی ضربه گیر.

حال بیایید تابع تبدیل بین جابه‌جایی z و جابه‌جایی y را بیابیم. فشار سمت راست پیستون را $P_1(\text{lb}_f / \text{in}^2)$ و فشار سمت چپ آن را با $P_2(\text{lb}_f / \text{in}^2)$ می‌نامیم. نیروی لختی را ندیده می‌گیریم. پس نیروی وارد بر پیستون باید نیروی فنر را خنثی کند. بنابراین

$$A(P_1 - P_2) = kz$$

که در آن A = مساحت پیستون

k = ثابت فنر

آهنگ عبور q عبارت است از

$$q = \frac{P_1 - P_2}{R}$$

که در آن q = آهنگ عبور روغن از مانع

R = مقاومت مانع در مقابل عبور روغن

روغنی که طی dt ثانیه از مانع می‌گذرد باید با تغییر جرم روغن سمت چپ پیستون در همین dt ثانیه برابر باشد، پس

$$q dt = A \rho (dy - dz)$$

که در آن $\rho(\text{lb} / \text{in}^3)$ چگالی روغن است. (فرض کرده‌ایم روغن تراکم‌ناپذیرست، یا ρ = ثابت). این معادله را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد

$$\frac{dy}{dt} - \frac{dz}{dt} = \frac{q}{A\rho} = \frac{P_1 - P_2}{RA\rho} = \frac{kz}{RA^2\rho}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} + \frac{kz}{RA^2\rho}$$

یا

با گرفتن تبدیل لاپلاس دو طرف معادله، به فرض صفر بودن شرایط اولیه، به دست می‌آوریم

$$sY(s) = sZ(s) + \frac{k}{RA^2\rho} Z(s)$$

پس تابع تبدیل این سیستم عبارت است از

$$\frac{Z(s)}{Y(s)} = \frac{s}{s + (k/RA^2\rho)}$$

با تعریف $RA^2\rho/k = T$ به دست می‌آوریم

$$\frac{Z(s)}{Y(s)} = \frac{Ts}{Ts + 1} = \frac{1}{1 + (1/Ts)}$$

شکل ۴-۲۱ (ج) نمایش نمودار بلوکی این سیستم را نشان می‌دهد.

دستیابی به عمل کنترل هیدرولیکی تناسبی - انتگرالی. شکل ۴-۲۲ (الف) نمودار طرح گونه یک کنترل کننده هیدرولیکی تناسبی - انتگرالی را نشان می دهد. نمودار بلوکی این کنترل کننده در شکل ۴-۲۲ (ب) نشان داده شده است. تابع تبدیل $Y(s)/E(s)$ عبارت است از

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{\frac{b}{a+b} \frac{K}{s}}{1 + \frac{Ka}{a+b} \frac{T}{Ts+1}}$$

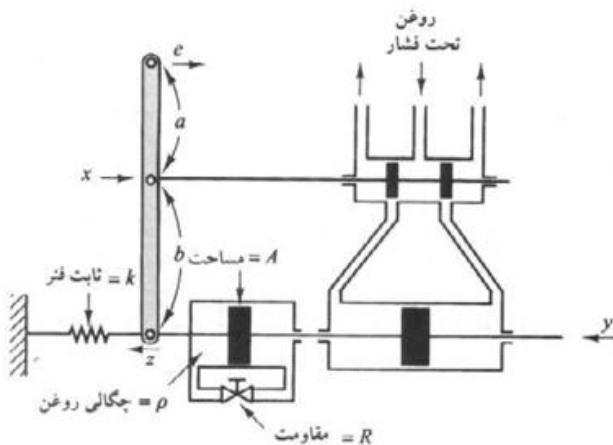
در این کنترل کننده، تحت شرایط معمولی کار $|KaT/[(a+b)(Ts+1)]| \gg 1$ ، که نتیجه می دهد

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right)$$

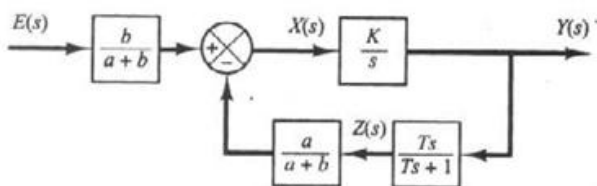
که در آن

$$T_I = T = \frac{RA^T \rho}{k}, \quad K_p = \frac{b}{a}$$

پس کنترل کننده شکل ۴-۲۲ (الف) یک کنترل کننده تناسبی - انتگرالی (PI) است.



(الف)



(ب)

شکل ۴-۲۲

(الف) نمودار طرح گونه یک کنترل کننده هیدرولیکی تناسبی - انتگرالی؛ (ب) نمودار بلوکی کنترل کننده.

دستیابی به عمل کنترل هیدرولیکی تناسبی - مشتقی. شکل ۴-۲۳ (الف) نمودار طرح گونه یک کنترل کننده هیدرولیکی تناسبی - مشتقی را نشان می دهد. سیلندرها ثابت اند و پیستونها می توانند حرکت کنند. برای این سیستم

$$k(y-z) = A(P_2 - P_1)$$

$$q = \frac{P_2 - P_1}{R}$$

$$q dt = \rho A dz$$

پس

$$y = z + \frac{A}{k} q R = z + \frac{RA^2 \rho}{k} \frac{dz}{dt}$$

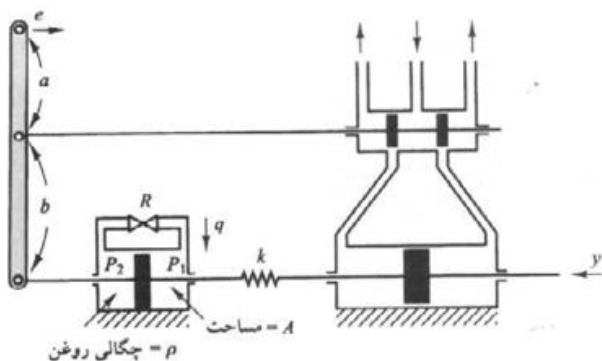
یا

$$\frac{Z(s)}{Y(s)} = \frac{1}{Ts + 1}$$

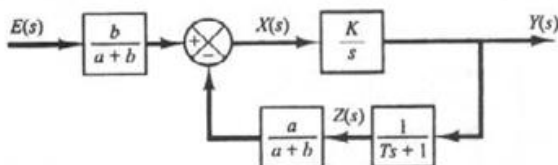
که در آن

$$T = \frac{RA^2 \rho}{k}$$

شکل ۴-۲۳ (ب) نمودار بلوکی این سیستم را نشان می دهد. با توجه به این نمودار بلوکی تابع تبدیل $Y(s)/E(s)$ را می توان به شکل زیر یافت



(الف)



(ب)

شکل ۴-۲۳

(الف) نمودار طرح گونه یک کنترل کننده هیدرولیکی تناسبی - مشتقی؛ (ب) نمودار بلوکی کنترل کننده.

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{\frac{b}{a+b} \frac{K}{s}}{1 + \frac{a}{a+b} \frac{1}{Ts+1}}$$

در شرایط معمولی کار داریم $1 \gg |aK / [(a+b)s(Ts+1)]|$ پس

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = K_p(1 + Ts)$$

که در آن

$$T = \frac{RA^* \rho}{k} \quad , \quad K_\rho = \frac{b}{a}$$

پس کنترل‌کننده شکل ۴-۲۳ (الف) یک کنترل‌کننده تناسبی - مشتقی (PD) است.

دستیابی به عمل کفتری تناسبی - انتگرالی - مشتقی. شکل ۴-۲۴ نمودار طرح گونه یک کنترل کننده تناسبی - انتگرالی - مشتقی هیدرولیکی را نشان می دهد. این ترکیبی از کنترل کننده های تناسبی - انتگرالی و تناسبی - مشتقی است.

اگر دو ضربه‌گیر مشابه باشند، تابع تبدیل $Z(s)/Y(s)$ به صورت زیر به دست می‌آید:

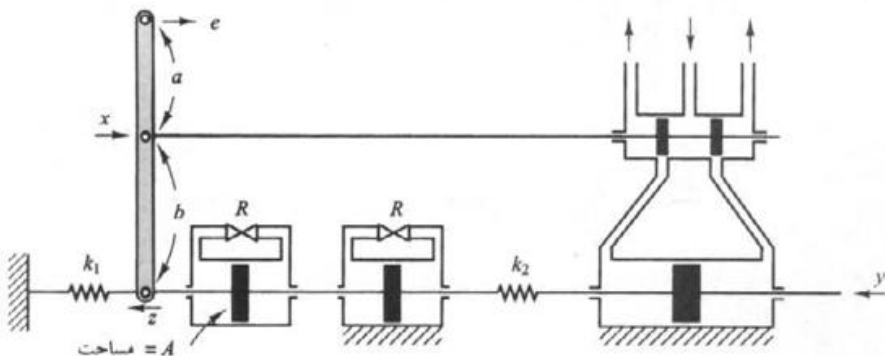
$$\frac{Z(s)}{Y(s)} = \frac{T_1 s}{T_1 T_T s^2 + (T_1 + T_T)s + 1}$$

(این رابطه در مسئله الف-۴ به دست آمده است.)

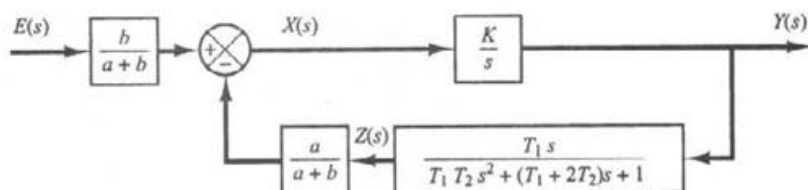
شکل ۴-۲۵ نمودار بلوکی این سیستم را نشان می‌دهد. تابع تبدیل $Y(s)/E(s)$ را می‌توان به صورت زیر

یافت

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{b}{a+b} \frac{\frac{K}{s}}{1 + \frac{a}{a+b} \frac{K}{s} \frac{T_1 s}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2 T_2)s + 1}}$$



شکل ۴-۲۴ نمودار طرح گونه یک کنترل کننده هیدرولیکی تناسبی - انگرالی - مشتقی.



شکل ۴-۲۵ نمودار بلوکی سیستم نشان داده شده در شکل ۴-۲۴.

در شرایط کاری عادی داریم

$$\left| \frac{a}{a+b} \frac{K}{s} \frac{T_1 s}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + 2T_2)s + 1} \right| \gg 1$$

و بنا براین

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{E(s)} &= \frac{b}{a} \frac{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + 2T_2)s + 1}{T_1 s} \\ &= K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \end{aligned}$$

که در آن

$$K_p = \frac{b}{a} \frac{T_1 + 2T_2}{T_1}, \quad K_i = \frac{b}{a} \frac{1}{T_1}, \quad K_d = \frac{b}{a} T_2$$

پس کنترل کننده شکل ۴-۲۴ یک کنترل کننده تناسبی - انتگرالی - مشتقی (PID) است.

۵-۴ سیستمهای گرمایی

سیستمهای گرمایی سیستمهایی هستند که در آنها گرما از مادهای به ماده دیگر منتقل می شوند. سیستمهای گرمایی را می توان برحسب مقاومت و ظرفیت تحلیل کرد، هر چند ظرفیت گرمایی و مقاومت گرمایی را نمی توان به طور دقیق با پارامترهای فشرده نشان داد، زیرا این خواص معمولاً در تمام ماده توزیع شده اند. برای تحلیل دقیق باید از مدلهای با پارامتر توزیع شده استفاده کرد. ولی در اینجا برای ساده کردن تحلیل فرض می کنیم سیستم گرمایی را می توان با مدل پارامتر فشرده نمایش داد، به این ترتیب که مادهای که با مقاومت گرمایی مدل می شود ظرفیت گرمایی ناچیزی دارد، و مقاومت مادهای که با ظرفیت گرمایی مدل می شود در مقابل عبور گرما ناچیز است.

برای انتقال حرارت از مادهای به ماده دیگر سه راه وجود دارد: رسانش، همرفت، و تابش. در اینجا تنها رسانش و همرفت را در نظر می گیریم. (انتقال حرارت به روش تابش تنها موقعی قابل توجه است که دمای تابنده از دمای گیرنده بسیار بالاتر باشد. در اکثر فرایندهای حرارتی انتقال به صورت تابش صورت نمی گیرد.)

برای انتقال حرارت رسانشی و همرفتی داریم

$$q = K \Delta \theta$$

که در آن q = آهنگ عبور گرما، kcal / sec

$\Delta \theta$ = اختلاف دما، °C

K = ضریب تناسب، kcal / sec °C

ضریب K عبارت است از

$$K = \frac{kA}{\Delta X} \quad \text{برای رسانش}$$

$$= HA \quad \text{برای همرفت}$$

که در آن k = رسانایی ویژه گرمایی kcal / m sec °C

A = مساحت عمود بر جهت عبور، m^۲

ΔX = ضخامت رسانه، m

H = ضریب همرفتی، kcal / m^۲ sec °C

مقاومت گرمایی و ظرفیت گرمایی. مقاومت گرمایی R در مقابل انتقال حرارت بین دو ماده را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$R = \frac{\text{تغییر اختلاف دما، } ^\circ\text{C}}{\text{تغییر آهنگ انتقال گرما، kcal/sec}}$$

مقاومت گرمایی برای انتقال حرارت رسانشی و همرفتی عبارت است از

$$R = \frac{d(\Delta \theta)}{dq} = \frac{1}{K}$$

چون رسانایی ویژه گرمایی و ضریب همرفتی تقریباً ثابت‌اند، مقاومت گرمایی رسانشی و همرفتی نیز ثابت است. ظرفیت گرمایی به این صورت تعریف می‌شود

$$C = \frac{\text{تغییر گرمای ذخیره شده، kcal}}{\text{تغییر دما، } ^\circ\text{C}}$$

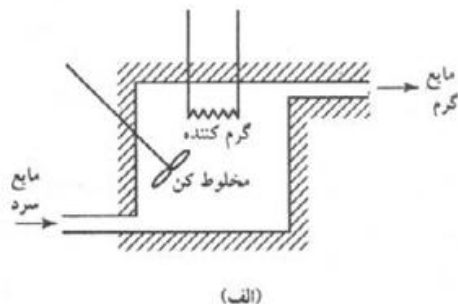
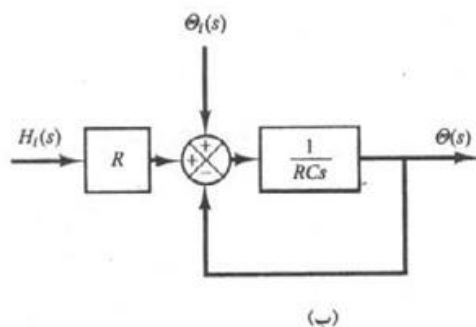
$$C = mc$$

یا

که در آن m = جرم ماده مورد نظر، kg

c = گرمایی ویژه ماده، kcal / kg °C

سیستم گرمایی. سیستم شکل ۴-۲۶ (الف) را در نظر بگیرید. فرض می‌کنیم مخزن عایق‌بندی شده است تا از اتلاف حرارت به هوای اطراف جلوگیری شود. همچنین فرض می‌کنیم در عایق اطراف مخزن گرما ذخیره نمی‌شود و مایع داخل مخزن کاملاً به هم می‌خورد، به نحوی که دمای مخزن یکنواخت است. بنابراین برای توصیف دمای مخزن و مایع خروجی یک دما به کار می‌رود.



شکل ۴-۲۶ (الف) سیستم گرمایی؛ (ب) نمودار بلوکی سیستم.

این کمیات را تعریف می‌کنیم:

$$\bar{\theta}_i = \text{دمای حالت ماندگار مایع ورودی، } ^\circ\text{C}$$

$$\bar{\theta}_o = \text{دمای حالت ماندگار مایع خروجی، } ^\circ\text{C}$$

$$G = \text{آهنگ جریان مایع در حالت ماندگار، kg/sec}$$

$$M = \text{جریم مایع داخل مخزن، kg}$$

$$c = \text{گرمای ویژه مایع، kcal/kg } ^\circ\text{C}$$

$$R = \text{مقاومت گرمایی، } ^\circ\text{C sec/kcal}$$

$$C = \text{ظرفیت گرمایی، kcal/ } ^\circ\text{C}$$

$$\bar{H} = \text{آهنگ گرمای ورودی در حالت ماندگار، kcal/sec}$$

فرض کنید دمای مایع ورودی ثابت نگهداشته شده، آهنگ گرمای ورودی به سیستم (گرمایی که گرمکن تأمین می‌کند) ناگهان از $\bar{H}$ به $\bar{H} + h_i$ تغییر می‌کند، که h_i تغییر کوچکی در آهنگ گرمای ورودی است. بنابراین آهنگ گرمای خروجی به تدریج از $\bar{H}$ به $\bar{H} + h_o$ می‌رسد. دمای مایع خروجی نیز از $\bar{\theta}_o$ به $\bar{\theta}_o + \theta$ می‌رسد. در این سیستم C ، h_o و R به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$h_o = Gc\theta$$

$$C = Mc$$

$$R = \frac{\theta}{h_o} = \frac{1}{Gc}$$

معادله دیفرانسیل این سیستم عبارت است از

$$C d\theta = (h_i - h_o) dt$$

یا

$$C \frac{d\theta}{dt} = h_i - h_o$$

$$RC \frac{d\theta}{dt} + \theta = R h_i$$

توجه کنید که ثابت زمانی سیستم RC یا M/G ثانیه است. تابع تبدیل بین θ و h_i عبارت است از

$$\frac{\Theta(s)}{H_i(s)} = \frac{R}{RCs + 1}$$

که در آن $\Theta(s) = \mathcal{L}[\theta(t)]$ و $H_i(s) = \mathcal{L}[h_i(t)]$.

در عمل دمای مایع ورودی بالا و پایین می‌رود و می‌تواند به صورت اغتشاش عمل کند. (در صورتی که بخواهیم دمای مایع خروجی ثابت باشد، باید یک کنترل‌کننده خودکار نصب کنیم تا برای جریان نوسان دمای مایع ورودی آهنگ جریان ورودی را تنظیم کند.) اگر دمای مایع ورودی به طور ناگهانی از $\bar{\theta}_i$ به $\bar{\theta}_i + \theta_i$ تغییر یابد، ولی آهنگ گرمای ورودی H و آهنگ جریان خروجی G ثابت بماند، آهنگ خروجی گرما از $\bar{H}$ به $\bar{H} + h_o$ و دمای مایع خروجی از $\bar{\theta}_o$ به $\bar{\theta}_o + \theta$ می‌رسد. معادله دیفرانسیل برای این حالت عبارت است از

$$C d\theta = (Gc\theta_i - h_o)dt$$

یا

$$C \frac{d\theta}{dt} = Gc\theta_i - h_o$$

که می‌توان آن را به شکل زیر بازنویسی کرد

$$RC \frac{d\theta}{dt} + \theta = \theta_i$$

تابع تبدیل بین θ و θ_i عبارت است از

$$\frac{\Theta(s)}{\Theta_i(s)} = \frac{1}{RCs + 1}$$

که در آن $\Theta(s) = \mathcal{L}[\theta(t)]$ و $\Theta_i(s) = \mathcal{L}[\theta_i(t)]$.

اگر در سیستم گرمایی هم دمای مایع ورودی و هم آهنگ گرمایی ورودی تغییر کند، ولی آهنگ جریان مایع ثابت بماند، تغییر دمای خروجی θ را می‌توان با معادله دیفرانسیل زیر توصیف کرد

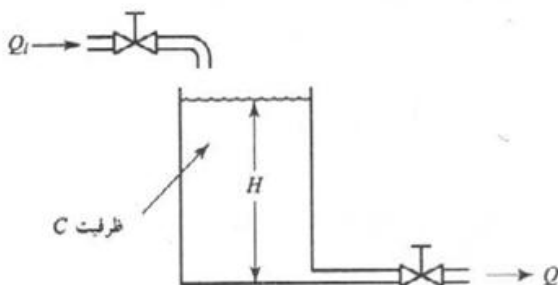
$$RC \frac{d\theta}{dt} + \theta = \theta_i + Rh_i$$

شکل ۴-۲۶ (ب) نمودار بلوکی متناظر با این حالت را نشان می‌دهد. توجه کنید که سیستم دو ورودی دارد.

مسائل نمونه و حلشان

الف ۴-۱ در سیستم سطح مایع شکل ۴-۲۷ فرض کنید آهنگ خروج مایع $Q \text{ m}^3/\text{sec}$ از شیر، و ارتفاع H به صورت زیر مرتبط‌اند:

$$Q = K\sqrt{H} = 0.01\sqrt{H}$$



شکل ۴-۲۷

سیستم سطح مایع.

همچنین فرض کنید که آهنگ جریان ورودی $Q_i = 0.15 \text{ m}^3/\text{sec}$ است و ارتفاع ثابت می‌ماند. در $t < 0$ سیستم در حالت ماندگار قرار دارد ($Q_i = 0.15 \text{ m}^3/\text{sec}$). در $t = 0$ شیر ورودی بسته می‌شود و در نتیجه برای $t \geq 0$ جریان ورودی صفر است. زمان لازم برای رسیدن ارتفاع به نصف مقدار اولیه را بیابید. ظرف C مخزن 2 m^2 است.

حل: در حال ثابت ماندن ارتفاع جریان خروجی و ورودی برابرند. پس ارتفاع اولیه H_0 در $t = 0$ به صورت زیر به دست می‌آید

$$0.15 = 0.01 \sqrt{H_0}$$

$$H_0 = 2.25 \text{ m}$$

یا

معادله سیستم در $t > 0$ عبارت است از

$$-C dH = Q dt$$

یا

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{Q}{C} = \frac{-0.01 \sqrt{H}}{2}$$

پس

$$\frac{dH}{\sqrt{H}} = -0.005 dt$$

فرض کنید در $t = t_1$ ، $H = 1.125 \text{ m}$. با انتگرالگیری از دو طرف معادله بالا به دست می‌آوریم

$$\int_{2.25}^{1.125} \frac{dH}{\sqrt{H}} = \int_0^{t_1} (-0.005) dt = -0.005 t_1$$

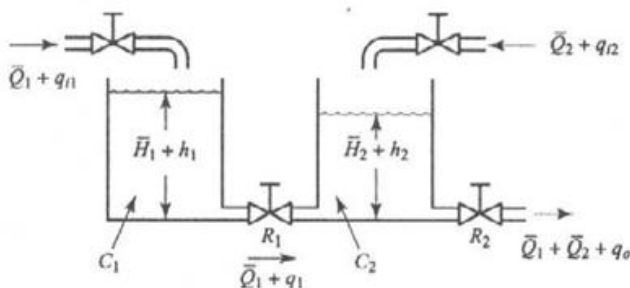
پس

$$2\sqrt{H} \Big|_{2.25}^{1.125} = 2\sqrt{1.125} - 2\sqrt{2.25} = -0.005 t_1$$

یا

$$t_1 = 175.7$$

پس ارتفاع مایع طی 175.7 sec به نصف مقدار اولیه‌اش (2.25 m) می‌رسد.


 شکل ۴-۲۸
سیستم سطح مایع.

الف ۴-۲ سیستم سطح مایع شکل ۴-۲۸ را در نظر بگیرید. در این سیستم $\bar{Q}_1$ و $\bar{Q}_2$ آهنگ جریانهای ورودی، و $\bar{H}_1$ و $\bar{H}_2$ ارتفاع مایع در حالت ماندگار هستند. کمیات q_1 ، h_1 ، q_{12} ، h_2 و q_o را کوچک فرض کنید. نمایش فضای حالت این سیستم را برای حالتی که q_{11} و q_{12} و h_1 و h_2 خروجی‌اند، به دست آورید.

حل: معادلات سیستم عبارت است از

$$C_1 dh_1 = (q_{11} - q_1) dt \quad (۳۲-۴)$$

$$\frac{h_1 - h_2}{R_1} = q_1 \quad (۳۳-۴)$$

$$C_2 dh_2 = (q_1 + q_{12} - q_o) dt \quad (۳۴-۴)$$

$$\frac{h_2}{R_2} = q_o \quad (۳۵-۴)$$

با حذف q_1 از معادله (۳۲-۴) [به کمک معادله (۳۳-۴)] به دست می‌آوریم

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{1}{C_1} \left(q_{11} - \frac{h_1 - h_2}{R_1} \right) \quad (۳۶-۴)$$

با استفاده از معادلات (۳۳-۴) و (۳۵-۴) q_1 و q_o را از معادله (۳۴-۴) حذف می‌کنیم و به دست می‌آوریم

$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{1}{C_2} \left(\frac{h_1 - h_2}{R_1} + q_{12} - \frac{h_2}{R_2} \right) \quad (۳۷-۴)$$

متغیرهای حالت x_1 و x_2 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$x_2 = h_2$$

$$x_1 = h_1$$

متغیرهای ورودی u_1 و u_2 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$u_1 = q_{11}$$

$$u_2 = q_{12}$$

و متغیرهای خروجی y_1 و y_2 را به صورت زیر

$$y_1 = h_1 = x_1$$

$$y_2 = h_2 = x_2$$

حال می‌توانیم معادلات (۴-۳۶) و (۴-۳۷) را به صورت زیر بنویسیم

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{R_1 C_1} x_1 + \frac{1}{R_1 C_1} x_2 + \frac{1}{C_1} u_1$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{R_1 C_1} x_1 - \left(\frac{1}{R_1 C_2} + \frac{1}{R_2 C_2} \right) x_2 + \frac{1}{C_2} u_2$$

نمایش ماتریسی استاندارد به صورت زیر است

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & \frac{1}{R_1 C_1} \\ \frac{1}{R_1 C_2} & -\left(\frac{1}{R_1 C_2} + \frac{1}{R_2 C_2} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

که معادله حالت است. معادله خروجی عبارت است از

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

الف ۳-۴ ثابت گاز هر گازی را می‌توان با آزمایش دقیق و یافتن همزمان مقادیر p ، v ، و T به دست آورد.

ثابت گاز $R_{\text{موا}}$ را بیابید. توجه کنید که در 32°F و 14.7 psia حجم مخصوص هوا $12.39 \text{ ft}^3/\text{lb}$ است. سپس ظرفیت یک محفظه فشار 20 ft^3 را، که در آن هوا در دمای 160°F قرار دارد، بیابید. فرض کنید فرایند انبساط همدماست.

حل:

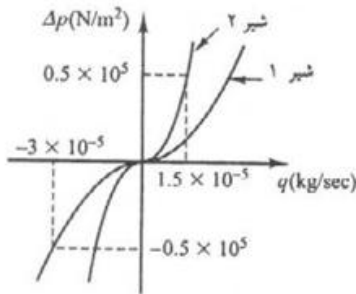
$$R_{\text{موا}} = \frac{pv}{T} = \frac{14.7 \times 14.4 \times 12.39}{460 + 32} = 53.3 \text{ ft} \cdot \text{lb}_f / \text{lb} \cdot ^\circ\text{R}$$

با توجه به معادله (۴-۱۲) ظرفیت محفظه فشار 20 ft^3 عبارت است از

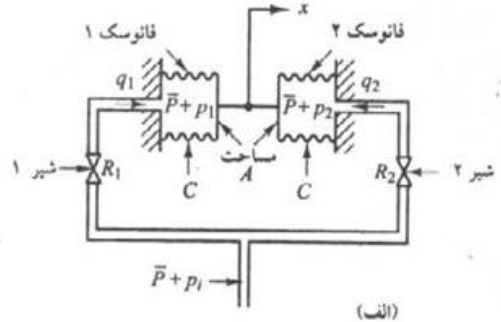
$$C = \frac{V}{nR_{\text{موا}} T} = \frac{20}{1 \times 53.3 \times 620} = 6.05 \times 10^{-2} \frac{\text{lb}}{\text{lb}_f / \text{ft}^3}$$

برحسب یکاهای SI، هوا R برابر است با

$$R_{\text{موا}} = 287 \text{ N} \cdot \text{m} / \text{kg} \cdot \text{K}$$



(ب)



(الف)

شکل ۴-۲۹ (الف) سیستم نیوماتیکی؛ (ب) منحنی اختلاف فشار بر حسب آهنگ عبور جرمی.

الف ۴-۴ در سیستم نیوماتیکی شکل ۴-۲۹ (الف) در $t < 0$ شرایط حالت ماندگار برقرار است و فشار در تمام سیستم $\bar{P}$ است. دو فانوسک را مشابه فرض کنید. در $t = 0$ فشار ورودی از $\bar{P}$ به $\bar{P} + p_1$ می‌رسد. فشارهای داخل فانوسکهای ۱ و ۲ نیز به ترتیب $\bar{P} + p_1$ و $\bar{P} + p_2$ می‌رسد. ظرفیت (حجم) هر فانوسک $5 \times 10^{-5} \text{ N/m}^2$ است، و اختلاف فشاری Δp (اختلاف بین p_1 و p_2 یا اختلاف بین p_2 و p_1) بین $-5 \times 10^{-5} \text{ N/m}^2$ و $5 \times 10^{-5} \text{ N/m}^2$ می‌باشد. آهنگ عبور جرمی (kg/s) از شیرها در شکل ۴-۲۹ (ب) مشخص شده است. فرض کنید انبساط یا انقباض فانوسکها با فشار اعمال شده به آنها متناسب، ثابت فتر معادل سیستم فانوسکها $k = 1 \times 10^5 \text{ N/m}$ و سطح هر فانوسک برابر $A = 15 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ است.

جابه‌جایی وسط میله متصل بین دو فانوسک را x فرض کرده، تابع تبدیل $X(s)/P_1(s)$ را بیابید. فرض کنید افزایش انبساط همدماست و دمای تمام سیستم در 30°C تثبیت شده است. همچنین نمای چندسانگردی n را ۱ فرض کنید.

حل: با توجه به بخش ۳-۴ تابع تبدیل $P_1(s)/P_1(s)$ را می‌توان به شکل زیر یافت

$$\frac{P_1(s)}{P_1(s)} = \frac{1}{R_1 C s + 1} \quad (38-4)$$

به نحوی مشابه $P_2(s)/P_1(s)$ عبارت است از

$$\frac{P_2(s)}{P_1(s)} = \frac{1}{R_2 C s + 1} \quad (39-4)$$

نیروی که بر فانوسک ۱ وارد می‌شود $A(\bar{P} + p_1)$ و نیرویی که بر فانوسک ۲ وارد می‌شود $A(\bar{P} + p_2)$ است. نیروی برآیند توسط kx یعنی نیروی فنری سطح موجدار فانوسکها، خشی می‌شود

$$A(p_1 - p_2) = kx$$

یا

$$A[P_1(s) - P_2(s)] = kX(s) \quad (40-4)$$

با توجه به معادلات (۳۸-۴) و (۳۹-۴) به دست می‌آوریم

$$P_i(s) - R_f(s) = \left(\frac{1}{R_1 Cs + 1} - \frac{1}{R_f Cs + 1} \right) P_i(s) = \frac{R_f Cs - R_1 Cs}{(R_1 Cs + 1)(R_f Cs + 1)} P_i(s)$$

با گذاشتن معادله اخیر در معادله (۴-۴۰) و بازنویسی آن، تابع تبدیل $X(s)/P_i(s)$ به صورت زیر به دست می‌آید

$$\frac{X(s)}{P_i(s)} = \frac{A}{k} \frac{(R_f C - R_1 C)s}{(R_1 Cs + 1)(R_f Cs + 1)} \quad (۴-۴۱)$$

مقادیر عددی مقاومتهای متوسط R_1 و R_f عبارت است از

$$R_1 = \frac{d\Delta p}{dq_1} = \frac{0.05 \times 10^5}{3 \times 10^{-5}} = 0.167 \times 10^{10} \frac{\text{N/m}^2}{\text{kg/s}}$$

$$R_f = \frac{d\Delta p}{dq_f} = \frac{0.05 \times 10^5}{1.5 \times 10^{-5}} = 0.333 \times 10^{10} \frac{\text{N/m}^2}{\text{kg/s}}$$

مقدار عددی ظرفیت C هر فانوسک برابر است با

$$C = \frac{V}{n R_{\text{وا}} T} = \frac{5 \times 10^{-4}}{1 \times 287 \times (273 + 30)} = 5.75 \times 10^{-9} \frac{\text{kg}}{\text{N/m}^2}$$

که در آن

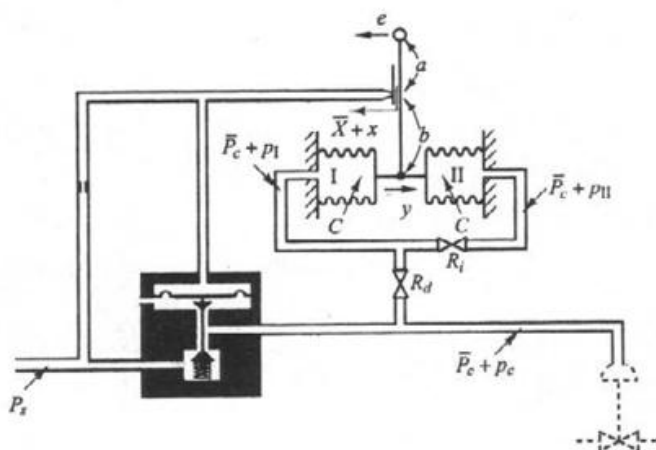
$$R_1 C = 0.167 \times 10^{10} \times 5.75 \times 10^{-9} = 9.60 \text{ sec}$$

$$R_f C = 0.333 \times 10^{10} \times 5.75 \times 10^{-9} = 19.2 \text{ sec}$$

با گذاشتن مقادیر عددی A ، k ، $R_1 C$ و $R_f C$ در معادله (۴-۴۱) به دست می‌آوریم

$$\frac{X(s)}{P_i(s)} = \frac{1.44 \times 10^{-7} s}{(9.6s + 1)(19.2s + 1)}$$

الف ۴-۵ نمودار بلوکی کنترل‌کننده نیوماتیکی شکل ۴-۳۰ را رسم کنید. سپس تابع تبدیل این کنترل‌کننده را بیابید، فرض کنید $R_d \ll R_f$. همچنین فرض کنید دو فانوسک مشابه هستند.



شکل ۴-۳۰

نمودار طرح گونه یک
کنترل‌کننده نیوماتیکی.

اگر مقاومت R_d برداشته شود (و به جای آن لوله‌ای هم اندازه لوله خط گذاشته شود) چه عمل کنترلی حاصل می‌شود؟ اگر مقاومت R_I برداشته شود (و به جای آن لوله‌ای هم اندازه لوله خط گذاشته شود) چه عمل کنترلی حاصل می‌شود؟

حل: بیابید فرض کنیم فاصله نازل - پره به ازای $e=0$ برابر $\bar{X}$ و فشار کنترل‌کننده برابر $\bar{P}_c$ است. در تحلیل فعلی تغییرات نسبت به مقادیر مرجع را کوچک فرض می‌کنیم. متغیرها عبارت‌اند از:

$$e = \text{تغییر کوچک سیگنال خطا}$$

$$x = \text{تغییر کوچک فاصله نازل - پره}$$

$$p_c = \text{تغییر کوچک فشار کنترل‌کننده}$$

$$p_I = \text{تغییر کوچک فشار فانوسک I ناشی از تغییر کوچک فشار کنترل‌کننده}$$

$$p_{II} = \text{تغییر کوچک فشار فانوسک II ناشی از تغییر کوچک فشار کنترل‌کننده}$$

$$y = \text{تغییر کوچک سر پایی پره}$$

در این کنترل‌کننده p_c از طریق مقاومت R_d به فانوسک I منتقل می‌شود. به نحوی مشابه p_c از طریق مقاومت R_d و مقاومت R_I به فانوسک II منتقل می‌شود. رابطه تقریبی بین p_c و p_I عبارت است از

$$\frac{P_I(s)}{P_c(s)} = \frac{1}{R_d C s + 1} = \frac{1}{T_d s + 1}$$

که در آن $R_d C = T_d$ زمان مشتق است. به نحوی مشابه p_I و p_{II} توسط تابع تبدیل زیر به هم مربوط می‌شوند

$$\frac{P_{II}(s)}{P_I(s)} = \frac{1}{R_I C s + 1} = \frac{1}{T_I s + 1}$$

که در آن $R_I C = T_I$ زمان انتگرال است. معادله توازن نیرو در فانوسک عبارت است از

$$A(p_I - p_{II}) = k_s y$$

که k_s ثابت فنر معادل فانوسک‌ها و A مساحت سطح مقطع آنهاست. رابطه بین متغیرهای e ، x ، و y به صورت زیر است

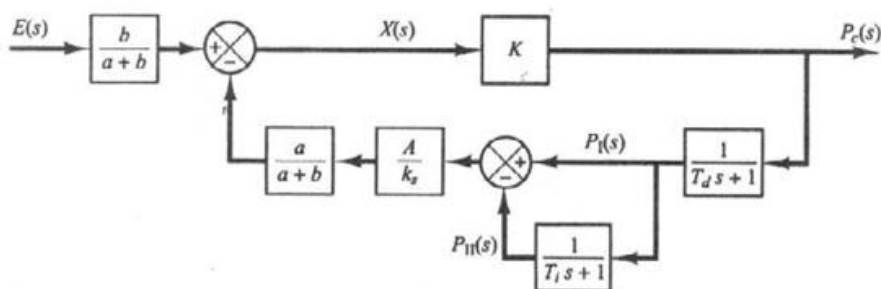
$$x = \frac{b}{a+b} e - \frac{a}{a+b} y$$

رابطه p_c و x عبارت است از

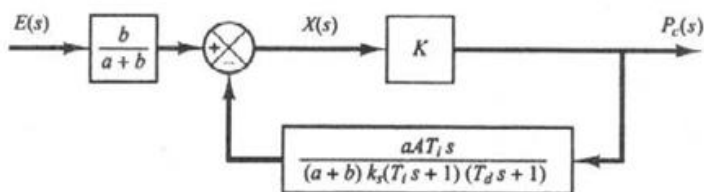
$$p_c = K x \quad (k > 0)$$

با توجه به معادلاتی که به دست آوردیم، نمودار بلوکی شکل ۴-۳۱ (الف) را رسم می‌کنیم. ساده کردن این نمودار بلوکی به نمودار شکل ۴-۳۱ (ب) می‌انجامد. تابع تبدیل بین $E(s)$ و $P_c(s)$ عبارت است از

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = \frac{\frac{b}{a+b} K}{1 + K \frac{a}{a+b} \frac{1}{k_s} \left(\frac{T_I s}{T_I s + 1} \right) \left(\frac{1}{T_d s + 1} \right)}$$



(الف)



(ب)

شکل ۳۱-۴ (الف) نمودار بلوکی کنترل کننده نیوماتیکی شکل ۳۰-۴؛ (ب) نمودار بلوکی ساده شده.

برای یک کنترل کننده نیوماتیکی در شرایط عادی $|KaAT_i s / [(a+b)k_s(T_i s + 1)(T_d s + 1)]|$ بسیار بزرگتر از یک است و $T_i \gg T_d$ ؛ بنابراین تابع تبدیل را می توان به صورت زیر ساده کرد:

$$\begin{aligned} \frac{P_c(s)}{E(s)} &\approx \frac{bk_s(T_d s + 1)(T_i s + 1)}{aAT_i s} \\ &= \frac{bk_s}{aA} \left(\frac{T_i + T_d}{T_i} + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \\ &\approx K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \end{aligned}$$

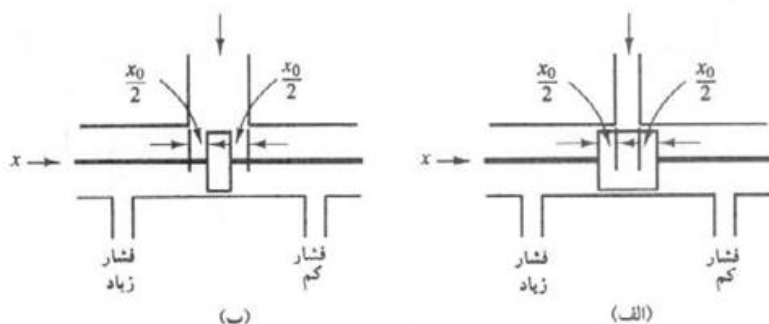
که در آن

$$K_p = \frac{bk_s}{aA}$$

پس کنترل کننده شکل ۳۰-۴ یک کنترل کننده تناسبی - انتگرالی - مشتقی است.

اگر مقاومت R_d را برداریم، یا $R_d = 0$ ، عمل کنترلی تناسبی - انتگرالی حاصل می شود.

اگر مقاومت R_i را برداریم، یا $R_i = 0$ ، یک کنترل کننده تناسبی - انتگرالی دارای باند باریک، یا دو وضعیتی حاصل می شود. (توجه کنید که دو فانوسک اثر یکدیگر را خنثی می کنند و دیگر فیدبکی در کار نیست.)



شکل ۴-۳۲

(الف) شیر بیش‌پوش؛ (ب) شیر کم‌پوش.

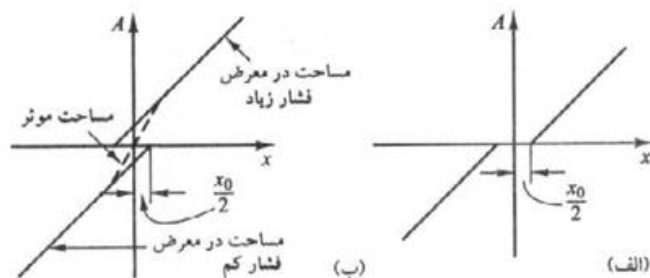
الف ۴-۶ شیرهای ماسوره‌ای واقعی به خاطر تورلانسهای ساخت یا کم‌پوش هستند یا بیش‌پوش. شیرهای کم‌پوش و بیش‌پوش شکل‌های ۴-۳۲ (الف) و (ب) را در نظر بگیرید. منحنی‌های مساحت باز دهانه A برحسب جابه‌جایی x را رسم کنید.

حل: برای شیر بیش‌پوش یک ناحیه مرده بین $-\frac{1}{4}x_0$ و $\frac{1}{4}x_0$ یا $-\frac{1}{4}x_0 < x < \frac{1}{4}x_0$ وجود دارد. منحنی مساحت باز دهانه A برحسب جابه‌جایی x در شکل ۴-۳۳ (الف) نشان داده شده است. چنین شیری، شیر کنترل‌کننده مناسبی نیست.

شکل ۴-۳۳ (ب) منحنی مساحت باز دهانه A برحسب جابه‌جایی x شیر کم‌پوش را نشان می‌دهد. سطح مؤثر در ناحیه کم‌پوشی شیب تندتری دارد، که به معنی حساسیت بیشتر است. شیرهایی که برای کارهای کنترلی به کار می‌روند معمولاً کم‌پوش هستند.

الف ۴-۷ شکل ۴-۳۴ یک کنترل‌کننده هیدرولیکی فورانی را نشان می‌دهد. سیال هیدرولیکی از لوله فوران بیرون می‌جهد. اگر لوله به سمت راست وضعیت تعادل منحرف شود، پیستون قدرت به سمت چپ می‌رود و برعکس. شیر فورانی کمتر از شیر پره‌ای به کار می‌رود، زیرا پاسخ آن کندتر است و مشخصات نسبتاً پیش‌بینی نشده‌ای دارد. مزیت اصلی این شیر عدم حساسیت به ناخالصی‌های روغن است.

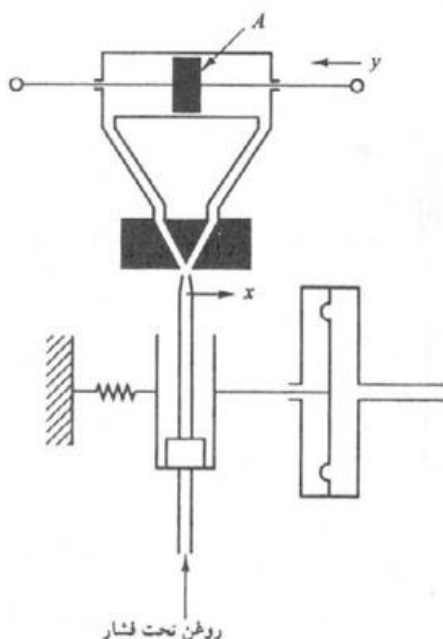
فرض کنید پیستون قدرت به بار سبکی وصل است، به نحوی که نیروی لختی عنصر بار در مقابل نیروی هیدرولیکی پیستون قدرت قابل اغماض است. این کنترل‌کننده چه عمل کنترلی انجام می‌دهد؟



شکل ۴-۳۳

(الف) مساحت باز دهانه A برحسب جابه‌جایی x برای شیر بیش‌پوش.

(ب) مساحت باز دهانه A برحسب جابه‌جایی x برای شیر کم‌پوش.



شکل ۴-۳۴

کنترل کننده هیدرولیکی فورانی.

حل: جابه‌جایی نازل نسبت به وضعیت تعادل را x ، و جابه‌جایی پیستون قدرت را y فرض کنید. اگر نازل به مقدار کوچک x به راست منحرف شود، روغن به سمت راست پیستون قدرت رفته، روغن سمت چپ آن به مخزن تخلیه می‌شود. روغنی که وارد سیلندر قدرت می‌شود پرفشار است، ولی روغنی که از آن خارج می‌شود فشار کمی دارد. اختلاف فشار حاصل باعث حرکت پیستون قدرت به سمت چپ می‌شود. به ازای جابه‌جایی کوچک نازل، آهنگ عبور روغن q به سیلندر با x متناسب است؛ یعنی

$$q = K_1 x$$

برای سیلندر قدرت

$$A \rho dy = q dt$$

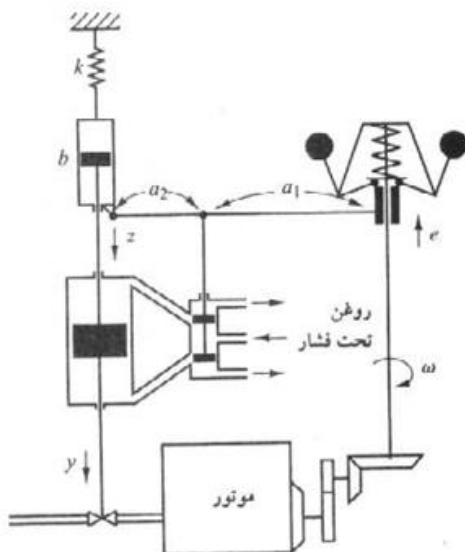
که در آن A سطح پیستون قدرت و ρ چگالی روغن است. پس

$$\frac{dy}{dt} = \frac{q}{A \rho} = \frac{K_1}{A \rho} x = K x$$

که در آن $K = K_1 / (A \rho)$ مقداری ثابت است. تابع تبدیل $Y(s) / X(s)$ عبارت است از

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{s}$$

این کنترل کننده عمل کنترل انتگرالی را انجام می‌دهد.



شکل ۳۵-۴ سیستم کنترل سرعت.

الف ۴-۸ طرز کار سیستم کنترل سرعت شکل ۳۵-۴ را شرح دهید.

حل: با افزایش سرعت موتور، غلاف ناظم ملخی به سمت بالا می‌رود. این حرکت ورودی کنترل‌کننده هیدرولیکی است. سیگنال خطای مثبت (حرکت رو به بالای غلاف) پیستون قدرت را به سمت پایین می‌راند. شیر سوخت بسته‌تر شده، از سرعت موتور کاسته می‌شود. شکل ۳۶-۴ نمودار بلوکی این سیستم را نشان می‌دهد. با توجه به نمودار بلوکی شکل ۳۶-۴ تابع تبدیل $Y(s)/E(s)$ را می‌توان به صورت زیر یافت

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{a_2}{a_1 + a_2} \frac{\frac{K}{s}}{1 + \frac{a_1}{a_1 + a_2} \frac{bs}{bs + k} \frac{K}{s}}$$

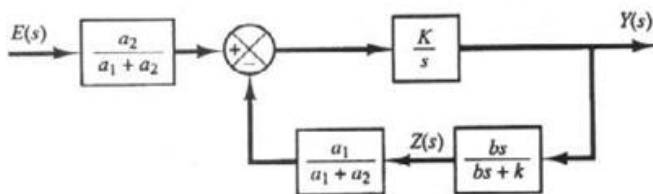
اگر شرط زیر صادق باشد

$$\left| \frac{a_1}{a_1 + a_2} \frac{bs}{bs + k} \frac{K}{s} \right| \gg 1$$

تابع تبدیل به صورت زیر ساده می‌شود

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{a_2}{a_1 + a_2} \frac{a_1 + a_2}{a_1} \frac{bs + k}{bs} = \frac{a_2}{a_1} \left(1 + \frac{k}{bs} \right)$$

پس این کنترل‌کننده به صورت تناسبی - انتگرالی عمل می‌کند.



شکل ۳۶-۴

نمودار بلوکی سیستم

کنترل سرعت شکل ۳۵-۴.

چون $q_r = (P_r - P'_r) / R$ به دست می‌آوریم

$$\dot{w} = \frac{q_r}{A\rho} = \frac{A(P_r - P'_r)}{A' R \rho}$$

یا

$$A(P_r - P'_r) = B\dot{w} \quad (۴۵-۴)$$

با گذاشتن معادلات (۴۳-۴) و (۴۵-۴) در معادله (۴۲-۴) به دست می‌آوریم

$$k_r y - k_r w = k_1 z + B\dot{w}$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس از دو طرف این معادله، با فرض صفر بودن شرایط اولیه، به دست می‌آوریم

$$k_r Y(s) = (k_r + Bs)W(s) + k_1 Z(s) \quad (۴۶-۴)$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس از معادله (۴۴-۴) با فرض صفر بودن شرایط اولیه به دست می‌آوریم

$$W(s) = \frac{k_1 + Bs}{Bs} Z(s) \quad (۴۷-۴)$$

به کمک معادله (۴۷-۴)، $W(s)$ را از معادله (۴۶-۴) حذف کرده، به دست می‌آوریم

$$k_r Y(s) = (k_r + Bs) \frac{k_1 + Bs}{Bs} Z(s) + k_1 Z(s)$$

که از آن می‌توانیم تابع تبدیل $Z(s)/Y(s)$ را بیابیم

$$\frac{Z(s)}{Y(s)} = \frac{k_r s}{Bs^2 + (2k_1 + k_r)s + \frac{k_1 k_r}{P}}$$

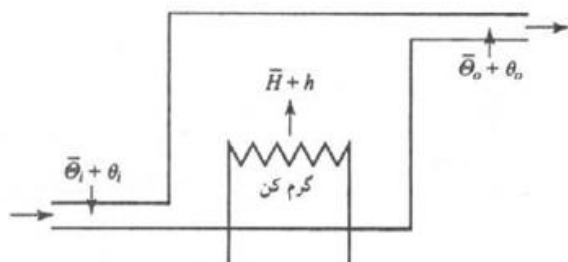
با ضرب $B/(k_1 k_r)$ در صورت و مخرج این معادله به دست می‌آوریم

$$\frac{Z(s)}{Y(s)} = \frac{\frac{B}{k_1} s}{\frac{B_r}{k_1 k_r} s^2 + \left(\frac{2B}{k_r} + \frac{B}{k_1} \right) s + 1}$$

تعریف می‌کنیم $T_1 = B/k_1$ و $T_r = B/k_r$. پس تابع تبدیل $Z(s)/Y(s)$ به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{Z(s)}{Y(s)} = \frac{T_1 s}{T_1 T_r s^2 + (T_1 + 2T_r)s + 1}$$

الف ۴-۱۵ نمودار بلوکی سیستم گرمایش هوای شکل ۴-۳۸ را با فرض کوچک بودن تغییرات نسبت به حالت ماندگار رسم کنید. اتلاف گرما به محیط اطراف و ظرفیت گرمایی بخشهای فلزی گرمکن را ندیده بگیرید.



شکل ۴-۳۸ سیستم گرمایش هوا.

حل: کمیت‌های زیر را تعریف می‌کنیم

$$\bar{\theta}_i = \text{دمای هوای ورودی در حالت ماندگار، } ^\circ\text{C}$$

$$\bar{\theta}_o = \text{دمای هوای خروجی در حالت ماندگار، } ^\circ\text{C}$$

$$G = \text{آهنگ عبور جریان هوا از محفظه گرمایش، kg/sec}$$

$$M = \text{جرم هوای داخل محفظه گرمایش، kg}$$

$$c = \text{گرمای ویژه هوا، kcal/kg } ^\circ\text{C}$$

$$R = \text{مقاومت گرمایی، } ^\circ\text{C sec/kcal}$$

$$C = \text{ظرفیت گرمایی هوای داخل محفظه گرمایش، kcal/} ^\circ\text{C}$$

$$\bar{H} = \text{گرمای ورودی در حالت ماندگار، kcal/sec}$$

فرض می‌کنیم گرمای ورودی به طور ناگهانی از $\bar{H}$ به $\bar{H} + h$ تغییر کرده، دمای هوای ورودی به طور ناگهانی از $\bar{\theta}_i$ به $\bar{\theta}_i + \theta_i$ می‌رسد. در این صورت دمای هوای خروجی از $\bar{\theta}_o$ به $\bar{\theta}_o + \theta_o$ تغییر می‌کند.

معادله توصیف کننده رفتار سیستم عبارت است از

$$C d\theta_o = [h + Gc(\theta_i - \theta_o)] dt$$

$$C \frac{d\theta_o}{dt} = h + Gc(\theta_i - \theta_o) \quad \text{یا}$$

چون

$$Gc = \frac{1}{R}$$

به دست می‌آوریم

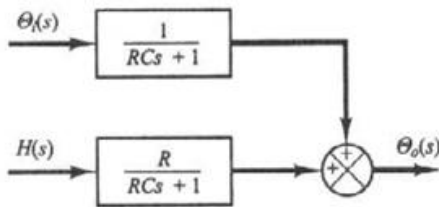
$$C \frac{d\theta_o}{dt} = h + \frac{1}{R}(\theta_i - \theta_o)$$

$$RC \frac{d\theta_o}{dt} + \theta_o = R h + \theta_i \quad \text{یا}$$

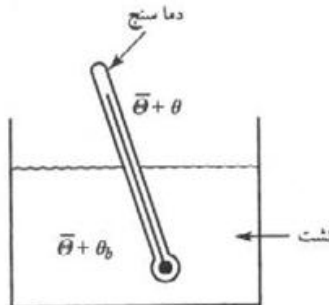
با گرفتن تبدیل لاپلاس از معادله اخیر و گذاشتن شرط اولیه $\theta_o(0) = 0$ به دست می‌آوریم

$$\Theta_o(s) = \frac{R}{RCs + 1} H(s) + \frac{R}{RCs + 1} \Theta_i(s)$$

نمودار بلوکی متناظر با این معادله در شکل ۴-۳۹ نشان داده شده است.



شکل ۴-۳۹ نمودار بلوکی سیستم گرمایش هوای شکل ۴-۳۸.



شکل ۴-۴۰ دماسنج جیوه‌ای با لوله نازک شیشه‌ای.

الف ۴-۱۱ دماسنج جیوه‌ای شکل ۴-۴۰ را که لوله‌ای نازک و شیشه‌ای دارد، در نظر بگیرید. فرض کنید دماسنج در دمای یکنواخت $\bar{\theta}$ (دمای محیط) قرار دارد و در $t=0$ در تشتی با دمای $\bar{\theta} + \theta_b$ فرو برده می‌شود. θ_b دمای تشت نسبت به دمای محیط $\bar{\theta}$ است (و می‌تواند ثابت یا متغیر باشد). دمای لحظه‌ای دماسنج را $\bar{\theta} + \theta$ بگیرید، θ تغییر دمای سنسور، یا شرط اولیه $\theta(0)=0$ است. مدل ریاضی سیستم را بیابید. مشابه الکتریکی سیستم دماسنج را نیز بیابید.

حل: با در نظر گرفتن توازن گرما می‌توان مدل ریاضی سیستم را به این صورت یافت: گرمایی که در فاصله dt به دماسنج داده می‌شود $q dt$ است، که در آن q آهنگ انتقال حرارت به دماسنج است. این گرما در ظرفیت گرمایی C دماسنج ذخیره می‌شود و دمای آن را به اندازه $d\theta$ بالا می‌برد. پس معادله توازن گرما عبارت

$$C d\theta = q dt \quad (4-48)$$

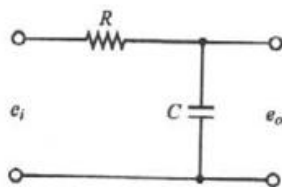
مقاومت گرمایی را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$R = \frac{d(\Delta\theta)}{dq} = \frac{\Delta\theta}{q}$$

پس آهنگ انتقال حرارت را می‌توان برحسب مقاومت گرمایی به صورت زیر نوشت

$$q = \frac{(\bar{\theta} + \theta_b) - (\bar{\theta} + \theta)}{R} = \frac{\theta_b - \theta}{R}$$

که در آن $\bar{\theta} + \theta_b$ دمای تشت و $\bar{\theta} + \theta$ دمای دماسنج است. پس می‌توانیم معادله (۴-۴۸) را به صورت زیر



شکل ۴-۴۱ مشابه الکتریکی

سیستم دمانج شکل ۴-۴۰.

بنویسیم

$$C \frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta_b - \theta}{R}$$

یا

$$RC \frac{d\theta}{dt} + \theta = \theta_b \quad (49-4)$$

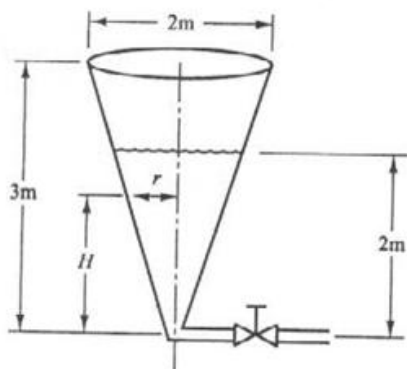
معادله (۴۹-۴) مدل ریاضی سیستم دمانج است.

با توجه به معادله (۴۹-۴) مشابه الکتریکی سیستم دمانج را می‌توان با معادله زیر توصیف کرد

$$RC \frac{de_o}{dt} + e_o = e_i$$

شکل ۴-۴۱ یک مدار الکتریکی قابل توصیف با معادله بالا را نشان می‌دهد.

مسائل



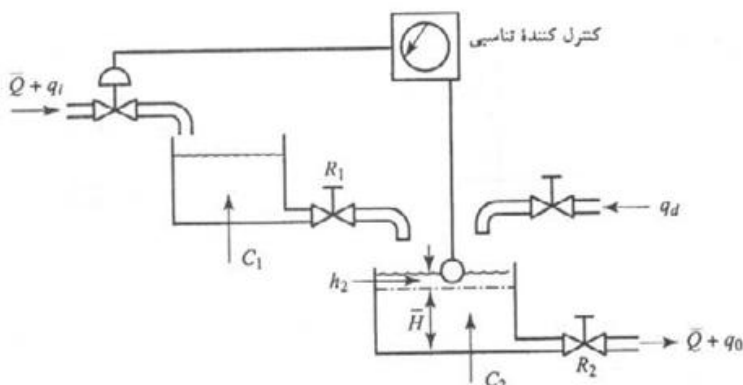
ب ۴-۱ مخزن آب مخروطی شکل ۴۲-۴ را در نظر بگیرید. عبور جریان از شیر متلاطم است و با ارتفاع H به صورت زیر ارتباط دارد.

$$Q = 0.705 \sqrt{H}$$

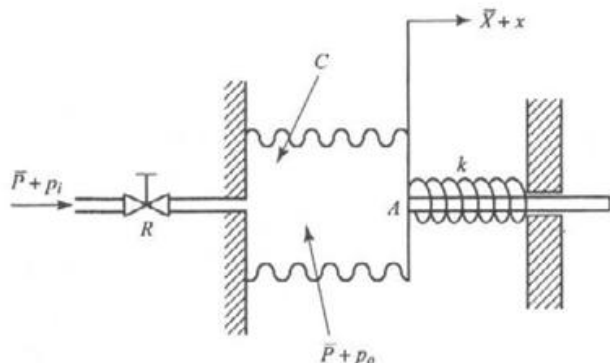
که در آن Q آهنگ جریان بر حسب m^3/sec و H ارتفاع بر حسب متر است. در $t=0$ ارتفاع آب ۲ m است. ارتفاع آب در $t=60$ sec چقدر است؟

ب ۴-۲ سیستم کنترل سطح مایع شکل ۴۲-۴ را در نظر بگیرید. کنترل‌کننده از نوع تناسبی است. نقطه تنظیم کنترل‌کننده ثابت است.

شکل ۴۲-۴ سیستم مخزن مخروطی.



شکل ۴-۴۳
سیستم کنترل سطح مایع.



شکل ۴-۴۴
سیستم نیوماتیکی.

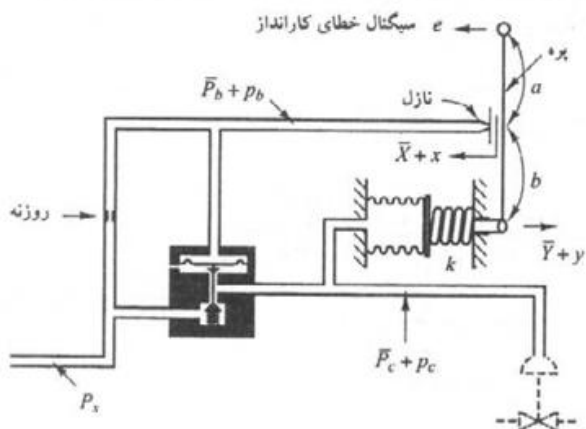
ب ۴-۴۵ یک کنترل کننده نیوماتیکی را نشان می دهد. مشخصه رله نیوماتیکی $p_c = K p_b$ ($K > 0$) است. این کنترل کننده چه عمل کنترلی انجام می دهد؟ تابع تبدیل $P_c(s)/E(s)$ را بیابید.

ب ۴-۵۵ کنترل کننده نیوماتیکی شکل ۴-۴۶ را در نظر بگیرید. فرض کنید که مشخصه رله نیوماتیکی $p_c = K p_b$ است، و $K > 0$. عمل کنترلی این کنترل کننده را تعیین کنید؟ ورودی این کنترل کننده e و خروجی آن p_c است.

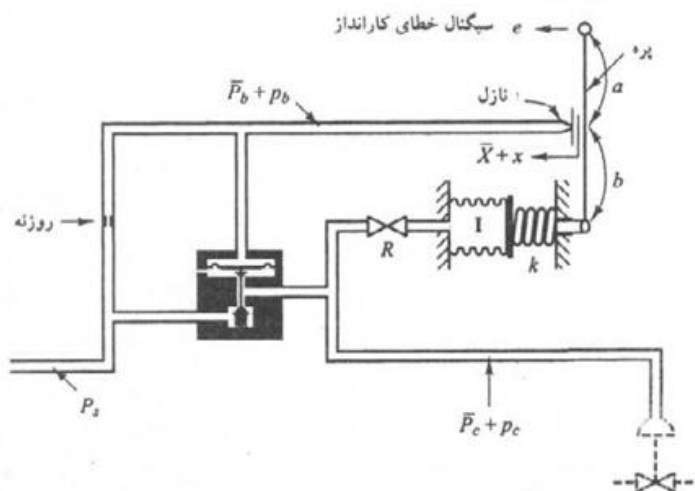
ب ۴-۴۷ یک کنترل کننده نیوماتیکی را نشان می دهد. ورودی سیگنال e و خروجی تغییر فشار p_c است. تابع تبدیل $P_c(s)/E(s)$ را بیابید. برای رله نیوماتیکی $p_c = K p_b$ ($K > 0$).

برای این سیستم یک نمودار بلوکی، با فرض کوچک بودن تغییرات رسم کنید. تابع تبدیل بین سطح مخزن دوم و اغتشاش ورودی q_d را بیابید. خطای حالت ماندگار را در حالتی که q_d یک تابع پله واحد است، به دست آورید.

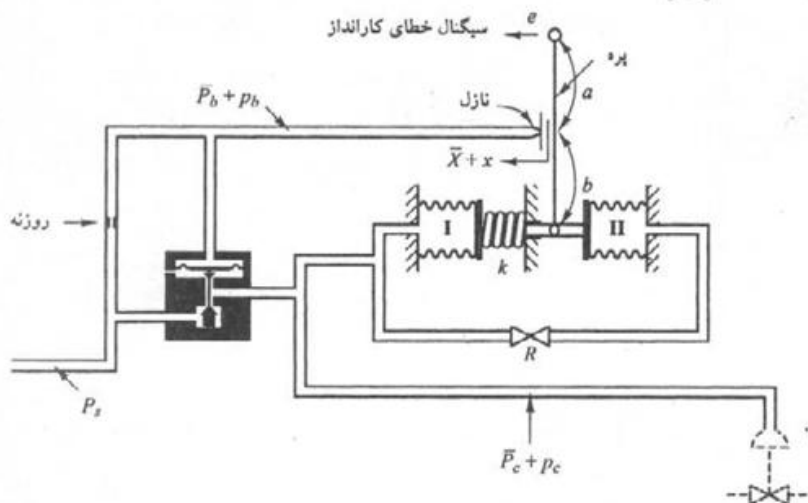
ب ۴-۴۳ در سیستم نیوماتیکی شکل ۴-۴۴ فرض کنید که مقادیر حالت ماندگار فشار هوا و جابه جایی فائوسک به ترتیب $\bar{P}$ و $\bar{X}$ است. همچنین فرض کنید که فشار ورودی از $\bar{P}$ به $\bar{P} + p_i$ می رسد، که p_i تغییر کوچکی در فشار ورودی است. این تغییر فشار باعث می شود که جابه جایی فائوسک نیز به مقدار کوچک x تغییر کند. ظرفیت فائوسک را C و مقاومت شیر را R بگیرید، و تابع تبدیل بین p_i و x را بیابید.



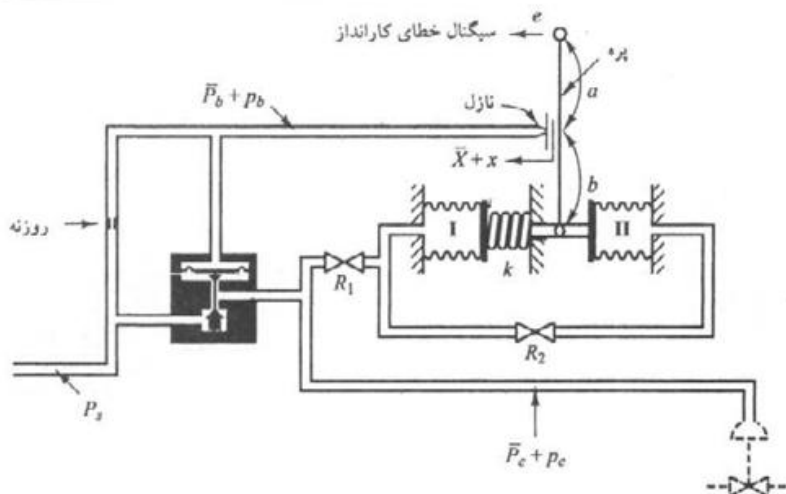
شکل ۴-۴۵
کنترل کننده نیوماتیکی.



شکل ۴-۴۶
کنترل کننده نیوماتیکی.



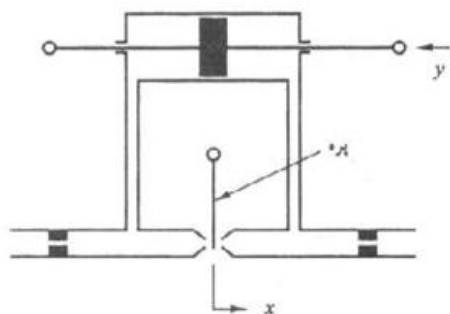
شکل ۴-۴۷
کنترل کننده نیوماتیکی.



شکل ۴-۴۸
کنترل کننده نیوماتیکی.

کنید و تابع تبدیل بین y و x را بیابید. x فشار هوا و y جابه جایی پیستون قدرت است.

ب ۴-۹ شکل ۴-۵۱ نمودار طرح گونه سیستم کنترل ارتفاع یک هواپیما را نشان می دهد. ورودی سیستم زاویه انحراف θ اهرم کنترل، و خروجی آن زاویه ارتفاع ϕ اهرم کنترل است. فرض کنید زوایای θ و ϕ نسبتاً کوچک اند. نشان دهید به ازای هر زاویه θ اهرم کنترل، یک زاویه ارتفاع ϕ متناظر (در حالت ماندگار) وجود دارد.



شکل ۴-۴۹ شیر پره ای.

ب ۴-۷ کنترل کننده نیوماتیکی شکل ۴-۴۸ را در نظر بگیرید. این کنترل کننده چه عمل کنترلی ایجاد می کند؟ برای رله نیوماتیکی $p_c = K p_b$ ($K > 0$).

ب ۴-۸ شکل ۴-۴۹ یک شیر پره ای را نشان می دهد. پره بین دو نازل رو در رو قرار دارد. اگر پره کمی به سمت راست برود، عدم توازن فشار در نازلها باعث حرکت پیستون قدرت به سمت چپ می شود و برعکس. این شیر در سرووهای هیدرولیکی به عنوان شیر طبقه اول به کار می رود. علت استفاده از این شیر این است که برای کاراندازی شیرهای ماسوره ای بزرگ که جریان بزرگی می گذرانند نیروی زیادی لازم است. برای کم کردن نیروهای لازم غالباً یک آرایش دو طبقه ای به کار می رود؛ شیر طبقه اول یک شیر پره ای یا فورانی است که نیروی لازم برای کاراندازی شیر ماسوره ای طبقه دوم را ایجاد می کند.

شکل ۴-۵۰ نمودار یک سرووموتور هیدرولیکی را نشان می دهد که در آن سیگنال خطا در دو طبقه، با استفاده از یک شیر فورانی و یک شیر تنظیم تقویت می شود. نمودار بلوکی سیستم شکل ۴-۵۰ را رسم

است. نقطه تنظیم ثابت است. آهنگ ورودی اغتشاشی q_d ، که کمیت کوچکی است، در $t=0$ به مخزن اعمال می‌شود. این اغتشاش باعث می‌شود ارتفاع از $\bar{H}$ به $\bar{H} + h$ تغییر یابد. این تغییر به نوبه خود باعث می‌شود آهنگ خروجی به اندازه q_o تغییر کند. کنترل کننده هیدرولیکی باعث می‌شود آهنگ ورودی نیز در اثر تغییر ارتفاع از $\bar{Q}$ به $\bar{Q} + q_i$ برسد. (کنترل کننده انتگرالی می‌کوشد به رغم وجود اغتشاش تا آنجا که ممکن است ارتفاع را ثابت نگه دارد.) تمام تغییرات را کوچک فرض می‌کنیم.

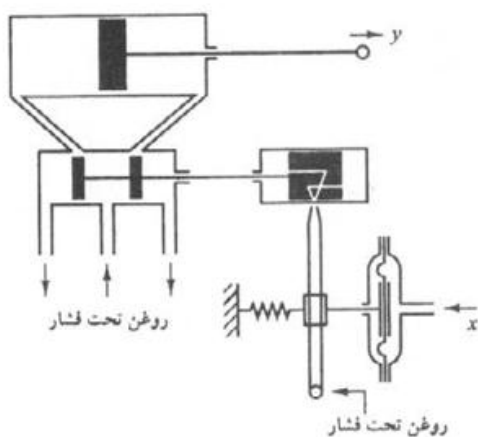
فرض کنید که سرعت پیستون قدرت (شیر) با جابه‌جایی ماسوره x متناسب است، یا

$$\frac{dy}{dt} = K_1 x$$

که در آن K_1 یک ثابت مثبت است. همچنین فرض کنید که تغییر آهنگ ورودی q_i با تغییر دریچه y نسبت منفی دارد، یعنی

$$q_i = -K_v y$$

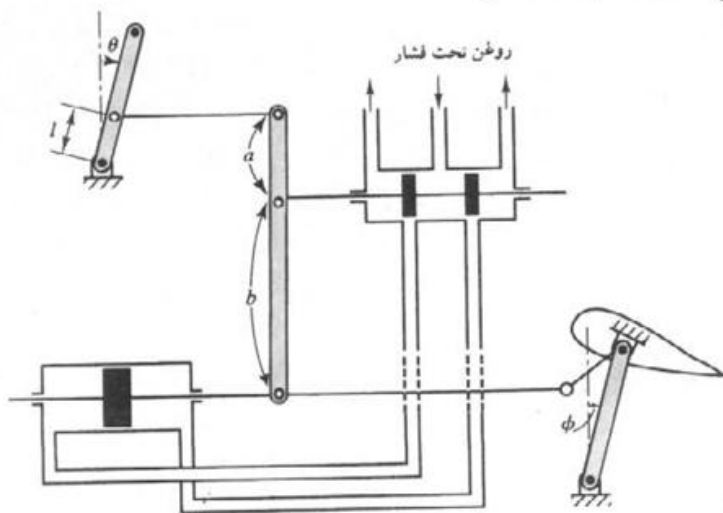
که در آن K_v یک ثابت مثبت است.



شکل ۴-۵۰

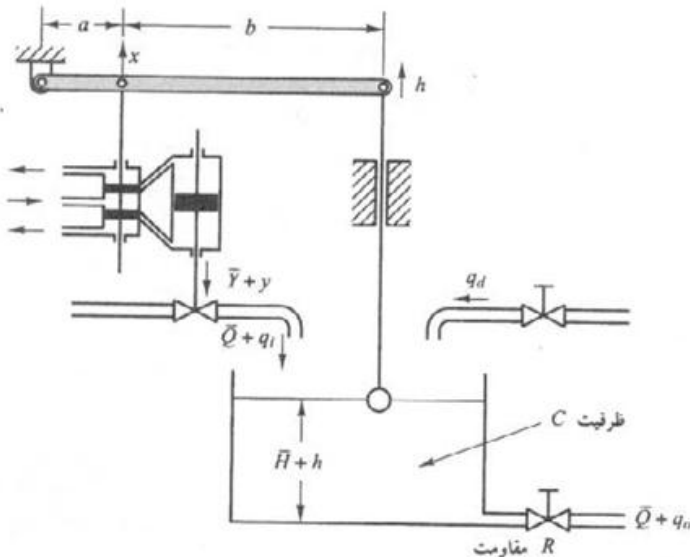
نمودار طرح گونه یک سروو موتور هیدرولیکی.

ب ۴-۱۰ سیستم کنترل سطح مایع شکل ۴-۵۲ را در نظر بگیرید. شیر ورودی توسط یک کنترل کننده انتگرالی کنترل می‌شود. فرض کنید که در حالت ماندگار مقدار جریان ورودی و خروجی $\bar{Q}$ ، ارتفاع مایع در مخزن $\bar{H}$ ، جابه‌جایی شیر ماسوره‌ای $\bar{X} = 0$ ، و جابه‌جایی شیر $\bar{Y}$ است. فرض می‌کنیم که نقطه تنظیم $\bar{R}$ با ارتفاع حالت ماندگار $\bar{H}$ متناظر



شکل ۴-۵۱

سیستم کنترل ارتفاع هواپیما.



شکل ۴-۵۲

سیستم کنترل سطح مایع.

مقادیر عددی زیر را برای سیستم در نظر بگیرید

$$K_v = 1 \text{ m}^3/\text{sec}, \quad R = 0.5 \text{ sec/m}^3, \quad C = 2 \text{ m}^3$$

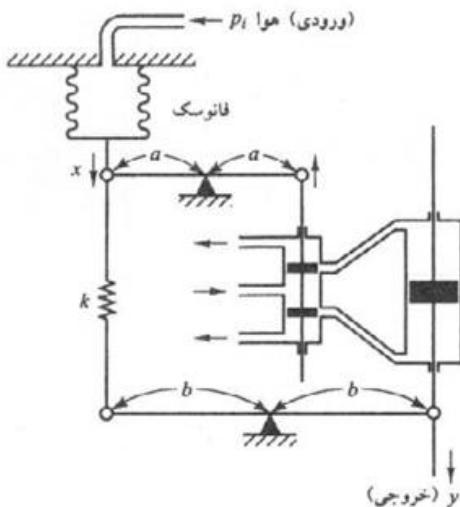
$$K_1 = 4 \text{ sec}^{-1}, \quad b = 0.75 \text{ m}, \quad a = 0.25 \text{ m}$$

 تابع تبدیل $H(s)/Q_d(s)$ را بیابید.

ب ۴-۱۱ کنترل کننده شکل ۴-۵۳ را در نظر بگیرید. ورودی تغییر فشار هوا p_i نسبت به مقدار مرجع $\bar{P}$ ، و خروجی جابه جایی y پیستون قدرت است. تابع تبدیل $Y(s)/P_i(s)$ را بیابید.

ب ۴-۱۲ ثابت زمانی یک دمانسج ۲ sec است. ثابت زمانی یک چال حرارتی ۳۰ sec است. با قرار دادن دمانسج در چال یک اندازه گیر دما به دست می آید که می توان آن را یک سیستم دو ظرفیتی در نظر گرفت.

ثابت زمانی های سیستم مرکب دمانسج - چال حرارتی را بیابید. وزن دمانسج ۸ g و وزن چال حرارتی ۴۰ g است. گرمای ویژه دمانسج و چال حرارتی را یکسان فرض کنید.



شکل ۴-۵۳ کنترل کننده.