

# تحلیل پاسخ‌کدرا و پاسخ حالت ماندگار

## ۵-۱ مقدمه

در فصلهای ابتدایی گفته شد که اولین گام تحلیل سیستمهای کنترلی، یافتن مدل ریاضی سیستم است. پس از به دست آمدن مدل روشهای مختلفی برای تحلیل عملکرد سیستم وجود دارد.

در عمل سیگنال ورودی سیستم کنترل از قبل معلوم نیست، بلکه طبیعت تصادفی دارد، و ورودی لحظه‌ای را نمی‌توان به صورت تحلیلی بیان کرد. تنها در بعضی حالت‌های خاص سیگنال ورودی از قبل معلوم است و می‌توان آن را با یک عبارت تحلیلی یا با یک منحنی بیان کرد؛ در مورد سیستم کنترل ابزارهای برش خودکار وضعیت چنین است.

در تحلیل و طراحی سیستمهای کنترلی باید مبنایی برای مقایسه عملکرد سیستمهای کنترلی مختلف داشته باشیم. این مبنا را می‌توان با مشخص کردن سیگنالهای آزمون خاص و مقایسه پاسخ سیستمهای مختلف به این سیگنالهای ورودی ایجاد کرد.

معیارهای طراحی متعددی بر مبنای این سیگنالهای آزمون یا پاسخ سیستم به تغییر شرایط اولیه (بدون اعمال سیگنال آزمون) وجود دارد. استفاده از سیگنالهای آزمون را می‌توان چنین توجیه کرد که بین مشخصات پاسخ یک سیستم به یک سیگنال آزمون نوعی و توانایی سیستم در تطبیق با سیگنالهای ورودی واقعی، همبستگی وجود دارد.

**سیگنالهای آزمون نوعی.** سیگنالهای آزمون نوعی که معمولاً به کار می‌روند عبارت‌اند از: تابع پله‌ای، تابع شیب، تابع شتاب، تابع ضربه، تابع سینوسی، و نویز سفید. در این فصل از سیگنالهای آزمونی چون پله، شیب،

شتاب، و ضربه استفاده می‌کنیم. با این سیگنالهای آزمون تحلیل ریاضی و تجربی سیستمهای کنترل به سادگی انجام می‌گیرد، زیرا این سیگنالها توابع بسیار ساده‌ای از زمان هستند.

این که کدام سیگنال آزمون نوعی را باید برای تحلیل مشخصات یک سیستم به کار برد، با توجه به ورودی که معمولاً در شرایط عادی کار سیستم به آن وارد می‌شود، تعیین می‌شود. اگر ورودی یک سیستم کنترل تابعی باشد که به تدریج تغییر می‌کند، تابع شیب می‌تواند سیگنال آزمون مناسبی باشد. به نحوی مشابه، اگر سیستم تحت تأثیر اغتشاش‌های ناگهانی قرار دارد، تابع پله‌ای سیگنال آزمون خوبی است؛ برای سیستمی که در معرض ورودی ضربه‌ای است، تابع ضربه بهترین سیگنال آزمون است. اگر سیستم کنترل براساس سیگنالهای آزمون طراحی شود، عملکرد آن در پاسخ به ورودیهای واقعی معمولاً رضایتبخش است. استفاده از این سیگنالهای آزمون اجازه می‌دهد عملکرد تمام سیستمها بر یک مبنا مقایسه شود.

**پاسخ گذرا و پاسخ حالت ماندگار.** پاسخ زمانی یک سیستم کنترل از دو بخش تشکیل می‌شود: پاسخ گذرا و پاسخ ماندگار. منظور از پاسخ گذرا، عبور از حالت ابتدایی تا رسیدن به حالت نهایی است. منظور از پاسخ حالت ماندگار، چگونگی رفتار خروجی سیستم به ازای  $t \rightarrow \infty$  است. پس پاسخ سیستم  $c(t)$  را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$c(t) = c_{tr}(t) + c_{ss}(t)$$

که جمله اول طرف راست پاسخ گذرا و جمله دوم پاسخ حالت ماندگار را نشان می‌دهد.

**پایداری مطلق، پایداری نسبی، و خطای حالت ماندگار.** در طراحی سیستم کنترل باید بتوان رفتار دینامیکی سیستم را با دانستن اجزاء سیستم پیش‌بینی کرد. مهمترین مشخصه رفتار دینامیکی سیستم کنترل پایداری مطلق است؛ یعنی آیا سیستم پایدارست یا ناپایدار. یک سیستم کنترل در حالت تعادل است، اگر در صورت نبودن ورودی و اغتشاش، خروجی در یک حالت باقی بماند. یک سیستم کنترل خطی مستقل از زمان در صورتی پایدار است که هنگام اعمال یک شرط اولیه جدید به آن سرانجام به حالت تعادل خود برگردد. یک سیستم کنترل خطی مستقل از زمان پایدار بحرانی است، اگر نوسانات خروجی برای همیشه ادامه یابد. این سیستم در صورتی ناپایدار است که هنگام اعمال یک شرط اولیه جدید به آن، خروجی‌اش به طور بی‌کمران واگرا شود. در عمل خروجی یک سیستم فیزیکی می‌تواند تا حد مشخصی زیاد شود و "توقف دهنده"های مکانیکی آن را محدود می‌کنند، یا سیستم پس از رسیدن خروجی‌اش به حد خاصی خراب یا غیرخطی می‌شود، به نحوی که نمی‌توان آن را با معادلات دیفرانسیل خطی توصیف کرد.

پایداری نسبی و خطای حالت ماندگار دو رفتار مهم دیگر سیستم (غیر از پایداری مطلق) هستند که باید توجه خاصی به آنها معطوف شود. چون در سیستمهای کنترل واقعی انرژی ذخیره می‌شود، خروجی سیستم هنگام اعمال ورودی نمی‌تواند فوراً ورودی را دنبال کند، و قبل از رسیدن به حالت ماندگار یک پاسخ گذرا وجود دارد. پاسخ گذرای یک سیستم کنترل واقعی، غالباً قبل از رسیدن به حالت ماندگار نوسانات میرا دارد. اگر خروجی سیستم در حالت ماندگار دقیقاً همانند ورودی نباشد، می‌گوییم سیستم خطای حالت ماندگار دارد. این

خطا دقت سیستم را نشان می‌دهد. در تحلیل یک سیستم کنترل باید رفتار پاسخ گذرا و رفتار حالت ماندگار را بررسی کنیم.

**نمای کلی فصل.** این فصل به پاسخ سیستم به سیگنالهای نامتناوب (مانند پله، شیب، شتاب و ضربه) اختصاص دارد. نمای کلی فصل از این قراست: بخش ۱-۵ مطالب مقدماتی فصل را دربر دارد. بخش ۲-۵ به پاسخ سیستمهای مرتبه اول به ورودیهای نامتناوب اختصاص دارد. در بخش ۳-۵ پاسخ گذرای سیستمهای مرتبه دوم بررسی می‌شود؛ پاسخ پله، پاسخ شیب، و پاسخ ضربه سیستمهای مرتبه دوم به تفصیل بررسی می‌شوند. در بخش ۴-۵ تحلیل پاسخ گذرای سیستمهای مرتبه بالاتر مطرح می‌شود. بخش ۵-۵ به چگونگی کاربرد MATLAB در حل مسائل حالت گذرا اختصاص دارد. بخش ۵-۵ مثالی از حل یک مسئله حالت گذرا با MATLAB را دربر دارد. در بخش ۶-۵ معیار پایداری روث مورد بحث قرار گرفته است. در بخش ۷-۵ اثر عملیات کنترلی انتگرالی و مشتقی در عملکرد سیستم را خواهیم دید. سرانجام در بخش ۸-۵ خطاهای حالت ماندگار در سیستم کنترل با فیدبک واحد را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

## ۲-۵ سیستم مرتبه اول

سیستم مرتبه اول نشان داده شده در شکل ۱-۵ (الف) را در نظر بگیرید. از لحاظ فیزیکی این سیستم می‌تواند یک مدار RC، یک سیستم حرارتی، یا سیستمی مشابه را نشان دهد. شکل ۱-۵ (ب) نمودار بلوکی ساده شده را نشان می‌دهد. رابطه ورودی - خروجی عبارت است از:

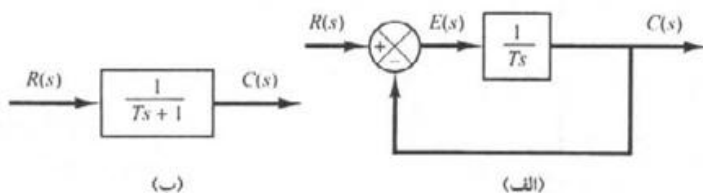
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts+1} \quad (1-5)$$

در زیر پاسخ این سیستم به ورودی‌هایی نظیر پله واحد، شیب واحد، و ضربه واحد را تحلیل می‌کنیم. شرایط اولیه را صفر می‌گیریم.

توجه کنید که تمام سیستمهای دارای تابع تبدیل مشابه، به ورودی یکسان پاسخی یکسان می‌دهند. برای هر سیستم فیزیکی خاص می‌توان تعبیر فیزیکی خاصی برای پاسخ ریاضی ارائه داد.

**پاسخ پله سیستم مرتبه اول.** چون تبدیل لاپلاس تابع پله واحد  $1/s$  است، با گذاشتن  $R(s) = 1/s$  در معادله (۱-۵) به دست می‌آوریم

$$C(s) = \frac{1}{Ts+1} \frac{1}{s}$$



$C(s)$  را به کسرهای جزیی بسط می‌دهیم

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{T}{Ts+1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+(1/T)} \quad (2-5)$$

با گرفتن عکس تبدیل لاپلاس معادله (۲-۵) به دست می‌آوریم

$$c(t) = 1 - e^{-t/T} \quad t \geq 0 \quad (3-5)$$

معادله (۳-۵) می‌گوید خروجی  $c(t)$  در ابتدا صفرست و سرانجام یک می‌شود. یک مشخصه مهم این پاسخ نمایی این است که در  $t=T$  مقدار  $c(t)$  برابر  $0.632$  است، یا پاسخ  $63.2\%$  کل تغییر خود را پشت سر گذاشته است. درستی این مطلب را می‌توان به سادگی با گذاشتن  $t=T$  در  $c(t)$  نشان داد

$$c(T) = 1 - e^{-1} = 0.632$$

توجه کنید که هر چه ثابت زمانی  $T$  کوچکتر باشد، پاسخ سیستم سریعتر است. مشخصه مهم دیگر پاسخ نمایی این است که شیب خط مماس در  $t=0$  برابر  $1/T$  است، زیرا

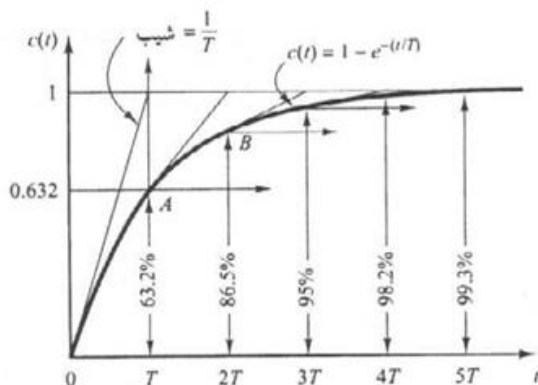
$$\left. \frac{dc}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{1}{T} e^{-t/T} \right|_{t=0} = \frac{1}{T} \quad (4-5)$$

اگر پاسخ همان سرعت تغییر اولیه‌اش را حفظ کند، در  $t=T$  به مقدار نهایی‌اش می‌رسد. معادله (۴-۵) نشان می‌دهد که شیب منحنی پاسخ  $c(t)$  به طور یکنوا از  $1/T$  در  $t=0$ ، به صفر در  $t=\infty$  می‌رسد.

منحنی پاسخ نمایی  $c(t)$  معادله (۳-۵) در شکل ۲-۵ نشان داده شده است، در یک ثابت زمانی منحنی پاسخ نمایی از  $0$  به  $63.2\%$  مقدار نهایی‌اش می‌رسد. در دو ثابت زمانی پاسخ به  $86.5\%$ ،  $95\%$ ، و  $99.3\%$  مقدار نهایی‌اش می‌رسد. پس پاسخ در  $t=2T$ ،  $t=3T$ ، و  $t=4T$  به ترتیب به  $86.5\%$ ،  $95\%$ ، و  $99.3\%$  مقدار نهایی‌اش می‌رسد. پس در  $t \geq 4T$  پاسخ در فاصله دو درصدی مقدار نهایی‌اش می‌ماند. همانطور که معادله (۳-۵) نشان می‌دهد، از لحاظ ریاضی حالت ماندگار تنها در بی‌نهایت حاصل می‌شود. ولی در عمل فاصله زمانی لازم برای رسیدن پاسخ به حد دو درصدی مقدار نهایی، یا  $4$  ثابت زمانی، تقریب معقولی از زمان پاسخ است.

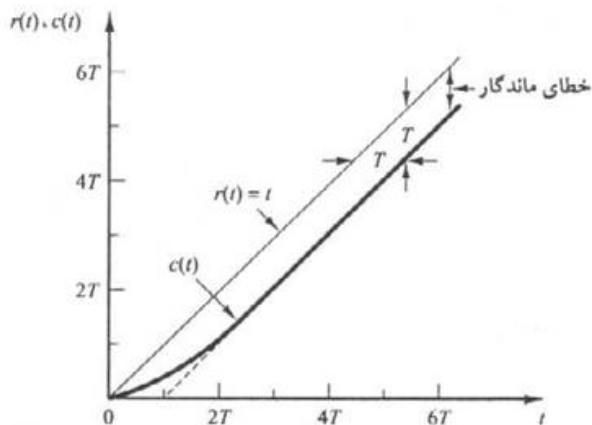
**پاسخ شیب سیستم مرتبه اول.** چون تبدیل لاپلاس تابع شیب واحد  $1/s^2$  است، خروجی سیستم شکل ۱-۵

(الف) را به صورت زیر می‌یابیم



شکل ۲-۵

منحنی پاسخ نمایی.



شکل ۳-۵

پاسخ شیب واحد سیستم شکل ۱-۵ (الف).

$$C(s) = \frac{1}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s}$$

$C(s)$  را به کسرهای جزئی بسط می‌دهیم

$$C(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T^2}{Ts+1} \quad (5-5)$$

با گرفتن عکس تبدیل لاپلاس معادله (۵-۵) به دست می‌آوریم

$$c(t) = t - T + Te^{-t/T} \quad t \geq 0 \quad \text{در} \quad (6-5)$$

پس سیگنال خطا  $e(t)$  عبارت است از

$$\begin{aligned} e(t) &= r(t) - c(t) \\ &= T(1 - e^{-t/T}) \end{aligned}$$

با میل  $t$  به بینهایت،  $e^{-t/T}$  به صفر میل می‌کند، پس سیگنال خطای  $e(t)$  به  $T$  میل می‌کند، یا

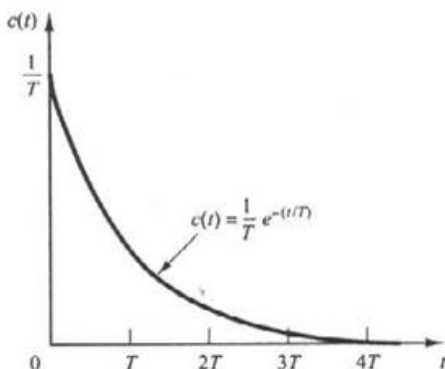
$$e(\infty) = T$$

ورودی شیب واحد و خروجی سیستم در شکل ۳-۵ نشان داده شده است. خطای دنبال کردن ورودی شیب واحد در  $t$  بزرگ برابر  $T$  است. هر چه ثابت زمانی کوچکتر باشد خطای ماندگار دنبال کردن ورودی شیب کوچکتر است.

پاسخ ضربه سیستم مرتبه اول. برای ورودی ضربه واحد  $R(s)=1$ ، و خروجی سیستم شکل ۱-۵ (الف) را می‌توان به صورت زیر یافت

$$C(s) = \frac{1}{Ts+1} \quad (7-5)$$

عکس تبدیل لاپلاس معادله (۷-۵) به دست می‌دهد



شکل ۴-۵

پاسخ ضربه سیستم شکل ۱-۵ (الف).

$$\bullet \quad c(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T} \quad t \geq 0 \quad \text{در} \quad (۸-۵)$$

منحنی پاسخ بیان شده با معادله (۸-۵) در شکل ۴-۵ رسم شده است.

**یک ویژگی مهم سیستمهای خطی مستقل از زمان.** در تحلیل بالا نشان داده شد که به ازای ورودی شیب واحد خروجی  $c(t)$  عبارت است از

$$c(t) = t - T + T e^{-t/T} \quad t \geq 0 \quad \text{در} \quad [\text{معادله (۶-۵) را ببینید}]$$

 به ازای ورودی پله واحد، که مشتق ورودی شیب واحد است، خروجی  $c(t)$  عبارت است از

$$c(t) = 1 - e^{-t/T} \quad t \geq 0 \quad \text{در} \quad [\text{معادله (۳-۵) را ببینید}]$$

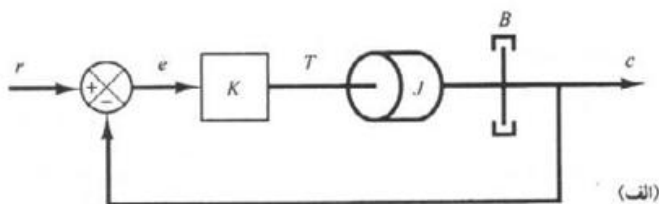
 سرانجام به ازای ورودی ضربه واحد، که مشتق ورودی پله واحد است، خروجی  $c(t)$  عبارت است از

$$c(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T} \quad t \geq 0 \quad \text{در} \quad [\text{معادله (۸-۵) را ببینید}]$$

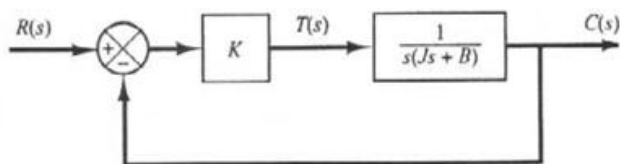
مقایسه پاسخ سیستم به این سه ورودی به وضوح نشان می‌دهد که پاسخ به مشتق یک سیگنال ورودی را می‌توان با مشتقگیری از پاسخ سیستم به سیگنال اصلی به دست آورد. همچنین می‌توان دید که پاسخ به انتگرال سیگنال ورودی را می‌توان با انتگرالگیری از پاسخ سیستم به سیگنال اصلی، و تعیین ثابتهای انتگرالگیری از شرایط اولیه خروجی به دست آورد. این یک ویژگی سیستمهای خطی مستقل از زمان است. سیستمهای خطی متغیر با زمان و سیستمهای غیرخطی این ویژگی را ندارند.

## ۳-۵ سیستم مرتبه دوم

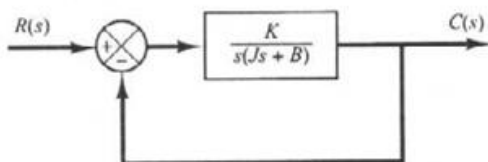
در این بخش پاسخ یک سیستم کنترل مرتبه دوم نوعی به ورودیهای پله، شیب، و ضربه را می‌یابیم. در اینجا یک سرووموتور را به عنوان نمونه سیستم مرتبه دوم در نظر می‌گیریم.



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۵-۵

(الف) سیستم سروو؛

(ب) نمودار بلوکی؛

(ج) نمودار بلوکی ساده شده.

**سیستم سروو.** سیستم سرووی شکل ۵-۵ (الف) از یک کنترل کننده تناسبی و عناصر بار (عناصر لختی و اصطکاک چسبندگی) تشکیل شده است. فرض کنید می‌خواهیم موقعیت خروجی  $c$  را براساس ورودی موقعیت  $r$  کنترل کنیم.

معادله عناصر بار عبارت است از

$$J\ddot{c} + B\dot{c} = T$$

که  $T$  گشتاور تولید شده توسط کنترل کننده تناسبی دارای بهره  $K$  است. با گرفتن تبدیل لاپلاس از دو طرف این معادله، با فرض صفر بودن شرایط اولیه، به دست می‌آوریم

$$Js^2 C(s) + BsC(s) = T(s)$$

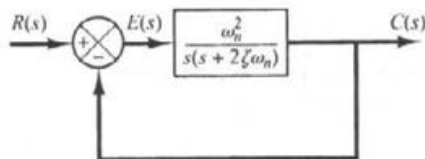
پس تابع تبدیل بین  $C(s)$  و  $T(s)$  عبارت است از

$$\frac{C(s)}{T(s)} = \frac{1}{s(Js+B)}$$

شکل ۵-۵ (الف) را می‌توان با استفاده از این تابع به صورت شکل ۵-۵ (ب) رسم کرد، و سپس آن را به صورت شکل ۵-۵ (ج) درآورد. پس تابع تبدیل حلقه بسته عبارت است از

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Js^2 + Bs + K} = \frac{K/J}{s^2 + (B/J)s + (K/J)}$$

این سیستم که تابع حلقه بسته‌اش دو قطب دارد، سیستم مرتبه دوم نامید می‌شود. (بعضی سیستمهای مرتبه دوم ممکن است یک یا دو صفر هم داشته باشند.)



شکل ۵-۶

سیستم مرتبه دوم.

پاسخ پله سیستم مرتبه دوم، تابع تبدیل حلقه بسته سیستم شکل ۵-۵ (ج) عبارت است از

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Js^2 + Bs + K} \quad (9-5)$$

که می توان آن را به شکل زیر نوشت

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K}{J}}{\left[ s + \frac{B}{2J} + \sqrt{\left(\frac{B}{2J}\right)^2 - \frac{K}{J}} \right] \left[ s + \frac{B}{2J} - \sqrt{\left(\frac{B}{2J}\right)^2 - \frac{K}{J}} \right]}$$

قطبهای حلقه بسته به ازای  $B^2 - 4JK < 0$ ، مختلط، و به ازای  $B^2 - 4JK \geq 0$  حقیقی اند. در تحلیل پاسخ گذرا استفاده از پارامترهای زیر مناسبتر است

$$\frac{K}{J} = \omega_n^2 \quad \frac{B}{J} = 2\zeta\omega_n = 2\sigma$$

که در آن  $\sigma$  تضعیف؛  $\omega_n$  فرکانس طبیعی نامیرا؛ و  $\zeta$  نسبت میرایی سیستم نامیده می شود. نسبت میرایی  $\zeta$  نسبت میرایی واقعی  $B$  به میرایی بحرانی  $B_c = 2\sqrt{JK}$  است، یا

$$\zeta = \frac{B}{B_c} = \frac{B}{2\sqrt{JK}}$$

سیستم شکل ۵-۵ (ج) را می توان برحسب  $\zeta$  و  $\omega_n$  به صورت شکل ۶-۵ درآورد. تابع تبدیل حلقه بسته  $C(s)/R(s)$  معادله (۹-۵) را نیز می توان برحسب  $\zeta$  و  $\omega_n$  به شکل زیر نوشت

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (10-5)$$

این را شکل استاندارد سیستم مرتبه دوم می نامند.

به این ترتیب می توان رفتار دینامیکی سیستم مرتبه دوم را برحسب دو پارامتر  $\zeta$  و  $\omega_n$  بیان کرد. به ازای  $0 < \zeta < 1$ ، قطبهای حلقه بسته مزدوج مختلط اند و در نیمه چپ صفحه  $s$  قرار دارند. در این حالت سیستم را فرومیرا می خوانند و پاسخ گذرا نوسانی است. به ازای  $\zeta = 0$  پاسخ گذرا میرا نمی شود. به ازای  $\zeta = 1$ ، سیستم میرای بحرانی خوانده می شود. سیستمهای فرامیرا با  $\zeta > 1$  متناظرند. پاسخ گذرای سیستمهای میرای بحرانی و فرامیرا نوسانی نیست.

اکنون پاسخ سیستم شکل ۶-۵ را به ورودی پله واحد به دست می آوریم. سه حالت مختلف در نظر می گیریم: فرومیرا ( $0 < \zeta < 1$ )، میرای بحرانی ( $\zeta = 1$ ) و فرامیرا ( $\zeta > 1$ ).

(۱) حالت نرو میرا ( $0 < \zeta < 1$ ): در این حالت  $C(s)/R(s)$  را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n + j\omega_d)(s + \zeta\omega_n - j\omega_d)}$$

که در آن  $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ .  $\omega_d$  فرکانس طبیعی میرا نامیده می‌شود. به ازای ورودی پله واحد،  $C(s)$  را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)s} \quad (11-5)$$

عکس تبدیل لاپلاس معادله (۱۱-۵) را می‌توان به سادگی با نوشتن  $C(s)$  به صورت زیر یافت:

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + \zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \end{aligned}$$

با مراجعه به جدول تبدیل لاپلاس پیوست الف، می‌توان نشان داد که

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}\right] &= e^{-\zeta\omega_n t} \cos \omega_d t \\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_d}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}\right] &= e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t \end{aligned}$$

پس تبدیل لاپلاس معکوس معادله (۱۱-۵) به صورت زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[C(s)] &= c(t) \\ &= 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left( \cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t \right) \\ &= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \left( \omega_d t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right) \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (12-5)$$

این نتیجه را می‌توان مستقیماً از روی جدول تبدیل لاپلاس به دست آورد. از معادله (۱۲-۵) پیداست که فرکانس نوسانهای پاسخ گذرا همان فرکانس طبیعی میرا  $\omega_d$ ، و بنابراین تابعی از نسبت میرایی  $\zeta$  است. سیگنال خطای این سیستم، تفاضل ورودی و خروجی، عبارت است از

$$\begin{aligned} e(t) &= r(t) - c(t) \\ &= e^{-\zeta\omega_n t} \left( \cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t \right) \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

این سیگنال خطا نوسانهای سینوسی میرا دارد. در حالت ماندگار، یا در  $t = \infty$ ، بین ورودی و خروجی خطایی وجود ندارد.

اگر نسبت میرایی  $\zeta$  صفر باشد، پاسخ نامیرا می‌شود و نوسان تا ابد ادامه می‌یابد. پاسخ  $c(t)$  در حالت صفر بودن نسبت میرایی را می‌توان با گذاشتن  $\zeta = 0$  در معادله (۱۲-۵) به دست آورد، که نتیجه می‌دهد

$$c(t) = 1 - \cos \omega_n t \quad t \geq 0 \quad (13-5)$$

پس معادله (۱۳-۵) نشان می‌دهد که  $\omega_n$  فرکانس طبیعی نامیرای سیستم است. یعنی  $\omega_n$  فرکانسی است که در صورت صفر شدن میرایی، سیستم با آن نوسان می‌کند. اگر سیستم حتی مقدار ناچیزی میرایی داشته باشد، فرکانس طبیعی نامیرا را نمی‌توان به صورت تجربی مشاهده کرد. فرکانسی که مشاهده می‌شود فرکانس طبیعی میرا  $\omega_d$  است که با  $\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$  برابر است. این فرکانس همیشه از فرکانس طبیعی نامیرا کوچکتر است. هر چه  $\zeta$  بزرگتر باشد، فرکانس طبیعی میرا کوچکتر است. اگر  $\zeta$  از یک بزرگتر شود، پاسخ فرامیرا می‌شود و نوسان نمی‌کند.

(۲) حالت میرای بحرانی ( $\zeta = 1$ ): اگر دو قطب  $C(s)/R(s)$  برابر باشند، سیستم را میرای بحرانی می‌نامند.

به ازای ورودی پله،  $R(s) = 1/s$  و  $C(s)$  را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2} \quad (14-5)$$

تبدیل لاپلاس معکوس معادله (۱۴-۵) را می‌توان به شکل زیر یافت

$$c(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t) \quad t \geq 0 \quad (15-5)$$

این نتیجه را می‌توان با میل  $\zeta$  به یک، در معادله (۱۲-۵) و حدگیری به دست آورد

$$\lim_{\zeta \rightarrow 1} \frac{\sin \omega_d t}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \lim_{\zeta \rightarrow 1} \frac{\sin \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \omega_n t$$

(۳) حالت فرامیرا ( $\zeta > 1$ ): در این حالت دو قطب  $C(s)/R(s)$  حقیقی منفی و نابرابرند. به ازای ورودی پله

واحد  $R(s) = 1/s$  و  $C(s)$  را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta \omega_n + \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1})(s + \zeta \omega_n - \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1})} \quad (16-5)$$

عکس تبدل لاپلاس معادله (۱۶-۵) عبارت است از

$$c(t) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})} e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} - \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})} e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}$$

$$c(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left( \frac{e^{-s_2 t}}{s_1} - \frac{e^{-s_1 t}}{s_2} \right) \quad t \geq 0 \quad (17-5)$$

که در آن  $s_1 = (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n$  و  $s_2 = (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n$ . پس پاسخ  $c(t)$  از دو جمله نمایی میرا تشکیل شده است.

وقتی  $\zeta$  از یک خیلی بزرگتر است، یکی از دو جمله نمایی بسیار سریعتر از دیگری میرا می‌شود، به نحوی

که می‌توان از نمایی دارای میرایی سریعتر (متناظر با ثابت زمانی کوچکتر) چشم پوشید. یعنی اگر فاصله  $s_1$  از  $j\omega$  بسیار کوچکتر از فاصله  $s_2$  باشد (یعنی  $|s_2| \ll |s_1|$ ) می‌توان از  $s_1$  چشم پوشید، و جوابی تقریبی به دست آورد. علت جواز این کار این است که اثر  $s_1$  بر پاسخ بسیار کمتر از اثر  $s_2$  است، زیرا جمله مشتمل بر  $s_1$  معادله (۱۷-۵) بسیار سریعتر از جمله مشتمل بر  $s_2$  میرا می‌شود. پس از صفر شدن جمله نمایی دارای میرایی سریع، پاسخ به یک سیستم مرتبه اول شبیه می‌شود، و می‌توان  $C(s)/R(s)$  را به شکل زیر تقریب زد

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}}{s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}} = \frac{s_2}{s + s_2}$$

این شکل تقریبی نتیجه مستقیم این واقعیت است که مقادیر اولیه و مقادیر نهایی  $C(s)/R(s)$  اصلی و تقریبی یکسان‌اند.

به ازای تابع تبدیل تقریبی  $C(s)/R(s)$ ، پاسخ پله را می‌توان به شکل زیر یافت

$$C(s) = \frac{\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}}{(s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})s}$$

پس پاسخ زمانی  $c(t)$  عبارت است از

$$c(t) = 1 - e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \quad t \geq 0 \quad \text{در}$$

این یک پاسخ تقریبی، برای حالتی که می‌توان از یک قطب  $C(s)/R(s)$  چشم پوشید، است.

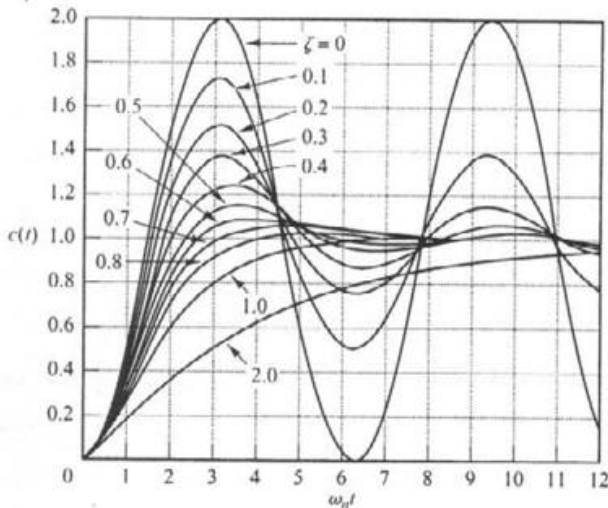
در شکل ۷-۵ منحنی‌های  $c(t)$  به ازای مقادیر مختلف  $\zeta$  نشان داده شده است. در این شکل محور افقی متغیر بدون بعد  $\omega_n t$  را نشان می‌دهد. این منحنی‌ها تنها تابعی از  $\zeta$  هستند. این منحنی‌ها با توجه به معادلات (۱۲-۵)، (۱۵-۵) و (۱۷-۵) رسم شده‌اند. سیستم توصیف شده با این معادلات ابتدائاً ساکن است.

توجه کنید که دو سیستم مرتبه دوم دارای  $\zeta$  یکسان و  $\omega_n$  متفاوت فراجش و الگوی نوسانی یکسانی دارند. گفته می‌شود که چنین سیستمهایی پایداری نسبی یکسانی دارند.

شکل ۷-۵ نشان می‌دهد که سیستمهای زیر میرای دارای  $\zeta$  بین ۰/۵ و ۰/۸ سریعتر از سیستمهای میرای بحرانی و فرامیرا به مقدار نهایی خود می‌رسند. در سیستمهای غیرنوسانی سیستم میرای بحرانی سریعترین پاسخ را دارد. سیستمهای فرامیرا همیشه در پاسخ به ورودیهای مختلف کندند.

توجه به این نکته مهم است که برای سیستمهای مرتبه دوم دارای توابع تبدیل حلقه بسته متفاوت با تابع تبدیل معادله (۱۰-۵)، منحنی‌های پاسخ پله می‌تواند منظری متفاوت از منحنی‌های شکل ۷-۵ داشته باشد.

**تعریف مشخصات پاسخ گذرا.** غالباً مشخصات عملکرد سیستمهای کنترلی برحسب پاسخ گذرا به ورودی پله واحد بیان می‌شود، زیرا این ورودی را به سادگی می‌توان ساخت و برای اثرگذاری شدید کافی است. (اگر پاسخ پله معلوم باشد، از لحاظ ریاضی می‌توان پاسخ به هر ورودی دیگری را نیز محاسبه کرد.) پاسخ گذرای سیستم به ورودی پله واحد به شرایط اولیه بستگی دارد. برای سهولت مقایسه پاسخ گذرای



شکل ۵-۷

منحنی‌های پاسخ پله

سیستم شکل ۵-۶.

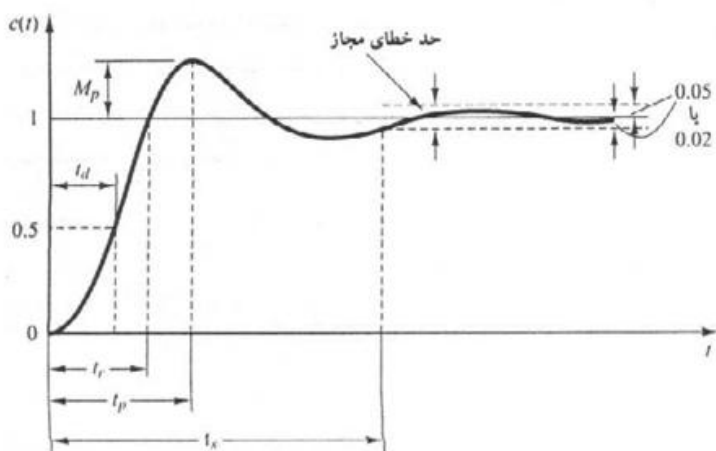
سیستمهای مختلف معمولاً این شرایط اولیه استاندارد به کار می‌رود که سیستم ابتدائاً ساکن است و خروجی و تمام مشتقهای آن صفرند. در این صورت مشخصات پاسخ را می‌توان به سادگی مقایسه کرد. پاسخ گذرای سیستمهای کنترل عملی غالباً قبل از رسیدن به حالت ماندگار نوسان میرا دارند. در تعیین مشخصات پاسخ گذرای یک سیستم کنترل به ورودی پله‌ای باید موارد زیر مشخص شود:

۱. زمان تاخیر،  $t_d$
۲. زمان صعود،  $t_r$
۳. زمان اوج،  $t_p$
۴. ماکزیمم فراجهش،  $M_p$
۵. زمان نشست،  $t_s$

این مشخصات در زیر تعریف و در شکل ۵-۸ تصویر شده‌اند.

۱. زمان تاخیر،  $t_d$ : زمان تاخیر زمانی است که طول می‌کشد تا پاسخ برای بار اول به نصف مقدار نهایی‌اش برسد.
۲. زمان صعود،  $t_r$ : زمان صعود زمانی است که طول می‌کشد تا پاسخ از ۱۰٪ به ۹۰٪، یا از ۵٪ به ۹۵٪، یا از ۰٪ به ۱۰۰٪ مقدار نهایی‌اش برسد. برای سیستمهای مرتبه دوم فرومیرا معمولاً زمان صعود ۰٪ به ۱۰۰٪، و برای سیستمهای فرامیرا معمولاً زمان صعود ۱۰٪ به ۹۰٪ به کار می‌رود.
۳. زمان اوج،  $t_p$ : زمان اوج لازم برای رسیدن پاسخ به اولین اوج فراجهش است.
۴. ماکزیمم فراجهش،  $M_p$ : ماکزیمم فراجهش مقدار اوج فراجهش است که نسبت به مقدار یک اندازه‌گیری می‌شود. در مواردی که مقدار حالت ماندگار پاسخ یک نیست، معمولاً درصد فراجهش به کار می‌رود. این مقدار به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\text{ماکزیمم درصد فراجهش} = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\%$$



شکل ۸-۵

منحنی پاسخ پله که مقادیر

$M_p, t_s, t_d, t_r, t_p$

را نشان می‌دهد.

اندازه ماکزیمم (درصد) فراجش مستقیماً پایداری سیستم را نشان می‌دهد.

۵. زمان نشست،  $t_s$ : زمان نشست زمانی است که طول می‌کشد تا منحنی پاسخ به گستره معینی حول

مقدار نهایی‌اش برسد و در آن گستره بماند؛ این گستره معمولاً برحسب درصد مطلق از مقدار نهایی

(معمولاً ۲٪ تا ۵٪) بیان می‌شود. زمان نشست با بزرگترین ثابت زمانی سیستم کنترل مرتبط است.

معیار درصد خطا را می‌توان براساس اهداف طراحی سیستم مورد نظر تعیین کرد.

مشخصات حوزه زمان بیان شده در بالا بسیار مهم است، زیرا اکثر سیستمهای کنترل سیستمهای حوزه زمان

هستند؛ یعنی باید پاسخ زمانی قابل قبولی داشته باشند. (یعنی سیستم کنترل را باید آنقدر تنظیم کرد که پاسخ

گذرای آن رضایتبخش شود.)

توجه کنید که تمام این مشخصات لزوماً در مورد هر سیستمی قابل اعمال نیست. برای مثال در یک سیستم

فرامیرا، عبارات زمان اوج و ماکزیمم فراجش را نمی‌توان تعریف کرد. (در سیستمهایی که به ازای ورودی پله

خطای حالت ماندگار دارند، این خطا باید در سطح معینی بماند. بحث دقیق خطای حالت ماندگار را تا بخش

۸-۵ به تعویق می‌اندازیم.)

چند توضیح راجع به مشخصات پاسخ گذرا. بجز کاربردهای خاصی که در آنها نوسان قابل تحمل نیست،

سریع بودن پاسخ گذرا و داشتن میرایی کافی امری مطلوب است. برای این که یک سیستم مرتبه دوم پاسخ

گذرای مطلوبی داشته باشد، نسبت میرایی باید بین ۰/۴ و ۰/۸ باشد. مقادیر کوچکتر  $\zeta$  ( $\zeta < ۰/۴$ ) با فراجش

زیاد پاسخ گذرا همراه است، و سیستمی با  $\zeta$  بزرگ ( $\zeta > ۰/۸$ ) سیستمی کند است.

بعداً خواهیم دید که ماکزیمم فراجش و زمان صعود با هم در تضامند. به عبارت دیگر نمی‌توان همزمان

هم ماکزیمم فراجش را کوچک کرد و هم زمان صعود را. اگر یکی از این دو را کوچکتر کنیم، دومی لزوماً

بزرگتر می‌شود.

سیستمهای مرتبه دوم و مشخصات پاسخ گذرا. در ادامه زمان صعود، زمان اوج، ماکزیمم فراجهش و زمان نشست سیستم مرتبه دوم بیان شده در معادله (۵-۱۰) را به دست می‌آوریم. این مقادیر را برحسب  $\zeta$  و  $\omega_n$  می‌یابیم. سیستم را فرومیرا فرض می‌کنیم.

زمان صعود،  $t_r$ : با توجه به معادله (۵-۱۲) زمان صعود  $t_r$  را با قرار دادن  $c(t_r) = 1$  به دست می‌آوریم

$$c(t_r) = 1 = 1 - e^{-\zeta \omega_n t_r} \left( \cos \omega_d t_r + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t_r \right) \quad (۵-۱۸)$$

چون  $e^{-\zeta \omega_n t_r} \neq 0$ ، معادله زیر را از معادله (۵-۱۸) به دست می‌آوریم

$$\cos \omega_d t_r + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t_r = 0$$

چون  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$  و  $\zeta \omega_n = \sigma$ ، داریم

$$\tan \omega_d t_r = -\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = -\frac{\omega_d}{\sigma}$$

پس زمان صعود عبارت است از

$$t_r = \frac{1}{\omega_d} \tan^{-1} \left( \frac{\omega_d}{-\sigma} \right) = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} \quad (۵-۱۹)$$

$\beta$  در شکل ۵-۹ مشخص شده است. واضح است که برای کوچک بودن  $t_r$ ،  $\omega_d$  باید بزرگ باشد.

زمان اوج،  $t_p$ : با توجه به معادله (۵-۱۲) می‌توانیم زمان اوج را با مشتگیری از  $c(t)$  نسبت به زمان و برابر صفر قرار دادن مشتق به دست آوریم. پس

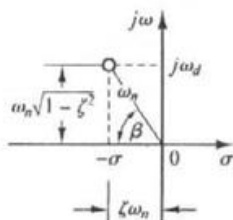
$$\begin{aligned} \frac{dc}{dt} &= \zeta \omega_n e^{-\zeta \omega_n t} \left( \cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t \right) \\ &+ e^{-\zeta \omega_n t} \left( \omega_d \sin \omega_d t - \frac{\zeta \omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cos \omega_d t \right) \end{aligned}$$

جملات کسینوسی معادله اخیر هم را حذف می‌کنند و  $dc/dt$  در  $t = t_p$  را می‌توان به صورت زیر ساده کرد

$$\left. \frac{dc}{dt} \right|_{t=t_p} = (\sin \omega_d t_p) \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t_p} = 0$$

معادله اخیر به معادله زیر منجر می‌شود

$$\sin \omega_d t_p = 0$$



شکل ۵-۹ تعریف زاویه  $\beta$ .

$$\omega_d t_p = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$$

چون زمان اوج با اولین اوج فراجش متناظر است  $\omega_d t_d = \pi$ . پس

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \quad (20-5)$$

زمان اوج با نصف زمان تناوب فرکانس نوسان میرا متناظر است.

ماکزیمم فراجش،  $M_p$ : ماکزیمم فراجش در زمان اوج یا در  $t = t_p = \pi / \omega_d$  رخ می‌دهد. پس با توجه به معادله (۱۲-۵)  $M_p$  به صورت زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned} M_p &= c(t_p) - 1 \\ &= -e^{-\zeta \omega_n (\pi / \omega_d)} \left( \cos \pi + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \pi \right) \\ &= e^{-(\sigma / \omega_d) \pi} = e^{-(\zeta / \sqrt{1 - \zeta^2}) \pi} \end{aligned} \quad (21-5)$$

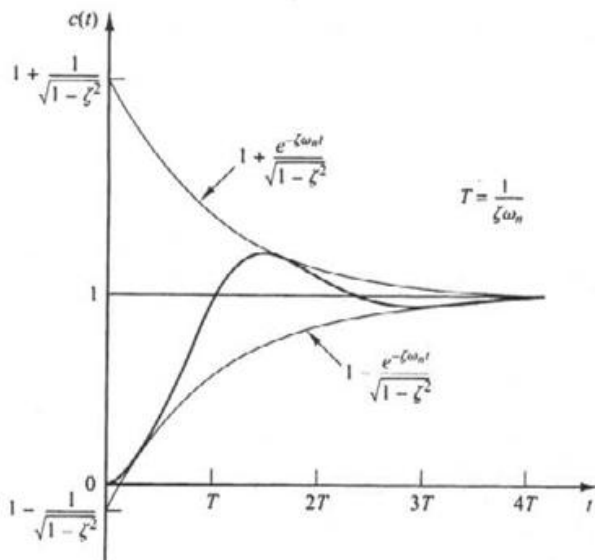
ماکزیمم درصد فراجش  $\times 100\%$   $e^{-(\sigma / \omega_d) \pi}$  است.

اگر مقدار نهایی خروجی  $c(\infty)$  یک نباشد، باید از رابطه زیر استفاده کرد

$$M_p = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)}$$

زمان نشست،  $t_s$ : در سیستمهای مرتبه دوم فرومیرا پاسخ گذرا از معادله (۱۲-۵) به صورت زیر به دست می‌آید

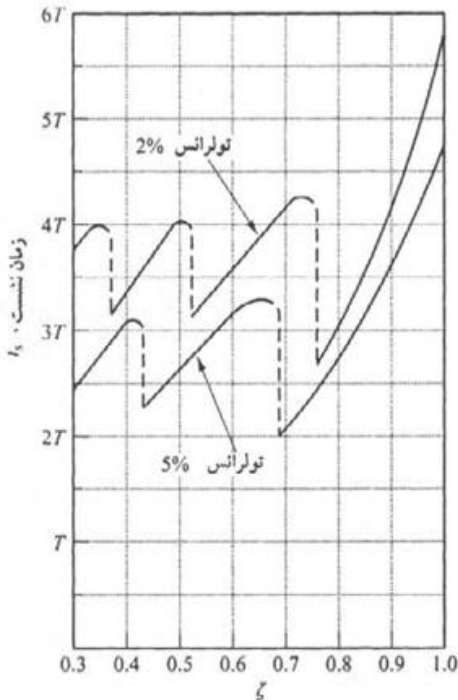
$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \left( \omega_d t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \right) \quad t \geq 0$$



شکل ۵-۱۰

منحنی‌های بوش پاسخ پله

سیستم شکل ۵-۶



شکل ۵-۱۱

منحنی‌های زمان نشست

 $t_s$  برحسب  $T$ 

منحنی‌های  $1 \pm (e^{-\zeta \omega_n t} / \sqrt{1-\zeta^2})$  پوش پاسخ گذرای سیستم به ورودی پله‌ای است. منحنی پاسخ

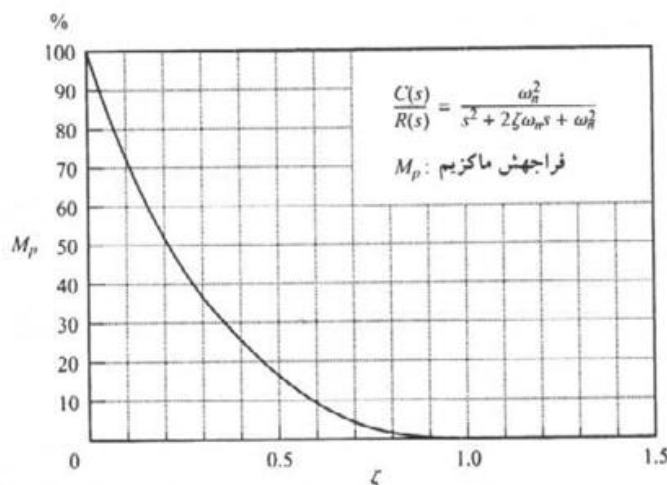
$c(t)$  مطابق شکل ۵-۱۰ همواره بین یک زوج منحنی پوش باقی می‌ماند. ثابت زمانی این پوشها  $1/\zeta \omega_n$  است.

سرعت میرایی پاسخ گذرا به اندازه ثابت زمانی  $1/\zeta \omega_n$  بستگی دارد. به ازای یک  $\omega_n$  معین، زمان نشست  $t_s$  تابعی از نسبت میرایی  $\zeta$  است. در شکل ۵-۷ می‌بینیم که به ازای یک  $\omega_n$  خاص و  $\zeta$  بین ۰ تا ۱، زمان نشست  $t_s$  سیستمهای با میرایی کم بزرگتر از زمان نشست سیستمهای دارای نسبت میرایی بزرگ است. برای سیستمهای فرامیرا زمان نشست  $t_s$ ، به خاطر شروع کند پاسخ بزرگتر است.

زمان نشست متناظر با نوارهای  $\pm 2\%$  یا  $\pm 5\%$  را می‌توان از منحنی‌های شکل ۵-۷ برای مقادیر مختلف  $\zeta$  برحسب ثابت زمانی  $T = 1/\zeta \omega_n$  به دست آورد. نتایج در شکل ۵-۱۱ نشان داده شده است. برای  $0.9 < \zeta < 1$  و با معیار ۲٪،  $t_s$  تقریباً چهار برابر ثابت زمانی سیستم است. با معیار ۵٪،  $t_s$  تقریباً سه برابر ثابت زمانی است. دقت کنید که زمان نشست در حول و حوش  $\zeta = 0.76$  (برای معیار ۲٪) یا  $\zeta = 0.68$  (برای معیار ۵٪) می‌نیم می‌شود؛ سپس به ازای  $\zeta$ های بزرگتر تقریباً به طور خطی بزرگ می‌شود. ناپوستگی‌های موجود در منحنی‌های شکل ۵-۱۱ به این خاطر است که تغییر کوچکی در مقدار  $\zeta$  می‌تواند به تغییر قابل ملاحظه‌ای در زمان نشست منجر شود.

برای ساده شدن مقایسه سیستمها معمولاً زمان نشست را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$t_s = 4T = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{\zeta \omega_n} \quad (\text{معیار } 2\%) \quad (5-22)$$



شکل ۱۲-۵

منحنی های  $M_p$  بر حسب  $\zeta$ .

یا

$$t_s = 3T = \frac{3}{\sigma} = \frac{3}{\zeta \omega_n} \quad (\text{معیار } 5\%) \quad (23-5)$$

زمان نشست با حاصلضرب نسبت میرایی و فرکانس طبیعی نامیرا نسبت عکس دارد. چون مقدار  $\zeta$  معمولاً توسط ماکزیمم فراجهش مجاز تعیین می‌شود، زمان نشست عمده‌تاً توسط فرکانس طبیعی نامیرا تعیین می‌شود. یعنی طول پاسخ گذرا را می‌توان با تنظیم فرکانس طبیعی نامیرا  $\omega_n$ ، بدون تغییر ماکزیمم فراجهش، تغییر داد. از تحلیل بالا به وضوح چنین برمی‌آید که برای داشتن پاسخ سریع باید  $\omega_n$  بزرگ باشد. برای محدود کردن ماکزیمم فراجهش  $M_p$  و کوچک کردن زمان نشست، نسبت میرایی  $\zeta$  نباید خیلی کوچک باشد. رابطه ماکزیمم درصد فراجهش  $M_p$  و نسبت میرایی  $\zeta$  در شکل ۱۲-۵ نشان داده شده است. توجه کنید که به ازای نسبت میرایی بین ۰/۴ و ۰/۷ ماکزیمم درصد فراجهش برای پاسخ پله بین ۲۵٪ تا ۴٪ است. توجه به این نکته مهم است که معادلات زمان صعود، زمان اوج، ماکزیمم فراجهش، و زمان نشست تنها برای سیستم استاندارد مرتبه دوم تعریف شده با معادله (۵-۱۰) معتبر است. اگر سیستم مرتبه دوم یک یا دو صفر داشته باشد، شکل پاسخ پله کاملاً با منحنی‌های شکل ۷-۵ تفاوت دارد.

## مثال ۱-۵

سیستم شکل ۶-۵ را با  $\zeta = 0/6$  و  $\omega_n = 5 \text{ rad/s}$  در نظر بگیرید. می‌خواهیم زمان صعود  $t_r$ ، زمان اوج  $t_p$ ، ماکزیمم فراجهش  $M_p$ ، و زمان نشست  $t_s$  سیستم را به ازای ورودی پله واحد بیابیم.

به ازای مقادیر  $\zeta$  و  $\omega_n$  داده شده، داریم  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 4$  و  $\sigma = \zeta \omega_n = 3$ .

زمان صعود  $t_r$ : زمان صعود عبارت است از

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} = \frac{3/14 - \beta}{4}$$

که در آن  $\beta$  برابر است با

$$\beta = \tan^{-1} \frac{\omega_d}{\sigma} = \tan^{-1} \frac{4}{3} = 0.93 \text{ rad}$$

پس زمان صعود برابر است با

$$t_r = \frac{3/14 - 0.93}{4} = 0.055 \text{ sec}$$

زمان اوج  $t_p$ : زمان اوج عبارت است از

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{3/14}{4} = 0.785 \text{ sec}$$

ماکزیمم فراجش  $M_p$ : ماکزیمم فراجش برابر است با

$$M_p = e^{-(\sigma/\omega_d)\pi} = e^{-(3/4) \times 3/14} = 0.95$$

پس ماکزیمم فراجش ۹۵٪ است.

زمان نشست  $t_s$ : با معیار ۲٪ زمان نشست عبارت است از

$$t_s = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{3} = 1.33 \text{ sec}$$

و با معیار ۵٪

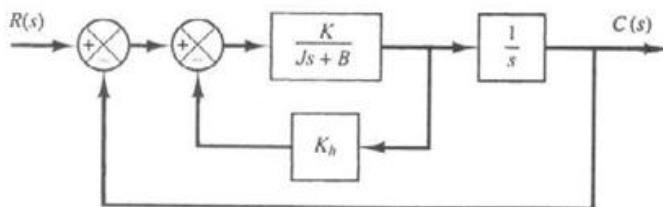
$$t_s = \frac{3}{\sigma} = \frac{3}{3} = 1 \text{ sec}$$

**سیستم سروو یا فیدبک سرعت.** برای بهبود عملکرد سیستم می‌توان مشتق سیگنال خروجی را به کار برد. برای یافتن مشتق خروجی (که سیگنال موقعیت است) استفاده از تاکومتر مطلوبتر از مشتق گرفتن از سیگنال خروجی است. (توجه کنید که مشتقگیری اثرهای نویز را تقویت می‌کند. در واقع اگر نویزهای ناپیوسته موجود باشد، مشتقگیری نویزهای ناپیوسته را بیش از سیگنال مفید تقویت می‌کند. برای مثال خروجی پتانسیومتر یک سیگنال ولتاژ ناپیوسته است، زیرا جاروی پتانسیومتر با کشیده شدن بر روی سیم پیچ از روی یک دور به دور بعدی می‌رسد و ولتاژ القا شده روی جارو پرش دارد. بنابراین نباید از خروجی پتانسیومتر مشتق گرفت.) تاکومتر یک مولد dc خاص است که معمولاً برای اندازه‌گیری سرعت، بدون نیاز به مشتقگیری، به کار می‌رود. خروجی تاکومتر با سرعت زاویه‌ای موتور متناسب است.

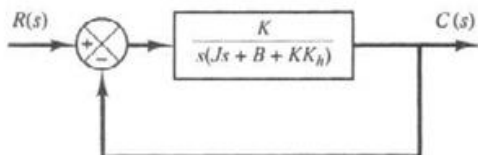
سیستم سرووی شکل ۵-۱۳ (الف) را در نظر بگیرید. در این سیستم برای تشکیل سیگنال عمل‌کننده ورودی هم سیگنال سرعت و هم سیگنال موقعیت به ورودی برگردانده می‌شود. سیگنال سرعت را در هر سیستم سروو می‌توان به سادگی با استفاده از تاکومتر ایجاد کرد. نمودار بلوکی شکل ۵-۱۳ (الف) را می‌توان به صورت نشان داده شده در شکل ۵-۱۳ (ب) ساده کرد و به دست آورد

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Js^2 + (B + KK_h)s + K} \quad (24-5)$$

مقایسه معادله (۲۴-۵) و معادله (۹-۵) نشان می‌دهد که فیدبک سرعت میرایی را زیاد می‌کند. اکنون ضریب میرایی  $\zeta$  عبارت است از



(الف)



(ب)

### شکل ۱۳-۵

(الف) نمودار بلوکی یک سیستم سروو؛

(ب) نمودار بلوکی ساده شده.

$$\zeta = \frac{B + K K_h}{2\sqrt{KJ}} \quad (۲۵-۵)$$

فیدبک سرعت بر فرکانس طبیعی نامیرا  $\omega_n = \sqrt{K/J}$  اثری ندارد. با توجه به این که ماکزیمم فراجش به ازای ورودی پله ای را می توان با نسبت میرایی  $\zeta$  کنترل کرد، می توان آن را با تنظیم ثابت فیدبک سرعت  $K_h$ ، برای دستیابی به  $\zeta$  بین ۰/۴ و ۰/۷ محدود کرد. به خاطر داشته باشید که فیدبک سرعت نسبت میرایی را زیاد می کند، بدون این که بر فرکانس طبیعی نامیرای سیستم اثر بگذارد.

برای سیستم شکل ۱۳-۵ (الف) مقادیر بهره  $K$  و ثابت فیدبک سرعت  $K_h$  را طوری تعیین کنید که ماکزیمم فراجش به ازای ورودی پله واحد ۰/۲ و زمان اوج ۱ sec باشد. به ازای این مقادیر  $K$  و  $K_h$  زمان صعود و زمان نشست را بیابید.

$$B = 1 \text{ N-m/rad/sec} \text{ و } J = 1 \text{ kg-m}^2 \text{ داریم}$$

تعیین مقادیر  $K$  و  $K_h$ : ماکزیمم فراجش  $M_p$  از معادله (۲۱-۵) به دست می آید

$$M_p = e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})\pi}$$

این مقدار باید ۰/۲ باشد پس

$$e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})\pi} = 0.2$$

$$\frac{\zeta \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 1.61$$

یا

که نتیجه می دهد

$$\zeta = 0.456$$

زمان اوج برابر ۱ sec تعیین شده است. پس با استفاده از معادله (۲۰-۵)

$$\epsilon_p = \frac{\pi}{\omega_d} = 1$$

$$\omega_d = 3.14$$

یا

 چون  $\zeta = 0.456$ ، پس

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 3.53$$

 چون در فرکانس طبیعی  $\omega_n$  برابر  $\sqrt{K/J}$  است

$$K = J\omega_n^2 = \omega_n^2 = 12.5 \text{ N/m}$$

 پس طبق معادله (۵-۲۵)  $K_h$  به صورت زیر به دست می‌آید.

$$K_h = \frac{2\sqrt{KJ}\zeta - B}{K} = \frac{2\sqrt{K}\zeta - 1}{K} = 0.178 \text{ sec}$$

 زمان صعود  $t_r$ : زمان صعود از معادله (۵-۱۹) به دست می‌آید.

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$$

که در آن

$$\beta = \tan^{-1} \frac{\omega_n}{\sigma} = \tan^{-1} 1.95 = 1.1^\circ$$

 پس  $t_r$  برابر است با

$$t_r = 0.65 \text{ sec}$$

 زمان نشست  $t_s$ : با معیار ۲٪

$$t_s = \frac{4}{\sigma} = 2.48 \text{ sec}$$

و با معیار ۵٪

$$t_s = \frac{3}{\sigma} = 1.86 \text{ sec}$$

پاسخ ضربه سیستمهای مرتبه دوم. به ازای ورودی ضربه واحد، تبدیل لاپلاس ورودی یک است، یا  $R(s)=1$ . پاسخ ضربه  $C(s)$  سیستم مرتبه دوم شکل ۵-۶ عبارت است از

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

 عکس تبدیل لاپلاس این معادله حل زمانی پاسخ ضربه  $c(t)$  را به صورت زیر به دست می‌دهد:

 به ازای  $0 < \zeta < 1$ ، در  $t \geq 0$ 

$$c(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t \quad (5-26)$$

به ازای  $\zeta = 1$  در  $t \geq 0$

$$c(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t} \quad (27-5)$$

به ازای  $\zeta > 1$  در  $t \geq 0$

$$c(t) = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} - \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \quad (28-5)$$

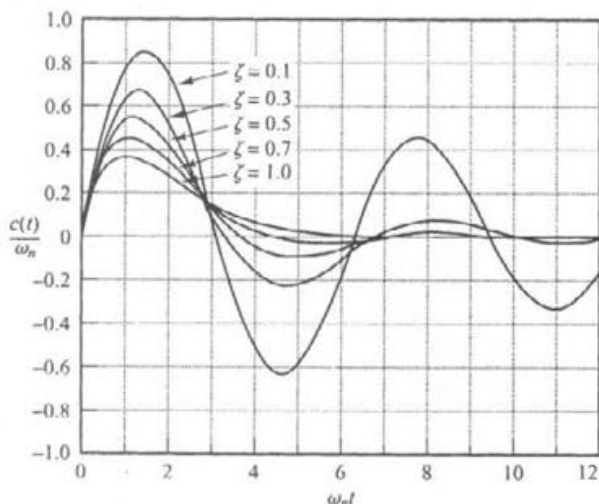
توجه کنید که بدون استفاده از عکس تبدیل لاپلاس  $C(s)$  نیز می‌توان پاسخ ضربه  $c(t)$  را با مشتگیری از پاسخ پله به دست آورد، زیرا پاسخ ضربه مشتق زمانی پاسخ پله است. در شکل ۵-۱۴ منحنی‌های پاسخ ضربه داده شده توسط معادلات (۲۶-۵) و (۲۷-۵)، به ازای مقادیر مختلف  $\zeta$  نشان داده شده است. در این منحنی‌ها  $c(t)/\omega_n$  برحسب متغیر بدون بعد  $\omega_n t$  رسم شده است. بنابراین منحنی‌ها تنها تابعی از  $\zeta$  هستند. برای حالت میرای بحرانی و فرامیرا پاسخ ضربه همواره مثبت یا صفر است؛ یعنی  $c(t) \geq 0$ . معادلات (۲۷-۵) و (۲۸-۵) نیز این مطلب را نشان می‌دهد. برای حالت فرومیرا پاسخ ضربه  $c(t)$  حول صفر نوسان می‌کند و هم مثبت می‌شود و هم منفی.

تحلیل بالا نشان می‌دهد که اگر پاسخ ضربه  $c(t)$  تغییر علامت ندهد، سیستم یا میرای بحرانی است یا فرامیرا، که در هر دو حالت پاسخ پله فراجش ندارد، بلکه به طور یکنوا کم یا زیاد شده، به مقدار ثابتی می‌گراید.

ماکزیمم فراجش پاسخ ضربه سیستم زیر میرا در زمان زیر رخ می‌دهد

$$t = \frac{\tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \quad \text{به ازای } 0 < \zeta < 1 \quad (29-5)$$

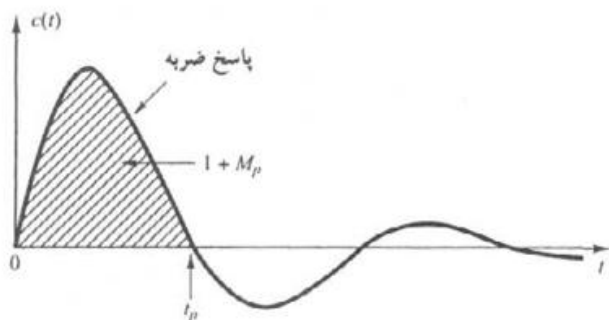
[معادله (۲۹-۵) را می‌توان با برابر صفر قرار دادن  $dc/dt$  و حل معادله حاصل به دست آورد.] ماکزیمم



شکل ۵-۱۴

منحنی‌های پاسخ ضربه

سیستم شکل ۵-۶



شکل ۵-۱۵

منحنی پاسخ ضربه

سیستم شکل ۵-۶

فرجهش عبارت است از

$$c(t)_{\max} = \omega_n \exp\left(-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) \quad \text{که در آن } 0 < \zeta < 1 \quad (۳۰-۵)$$

[معادله (۳۰-۵) را می‌توان با گذاشتن معادله (۲۹-۵) در معادله (۲۶-۵) به دست آورد.]

چون تابع پاسخ ضربه مشتق زمانی تابع پاسخ پله است، ماکزیمم فرجهش  $M_p$  پاسخ پله را می‌توان از پاسخ ضربه متناظر با آن یافت. مساحت زیر منحنی پاسخ ضربه، از  $t=0$  تا زمان اولین عبور از صفر شکل ۵-۱۵ برابر  $1+M_p$  است، که در آن  $M_p$  ماکزیمم فرجهش پاسخ پله است و از معادله (۲۱-۵) به دست می‌آید. زمان اوج  $t_p$  (پاسخ پله) داده شده در معادله (۲۰-۵) با زمانی که پاسخ ضربه برای بار اول محور زمان را قطع می‌کند، متناظر است.

## ۴-۵ سیستمهای مرتبه بالا

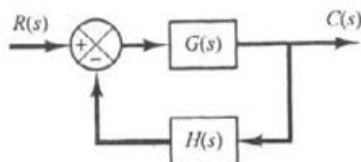
در این بخش تحلیل گذرای سیستمهای مرتبه بالا را به صورت کلی مطرح می‌کنیم. خواهیم دید که پاسخ سیستمهای مرتبه بالا حاصل جمع پاسخ سیستمهای مرتبه اول و مرتبه دوم است.

**پاسخ گذرای سیستمهای مرتبه بالا.** سیستم شکل ۵-۱۶ را در نظر بگیرید. تابع حلقه بسته عبارت است از

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (۳۱-۵)$$

در حالت کلی  $G(s)$  و  $H(s)$  نسبتهای دو چندجمله‌ای بر حسب  $s$  هستند، یا

$$H(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \quad \text{و} \quad G(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$$



شکل ۵-۱۶

سیستم کنترل.

که در آن  $p(s)$ ،  $q(s)$ ،  $n(s)$  و  $d(s)$  چند جمله‌ای‌هایی بر حسب  $s$  هستند. پس تابع تبدیل حلقه بسته، یعنی معادله (۳۱-۵) را می‌توان به این شکل نوشت

$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{p(s) d(s)}{q(s) d(s) + p(s) n(s)} \\ &= \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (m \leq n) \end{aligned}$$

پاسخ گذرای این سیستم به هر ورودی را می‌توان با شبیه‌سازی کامپیوتری به دست آورد. (بخش ۵-۵ را ببینید). اگر بخواهیم عبارت تحلیلی پاسخ گذرا را بیابیم، باید چند جمله‌ای مخرج را تجزیه کنیم. [برای یافتن ریشه‌های چند جمله‌ای مخرج می‌توان از MATLAB استفاده کرد. دستور لازم roots (den) است.] پس از تجزیه صورت و مخرج می‌توان  $C(s)/R(s)$  را به شکل زیر نوشت

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)} \quad (32-5)$$

بباید رفتار پاسخ این سیستم به ورودی پله واحد را بررسی کنیم. ابتدا حالتی را که قطبهای حلقه بسته حقیقی و متمایزند در نظر بگیرید. به ازای ورودی پله واحد می‌توان معادله (۳۲-۵) را به صورت زیر نوشت

$$C(s) = \frac{a}{s} + \sum_{j=1}^n \frac{a_j}{s+p_j} \quad (33-5)$$

که در آن  $a_j$  باقیمانده در قطب  $s = -p_j$  است. (اگر سیستم قطبهای مکرر داشته باشد،  $C(s)$  دارای جملات قطب مکرز است.) [بسط  $C(s)$  به کسره‌های جزئی، به صورت معادله (۳۳-۵) را می‌توان به راحتی با MATLAB انجام داد. دستور residue را به کار برید. (پیوست ب را ببینید).]

اگر تمام قطبهای حلقه بسته در نیم صفحه چپ باشند، اندازه نسبی باقیمانده‌ها اهمیت نسبی مولفه‌های بسط داده شده را تعیین می‌کند. اگر صفر حلقه بسته‌ای نزدیک یک قطب حلقه بسته قرار داشته باشد، باقیمانده در این قطب کوچک بوده، ضریب جمله متناظر با این قطب در پاسخ گذرا نیز کوچک است. اگر قطب و صفر به حد کافی نزدیک باشند، اثر هم را حذف می‌کنند. اگر قطبی از مبدأ خیلی دور باشد، باقیمانده در آن قطب ممکن است کوچک باشد. پاسخ گذرای متناظر با آن قطب کوچک است و عمر کوتاهی دارد. جملاتی از  $C(s)$  که باقیمانده کوچکی دارند تأثیر چندانی در پاسخ گذرا ندارند، و می‌توان آنها را نادیده گرفت. با این کار سیستم مرتبه بالا به سیستمی با مرتبه پایین‌تر تبدیل می‌شود. (این تقریب ما را قادر می‌کند که با توجه به مشخصات پاسخ گذرای سیستمی ساده به برآورد مشخصات پاسخ یک سیستم مرتبه بالا بپردازیم).

حال موردی را در نظر بگیرید که  $C(s)$  هم قطب حقیقی و هم زوج قطبهای مزدوج مختلط داشته باشد. وجود یک زوج قطب مختلط یک جمله مرتبه دوم ایجاد می‌کند. چون معادله مشخصه تجزیه شده هم جمله مرتبه اول دارد و هم جمله مرتبه دوم، معادله (۳۳-۵) را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$C(s) = \frac{a}{s} + \sum_{j=1}^q \frac{a_j}{s+p_j} + \sum_{k=1}^r \frac{b_k(s+\zeta_k\omega_k) + c_k\omega_k\sqrt{1-\zeta_k^2}}{s^2 + 2\zeta_k\omega_k s + \omega_k^2} \quad (q+2r=n)$$

فرض کرده‌ایم تمام قطبهای  $C(s)$  مجزا هستند. [اگر قطب حلقه بسته مکرر وجود داشته باشد،  $C(s)$  نیز جملات ناشی از قطبهای مکرر دارد.] این معادله آخری نشان می‌دهد که پاسخ سیستم مرتبه بالا مجموع توابع ساده‌ای است که در پاسخ سیستمهای مرتبه اول و مرتبه دوم یافت می‌شوند. پس پاسخ پله  $c(t)$ ، عکس تبدیل لاپلاس  $C(s)$ ، عبارت است از

$$c(t) = a + \sum_{j=1}^q a_j e^{-p_j t} + \sum_{k=1}^r b_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \cos \omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} t \\ + \sum_{k=1}^r b_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \sin \omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} t \quad t \geq 0 \quad (5-34)$$

پس منحنی پاسخ یک سیستم مرتبه بالای پایدار، مجموع تعدادی منحنی نمایی و سینوسی میرای نمایی است. اگر تمام قطبهای حلقه بسته در نیمه چپ صفحه  $s$  باشند، با افزایش  $t$  جملات نمایی و سینوسی میرای معادله (۵-۳۴) به صفر میل می‌کنند، پس خروجی حالت ماندگار عبارت است از  $c(\infty) = a$ .  
بباید فرض کنیم سیستم پایدار است. پس بخش حقیقی قطبهای حلقه بسته دور از محور  $j\omega$  مقداری منفی و بزرگ است. جملات نمایی متناظر با این قطبها سریعاً به صفر می‌گرایند. (توجه کنید که فاصله افقی یک قطب حلقه بسته تا محور  $j\omega$  زمان نشست جمله گذرای متناظر با آن قطب را تعیین می‌کند. هر چه این فاصله کوچکتر باشد زمان نشست بیشتر است.)

به خاطر داشته باشید که نوع پاسخ گذرا توسط قطبهای حلقه بسته تعیین می‌شود، ولی شکل پاسخ گذرا عمدتاً توسط صفرهای حلقه بسته تعیین می‌شود. همانطور که قبلاً دیدیم قطبهای  $R(s)$  جملات پاسخ حالت ماندگار جواب را تعیین می‌کنند، حال آن که قطبهای  $C(s)/R(s)$  در جملات نمایی یا سینوسی میرای پاسخ گذرا ظاهر می‌شوند. صفرهای  $C(s)/R(s)$  بر نماهای جملات پاسخ گذرا اثری نمی‌گذارند، ولی بر دامنه و علامت باقیمانده تأثیر دارند.

**قطبهای حلقه بسته غالب.** غلبه نسبی قطبهای حلقه بسته توسط نسبت بخشهای حقیقی قطبهای حلقه بسته، و همینطور دامنه نسبی باقیمانده‌های محاسبه شده در قطبهای حلقه بسته تعیین می‌شود. اندازه باقیمانده‌ها هم توسط قطبها و هم توسط صفرهای حلقه بسته تعیین می‌شود.

اگر نسبت بخشهای حقیقی قطبها بزرگتر از ۵ بوده، نزدیک آنها صفری وجود نداشته باشد، قطبهای نزدیکتر به محور  $j\omega$  در رفتار پاسخ گذرا قطب غالب هستند، زیرا جملات نمایی متناظر با آنها کندتر میرا می‌شود. این قطبها که بر رفتار پاسخ گذرا اثر غالب را دارند، قطبهای حالت بسته غالب نامیده می‌شوند. قطبهای غالب حلقه بسته اغلب به صورت زوج مزدوج مختلط ظاهر می‌شوند. قطبهای حلقه بسته غالب از همه قطبهای حلقه بسته مهم‌ترند.

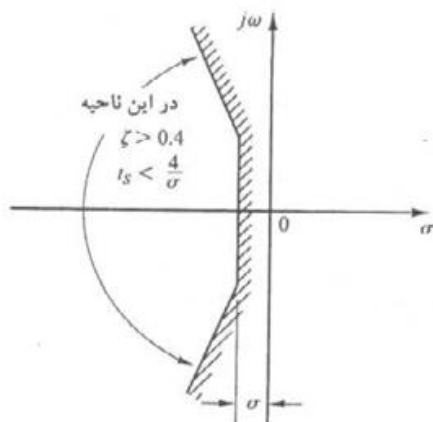
بهره سیستمهای مرتبه بالا معمولاً طوری تنظیم می‌شود که یک زوج قطب حلقه بسته مزدوج مختلط غالب وجود داشته باشد. وجود چنین قطبهایی در یک سیستم پایدار اثراتی غیرخطی چون ناحیه مرده، خلاصی و اصطکاک کولنی را کم می‌کند.

**تحلیل پایداری در صفحه مختلط.** پایداری یک سیستم حلقه بسته خطی را می‌توان با توجه به محل قطبهای حلقه بسته آن در صفحه  $s$  تعیین کرد. اگر قطبی در نیم صفحه راست وجود داشته باشد، با گذشت زمان وجه غالبی تشکیل می‌دهد و پاسخ گذرا به طور یکنوا افزایش می‌یابد، یا نوسانی با دامنه فزاینده پیدا می‌کند. این حالت وجود سیستمی ناپایدار را نشان می‌دهد. در چنین سیستمی پس از روشن شدن منبع تغذیه، خروجی رو به افزایش می‌گذارد. اگر اشباعی رخ ندهد و ترمزی تعبیه نشده باشد، سیستم در معرض آسیب و خرابی قرار می‌گیرد، زیرا پاسخ هیچ سیستم فیزیکی واقعی نمی‌تواند به طور نامحدود زیاد شود. پس وجود قطبهای حلقه بسته نیم صفحه راست در سیستمهای کنترل خطی مجاز نیست. اگر تمام قطبهای حلقه بسته سمت چپ محور  $j\omega$  باشد، پاسخ گذرا سرانجام به تعادل می‌رسد. این نشانه پایداری بودن سیستم است.

پایداری یا ناپایداری یک سیستم خطی خاصیتی از خود سیستم است و به ورودی یا تابع تحریک سیستم بستگی ندارد. قطبهای ورودی یا تابع تحریک بر پایداری سیستم اثر نمی‌گذارند، بلکه تنها در جملات حالت ماندگار پاسخ ظاهر می‌شوند. بنابراین مسئله پایداری مطلق سیستم را می‌توان با قرار دادن تمام قطبهای حلقه بسته آن در سمت چپ محور  $j\omega$  حل کرد. (از لحاظ ریاضی وجود قطب بر روی محور  $j\omega$  به نوسانی می‌انجامد که دامنه‌اش نه کاهش می‌یابد نه افزایش. ولی در موارد عملی، که نویز وجود دارد، دامنه نوسان می‌تواند با آهنگی وابسته به سطح توان نویز تغییر کند. بنابراین سیستم کنترل روی محور  $j\omega$  نیز نباید قطب داشته باشد.)

توجه کنید که تنها قرار داشتن تمام قطبهای حلقه بسته در نیم صفحه چپ، داشتن پاسخ گذرای با مشخصات مطلوب را تضمین نمی‌کند. اگر قطبهای حلقه بسته غالب نزدیک محور  $j\omega$  باشند، پاسخ گذرا می‌تواند نوسانات شدید داشته یا بسیار کند باشد. بنابراین برای تضمین پاسخ گذرای سریع و میرا باید قطبهای حلقه بسته در ناحیه خاصی از صفحه مختلط، مانند ناحیه‌ای که در شکل ۵-۱۷ با هاشور مشخص شده، قرار داشته باشند.

چون پایداری نسبی و عملکرد گذرای یک سیستم کنترل حلقه بسته مستقیماً با آرایش صفر - قطب حلقه بسته در صفحه  $s$  ارتباط دارد، غالباً برای دستیابی به آرایش مناسب لازم است یکی دو پارامتر سیستم قابل تنظیم باشد. اثر تغییر پارامترهای سیستم بر قطبهای حلقه بسته در فصل ۶ به تفصیل بررسی خواهد شد.



شکل ۵-۱۷

ناحیه‌ای از صفحه  $s$  که

شرایط  $\zeta > 0.4$ ,  $t_s < 4/\sigma$

را برآورده می‌کند.

## ۵-۵ تحلیل پاسخ گذرا با MATLAB

مقدمه. در عمل منحنی‌های پاسخ زمانی سیستم‌های مرتبه بالا با شبیه‌سازی کامپیوتری رسم می‌شود. در این بخش روش محاسباتی تحلیل پاسخ گذرا را به کمک MATLAB معرفی می‌کنیم، مشخصاً در مورد پاسخ پله، پاسخ ضربه، پاسخ شیب، و پاسخ به دیگر ورودی‌های ساده صحبت خواهیم کرد.

نمایش سیستم‌های خطی در MATLAB. تابع تبدیل یک سیستم با دو آرایه عددی بیان می‌شود. سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2s + 25}{s^2 + 4s + 25} \quad (5-35)$$

این سیستم با دو آرایه عددی نمایش داده می‌شود که هر کدام ضرایب چندجمله‌ای‌های صورت یا مخرج را به ترتیب توانهای نزولی  $s$  در بر دارند:

$$\begin{aligned} \text{num} &= [2 \quad 25] \\ \text{den} &= [1 \quad 4 \quad 25] \end{aligned}$$

نمایش زیر نیز معتبر است

$$\begin{aligned} \text{num} &= [0 \quad 2 \quad 25] \\ \text{den} &= [1 \quad 4 \quad 25] \end{aligned}$$

در این عبارت صفرهایی اضافه شده است تا مرتبه صورت و مخرج یکی شود. مزیت افزودن صفر این است که در مواقع لزوم می‌توان بردارهای  $\text{num}$  و  $\text{den}$  را مستقیماً جمع کرد. مثلاً

$$\begin{aligned} \text{num} + \text{den} &= [0 \quad 2 \quad 25] + [1 \quad 4 \quad 25] \\ &= [1 \quad 6 \quad 50] \end{aligned}$$

اگر  $\text{num}$  و  $\text{den}$  (صورت و مخرج تابع تبدیل حلقه بسته) معلوم باشد، دستورهای مانند

$$\text{step}(\text{num}, \text{den}) \quad ; \quad \text{step}(\text{num}, \text{den}, t)$$

منحنی پاسخ پله سیستم را ایجاد می‌کنند. (در دستور دوم  $t$  زمانهای تعیین شده توسط کاربر را دربر دارد.)

برای سیستمی که در فضای حالت تعریف شده است، و برای آن ماتریس حالت  $A$ ، ماتریس کنترل  $B$ ، ماتریس خروجی  $C$ ، و ماتریس انتقال مستقیم  $D$  معادلات حالت معلوم‌اند، دستور

$$\text{step}(A, B, C, D) \quad \text{و} \quad \text{step}(A, B, C, D, t)$$

منحنی پاسخ پله را ایجاد می‌کند. در دستور  $\text{step}$  اگر  $t$  داده نشده باشد، بردار زمان به طرز خودکار تعیین می‌شود.

برای یافتن پاسخ پله یک سیستم می‌توان دستور  $\text{step}(\text{sys})$  را به کار برد. ابتدا باید سیستم را به صورت زیر تعریف کرد

$$\text{sys} = \text{tf}(\text{num}, \text{den})$$

$$\text{sys} = \text{ss}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$$

سپس مثلاً برای یافتن پاسخ پله دستور زیر را به کامپیوتر می‌دهیم

$$\text{step}(\text{sys})$$

دستور step می‌تواند به صورتهای زیر در طرف چپ خود آرگومان داشته باشد

$$[y, x, t] = \text{step}(\text{num}, \text{den}, t)$$

$$[y, x, t] = \text{step}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \text{iu})$$

$$[y, x, t] = \text{step}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \text{iu}, t) \quad (۳۶-۵)$$

در این صورت دستور داده شده نموداری روی صفحه تولید نمی‌کند. در این موارد برای رسم نمودار و دیدن منحنی پاسخ باید از دستور plot استفاده کرد. ماتریسهای  $y$  و  $x$  به ترتیب خروجی و پاسخ حالت سیستم، محاسبه شده در نقاط زمانی موجود در  $t$  را در بر دارند. (تعداد ستونهای  $y$  برابر تعداد خروجی‌ها و تعداد ردیفهای آن برابر تعداد عناصر  $t$  است. تعداد ستونهای  $x$  برابر تعداد حالت‌های سیستم و تعداد ردیفهای آن برابر تعداد عناصر  $t$  است.)

در معادله (۳۶-۵)  $\text{iu}$  یک اسکالرست که تعیین می‌کند کدام ورودی باید ورودی سیستم در نظر گرفته شود، و  $t$  برداری است که زمانهای تعیین شده توسط کاربر را دربر دارد. اگر سیستم چند ورودی - چند خروجی باشد، دستور step، مثلاً دستور بیان شده در معادله (۳۶-۵) چند منحنی پاسخ پله، به ازای تمام ترکیبهای ممکن ورودی - خروجی معادلات زیر

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}$$

ایجاد می‌کند. (برای جزییات بیشتر مثال ۳-۵ را نگاه کنید.)

سیستم زیر را در نظر بگیرید

مثال ۳-۵

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 6/5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

منحنیهای پاسخ پله را بیابید.

گرچه برای یافتن منحنیهای پاسخ پله با MATLAB یافتن تابع تبدیل سیستم لازم نیست، ما این عبارتها را برای مراجعات بعدی به دست می‌آوریم. برای سیستم داده شده به صورت

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}$$

ماتریس انتقال  $G(s)$  ماتریسی است که  $Y(s)$  و  $U(s)$  را به صورت زیر به هم ربط می‌دهد:

$$Y(s) = G(s) U(s)$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس از معادلات حالت به دست می‌آوریم

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \quad (37-5)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \quad (38-5)$$

در یافتن ماتریس انتقال فرض می‌کنیم  $x(0) = 0$ . پس از معادله (37-5) به دست می‌آوریم

$$X(s) = (sI - A)^{-1} BU(s) \quad (39-5)$$

با گذاشتن معادله (39-5) در معادله (38-5) به دست می‌آوریم

$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D] U(s)$$

پس ماتریس انتقال  $G(s)$  این سیستم عبارت است از

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

ماتریس انتقال  $G(s)$  این سیستم عبارت است از

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1}B \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -6/5 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2 + s + 6/5} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 6/5 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2 + s + 6/5} \begin{bmatrix} s-1 & s \\ s+7/5 & 6/5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

پس

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s-1}{s^2 + s + 6/5} & \frac{s}{s^2 + s + 6/5} \\ \frac{s+7/5}{s^2 + s + 6/5} & \frac{6/5}{s^2 + s + 6/5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

چون این سیستم دو ورودی و دو خروجی دارد، می‌توان بسته به این که کدام سیگنال ورودی و کدام سیگنال خروجی در نظر گرفته شود، چهار تابع تبدیل تعریف کرد. توجه کنید که وقتی سیگنال  $u_1$  را ورودی در نظر می‌گیریم، سیگنال  $u_2$  را صفر می‌کنیم، و برعکس، چهار تابع تبدیل عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} \frac{Y_1(s)}{U_1(s)} &= \frac{s-1}{s^2 + s + 6/5} & \frac{Y_2(s)}{U_1(s)} &= \frac{s+7/5}{s^2 + s + 6/5} \\ \frac{Y_1(s)}{U_2(s)} &= \frac{s}{s^2 + s + 6/5} & \frac{Y_2(s)}{U_2(s)} &= \frac{6/5}{s^2 + s + 6/5} \end{aligned}$$

با استفاده از دستور زیر می‌توان چهار منحنی پاسخ پله را رسم کرد.

step (A , B , C , D)

برنامه ۵-۱ این چهار منحنی را ایجاد می‌کند. منحنی‌ها در شکل ۵-۱۸ نشان داده شده‌اند. (توجه کنید که بردار زمان به طور خودکار تولید شده است، زیرا  $t$  در دستور داده نشده است.

برای رسم منحنی پاسخ پله به ازای ورودی  $u_1$  در یک نمودار، و دو منحنی برای پاسخ پله به ازای ورودی  $u_2$  در نموداری دیگر، می‌توان به ترتیب از دستورهای زیر استفاده کرد

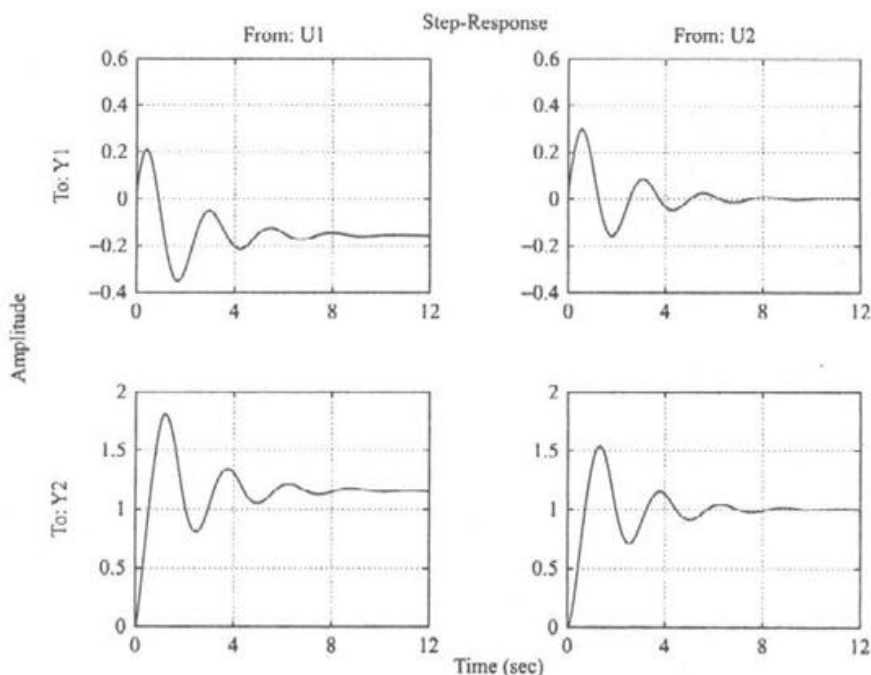
step (A , B , C , D , 1)

و

step (A , B , C , D , 2)

#### MATLAB Program 5-1

```
A = [-1 -1;6.5 0];
B = [1 1;1 0];
C = [1 0;0 1];
D = [0 0;0 0];
step(A,B,C,D)
```



شکل ۵-۱۸ منحنی‌های پاسخ پله.

برنامه ۵-۲ دو منحنی پاسخ پله به ازای ورودی  $u_1$  را در یک نمودار، و دو منحنی پاسخ پله به ازای ورودی  $u_2$  را در نموداری دیگر به دست می‌دهد. شکل ۵-۱۹ دو نمودار را نشان می‌دهد که هر کدام دو منحنی پاسخ پله را دربر دارند. (در این برنامه از دستور text استفاده شده است. این دستور بعد از این مثال توضیح داده شده است.)

#### MATLAB Program 5-2

```
% ***** In this program we plot step-response curves of a system
% having two inputs (u1 and u2) and two outputs (y1 and y2) *****

% ***** We shall first plot step-response curves when the input is
% u1. Then we shall plot step-response curves when the input is
% u2 *****

% ***** Enter matrices A, B, C, and D *****

A = [-1 -1; 6.5 0];
B = [1 1; 1 0];
C = [1 0; 0 1];
D = [0 0; 0 0];

% ***** To plot step-response curves when the input is u1, enter
% the command 'step(A,B,C,D,1)' *****

step(A,B,C,D,1)
grid
title('Step-Response Plots: Input = u1 (u2 = 0)')
text(3.4, -0.06, 'Y1')
text(3.4, 1.4, 'Y2')

% ***** Next, we shall plot step-response curves when the input
% is u2. Enter the command 'step(A,B,C,D,2)' *****

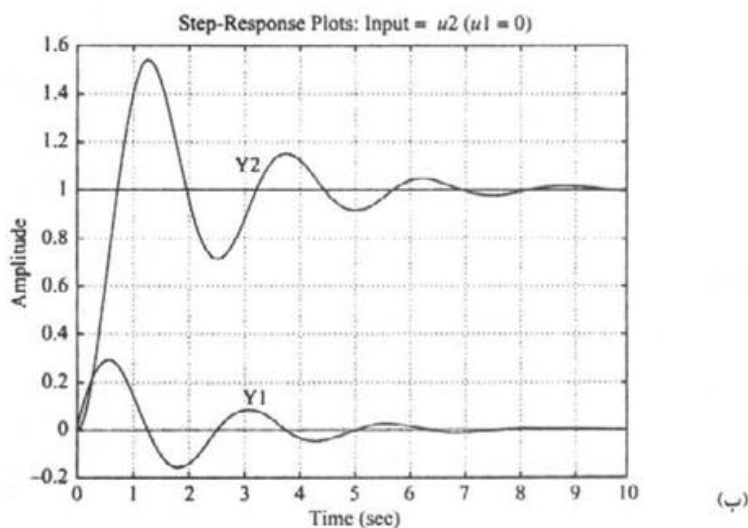
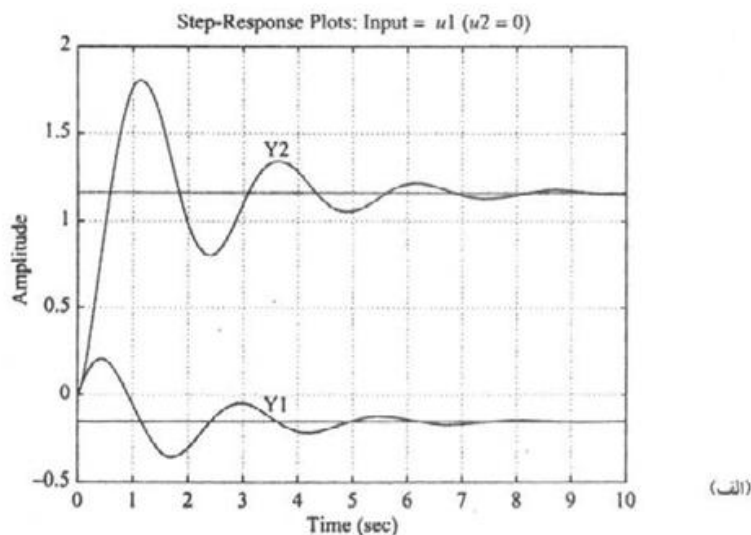
step(A,B,C,D,2)
grid
title('Step-Response Plots: Input = u2 (u1 = 0)')
text(3, 0.14, 'Y1')
text(2.8, 1.1, 'Y2')
```

نوشتن متن روی صفحه گرافیکی. برای نوشتن متن روی صفحه گرافیکی گزاره‌هایی همانند گزاره‌های زیر وارد کنید.

text (3.4 , -0.06 , 'Y1')

و

text (3.4 , 1.4 , 'Y2')



شکل ۵-۱۹ منحنی‌های پاسخ پله: (الف) ورودی  $u_1$  ( $u_2 = 0$ )؛ (ب) ورودی  $u_2$  ( $u_1 = 0$ ) .

گزاره اول به کامپیوتر می‌گوید 'Y1' را در محلی که از نقطه‌ای با مختصات  $x=3.4$ ،  $y=-0.06$  شروع می‌شود بنویسد. به نحوی مشابه گزاره دوم به کامپیوتر می‌گوید 'Y2' را در محلی که از نقطه‌ای با مختصات  $x=3.4$ ،  $y=1.4$  شروع می‌شود بنویسد. [برنامه ۵-۲ و شکل ۵-۱۹ (الف) را ببینید.]

راه دیگر نوشتن متن بر روی نمودار استفاده از دستور gtext است. ساختار این دستور به صورت زیر است

gtext('text')

با اجرای دستور کامپیوتر منتظر می‌ماند تا ماوس محلی روی نمودار برای قرار دادن متن تعیین می‌شود. پس از فشردن شدن کلید چپ ماوس متن درج شده بین علامتهای " در نمودار و در محل تعیین شده نوشته می‌شود. برای یک نمودار می‌توان بارها از دستور gtext استفاده کرد. (برای نمونه برنامه ۵-۱۵ را ببینید.)

توصیف سیستم مرتبه دوم استاندارد در MATLAB همانطور که قبلاً گفتیم سیستم مرتبه دوم

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (5-40)$$

سیستم مرتبه دوم استاندارد خوانده می‌شود. با داشتن  $\omega_n$  و  $\zeta$ ، دستور

printsys (num, den, s) یا printsys (num, den)

num / den را به صورت نسبت دو چند جمله‌ای چاپ می‌کند.

پس اگر برای مثال داشته باشیم  $\omega_n = 5 \text{ rad/s}$  و  $\zeta = 0.4$  می‌توانیم به صورت نشان داده شده در برنامه ۵-۳ یک سیستم مرتبه دوم استاندارد با  $\omega_n = 5 \text{ rad/s}$  و  $\zeta = 0.4$  به دست آوریم. توجه کنید که num0 در برنامه ۵-۳ برابر ۱ است.

#### MATLAB Program 5-3

```
wn = 5;
damping_ratio = 0.4;
[num0,den] = ord2(wn,damping_ratio);
num = 5^2*num0;
printsys(num,den,'s')
num/den =
```

$$\frac{25}{s^2 + 4s + 25}$$

یافتن پاسخ پله سیستم تعریف شده به صورت تابع تبدیل. پاسخ پله سیستم تعریف شده به صورت زیر را در نظر بگیرید

$$G(s) = \frac{25}{s^2 + 4s + 25}$$

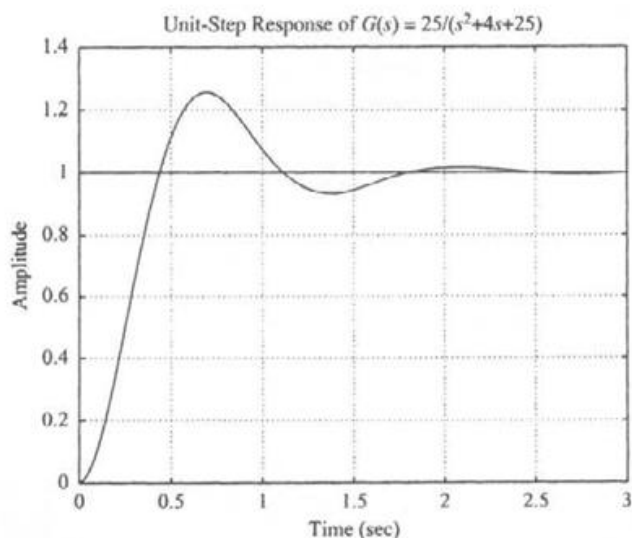
برنامه ۵-۴ نمودار پاسخ پله این سیستم را به دست می‌دهد. منحنی‌های پاسخ پله در شکل ۵-۲۰ نشان داده شده‌اند.

توجه کنید که در شکل ۵-۲۰ (و شکلهای دیگر) نام محورهای x و y به طور خودکار تعیین شده‌اند. اگر بخواهیم محور x و محور y به صورتی متفاوت نامیده شود باید دستور step را به صورتی دیگر به کار ببریم. مثلاً اگر بخواهیم محور x را با 't Sec' و محور y را به صورت 'Output' نشان دهیم، دستور step را به صورت زیر با آرگومان سمت چپ به کار می‌بریم

c = step (num,den,t)

### MATLAB Program 5-4

```
% ----- Unit-step response -----
% ***** Enter the numerator and denominator of the transfer
% function *****
num = [25];
den = [1 4 25];
% ***** Enter the following step-response command *****
step(num,den)
% ***** Enter grid and title of the plot *****
grid
title (' Unit-Step Response of  $G(s) = 25/(s^2+4s+25)$ ')
```



شکل ۵-۲۰  
منحنی پاسخ پله.

یا به طور کلی

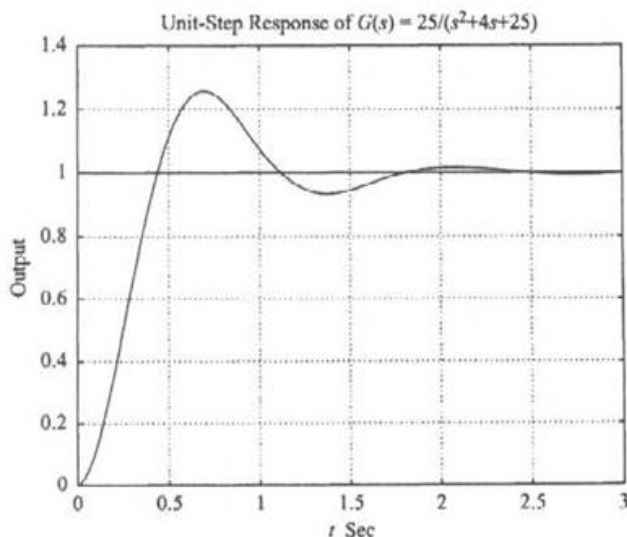
$$[y,x,t] = \text{step}(\text{num},\text{den},t)$$

و دستور plot(t,y) را به کار می‌بریم. به عنوان نمونه برنامه ۵-۵ و شکل ۲۱-۵ را ببینید.

رسم نمودارهای پاسخ پله سه بعدی با MATLAB. با MATLAB به سادگی می‌توان منحنی‌های سه بعدی رسم کرد. دستورهایی که به این منظور به کار می‌رود mesh و surf است. فرق بین این دو دستور در رسم منحنی سه بعدی این است که در اولی تنها خطوطی رسم می‌شوند، ولی در دومی فضای بین خطوط با رنگ پر می‌شوند. در این کتاب تنها دستور mesh را به کار می‌بریم.

**MATLAB Program 5-5**

```
% ----- Unit-step response -----
num = [25];
den = [1 4 25];
t = 0:0.01:3;
[y,x,t] = step(num,den,t);
plot(t,y)
grid
title('Unit-Step Response of G(s)=25/(s^2+4s+25)')
xlabel('t Sec')
ylabel('Output')
```



شکل ۵-۲۱

منحنی پاسخ پله.

سیستم با تابع تبدیل حلقه بسته زیر را در نظر بگیرید

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2 + 2\zeta s + 1}$$

مثال ۵-۴

فرکانس طبیعی نامیرا  $\omega_n$  به ۱ هنجار شده است. منحنی‌های پاسخ پله  $c(t)$  را به ازای  $\zeta$ های زیر رسم کنید.

$$\zeta = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$$

همچنین یک نمودار سه بعدی رسم کنید.

برنامه ۵-۶ یک برنامه MATLAB نمونه برای رسم نمودارهای سه بعدی پاسخ پله سیستم مرتبه دوم است. بخشی از این برنامه منحنی‌های دو بعدی رسم می‌کند (منحنی‌های پاسخ پله معمولی) و یک بخش دیگر منحنی

### MATLAB Program 5-6

```
% ----- Two-dimensional plot and three-dimensional plot of unit-step
% response curves for the standard second-order system with  $\omega_n = 1$ 
% and  $\zeta = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ , and  $1$ . -----

t = 0:0.2:10;
zeta = [0 0.2 0.4 0.6 0.8 1];
for n = 1:6;
    num = [1];
    den = [1 2*zeta(n) 1];
    [y(1:51,n),x,t] = step(num,den,t);
end

% To plot a two-dimensional diagram, enter the command plot(t,y).

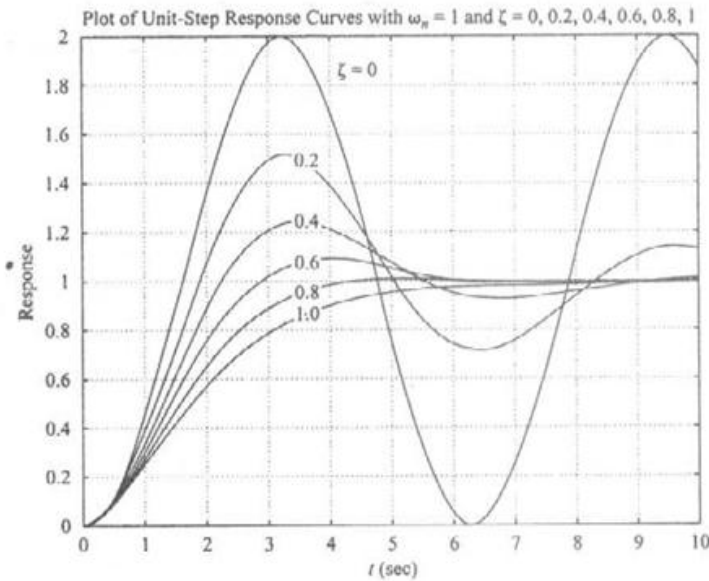
plot(t,y)
grid
title('Plot of Unit-Step Response Curves with \omega_n=1 and \zeta = 0,0.2,0.4,0.6,0.8,1')
xlabel('t (sec)')
ylabel('Response')
text(4.1,1.86,'\zeta = 0')
text(3.5,1.5,'0.2')
text(3.5,1.24,'0.4')
text(3.5,1.08,'0.6')
text(3.5,0.95,'0.8')
text(3.5,0.86,'1.0')

% To plot a three-dimensional diagram, enter the command mesh(t,zeta,y').

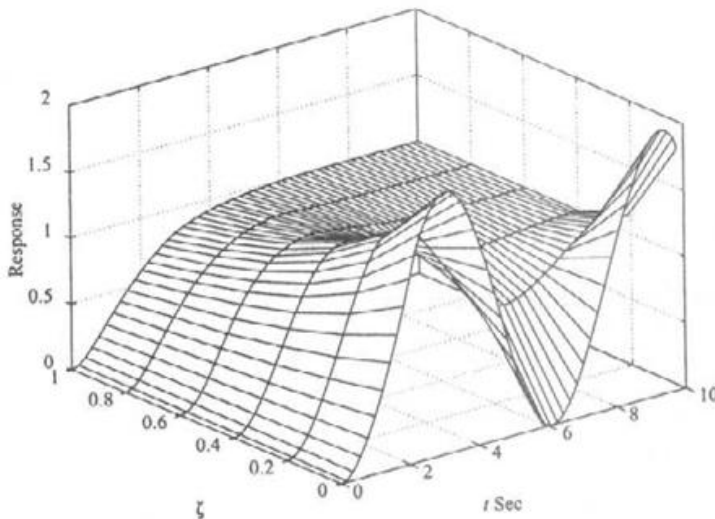
mesh(t,zeta,y')
title('Three-Dimensional Plot of Unit-Step Response Curves')
xlabel('t Sec')
ylabel('\zeta')
zlabel('Response')
```

سه بعدی را به دست می‌دهد. نمودارهای حاصل در شکل‌های ۵-۲۲ (الف) و (ب) نشان داده شده‌اند. برای رسم نمودار سه بعدی از دستور  $\text{mesh}(t,zeta,y')$  استفاده کرده‌ایم. با استفاده از دستور  $\text{mesh}(y')$  نیز همین نتیجه به دست می‌آید. [توجه کنید که دستور  $\text{mesh}(t,zeta,y)$  یا دستور  $\text{mesh}(y)$  یک نمودار سه بعدی شبیه شکل ۵-۲۲ (ب) ایجاد می‌کند، با این تفاوت که محورهای  $x$  و  $y$  با هم عوض می‌شوند. مسئله الف-۵-۱۵ را ببینید.]

اگر در یک برنامه محاسبات تکراری وجود داشته باشد، آن برنامه را به صورت‌های مختلفی می‌توان نوشت. یک راه متداول برای ساده کردن چنین محاسباتی استفاده از حلقه `for` است. برنامه ۵-۶ با استفاده از حلقه `for` نوشته شده است. در این کتاب برنامه‌های متعددی وجود دارد که در آنها از حلقه `for` استفاده شده است. به خواننده توصیه می‌کنیم تا تمام این برنامه‌ها را بررسی کند و با رهیافت به کار رفته کاملاً آشنا شود.



(الف)



(ب)

شکل ۵-۲۲

(الف) منحنی‌های پاسخ پله دو بعدی به ازای  $\zeta = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ ؛ (ب) نمودار سه بعدی منحنی‌های پاسخ پله.

یافتن زمان صعود، زمان اوج، ماکزیمم فراجش و زمان نشست با MATLAB. برنامه MATLAB برای یافتن زمان صعود، زمان اوج، ماکزیمم فراجش، و زمان نشست بسیار مناسب است. سیستم تعریف شده به صورت زیر را در نظر بگیرید

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{25}{s^2 + 6s + 25}$$

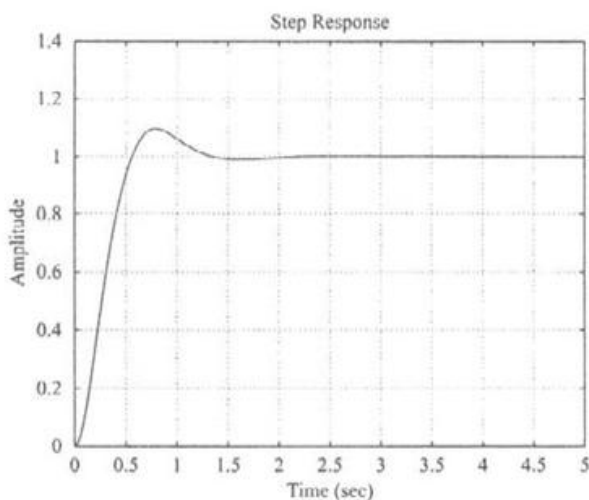
برنامه ۷-۵ زمان صعود، زمان اوج، ماکزیمم فراجش، و زمان نشست این سیستم را به دست می‌دهد. منحنی پاسخ پله سیستم نیز در شکل ۲۳-۵ رسم شده است تا بتوان نتایج به دست آمده را امتحان کرد. (توجه کنید که این برنامه را می‌توان برای سیستمهای مرتبه بالا نیز به کار برد. مسئله الف-۵-۱۰ را ببینید)

**پاسخ ضربه.** با دستورهای زیر می‌توان پاسخ ضربه یک سیستم کنترل را با MATLAB به دست آورد.

```
impulse (num , den)
impulse (A , B , C , D)
[y , x , t] = impulse (num , den)
[y , x , t] = impulse (num , den , t) (۴۱-۵)
[y , x , t] = impulse (A , B , C , D)
[y , x , t] = impulse (A , B , C , D , iu) (۴۲-۵)
[y , x , t] = impulse (A , B , C , D , iu , t) (۴۳-۵)
```

#### MATLAB Program 5-7

```
% ----- This is a MATLAB program to find the rise time, peak time,
% maximum overshoot, and settling time of the second-order system
% and higher-order system -----
% ----- In this example, we assume zeta = 0.6 and wn = 5 -----
num = [25];
den = [1 6 25];
t = 0:0.005:5;
[y,x,t] = step(num,den,t);
r = 1; while y(r) < 1.0001; r = r + 1; end;
rise_time = (r - 1)*0.005
rise_time =
    0.5550
[ymax,tp] = max(y);
peak_time = (tp - 1)*0.005
peak_time =
    0.7850
max_overshoot = ymax-1
max_overshoot =
    0.0948
s = 1001; while y(s) > 0.98 & y(s) < 1.02; s = s - 1; end;
settling_time = (s - 1)*0.005
settling_time =
    1.1850
```



شکل ۵-۲۳

منحنی پاسخ پله.

دستور impulse (num , den) پاسخ ضربه سیستم را رسم می‌کند. دستور (A , B , C , D) impulse یک دسته منحنی پاسخ ضربه، هر کدام متناظر با یک ترکیب ممکن ورودی - خروجی سیستم زیر را رسم می‌کند.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

در معادلات (۵-۴۲) و (۵-۴۳) کمیت اسکالر  $u$  مشخص می‌کند، کدام یک از ورودی‌ها باید برای تعیین پاسخ ضربه به عنوان ورودی سیستم به کار رود.

همچنین اگر در دستور  $t$  به صورت صریح به کار نرود، بردار زمان به طور خودکار تعیین می‌شود. در معادلات (۵-۴۱) و (۵-۴۳) بردار زمان مشخص شده توسط کاربر است، این بردار زمانهایی را که پاسخ ضربه باید در آنها محاسبه شود، دربر دارد.

اگر دستورهای بالا با آرگومان طرف چپ  $[y, x, t]$ ، مثلاً به صورت  $[y, x, t] = \text{impz}(A, B, C, D)$  به کار رود، خروجی، حالت و بردار  $t$  به ترتیب در ماتریسهای  $y$ ،  $x$  و  $t$  قرار می‌گیرند و نموداری روی صفحه رسم نمی‌شود. ماتریسهای  $y$  و  $x$  خروجی و حالت سیستم در زمانهای مشخص شده در بردار  $t$  را دربر دارند. (تعداد ستونهای  $y$  با تعداد خروجی‌ها و تعداد ردیفهای آن با تعداد عناصر  $t$  برابر است. ماتریس  $x$  به تعداد متغیرهای حالت ستون و به تعداد عناصر  $t$  ردیف دارد.) برای رسم منحنی پاسخ باید یک دستور رسم، مثلاً  $\text{plot}(t, y)$ ، به کار برده شود.

پاسخ ضربه سیستم زیر را بیابید:

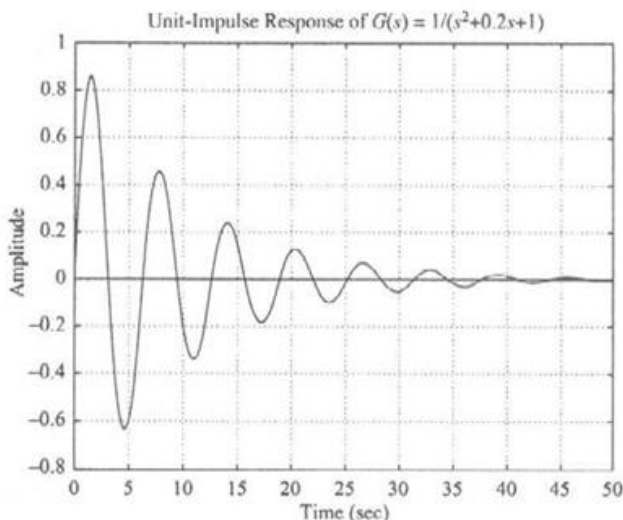
مثال ۵-۵

$$\frac{C(s)}{R(s)} = G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.7s + 1}$$

برنامه MATLAB ۵-۸ پاسخ ضربه را ایجاد می‌کند. منحنی حاصل در شکل ۵-۲۴ نشان داده شده است.

### MATLAB Program 5-8

```
num = [1];
den = [1 0.2 1];
impz(num,den);
grid
title('Unit-Impulse Response of  $G(s) = 1/(s^2 + 0.2s + 1)$ ')
```



شکل ۵-۲۴  
منحنی پاسخ ضربه.

روش دیگر یافتن پاسخ ضربه. توجه کنید که در صورت صفر بودن شرایط اولیه، پاسخ ضربه  $G(s)$  با پاسخ پله  $sG(s)$  یکسان است.

پاسخ پله سیستم مثال ۵-۵ را در نظر بگیرید. چون برای ورودی ضربه واحد  $R(s)=1$ ، داریم

$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{R(s)} &= C(s) = G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.2s + 1} \\ &= \frac{s}{s^2 + 0.2s + 1} \frac{1}{s} \end{aligned}$$

پس می‌توانیم پاسخ ضربه  $G(s)$  را پاسخ پله  $sG(s)$  بدانیم.

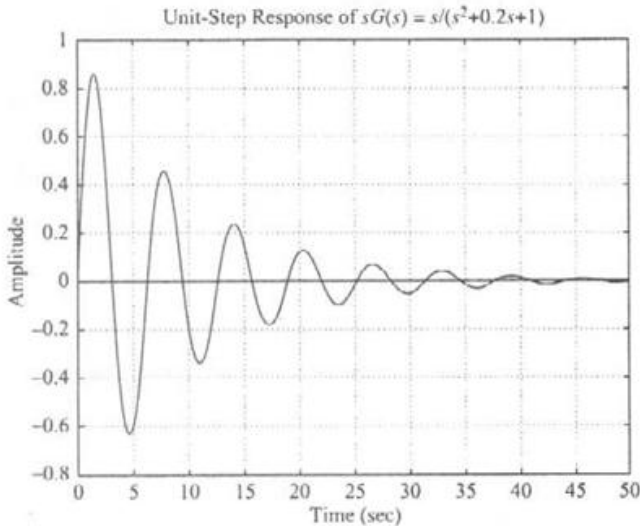
با دادن num و den زیر به MATLAB

```
num = [0 1 0]
den = [1 0.2 1]
```

و استفاده از دستور پاسخ ضربه، به صورت داده شده در برنامه ۵-۹، منحنی پاسخ پله سیستم را به صورت نشان داده شده در شکل ۵-۲۵ می‌یابیم.

**MATLAB Program 5-9**

```
num = [1 0];
den = [1 0.2 1];
step(num,den);
grid
title('Unit-Step Response of sG(s) = s/(s^2 + 0.2s + 1)')
```



شکل ۵-۲۵

منحنی پاسخ ضربه به دست آمده

از پاسخ پله سیستم

$$sG(s) = s/(s^2 + 0.2s + 1)$$

**پاسخ شیب** . در MATLAB دستور ramp برای یافتن پاسخ شیب وجود ندارد . بنابراین باید برای یافتن پاسخ شیب از دستور step استفاده کنیم . دقیق‌ترین است که برای یافتن پاسخ شیب سیستمی با تابع تبدیل  $G(s)$  ،  $G(s)$  را بر  $s$  تقسیم می‌کنیم و دستور پاسخ پله را به کار می‌بریم . برای مثال سیستم حلقه بسته‌ای با تابع تبدیل زیر در نظر بگیرید

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2s+1}{s^2+s+1}$$

 برای ورودی شیب واحد  $R(s) = 1/s^2$  ، پس

$$C(s) = \frac{2s+1}{s^2+s+1} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{2s+1}{(s^2+s+1)s} \cdot \frac{1}{s}$$

برای یافتن پاسخ شیب این سیستم، صورت و مخرج زیر را به MATLAB داده ، دستور پاسخ پله را به کار می‌بریم

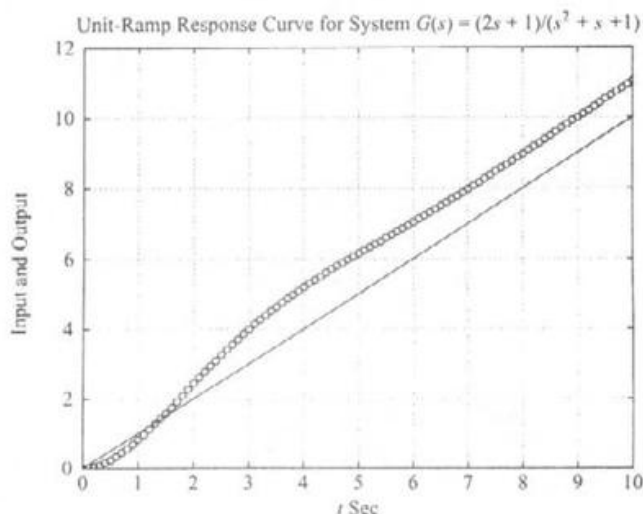
$$\text{num} = [2 \ 1];$$

$$\text{den} = [1 \ 1 \ 1 \ 0];$$

برنامه ۵-۱۰ را ببینید. شکل ۵-۲۶ منحنی رسم شده با این برنامه را نشان می‌دهد.

### MATLAB Program 5-10

```
% ----- Unit-ramp response -----
% ***** The unit-ramp response is obtained as the unit-step
% response of G(s)/s *****
% ***** Enter the numerator and denominator of G(s)/s *****
num = [2 1];
den = [1 1 1 0];
% ***** Specify the computing time points (such as t = 0:0.1:10)
% and then enter step-response command: c = step(num,den,t) *****
t = 0:0.1:10;
c = step(num,den,t);
% ***** In plotting the ramp-response curve, add the reference
% input to the plot. The reference input is t. Add to the
% argument of the plot command with the following: t,t,'-'. Thus
% the plot command becomes as follows: plot(t,c,'o',t,t,'-') *****
plot(t,c,'o',t,t,'-')
% ***** Add grid, title, xlabel, and ylabel *****
grid
title('Unit-Ramp Response Curve for System G(s) = (2s + 1)/(s^2 + s + 1)')
xlabel('t Sec')
ylabel('Input and Output')
```



شکل ۵-۲۶

منحنی پاسخ ضربه.

پاسخ شیب سیستم توصیف شده در فضای حالت. حال به سراغ یافتن پاسخ شیب سیستمی که در فضای حالت توصیف شده است می‌رویم. سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + Du$$

که در آن  $u$  تابع شیب واحد است، در ادامه برای توضیح روش به کار رفته یک مثال ساده در نظر می‌گیریم. بیایید فرض کنیم

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

اگر شرایط اولیه صفر باشد، پاسخ شیب واحد انتگرال پاسخ پله است. پس پاسخ شیب را می‌توان به شکل زیر یافت

$$z = \int_0^t y \, dt \quad (44-5)$$

از معادله (44-5) به دست می‌آوریم

$$\dot{z} = y = x_1 \quad (45-5)$$

بیایید فرض کنیم  $z = x_2$ ؛ پس معادله (45-5) به شکل زیر درمی‌آید

$$\dot{x}_2 = x_1 \quad (46-5)$$

با ترکیب معادله (46-5) و معادله فضای حالت اصلی، به دست می‌آوریم

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (47-5)$$

$$z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (48-5)$$

که  $u$  تابع پله واحد است. این معادلات را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$z = \mathbf{C}\mathbf{x} + Du$$

که در آن

$$\mathbf{A}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{C} & D \end{array} \right]$$

$$BB = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$CC = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$DD = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

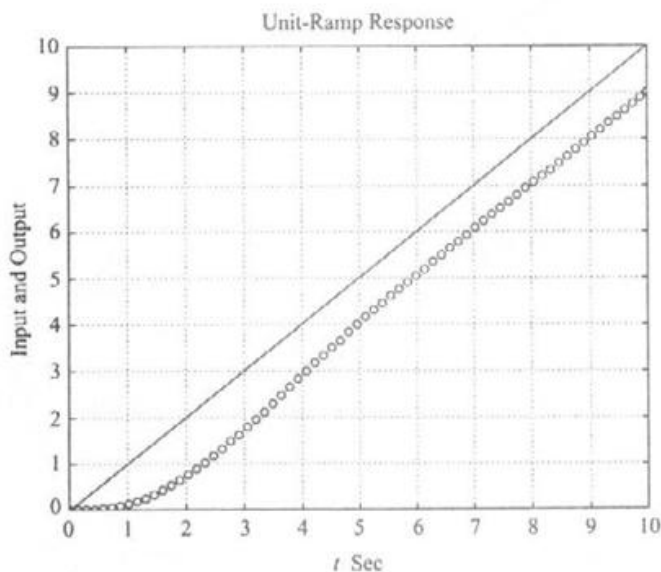
توجه کنید که  $x_3$  عنصر سوم  $x$  است. با دادن برنامه ۵-۱۱ به کامپیوتر می‌توان پاسخ شیب  $z(t)$  را یافت. منحنی پاسخ شیب به دست آمده در شکل ۵-۲۷ نشان داده شده است.

**یافتن پاسخ به ورودی دلخواه.** برای یافتن پاسخ به ازای یک ورودی دلخواه می‌توان دستور `lsim` را به کار برد. دستورهای زیر پاسخ به ورودیهای زمانی  $r$  یا  $u$  را به دست می‌دهند.

`lsim(num,den,r,t)`

#### MATLAB Program 5-11

```
% ----- Unit-ramp response -----
% ***** The unit-ramp response is obtained by adding a new
% state variable x3. The dimension of the state equation
% is enlarged by one *****
% ***** Enter matrices A, B, C, and D of the original state
% equation and output equation *****
A = [0 1;-1 -1];
B = [0; 1];
C = [1 0];
D = [0];
% ***** Enter matrices AA, BB, CC, and DD of the new,
% enlarged state equation and output equation *****
AA = [A zeros(2,1);C 0];
BB = [B;0];
CC = [0 0 1];
DD = [0];
% ***** Enter step-response command: [z,x,t] = step(AA,BB,CC,DD) *****
[z,x,t] = step(AA,BB,CC,DD);
% ***** In plotting x3 add the unit-ramp input t in the plot
% by entering the following command: plot(t,x3,'o',t,t,'-') *****
x3 = [0 0 1]*x'; plot(t,x3,'o',t,t,'-')
grid
title('Unit-Ramp Response')
xlabel('t Sec')
ylabel('Input and Output')
```



شکل ۵-۲۷  
پاسخ شیب واحد.

```
lsim(A,B,C,D,u,t)
y=lsim(num,den,r,t)
y=lsim(A,B,C,D,u,t)
```

دو مثال زیر را ببینید. (همچنین مسائل الف ۵-۱۴ تا الف ۵-۱۶ را ببینید).

مثال ۵-۶ پاسخ شیب واحد سیستم زیر را به کمک دستور lsim بیابید.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2s+1}{s^2+s+1}$$

می‌توانیم برنامه ۵-۱۲ را به کامپیوتر بدهیم و پاسخ شیب واحد را بیابیم. نمودار حاصل در شکل ۵-۲۸ نشان داده شده است.

سیستم زیر را در نظر بگیرید

مثال ۵-۷

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

با استفاده از MATLAB منحنی‌های پاسخ  $y(t)$  را به ازای این ورودی‌ها بیابید.

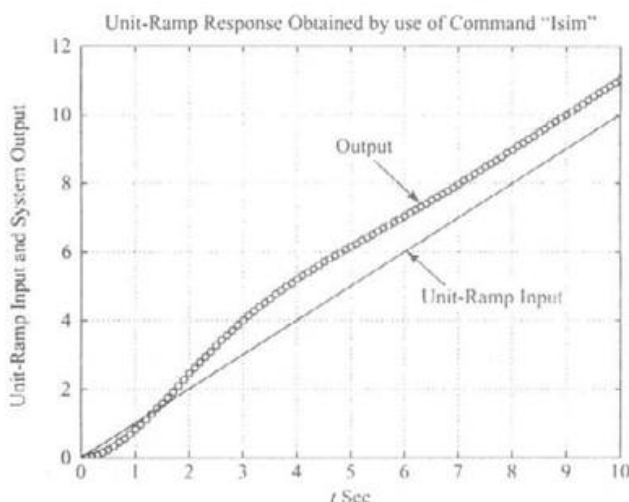
۱.  $u = \text{تابع پله واحد}$

۲.  $u = e^{-t}$

شرایط اولیه را  $x(0) = 0$  فرض کنید.

### MATLAB Program 5-12

```
% ----- Ramp Response -----
num = [2 1];
den = [1 1 1];
t = 0:0.1:10;
r = t;
y = lsim(num,den,r,t);
plot(t,r,'-',t,y,'o')
grid
title('Unit-Ramp Response Obtained by Use of Command "lsim"')
xlabel('t Sec')
ylabel('Unit-Ramp Input and System Output')
text(6.3,4.6,'Unit-Ramp Input')
text(4.75,9.0,'Output')
```



شکل ۵-۲۸

پاسخ شیب واحد.

برنامه ۵-۱۳ یک برنامه MATLAB ممکن برای یافتن پاسخ این سیستم به ورودی پله واحد  $[u=1(t)]$  و ورودی نمایی  $[u=e^{-t}]$  را نشان می‌دهد. منحنی‌های پاسخ حاصل به ترتیب در شکل‌های ۵-۲۹ (الف) و (ب) نشان داده شده است.

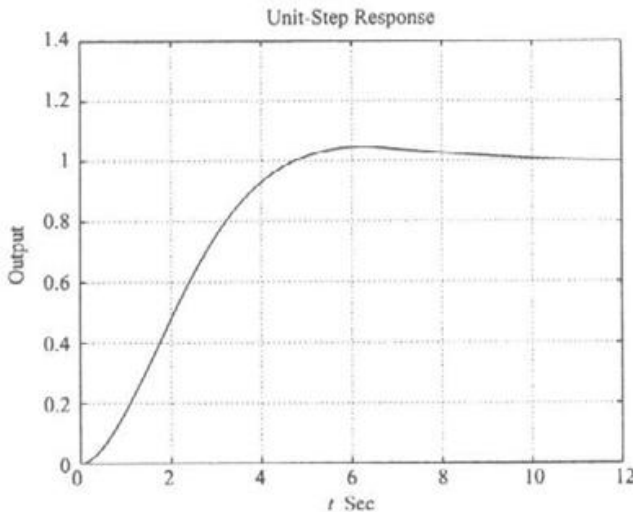
**پاسخ به شرایط اولیه.** در ادامه چند روش برای یافتن پاسخ به شرایط اولیه را معرفی می‌کنیم. از دستورهای `initial` و `step` استفاده می‌کنیم. ابتدا با استفاده از مثالی ساده روشی برای پاسخ به شرایط اولیه معرفی می‌کنیم - سپس در مورد یافتن پاسخ به شرایط اولیه، در حالی که سیستم در فضای حالت توصیف شده است صحبت می‌کنیم. سرانجام کاربرد دستور `initial` را برای یافتن پاسخ سیستم تعریف شده در فضای حالت معرفی می‌کنیم.

### MATLAB Program 5-13

```
t = 0:0.1:12;
A = [-1 0.5;-1 0];
B = [0;1];
C = [1 0];
D = [0];

% For the unit-step input u = 1(t), use the command "y = step(A,B,C,D,1,t)".
y = step(A,B,C,D,1,t);
plot(t,y)
grid
title('Unit-Step Response')
xlabel('t Sec')
ylabel('Output')

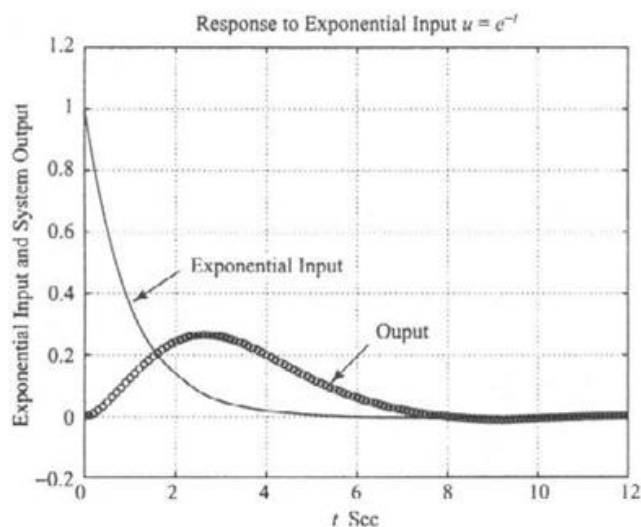
% For the response to exponential input u = exp(-t), use the command
% "z = lsim(A,B,C,D,u,t)".
u = exp(-t);
z = lsim(A,B,C,D,u,t);
plot(t,u,'-',t,z,'o')
grid
title('Response to Exponential Input u = exp(-t)')
xlabel('t Sec')
ylabel('Exponential Input and System Output')
text(2.3,0.49,'Exponential input')
text(6.4,0.28,'Output')
```



شکل ۵-۲۹

(الف)

(الف) پاسخ پله واحد.



شکل ۵-۲۹

(ب) پاسخ به ورودی  $u = e^{-t}$ .

سیستم مکانیکی شکل ۵-۳۰ را با،  $m = 1 \text{ kg}$ ،  $b = 3 \text{ Nsec/m}$ ، و  $k = 2 \text{ N/m}$  در نظر بگیرید. فرض کنید در  $t = 0$  جرم  $m$  پایین کشیده می‌شود، به نحوی که  $x(0) = 0.1 \text{ m}$  و  $\dot{x}(0) = 0.05 \text{ m/sec}$ . جابه‌جایی  $x(t)$  نسبت به وضعیت تعادل، قبل از پایین کشیده شدن جرم، اندازه‌گیری می‌شود. حرکت جرم  $x(t)$  را به ازای این شرایط اولیه تعیین کنید. (فرض کنید هیچ نیروی خارجی وجود ندارد.)

مثال ۵-۸

معادله سیستم عبارت است از

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

و شرایط اولیه  $x(0) = 0.1 \text{ m}$  و  $\dot{x}(0) = 0.05 \text{ m/sec}$  است. تبدیل لاپلاس معادله سیستم به دست می‌دهد

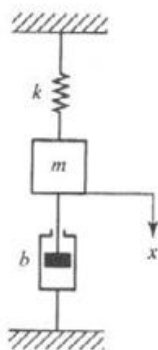
$$m[s^2 X(s) - s x(0) - \dot{x}(0)] + b[s X(s) - x(0)] + k X(s) = 0$$

$$(ms^2 + bs + k)X(s) = m x(0)s + m \dot{x}(0) + b x(0)$$

یا

معادله اخیر را حل کرده  $X(s)$  را می‌یابیم و با گذاشتن مقادیر عددی به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{m x(0)s + m \dot{x}(0) + b x(0)}{ms^2 + bs + k} \\ &= \frac{0.1s + 0.35}{s^2 + 3s + 2} \end{aligned}$$



شکل ۵-۳۰ سیستم مکانیکی.

این معادله را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$X(s) = \frac{0.1s^2 + 0.35s}{s^2 + 3s + 2} \cdot \frac{1}{s}$$

پس حرکت جرم  $m$  را می‌توان با یافتن پاسخ پله سیستم زیر به دست آورد

$$G(s) = \frac{0.1s^2 + 0.35s}{s^2 + 3s + 2}$$

برنامه ۵-۱۴ منحنی حرکت جرم را به دست می‌دهد. منحنی در شکل ۵-۳۱ رسم شده است.

**پاسخ به شرایط اولیه (رهیافت قضای حالت، مورد ۱).** سیستم تعریف شده به صورت زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0 \quad (5-49)$$

بباید پاسخ  $x(t)$  را به ازای شرایط اولیه داده شده  $x(0)$  بیابیم. (این سیستم هیچ گونه ورودی خارجی ندارد). فرض کنید  $x$  یک بردار  $n$  بعدی است.

ابتدا از دو طرف معادله (۵-۴۹) تبدیل لاپلاس می‌گیریم

$$sX(s) - x(0) = AX(s)$$

این معادله را می‌توان به شکل زیر باز نوشت

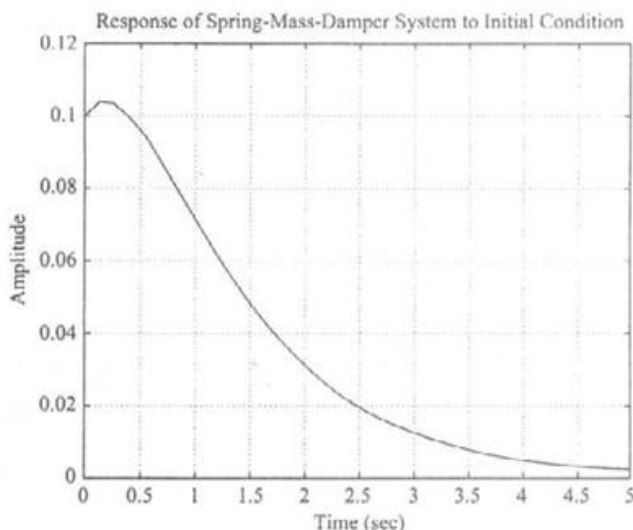
$$sX(s) = AX(s) + x(0) \quad (5-50)$$

با گرفتن عکس تبدیل لاپلاس معادله (۵-۵۰) به دست می‌آوریم

$$\dot{x} = Ax + x(0) \delta(t) \quad (5-51)$$

#### MATLAB Program 5-14

```
% ----- Response to initial condition -----
% ***** System response to initial condition is converted to
% a unit-step response by modifying the numerator polynomial *****
% ***** Enter the numerator and denominator of the transfer
% function G(s) *****
num = [0.1 0.35 0];
den = [1 3 2];
% ***** Enter the following step-response command *****
step(num,den)
% ***** Enter grid and title of the plot *****
grid
title('Response of Spring-Mass-Damper System to Initial Condition')
```



شکل ۵-۳۱  
پاسخ سیستم مکانیکی  
مثال ۵-۹

(توجه کنید که با گرفتن تبدیل لاپلاس از یک معادله دیفرانسیل و سپس گرفتن عکس تبدیل لاپلاس معادله حاصل، معادله دیفرانسیلی به دست می‌آوریم که دربردارنده شرایط اولیه است.)  
حال تعریف می‌کنیم

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{x} \quad (52-5)$$

پس معادله (۵۱-۵) را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{x}(0) \delta(t) \quad (53-5)$$

با انتگرالگیری از معادله (۵۳-۵) نسبت به  $t$  به دست می‌آوریم

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{x}(0) 1(t) = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}u \quad (54-5)$$

که در آن

$$\mathbf{B} = \mathbf{x}(0), \quad u = 1(t)$$

با توجه به معادله (۵۲-۵) می‌بینیم که  $\dot{\mathbf{z}}(t)$  بردار حالت  $\mathbf{x}(t)$  است. پس

$$\mathbf{x} = \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}u \quad (55-5)$$

حل معادلات (۵۴-۵) و (۵۵-۵) پاسخ به شرایط اولیه را به دست می‌دهد.

به طور خلاصه، پاسخ معادله (۴۹-۵) به شرط اولیه  $\mathbf{x}(0)$  با حل معادلات فضای حالت زیر به دست می‌آید

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}u$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}u$$

که در آن

$$\mathbf{B} = \mathbf{x}(0), \quad u = 1(t)$$

دستورهای MATLAB برای یافتن منحنی‌های پاسخ، هنگام مشخص نکردن بردار زمان (یعنی واگذار کردن

تعیین بردار زمان به خود MATLAB) عبارت است از

```
%Specify matrices A and B
[x , z , t]= step (A , B , A , B);
x1=[ 1 0 0 ... 0]*x';
x2=[ 0 1 0 ... 0]*x';
:
xn=[ 0 0 0 ... 1]*x';
plot (t , x1 , t , x2 , ... , t , xn)
```

اگر بخواهیم بردار زمان را خودمان تعیین کنیم (مثلاً بخواهیم فاصله زمانی مورد نظر را از  $t=0$  تا  $t=tp$ ، با فواصل زمانی  $\Delta t$  تعیین کنیم) دستورهای زیر را به کار می‌بریم

```
t=0: Δ t:tp;
%Specify matrices A and B
[x , z , t]= step (A,B,A,B,1,t);
x1=[ 1 0 0 ... 0]*x';
x2=[ 0 1 0 ... 0]*x';
:
xn=[ 0 0 0 ... 1]*x';
plot (t , x1 , t , x2 , ... , t , xn)
```

برای نمونه مثال ۵-۹ را ببینید.

پاسخ به شرایط اولیه (رهیافت فضای حالت، مورد ۲). سیستم تعریف شده به صورت زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x} = Ax \quad , \quad x(0) = x_0 \quad (5-56)$$

$$y = Cx \quad (5-57)$$

( $x$  را یک بردار  $n$  بعدی و  $y$  را یک بردار  $m$  بعدی در نظر بگیرید.)

همانند مورد ۱ و با تعریف

$$\dot{z} = x$$

می‌توانیم معادله زیر را بیابیم

$$\dot{z} = Az + x(0) \quad 1(t) = Au + Bz \quad (5-58)$$

که در آن

$$B = x(0) \quad , \quad u = 1(t)$$

توجه کنید که  $\dot{z} = x$ ، پس معادله (۵-۵۷) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$y = Cz \quad (5-59)$$

با گذاشتن معادله (۵-۵۸) در معادله (۵-۵۹) به دست می‌آوریم

$$y = C(Az + Bu) = CAz + CBu \quad (۶۰-۵)$$

حل معادلات (۵۸-۵) و (۶۰-۵) که در زیر تکرار شده

$$\dot{z} = Az + Bu$$

$$y = CAz + CBu$$

و در آن  $B = x(0)$  و  $u = 1(t)$ ، پاسخ سیستم به شرایط اولیه داده شده را به دست می‌دهد. دستورهای MATLAB برای یافتن منحنی‌های پاسخ (منحنی  $y_1$  بر حسب  $t$ ،  $y_2$  بر حسب  $t$ ، ...،  $y_m$  بر حسب  $t$ ) در زیر برای دو حالت داده شده است.

**حالت الف:** اگر بردار زمان  $t$  مشخص نشده باشد (یعنی بخواهیم MATLAB آن را به طور خودکار ایجاد کند)

%Specify matrices A,B, and C

[x,z,t]=step(A,B,C\*A,C\*B);

y1=[1 0 0 ... 0]\*y';

y2=[0 1 0 ... 0]\*y';

⋮

ym=[0 0 0 ... 1]\*y';

plot(t, y1, t, y2, ..., t, ym)

**حالت ب:** اگر بردار زمان  $t$  مشخص شود

t=0:Δt:tp;

%Specify matrices A, B, and C

[y, z, t]=step(A,B,C\*A,C\*B,1,t)

y1=[1 0 0 ... 0]\*y';

y2=[0 1 0 ... 0]\*y';

⋮

ym=[0 0 0 ... 1]\*y';

plot(t, y1, t, y2, ..., t, ym)

پاسخ سیستم زیر را با شرایط اولیه داده شده بیابید.

مثال ۹-۵

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

یا

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0$$

یافتن پاسخ سیستم به شرط اولیه داده شده معادل یافتن پاسخ پله سیستم زیرست:

$$\dot{z} = Az + Bu$$

$$x = Az + Bu$$

که در آن

$$B = x^{(0)} , \quad u = 1(t)$$

پس یک برنامه MATLAB برای یافتن پاسخ می‌تواند به صورت برنامه ۵-۱۵ باشد. منحنی‌های پاسخ حاصل در شکل ۵-۳۲ نشان داده شده است.

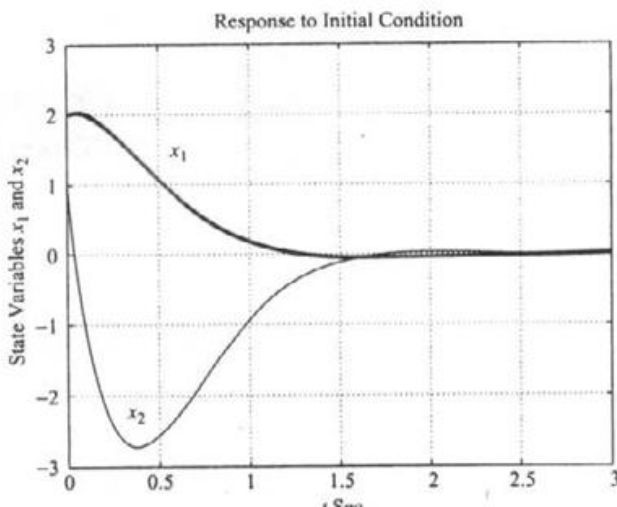
به عنوان مثالی گویا از نحوه استفاده از معادلات (۵-۵۸) و (۵-۶۰) برای یافتن پاسخ به شرایط اولیه، مسئله الف ۵-۱۶ را ببینید.

**یافتن پاسخ به شرایط اولیه با استفاده از دستور Initial.** اگر سیستم به صورت فضای حالت توصیف شده باشد، دستور زیر پاسخ به شرایط اولیه را به دست می‌دهد.

Initial ( A,B,C,D,[ Initial condition ] ,t)

#### MATLAB Program 5-15

```
t = 0:0.01:3;
A = [0 1;-10 -5];
B = [2;1];
[x,z,t] = step(A,B,A,B,1,t);
x1 = [1 0]*x';
x2 = [0 1]*x';
plot(t,x1,'x',t,x2,'-')
grid
title('Response to Initial Condition')
xlabel('t Sec')
ylabel('State Variables x1 and x2')
gtext('x1')
gtext('x2')
```



شکل ۵-۳۲

پاسخ سیستم مثال ۵-۱۰  
به شرایط اولیه.

فرض کنید سیستم به صورت زیر تعریف شده است

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0$$

$$y = Cx + Du$$

که در آن

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

در این صورت می‌توان دستور Initial را به صورت نشان داده شده در برنامه ۵-۱۶ برای یافتن پاسخ به شرایط اولیه به کار برد. منحنی‌های پاسخ  $x_1(t)$  و  $x_2(t)$  در شکل ۵-۳۳ نشان داده شده است. اینها همانند منحنی‌های شکل ۵-۳۲ هستند.

مثال ۵-۱۰ سیستم زیر را در نظر بگیرید که در معرض شرایط اولیه قرار گرفته است. (تابع تحریک خارجی وجود ندارد.)

$$\ddot{y} + 8\dot{y} + 17y = 0$$

$$y(0) = 2, \quad \dot{y}(0) = 1, \quad \ddot{y}(0) = 0.5$$

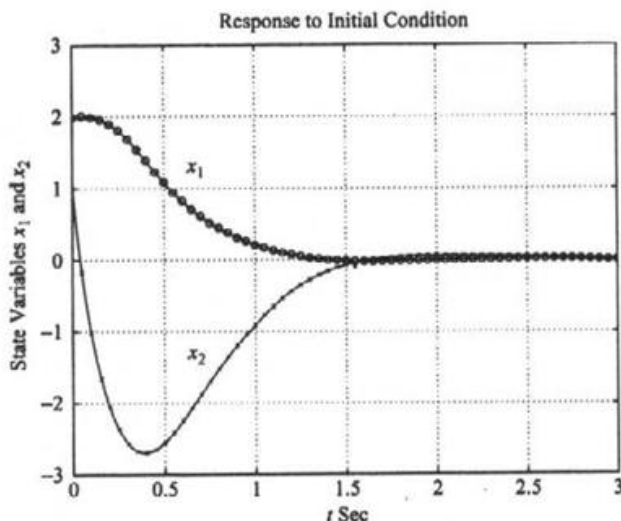
پاسخ  $y(t)$  به شرایط اولیه داده شده را بنویسید.

با تعریف متغیرهای حالت زیر

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y}, \quad x_3 = \ddot{y}$$

#### MATLAB Program 5-16

```
t = 0:0.05:3;
A = [0 1;-10 -5];
B = [0;0];
C = [0 0];
D = [0];
[y,x] = initial(A,B,C,D,[2;1],t);
x1 = [1 0]*x';
x2 = [0 1]*x';
plot(t,x1,'o',t,x1,t,x2,'x',t,x2)
grid
title('Response to Initial Condition')
xlabel('t Sec')
ylabel('State Variables x1 and x2')
gtext('x1')
gtext('x2')
```



شکل ۵-۳۳

منحنی‌های پاسخ به شرایط اولیه.

نمایش فضای حالت سیستم را به صورت زیر به دست می‌آوریم

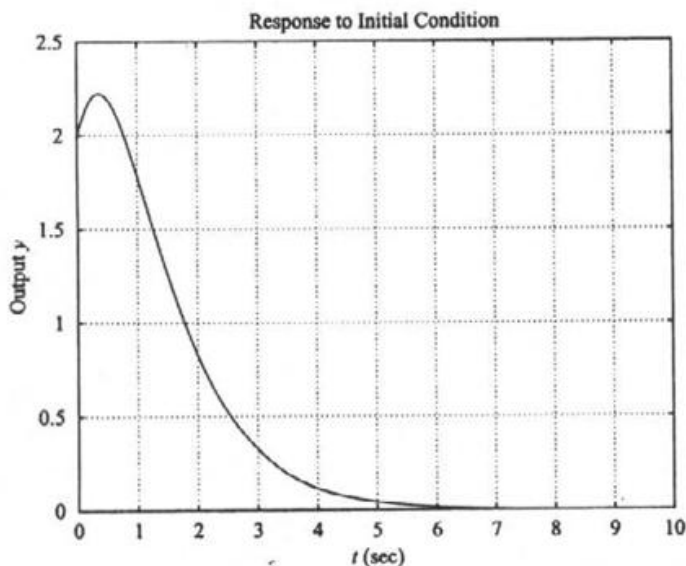
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -17 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

 برنامه ۵-۱۷ یک برنامه MATLAB ممکن برای یافتن پاسخ  $y(t)$  است. منحنی پاسخ در شکل ۵-۳۴ نشان داده شده است.

**MATLAB Program 5-17**

```
t = 0:0.05:10;
A = [0 1 0; 0 0 1; -10 -17 -8];
B = [0; 0; 0];
C = [1 0 0];
D = [0];
y = initial(A,B,C,D,[2;1;0.5],t);
plot(t,y)
grid
title('Response to Initial Condition')
xlabel('t (sec)')
ylabel('Output y')
```



شکل ۵-۳۴  
پاسخ به شرایط اولیه.

## ۶-۵ معیار پایداری روث

مهمترین مسئله در سیستمهای کنترل خطی پایداری است، که به بررسی شرایط ناپایدار شدن یک سیستم، و چگونگی پایدار کردن سیستم ناپایدار مربوط می‌شود. در بخش ۵-۴ گفته شد که یک سیستم کنترل تنها و تنها در صورتی پایدار است که تمام قطبهای حلقه بسته آن در نیمه چپ صفحه  $s$  باشد. اکثر سیستمهای حلقه بسته خطی، تابع تبدیل حلقه بسته‌ای به شکل زیر دارند

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_n s^m + b_{n-1} s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_{m-1} s + a_m} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

که در آن  $a$  ها و  $b$  ها ثابت‌اند و  $m \leq n$ . یک معیار ساده موسوم به معیار پایداری روث، قادرمان می‌کند تعداد قطبهای حلقه بسته واقع در نیم صفحه راست را بدون تجزیه چند جمله‌ای مخرج تعیین کنیم. (چندجمله‌ای ممکن است پارامتری باشد، در این صورت دیگر نمی‌توان از MATLAB استفاده کرد.)

**معیار پایداری روث.** معیار پایداری روث به ما می‌گوید که آیا یک معادله چند جمله‌ای ریشه ناپایدار دارد یا نه، بدون این که حل واقعی معادله لازم باشد. این معیار ناپایداری را تنها می‌توان به چند جمله‌ای‌هایی اعمال کرد که تعداد جملاتشان محدود باشد. با اعمال این معیار به یک سیستم کنترل می‌توان اطلاعات مربوط به پایداری مطلق را مستقیماً از ضرایب معادله مشخصه به دست آورد.

روند اعمال معیار پایداری روث به صورت زیر است:

۱. چند جمله‌ای برحسب  $s$  را به صورت زیر بنویسید

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_{m-1} s + a_m = 0 \quad (۶۱-۵)$$

- که در آن ضرایب همگی کمیات حقیقی‌اند. فرض می‌کنیم  $a_n \neq 0$  یعنی ریشه‌های صفر جدا شده‌اند.
۲. اگر یکی از ضرایب صفر یا منفی، و حداقل یکی از ضرایب مثبت باشد، یک یا چند ریشه موهومی یا دارای بخش حقیقی مثبت وجود دارد. پس سیستم در این حالت ناپایدار است. اگر تنها پایداری مطلق برایمان مهم است، ادامه کار لزومی ندارد. توجه کنید که تمام ضرایب باید مثبت باشد؛ این یک شرط لازم است که درستی آن را می‌توان به این صورت نشان داد. اگر چندجمله‌ای دارای ضرایب حقیقی باشد، می‌توان آن را به عوامل مرتبه اول و مرتبه دوم، به صورت  $(s+a)$  و  $(s^2+bs+c)$  تجزیه کرد که در آنها  $a, b, c$  حقیقی‌اند. عوامل مرتبه اول ریشه‌های حقیقی و عوامل مرتبه دوم ریشه‌های مختلط چندجمله‌ای را به دست می‌دهند  $(s^2+bs+c)$  تنها در صورتی ریشه‌های با بخش حقیقی منفی دارد که  $b$  و  $c$  هر دو مثبت باشند. برای این که تمام ریشه‌ها بخش حقیقی منفی داشته باشند، ضرایب  $a, b, c$  تمام عاملها باید مثبت باشند. حاصلضرب هر تعداد جمله مرتبه اول و مرتبه دوم دارای ضرایب مثبت، یک چندجمله‌ای با ضرایب مثبت است. توجه به این نکته مهم است که مثبت بودن تمام ضرایب شرط لازم است، ولی شرط کافی پایداری نیست. پس شرط لازم ولی غیرکافی برای پایداری این است که در معادله (۵-۶۱) تمام ضرایب وجود داشته، مثبت باشند. (اگر تمام  $a$  ها منفی‌اند، می‌توان با ضرب دو طرف آنها در  $-1$  آنها را مثبت کرد.)
۳. اگر تمام ضرایب مثبت‌اند، آنها را با دنبال کردن الگوی زیر در سطرها و ستونها آرایش دهید

$$\begin{array}{ccccccc}
 s^n & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots \\
 s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & a_{n-4} & \dots \\
 s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots \\
 s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \dots \\
 s^{n-4} & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & & \\
 s^2 & e_1 & e_2 & & & \\
 s^1 & f_1 & & & & \\
 s^0 & g_1 & & & & 
 \end{array}$$

تعداد ردیفها  $n+1$  است. ضرایب  $b_1, b_2, b_3, \dots$  به صورت زیر محاسبه می‌شوند

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_n a_3}{a_1}$$

$$b_2 = \frac{a_1 a_3 - a_n a_4}{a_1}$$

$$b_3 = \frac{a_1 a_4 - a_n a_5}{a_1}$$

$\vdots$

محاسبه  $b$  ها را آنقدر ادامه می‌دهیم که به صفرهای متوالی برسیم. در محاسبه  $c$  ها،  $d$  ها و غیره همان شیوه

طرفین - وسطین ضرایب جملات ردیف‌های قبلی را به کار می‌بریم. یعنی

$$c_1 = \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_3}{b_1}$$

$$c_3 = \frac{b_1 a_4 - a_1 b_4}{b_1}$$

⋮

$$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1}$$

$$d_2 = \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1}$$

⋮

و

این فرآیند آنقدر انجام می‌شود که  $n$  امین ردیف کامل شود. آرایه کامل مثلثی است. در تشکیل آرایه می‌توان تمام اعداد یک ردیف را در یک عدد مثبت ضرب، یا آن را بر یک عدد مثبت تقسیم کرد تا محاسبات بعدی ساده شود؛ این کار بر نتیجه بعدی تأثیری ندارد.

معیار پایداری روث می‌گوید تعداد ریشه‌های نیم‌صفحه راست معادله (۶۱-۵) با تعداد تغییر علامتهای ستون اول آرایه برابر است. دانستن مقادیر دقیق جملات ستون اول مهم نیست؛ تنها تغییر علامت‌ها مهم است. شرط لازم و کافی برای قرار داشتن تمام ریشه‌های معادله (۶۱-۵) در نیمه چپ صفحه  $s$  این است که تمام ضرایب معادله (۶۱-۵) مثبت و تمام جملات ستون اول آرایه روث نیز مثبت باشند.

معیار پایداری روث را به چندجمله‌ای مرتبه سه زیر اعمال کنید

مثال ۵-۱۱

$$a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

که تمام ضرایب مثبت‌اند. آرایه ضرایب به صورت نشان داده شده در زیر است

$$s^3 \quad a_3 \quad a_1$$

$$s^2 \quad a_2 \quad a_0$$

$$s^1 \quad \frac{a_1 a_2 - a_3 a_0}{a_1}$$

$$s^0 \quad a_0$$

شرط این که بخش حقیقی تمام ریشه‌ها منفی باشد این است که

$$a_1 a_2 > a_3 a_0$$

مثال ۵-۱۲

چندجمله‌ای زیر را در نظر بگیرید و با اعمال معیار روث تعیین کنید آیا ریشه‌ای با بخش حقیقی مثبت دارد یا نه

$$s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5 = 0$$

با دنبال کردن فرایند معرفی شده در بالا، آرایه ضرایب را تشکیل می‌دهیم. (دو ردیف اول مستقیماً از چندجمله‌ای داده شده به دست می‌آیند. بقیه ضرایب با توجه به این دو ردیف تعیین می‌شوند. اگر ضریبی وجود نداشته باشد، باید به جای آن صفر گذاشته شود.)

$$\begin{array}{cc|cc} s^4 & 1 & 3 & 5 \\ s^3 & 2 & 4 & 0 \\ s^2 & 1 & 5 & \\ s^1 & -6 & & \\ s^0 & 5 & & \end{array} \quad \begin{array}{cc|cc} s^4 & 1 & 3 & 5 \\ s^3 & 1 & 2 & 0 \\ s^2 & 1 & 5 & \\ s^1 & -3 & & \\ s^0 & 5 & & \end{array} \quad \leftarrow \text{ردیف دوم بر ۲ تقسیم شده}$$

در این مثال تعداد تغییر علامت در ستون اول ۲ است. یعنی دو ریشه با بخشهای حقیقی مثبت وجود دارد. توجه کنید که ضرب یا تقسیم تمام ضرایب یک ردیف در یک عدد مثبت برای ساده کردن محاسبات تغییری در نتیجه نمی‌دهد.

**حالت‌های خاص.** اگر عنصر ستون اول یک ردیف صفر باشد، ولی بقیه عناصر صفر نباشند یا عنصر دیگری وجود نداشته باشد، به جای صفر عدد مثبت بسیار کوچکی،  $\epsilon$ ، قرار داده بقیه آرایه را حساب می‌کنیم. برای مثال معادله زیر را در نظر بگیرید

$$s^3 + 2s^2 + s + 2 = 0 \quad (5-62)$$

آرایه ضرایب عبارت است از

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 1 \\ s^2 & 2 & 2 \\ s^1 & \epsilon & 2 \\ s^0 & 2 & \end{array}$$

اگر علامت ضریب بالای صفر ( $\epsilon$ ) و ضریب پایین آن یکسان باشد، نشانه این است که یک زوج قطب موهومی وجود دارد. در واقع معادله (۵-۶۲) دو قطب  $s = \pm j$  دارد.

ولی اگر علامت ضریب بالای صفر ( $\epsilon$ ) و ضریب پایین آن مختلف باشد. یک تغییر علامت رخ داده است. برای مثال معادله زیر

$$s^3 - 3s + 2 = (s-1)^2(s+2) = 0$$

دارای آرایه ضرایب زیر است

$$\begin{array}{ccc}
 & 1 & -3 \\
 s^3 & & \\
 \swarrow \text{تغییر علامت} & & \\
 s^2 & 0 \approx \varepsilon & 2 \\
 \swarrow \text{تغییر علامت} & & \\
 s^1 & -3 - \frac{2}{\varepsilon} & \\
 \swarrow & & \\
 s^0 & 2 &
 \end{array}$$

دو تغییر علامت در ستون اول وجود دارد، بنابراین دو ریشه در نیمه راست صفحه  $s$  وجود دارد. جوابی که تجزیه چندجمله‌ای به دست می‌دهد نیز موید همین مطلب است.

اگر تمام ضرایب یک ردیف صفر باشد، دو ریشه متقارن نسبت به مبدا وجود دارد، یعنی دو ریشه حقیقی با اندازه‌های یکسان و علامت‌های مختلف یا دو ریشه موهومی مزدوج. در چنین حالتی روند تعیین بقیه عناصر آرایه را می‌توان با تشکیل یک چندجمله‌ای کمکی از روی ضرایب ردیف قبل، و استفاده از ضرایب مشتق این چندجمله‌ای به عنوان ردیف جدید ادامه داد. ریشه‌های متقارن نسبت به مبدا را می‌توان با حل چند جمله‌ای کمکی که همیشه زوج است، به دست آورد. هر چندجمله‌ای کمکی مرتبه  $2n$ ، دارای  $n$  زوج ریشه متقارن نسبت به مبدا است. برای مثال چندجمله‌ای زیر را در نظر بگیرید

$$s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50 = 0$$

آرایه ضرایب عبارت است از

$$\begin{array}{cccc}
 s^5 & 1 & 24 & -25 \\
 s^4 & 2 & 48 & -50 \\
 s^3 & 0 & 0 & 
 \end{array} \leftarrow P(s) \text{ چندجمله‌ای کمکی}$$

ضرایب ردیف  $s^3$  همگی صفرند. پس چندجمله‌ای کمکی را باید با توجه به ضرایب ردیف  $s^4$  تشکیل داد. چندجمله‌ای کمکی  $P(s)$  عبارت است از

$$P(s) = 2s^4 + 48s^2 - 50$$

که نشان می‌دهد دو زوج ریشه هم اندازه و غیر هم علامت وجود دارد (یعنی دو ریشه حقیقی منفی یکدیگر یا دو ریشه مزدوج روی محور موهومی). این دو زوج با حل معادله چندجمله‌ای کمکی  $P(s) = 0$  به دست می‌آید. مشتق  $P(s)$  نسبت به  $s$  عبارت است از

$$\frac{dP(s)}{ds} = 8s^3 + 96s$$

پس به جای صفرهای ردیف  $s^3$  این ضرایب، یعنی ۸ و ۹۶ را قرار می‌دهیم. به این ترتیب آرایه ضرایب زیر را می‌یابیم

$$\begin{array}{rcl}
 s^0 & 1 & 24 \quad -25 \\
 s^2 & 2 & 48 \quad -50 \\
 s^3 & 8 & 96 \\
 s^2 & 24 & -50 \\
 s^1 & 112/7 & 0 \\
 s^0 & -50 & 
 \end{array}$$

ضرایب  $dP(s)/ds \leftarrow$

می‌بینیم که ستون اول آرایه جدید یک تغییر علامت دارد. پس معادله اولیه تنها یک ریشه دارای بخش حقیقی مثبت دارد. با حل معادله چندجمله‌ای کمکی زیر

$$2s^2 + 48s^2 - 50 = 0$$

به دست می‌آوریم

$$s^2 = -25, \quad s^2 = 1$$

یا

$$s = \pm j5, \quad s = \pm 1$$

این دو زوج ریشه بخشی از ریشه‌های معادله اصلی است. در واقع معادله اصلی را می‌توان به صورت زیر تجزیه کرد

$$(s+1)(s-1)(s+j5)(s-j5)(s+2) = 0$$

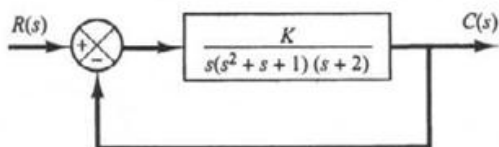
واضح است که معادله اصلی تنها یک ریشه با بخش حقیقی مثبت دارد.

**تحلیل پایداری نسبی.** معیار پایداری روث تنها مسئله پایداری مطلق را حل می‌کند. در بسیاری از مسائل عملی چنین چیزی کافی نیست. معمولاً اطلاعاتی راجع به پایداری نسبی سیستم لازم داریم. یک رهیافت مفید برای بررسی پایداری نسبی جابه‌جا کردن صفحه  $s$  و اعمال معیار پایداری روث است. پس در معادله مشخصه سیستم قرار می‌دهیم

$$s = \hat{s} - \sigma \quad (\sigma = \text{ثابت})$$

یعنی چندجمله‌ای را برحسب  $\hat{s}$  می‌نویسیم و معیار پایداری روث را به چندجمله‌ای جدید برحسب  $\hat{s}$  اعمال می‌کنیم. تعداد تغییر علامت‌های ستون اول آرایه نوشته شده برای چندجمله‌ای برحسب  $\hat{s}$  با تعداد ریشه‌های سمت راست خط قائم  $s = -\sigma$  برابر است. به این ترتیب تعداد قطبهای سمت راست خط قائم  $s = -\sigma$  تعیین می‌شود.

**کاربرد معیار پایداری روث در تحلیل سیستمهای کنترلی.** معیار پایداری روث در تحلیل سیستمهای کنترل خطی کاربرد محدودی دارد، زیرا این معیار راهی برای بهبود پایداری نسبی یا پایدار کردن یک سیستم ناپایدار نشان نمی‌دهد. ولی می‌توان اثر تغییر یک یا دو پارامتر سیستم را با بررسی مقادیری که باعث ناپایداری می‌شود، بررسی کرد. در آنچه خواهد آمد مسئله تعیین گستره پایداری یک پارامتر را بررسی می‌کنیم.



شکل ۵-۳۵

سیستم کنترل.

سیستم شکل ۵-۳۵ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم گستره پایداری  $K$  را تعیین کنیم. تابع تبدیل حلقه بسته عبارت است از

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s(s^2 + s + 1)(s + 2) + K}$$

معادله مشخصه عبارت است از

$$s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

آرایه ضرایب به صورت زیر است

$$\begin{array}{cccc} s^4 & 1 & 3 & K \\ s^3 & 2 & 2 & 0 \\ s^2 & \frac{2}{3} & K & \\ s^1 & 2 - \frac{4}{3}K & & \\ s^0 & K & & \end{array}$$

برای پایداری  $K$  باید مثبت بوده، تمام ضرایب ستون اول نیز مثبت باشد. پس

$$\frac{12}{9} > K > 0$$

به ازای  $K = \frac{12}{9}$  سیستم نوسانی شده، از لحاظ ریاضی دامنه نوسانات ثابت می‌ماند.

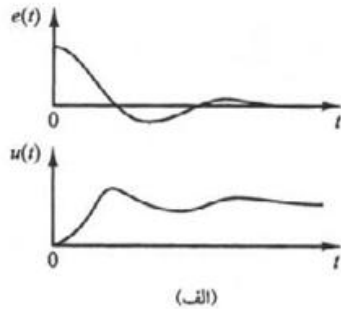
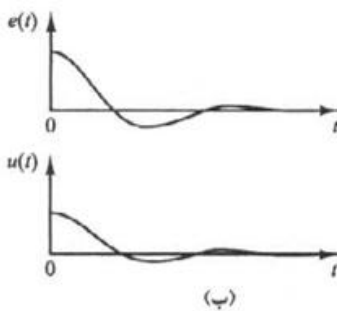
توجه کنید که به کمک معیار روث می‌توان گستره پارامترها را برای پایدار ماندن سیستم تعیین کرد.

## ۷-۵ اثر عملهای کنترلی انتگرالی و مشتقی

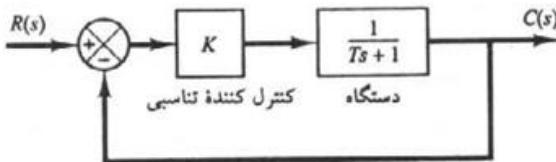
### بر عملکرد سیستم

در این بخش به بررسی اثرات عملهای کنترلی انتگرالی و مشتقی بر عملکرد سیستم می‌پردازیم. در اینجا تنها سیستمهای ساده را در نظر می‌گیریم تا بتوانیم این اثرات را بر عملکرد سیستم به وضوح ببینیم.

**عمل کنترلی انتگرالی.** در کنترل تناسبی دستگاهی که تابع تبدیلیش فاقد عمل انتگرالگیری  $1/s$  است، در پاسخ به ورودی پله‌ای، خطای حالت ماندگار یا افست وجود دارد. با منظور کردن عمل کنترل انتگرالی در کنترل کننده می‌توان این افست را حذف کرد.



شکل ۵-۳۶ (الف) منحنی‌های  $e(t)$  و  $u(t)$  که نشان می‌دهد سیگنال کنترل می‌تواند هنگام صفر بودن سیگنال خطا نیز غیرصفر باشد (کنترل انتگرالی)؛ (ب) منحنی‌های  $e(t)$  و  $u(t)$  که نشان می‌دهد هنگام صفر بودن سیگنال خطا سیگنال کنترل صفر است (کنترل تناسبی).



شکل ۵-۳۷  
کنترل تناسبی سیستم

در کنترل انتگرالی دستگاه، سیگنال کنترل یعنی سیگنال خروجی کنترل‌کننده، در هر لحظه با مساحت زیر منحنی سیگنال خطا تا آن لحظه برابر است. چنانچه در شکل ۵-۳۶ (الف) نشان داده شده، سیگنال کنترل  $u(t)$  حتی در زمانی که سیگنال خطا  $e(t)$  صفر است، می‌تواند مقداری غیرصفر داشته باشد. چنین چیزی در کنترل کننده تناسبی ممکن نیست، زیرا برای غیرصفر بودن سیگنال کنترل باید سیگنال خطا غیرصفر باشد. (وجود سیگنال خطای غیر صفر در حالت ماندگار به معنی وجود افست است.) شکل ۵-۳۶ (ب) منحنی  $e(t)$  و منحنی  $u(t)$  متناظر با آن را در کنترل کننده تناسبی نشان می‌دهد.

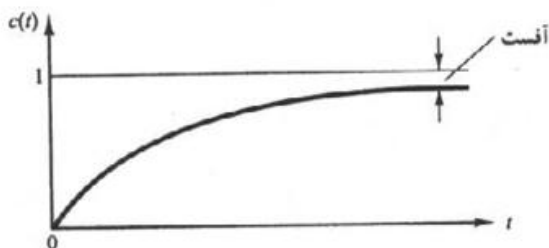
توجه کنید که کنترل انتگرالی، در عین حذف افست یا خطای حالت ماندگار، می‌تواند به پاسخ نوسانی با دامنه کاهشی و حتی افزایشی منجر شود، که هر دو معمولاً نامطلوب‌اند.

کنترل تناسبی سیستم، نشان می‌دهیم که کنترل تناسبی سیستم فاقد انتگرالگیر باعث می‌شود پاسخ ورودی پله‌ای خطای حالت ماندگار داشته باشد. سپس نشان می‌دهیم که با منظور کردن عمل انگترالگیری در کنترل کننده می‌توان این خطا را حذف کرد. سیستم شکل ۵-۳۷ را در نظر بگیرید. خطای حالت ماندگار پاسخ پله این سیستم را به دست می‌آوریم. تعریف می‌کنیم

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1}$$

چون

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{R(s) - C(s)}{R(s)} = 1 - \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)}$$



شکل ۵-۳۸

پاسخ پله واحد و آفت.

پس خطا،  $E(s)$  عبارت است از

$$E(s) = \frac{1}{1+G(s)} R(s) = \frac{1}{1+\frac{K}{Ts+1}} R(s)$$

به ازای ورودی پله واحد  $R(s) = 1/s$  داریم

$$E(s) = \frac{Ts+1}{Ts+1+K} \frac{1}{s}$$

خطای حالت ماندگار عبارت است از

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{Ts+1}{Ts+1+K} \frac{1}{s} = \frac{1}{K+1}$$

چنین سیستمی که در مسیر پیشخورد آن انتگرالگیر وجود ندارد، در پاسخ به ورودی پله خطای حالت ماندگار دارد. این خطاهای حالت ماندگار آفت نامیده می‌شود. شکل ۵-۳۸ پاسخ پله واحد و آفت را نشان می‌دهد.

**کنترل انتگرالی سیستم.** شکل ۵-۳۹ را در نظر بگیرید. کنترل کننده یک کنترل کننده انتگرالی است. تابع تبدیل سیستم حلقه بسته عبارت است از

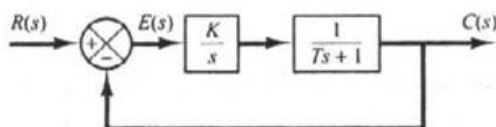
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s(Ts+1)+K}$$

پس

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{R(s)-C(s)}{R(s)} = \frac{s(Ts+1)}{s(Ts+1)+K}$$

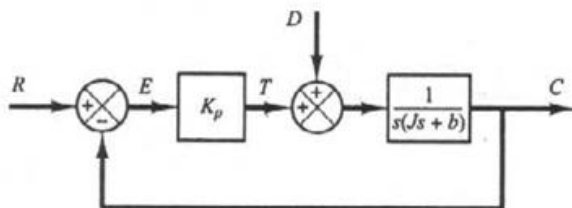
چون سیستم پایدار است، خطای حالت ماندگار به ازای ورودی پله واحد را می‌توان با اعمال قضیه مقدار نهایی به صورت زیر یافت:

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2(Ts+1)}{Ts^2+s+K} \frac{1}{s} = 0 \end{aligned}$$



شکل ۵-۳۹

کنترل انتگرالی سیستم.



شکل ۵-۴۰

سیستم کنترل با اغتشاش گشتاور.

پس کنترل انتگرالی سیستم خطای حالت ماندگار پاسخ پله را حذف می‌کند. این بهبود مهمی نسبت به کنترل تناسبی تنها به حساب می‌آید، زیرا آفست حذف می‌شود.

پاسخ به گشتاور اغتشاشی (کنترل تناسبی). بیابید اثر اغتشاش گشتاور بر عنصر بار را بررسی کنیم. سیستم شکل ۵-۴۰ را در نظر بگیرید. کنترل کننده تناسبی گشتاور  $T$  را برای تغییر مکان عنصر بار اعمال می‌کند، عنصر بار از لختی دورانی و اصطکاک چسبندگی تشکیل شده است. اغتشاش گشتاور با  $D$  مشخص شده است. با فرض صفر بودن مرجع، یا  $R(s) = 0$ ، تابع تبدیل بین  $C(s)$  و  $D(s)$  عبارت است از

$$\frac{C(s)}{D(s)} = \frac{1}{Js^2 + bs + K_p}$$

پس

$$\frac{E(s)}{D(s)} = -\frac{C(s)}{D(s)} = -\frac{1}{Js^2 + bs + K_p}$$

خطای حالت ماندگار ناشی از یک گشتاور اغتشاشی پله‌ای با اندازه  $T_d$  عبارت است از

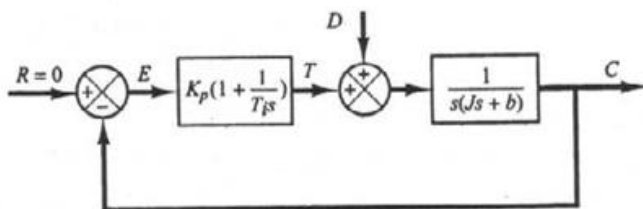
$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-s}{Js^2 + bs + K_p} \frac{T_d}{s} \\ &= -\frac{T_d}{K_p} \end{aligned}$$

در حالت ماندگار کنترل کننده تناسبی گشتاور  $-T_d$  را که با گشتاور اغتشاش هم اندازه است، ولی علامتی مخالف آن دارد، به وجود می‌آورد. خروجی حالت ماندگار به ازای گشتاور اغتشاشی پله‌ای عبارت است از

$$c_{ss} = -e_{ss} = \frac{T_d}{K_p}$$

با افزایش مقدار  $K_p$  می‌توان خطای حالت ماندگار را کم کرد. ولی افزایش این مقدار باعث نوسانی‌تر شدن پاسخ می‌شود.

پاسخ به گشتاور اغتشاشی (کنترل تناسبی - انتگرالی). برای حذف آفست ناشی از گشتاور اغتشاشی می‌توان به جای کنترل کننده تناسبی از کنترل کننده تناسبی - انتگرالی استفاده کرد.



شکل ۴۱-۵

کنترل تناسبی - انتگرالی - عنصر بار  
مشتعل بر لختی دورانی و  
اصطکاک چسبندگی.

در صورت افزودن عمل کنترل انتگرالی به کنترل کننده، مادامی که سیگنال خطایی وجود دارد، کنترل کننده گشتاوری برای کاهش این خطا اعمال می‌کند، به شرطی که سیستم کنترل پایدار باشد.

شکل ۴۱-۵ کنترل تناسبی - انتگرالی - عنصر بار، متشکل از لختی دورانی و اصطکاک چسبندگی، را نشان می‌دهد.

تابع تبدیل حلقه بسته بین  $C(s)$  و  $D(s)$  عبارت است از

$$\frac{C(s)}{D(s)} = \frac{s}{Js^2 + bs^2 + K_p s + \frac{K_p}{T_i}}$$

در صورت نداشتن ورودی، یعنی  $r(t) = 0$ ، سیگنال خطا از رابطه زیر به دست می‌آید.

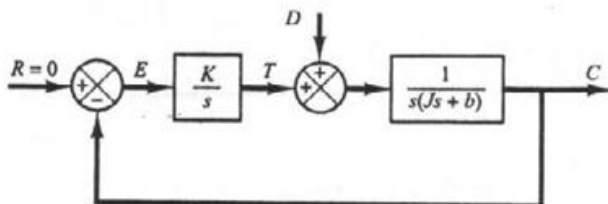
$$E(s) = -\frac{s}{Js^2 + bs^2 + K_p s + \frac{K_p}{T_i}} D(s)$$

اگر این سیستم کنترل پایدار باشد، یعنی بخش حقیقی ریشه‌های معادله مشخصه زیر منفی باشد

$$Js^2 + bs^2 + K_p s + \frac{K_p}{T_i} = 0$$

آنگاه خطای حالت ماندگار به ازای گشتاور اغتشاشی پله واحد را می‌توان به صورت زیر، با اعمال قضیه مقدار نهایی به دست آورد:

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-s^2}{Js^2 + bs^2 + K_p s + \frac{K_p}{T_i}} \frac{1}{s} \\ &= 0 \end{aligned}$$



شکل ۴۲-۵

کنترل انتگرالی - عنصر بار مشتعل  
بر لختی دورانی و  
اصطکاک چسبندگی.

بنابراین با کاربرد کنترل کننده‌ای از نوع تناسبی - انتگرالی می‌توان خطای حالت ماندگار ناشی از گشتاور اغتشاشی پله‌ای را حذف کرد.

توجه کنید که افزودن عمل کنترل انتگرالی به کنترل کننده تناسبی، سیستمی را که در ابتدا مرتبه دوم بود، به یک سیستم مرتبه سوم تبدیل کرد. بنابراین سیستم می‌تواند به ازای مقادیر بزرگ  $K_p$  ناپایدار شود، زیرا ریشه‌های معادله مشخصه می‌تواند بخش حقیقی مثبت پیدا کند. (سیستم مرتبه دوم همیشه پایدار است، به شرطی که ضرایب معادله دیفرانسیل سیستم همگی مثبت باشند).

تذکر این نکته مهم است که اگر کنترل کننده همانند شکل ۵-۴۲ از نوع انتگرالی باشد، سیستم همیشه ناپایدار می‌شود، زیرا معادله مشخصه زیر

$$Js^3 + bs^2 + K = 0$$

ریشه‌هایی با بخش حقیقی مثبت دارد. این سیستم ناپایدار را نمی‌توان در عمل به کار برد.

توجه کنید که در سیستم شکل ۵-۴۱ کنترل تناسبی در جهت پایدار کردن سیستم عمل می‌کند، حال آنکه کنترل انتگرالی می‌کوشد خطای حالت ماندگار پاسخ به ورودی‌های مختلف را از بین ببرد.

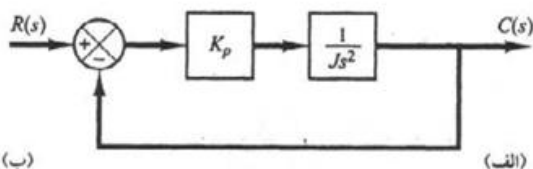
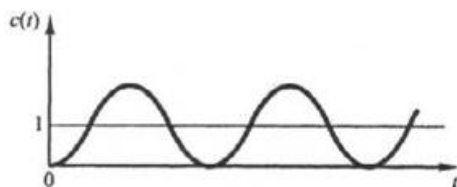
**عمل کنترلی مشتقی.** افزودن کنترل مشتقی به کنترل کننده تناسبی روشی برای دستیابی به کنترل کننده‌ای با حساسیت زیاد است. یکی از مزایای کنترل مشتقی این است که به آهنگ تغییر سیگنال خطا پاسخ می‌دهد و می‌تواند قبل از بزرگ شدن بیش از اندازه خطا، اصلاح قابل توجهی به وجود آورد. پس کنترل مشتقی خطا را پیش‌بینی کرده، عمل تصحیح زود هنگام را انجام می‌دهد، و به این ترتیب پایداری سیستم را بیشتر می‌کند.

گرچه کنترل مشتقی اثر مستقیمی بر خطای حالت ماندگار ندارد، ولی با افزودن میرایی به سیستم اجازه می‌دهد بهره  $K$  بزرگتری انتخاب شود و این بهره بزرگتر دقت حالت ماندگار را بهتر می‌کند. چون کنترل مشتقی براساس آهنگ تغییر سیگنال خطا عمل می‌کند نه خود سیگنال خطا، هرگز به تنهایی به کار نمی‌رود. کنترل مشتقی همیشه به همراه کنترل تناسبی یا کنترل تناسبی انتگرالی به کار می‌رود.

**کنترل تناسبی سیستم دارای بار لخت.** پیش از بحث راجع به اثر کنترل مشتقی بر عملکرد سیستم، کنترل تناسبی سیستم با بار لخت را بررسی می‌کنیم.

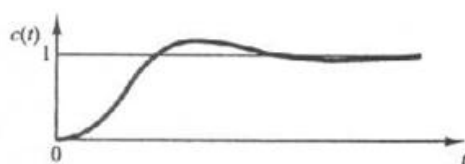
سیستم شکل ۵-۴۳ (الف) را در نظر بگیرید. تابع تبدیل حلقه بسته عبارت است از

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p}{Js^2 + K_p}$$

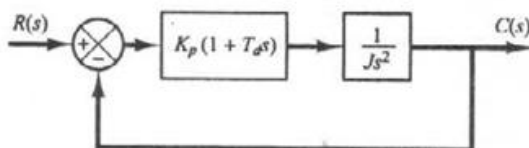


شکل ۵-۴۳

(الف) کنترل تناسبی سیستمی با بار لخت؛ (ب) پاسخ به ورودی پله واحد.



(ب)



(الف)

شکل ۷-۵ (الف) کنترل تناسبی - مشتقی سیستم دارای بار لخت؛ (ب) پاسخ به ورودی پله‌ای.

چون ریشه‌های معادله مشخصه

$$Js^2 + K_p = 0$$

موهومی‌اند، پاسخ به ورودی پله‌ای به صورت نشان داده شده در شکل ۷-۵ (ب) نوسان دائمی دارد.

سیستم کنترل دارای این پاسخ پله، سیستم مطلوبی نیست. خواهیم دید که افزودن کنترل مشتقی باعث پایداری سیستم می‌شود.

**کنترل تناسبی - مشتقی سیستم دارای بار لخت.** حال بیاید به جای کنترل کننده تناسبی یک کنترل کننده تناسبی - مشتقی با تابع تبدیل  $K_p(1 + T_d s)$  قرار دهیم. گشتاوری که کنترل کننده ایجاد می‌کند با  $K_p(e + T_d \dot{e})$  متناسب است. کنترل مشتقی اساساً پیش‌بینی کننده است. یعنی با اندازه‌گیری سرعت خطای لحظه‌ای، فراجش بزرگی را پیش‌بینی کرده، قبل از وقوع فراجش بزرگ سیگنال باز دارنده‌ای ایجاد می‌کند.

سیستم شکل ۷-۵ (الف) را در نظر بگیرید. تابع تبدیل حلقه بسته عبارت است از

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p(1 + T_d s)}{Js^2 + K_p T_d s + K_p}$$

معادله مشخصه عبارت است از

$$Js^2 + K_p T_d s + K_p = 0$$

که اکنون به ازای  $J$ ،  $K_p$ ، و  $T_d$  مثبت ریشه‌هایی با بخش حقیقی منفی دارد. پس کنترل مشتقی اثر میراکننده به سیستم می‌دهد. شکل ۷-۵ (ب) پاسخی نوعی به ورودی پله‌ای را نشان می‌دهد. منحنی پاسخ به وضوح بهبود آشکاری نسبت به منحنی پاسخ اولیه شکل ۷-۴ (ب) یافته است.

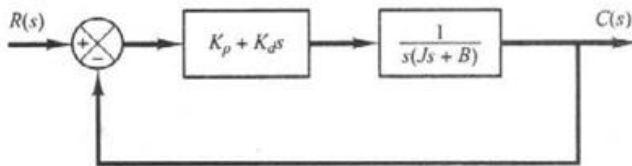
**کنترل تناسبی - مشتقی سیستم‌های مرتبه دوم.** با استفاده از عمل کنترل تناسبی - مشتقی می‌توان مصالحه‌ای بین رفتار پاسخ گذرای مطلوب و رفتار حالت ماندگار قابل قبول ایجاد کرد.

سیستم شکل ۷-۵ را در نظر بگیرید. تابع تبدیل حلقه بسته عبارت است از

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p + K_d s}{Js^2 + (B + K_d)s + K_p}$$

خطای حالت ماندگار ورودی شیب عبارت است از

$$e_{ss} = \frac{B}{K_p}$$


 شکل ۵-۴۵  
سیستم کنترل.

معادله مشخصه به صورت زیر است

$$J s^2 + (B + K_d) s + K_p = 0$$

پس ضریب میرایی موثر سیستم به جای  $B$  برابر  $(B + K_d)$  است. نسبت میرایی  $\zeta$  این سیستم عبارت است از

$$\zeta = \frac{B + K_d}{2\sqrt{K_p J}}$$

پس می‌توان با کوچک کردن  $B$ ، بزرگ کردن  $K_p$  و یک  $K_d$  بزرگ، هم خطای حالت ماندگار  $e_{ss}$  به ازای ورودی شیب، و هم فراجش ماکزیمم به ازای ورودی پله را کوچک کرد و  $\zeta$  بین ۰/۴ و ۰/۷ به دست آورد.

## ۵-۸ خطاهای حالت ماندگار

### در سیستمهای کنترلی دارای فیدبک واحد

خطاهای یک سیستم کنترل را می‌توان به عوامل متعددی نسبت داد. تغییر ورودی مرجع خطاهای اجتناب‌ناپذیر در زمانهای گذرا ایجاد می‌کند و می‌تواند به خطای حالت ماندگار نیز منجر شود. نواقص اجزای سیستم، مثلاً اصطکاک ایستا، لقی و لغزش تقویت‌کننده، همینطور پیر شدن و فرسودگی خطاهای حالت ماندگار ایجاد می‌کنند. ولی در این بخش راجع به خطاهای ناشی از نواقص اجزای سیستم بحث نمی‌کنیم. در اینجا خطاهای حالت ماندگاری را بررسی می‌کنیم که از عدم قابلیت سیستم در دنبال کردن بعضی ورودیها ناشی می‌شود.

هر سیستم کنترل فیزیکی در پاسخ به ورودی‌های خاصی ذاتاً خطای حالت ماندگار دارد. ممکن است سیستمی به ازای ورودی پله‌ای خطای حالت ماندگار نداشته باشد، ولی به ازای ورودی شیب خطای حالت ماندگار نشان دهد. (تنها راه حذف این خطا تغییر ساختار سیستم است.) این که سیستمی به ازای یک ورودی خاص خطای حالت ماندگار دارد یا نه، به نوع تابع تبدیل حلقه باز سیستم بستگی دارد. در زیر در این مورد صحبت می‌کنیم.

**رده‌بندی سیستمهای کنترل.** سیستمهای کنترل را می‌توان برحسب توانایی‌شان در دنبال کردن ورودی پله‌ای، ورودی شیب، ورودی سهمی، و غیره دسته‌بندی کرد. این دسته‌بندی معقولی است، زیرا ورودی‌های واقعی را غالباً می‌توان ترکیبی از این ورودی‌ها در نظر گرفت. اندازه خطای حالت ماندگار ناشی از تک‌تک این ورودیها معیاری از خوبی سیستم است.

سیستم با فیدبک واحدی در نظر بگیرید که تابع تبدیل حلقه باز آن  $G(s)$  به صورت زیر باشد:

$$G(s) = \frac{K(T_{\theta}s+1)(T_b s+1)\cdots(T_m s+1)}{s^N (T_1 s+1)(T_r s+1)\cdots(T_p s+1)}$$

در مخرج این تابع تبدیل جمله  $s^N$  وجود دارد که نشانه وجود یک قطب مرتبه  $N$  در مبدا است. دسته‌بندی فعلی بر این اساس صورت می‌گیرد که تابع تبدیل حلقه باز با چند انتگرالگیری متناظر است. سیستم را نوع ۰، نوع ۱، نوع ۲، ... می‌خوانیم، اگر  $N=0$ ،  $N=1$ ،  $N=2$ ، ... توجه کنید که این دسته‌بندی با مرتبه سیستم تفاوت دارد. با بالا رفتن عدد نوع دقت بیشتر می‌شود؛ ولی این افزایش مسئله پایداری را مشکلتر می‌کند. همیشه باید بین دقت حالت ماندگار و پایداری نسبی مصالحه‌ای برقرار کرد.

بعداً خواهیم دید که اگر  $G(s)$  را به نحوی بنویسیم که با میل  $s$  به صفر تمام جملات صورت و مخرج، بجز  $s^N$  به یک میل کنند، بهره حلقه باز  $K$  با خطای حالت ماندگار نسبت مستقیم دارد.

**خطاهای حالت ماندگار.** سیستم شکل ۵-۴۶ را در نظر بگیرید. تابع تبدیل حلقه بسته عبارت است از

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$

تابع تبدیل بین سیگنالهای خطای  $e(t)$  و سیگنال ورودی  $r(t)$  عبارت است از

$$\frac{E(s)}{R(s)} = 1 - \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G(s)}$$

که در آن خطا  $e(t)$  تفاضل سیگنال ورودی و سیگنال خروجی است.

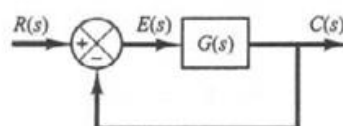
قضیه مقدار نهایی راه مناسبی برای یافتن عملکرد حالت ماندگار سیستمهای پایدار است. چون  $E(s)$  به صورت زیر است

$$E(s) = \frac{1}{1+G(s)} R(s)$$

خطای حالت ماندگار عبارت است از

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1+G(s)}$$

ثابت‌های خطای ایستایی که به زودی تعریف می‌کنیم، از معیارهای سنجش سیستم کنترل هستند. هر چه این ثابت‌ها بزرگتر باشند، خطای حالت ماندگار کوچکتر است. در سیستم داده شده خروجی می‌تواند موقعیت، سرعت، فشار، دما یا چیز دیگر باشد. البته شکل فیزیکی خروجی در تحلیل فعلی ما بی‌تأثیر است. بنابراین در ادامه خروجی را "موقعیت"، آهنگ تغییر آن را "سرعت" و... می‌نامیم. پس در یک سیستم کنترل دما "موقعیت" دمای خروجی را نشان می‌دهد، و منظور از "سرعت" آهنگ تغییر دمای خروجی است.



شکل ۵-۴۶ سیستم کنترل.

**ثابت خطای ایستای موقعیت**  $K_p$ . خطای حالت ماندگار سیستم به ازای ورودی پله‌ای عبارت است از

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)} \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + G(0)}$$

ثابت خطای ایستای موقعیت  $K_p$  به صورت زیر تعریف می‌شود

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = G(0)$$

پس خطای حالت ماندگار برحسب ثابت خطای ایستای موقعیت  $K_p$  عبارت است از

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p}$$

برای سیستم نوع ۰

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots} = K$$

برای سیستم نوع ۱ یا بالاتر

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots}{s^N (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots} = \infty, N \geq 1$$

پس برای سیستمهای نوع ۰ ثابت خطای ایستای موقعیت  $K_p$  محدود است، ولی برای سیستمهای نوع ۱ و بالاتر  $K_p$  بینهایت است.

خطای حالت ماندگار  $e_{ss}$  به ازای ورودی پله‌ای را می‌توان به شکل زیر خلاصه کرد:

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K} \quad \text{سیستم نوع ۰}$$

$$e_{ss} = 0 \quad \text{سیستم نوع ۱ یا بالاتر}$$

تحلیل بالا نشان می‌دهد که پاسخ یک سیستم کنترل فیدبک‌دار به ورودی پله‌ای خطای حالت ماندگار دارد، مگر این که در مسیر پیشخورد آن انتگرالگیری وجود داشته باشد. (اگر بتوان به ازای ورودی پله‌ای خطای کوچک را تحمل کرد، استفاده از سیستم نوع ۰ مجاز است، به شرط این که بهره  $K$  به حد کافی بزرگ باشد. ولی اگر بهره  $K$  خیلی بزرگ باشد، دستیابی به پایداری نسبی مورد قبول مشکل می‌شود). اگر بخواهیم خطای حالت ماندگار به ازای ورودی پله‌ای صفر باشد، سیستم باید نوع ۱ یا بالاتر باشد.

**ثابت خطای ایستای سرعت**  $K_v$ . خطای حالت ماندگار سیستم به ازای ورودی شیب واحد عبارت است از

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)} \frac{1}{s^2}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s G(s)}$$

ثابت خطای ایستای سرعت  $K_v$  به شکل زیر تعریف می‌شود

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s)$$

پس خطای حالت ماندگار برحسب ثابت خطای ایستای سرعت  $K_v$  عبارت است از

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v}$$

در اینجا خطای سرعت برای این به کار رفته است تا خطای حالت ماندگار به ازای ورودی شیب را بیان کند. بُعد خطای سرعت و بُعد خطای سیستم یکی است. یعنی خطای سرعت، میزان خطای سرعت را نشان نمی‌دهد، بلکه خطای موقعیت به ازای ورودی شیب را نشان می‌دهد.  
برای سیستم نوع ۰

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sK(T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots} = 0$$

برای سیستم نوع ۱

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sK(T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots} = K$$

برای سیستم نوع ۲ و بالاتر

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sK(T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots}{s^N (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots} = \infty \quad N \geq 2$$

خطای حالت ماندگار  $e_{ss}$  به ازای ورودی شیب را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \infty \quad \text{سیستم نوع ۰}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{K} \quad \text{سیستم نوع ۱}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = 0 \quad \text{سیستم نوع ۲ یا بالاتر}$$

تحلیل بالا روشن می‌کند که سیستم نوع ۰ نمی‌تواند در حالت ماندگار ورودی شیب را دنبال کند. سیستم نوع ۱ دارای فیدبک واحد می‌تواند ورودی شیب را با خطایی محدود دنبال کند. در حالت ماندگار سرعت خروجی و سرعت ورودی یکسان است، ولی در موقعیت خطا وجود دارد. این خطا با سرعت ورودی متناسب است و با بهره  $K$  نسبت عکس دارد. شکل ۵-۴۷ نمونه‌ای از پاسخ یک سیستم نوع ۱ دارای فیدبک واحد به ورودی شیب را نشان می‌دهد. سیستم نوع ۲ یا بالاتر می‌تواند ورودی شیب را در حالت ماندگار بدون خطا دنبال کند.

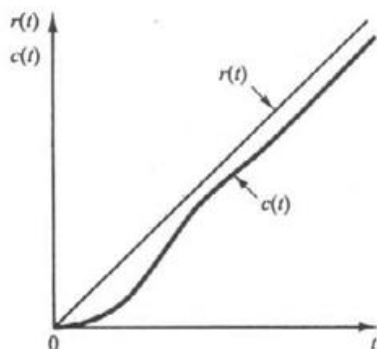
**ثابت خطای ایستای شتاب  $K_a$ .** خطای حالت ماندگار سیستم به ورودی سهمی واحد (ورودی شتاب) تعریف شده در زیر

$$r(t) = \frac{t^2}{2} \quad t \geq 0$$

$$= 0 \quad t < 0$$

عبارت است از

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)} \frac{1}{s^2} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)}$$



شکل ۵-۴۷

پاسخ یک سیستم نوع ۱ دارای فیدبک واحد به ورودی شیب.

ثابت خطای ایستای شتاب  $K_a$  با معادله زیر تعریف می‌شود

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)$$

پس خطای حالت ماندگار برحسب ثابت خطای ایستای  $K_a$  عبارت است از

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a}$$

توجه کنید که خطای شتاب، خطای حالت ماندگار موقعیت، ناشی از ورودی شتاب است. مقدار  $K_a$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots} = 0 \quad \text{برای سیستم نوع ۰}$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots} = 0 \quad \text{برای سیستم نوع ۱}$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots}{s^2 (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots} = K \quad \text{برای سیستم نوع ۲}$$

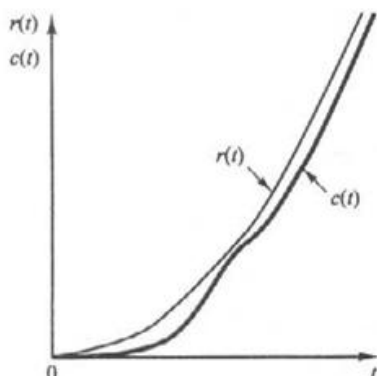
$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots}{s^N (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots} = 0 \quad N \geq 3 \quad \text{برای سیستم نوع ۳ و بالاتر}$$

پس خطای حالت ماندگار به ورودی سهمی واحد عبارت است از

$$e_{ss} = \infty \quad \text{سیستم نوع ۰ و ۱}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K} \quad \text{سیستم نوع ۲}$$

$$e_{ss} = 0 \quad \text{سیستم نوع ۳ یا بالاتر}$$



شکل ۸-۵

پاسخ یک سیستم نوع ۲ دارای فیدبک واحد به ورودی سهمی.

توجه کنید که سیستمهای نوع ۰ و نوع ۱ نمی‌توانند در حالت ماندگار ورودی سهمی را دنبال کنند. سیستم نوع ۲ با فیدبک واحد می‌تواند ورودی سهمی را با خطای محدود دنبال کند. شکل ۸-۵ نمونه‌ای از پاسخ یک سیستم نوع ۲ دارای فیدبک واحد به ورودی سهمی را نشان می‌دهد. سیستمهای نوع ۳ و بالاتر دارای فیدبک واحد، ورودی سهمی را در حالت ماندگار بدون خطا دنبال می‌کنند.

**خلاصه.** خطاهای حالت ماندگار سیستمهای نوع ۰، نوع ۱، و نوع ۲ در پاسخ به ورودیهای مختلف در جدول ۸-۵ خلاصه شده است. مقادیر محدود خطای حالت ماندگار روی قطر قرار دارند. خطاهای حالت ماندگار بالای قطر بینهایت و زیر قطر صفر است.

به خاطر بسپارید که عبارتهای **خطای موقعیت**، **خطای سرعت**، و **خطای شتاب** به انحراف حالت ماندگار خروجی موقعیت اشاره دارند. خطای سرعت محدود نشان می‌دهد که پس از طی حالت گذرا، ورودی و خروجی با یک سرعت تغییر می‌کند، ولی از لحاظ موقعیت اختلاف دارند.

ثابتهای خطای  $K_p$ ،  $K_v$ ، و  $K_a$  توانایی سیستم با فیدبک واحد در کاهش یا حذف خطای حالت ماندگار را نشان می‌دهد. پس این ثابتها نشان دهنده عملکرد حالت ماندگار هستند. معمولاً افزایش ثابتهای خطا، و در عین حال حفظ پاسخ گذرا در گستره قابل قبول امری مطلوب است. دیدیم که برای بهبود عملکرد حالت ماندگار می‌توان با افزودن انتگرالگیر در مسیر پیشخورد نوع سیستم را بالا برد. ولی این کار مشکل پایداری را

جدول ۸-۵ خطای حالت ماندگار بر حسب بهره.

| ورودی پله $r(t) = 1$ | ورودی شیب $r(t) = t$ | ورودی شتاب $r(t) = \frac{1}{2}t^2$ |  |
|----------------------|----------------------|------------------------------------|--|
| سیستم نوع ۰          | $\frac{1}{1+K}$      | $\infty$                           |  |
| سیستم نوع ۱          | ۰                    | $\frac{1}{K}$                      |  |
| سیستم نوع ۲          | ۰                    | ۰                                  |  |

تشدید می‌کند. در حالت کلی طراحی یک سیستم رضایتبخش که در مسیر پیش‌خورده آن بیش از دو انتگرالگیر وجود دارد، کاری مشکل است.

## مسائل نمونه و حلشان

الف ۵-۱ در سیستم شکل ۵-۴۹،  $x(t)$  جابه‌جایی ورودی و  $\theta(t)$  جابه‌جایی زاویه‌ای خروجی است. فرض کنید جرمهای موجود قابل چشم‌پوشی‌اند و تمام حرکات به مقادیر کوچک محدود شده‌اند؛ بنابراین سیستم را می‌توان خطی در نظر گرفت. شرایط اولیه  $x$  و  $\theta$  صفرند، یعنی  $x(0^-) = 0$  و  $\theta(0^-) = 0$ . نشان دهید این سیستم یک عنصر مشتقگیر است. سپس پاسخ  $\theta(t)$  را به ازای ورودی پله واحد بیابید.

حل: معادله سیستم عبارت است از

$$b(\dot{x} - L\dot{\theta}) = kL\theta$$

$$L\dot{\theta} + \frac{k}{b}L\theta = \dot{x} \quad \text{یا}$$

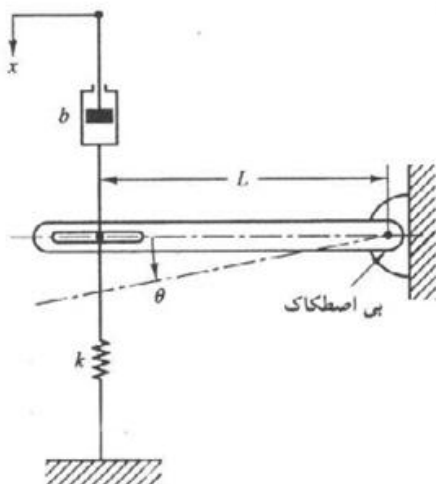
تبدیل لاپلاس معادله اخیر، به ازای شرایط اولیه صفر، عبارت است از

$$\left(Ls + \frac{k}{b}L\right)\Theta(s) = sX(s)$$

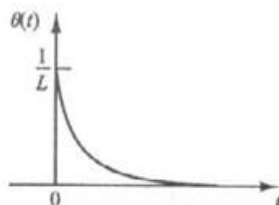
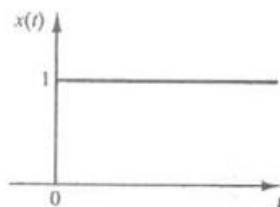
پس

$$\frac{\Theta(s)}{X(s)} = \frac{1}{L} \frac{s}{s + (k/b)}$$

که نشان می‌دهد این سیستم یک سیستم مشتقگیر است.



شکل ۵-۴۹ سیستم مکانیکی.



شکل ۵-۵۰

ورودی پله واحد و پاسخ  
سیستم مکانیکی شکل ۵-۴۹.

به ازای ورودی پله واحد  $X(s) = 1/s$  و خروجی  $\Theta(s)$  عبارت است از

$$\Theta(s) = \frac{1}{L} \frac{1}{s + (k/b)}$$

عکس تبدیل لاپلاس  $\Theta(s)$  به صورت زیر است

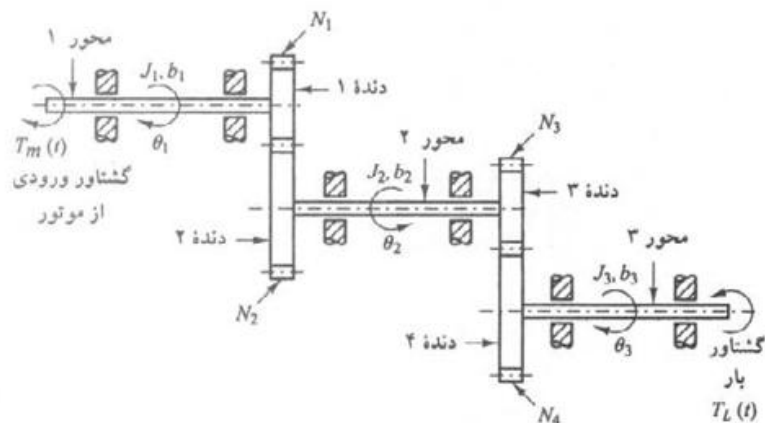
$$\theta(t) = \frac{1}{L} e^{-(k/b)t}$$

توجه کنید که به ازای  $k/b$  بزرگ، پاسخ  $\theta(t)$  به سیگنال پالسی نشان داده شده در شکل ۵-۵۰ میل می‌کند.

الف ۵-۲ در سیستمهای سروو از مجموعه‌های چرخنده برای کاهش سرعت، افزایش گشتاور، و افزایش بازده انتقال توان استفاده می‌شود؛ افزایش بازده انتقال توان با تطبیق عضو تحریک به بار صورت می‌گیرد.

مجموعه چرخنده شکل ۵-۵۱ را در نظر بگیرید. در این سیستم موتور از طریق مجموعه چرخنده باری را تحریک می‌کند. فرض کنید سختی محورهای مجموعه بی‌نهایت است (یعنی نه لقی وجود دارد، نه تغییر شکل کشسان) و تعداد دندانه‌های هر چرخنده با شعاع آن متناسب است. لختی دورانی معادل و ضریب اصطکاک چسبندگی معادل را روی موتور و روی محور بار حساب کنید.

در شکل ۵-۵۱ تعداد دندانه‌های چرخنده‌های ۱، ۲، ۳، و ۴ به ترتیب  $N_1$ ،  $N_2$ ،  $N_3$ ، و  $N_4$  است. جابه‌جایی زاویه‌ای محورهای ۱، ۲، و ۳ به ترتیب  $\theta_1$ ،  $\theta_2$ ، و  $\theta_3$  است. پس  $\theta_1 / \theta_2 = N_1 / N_2$  و  $\theta_2 / \theta_3 = N_2 / N_3$  و  $\theta_3 / \theta_4 = N_3 / N_4$  لختی دورانی و ضریب اصطکاک چسبندگی هر عضو به ترتیب با  $J_1$ ،  $b_1$ ؛  $J_2$ ،  $b_2$ ؛  $J_3$ ،  $b_3$ ؛ و  $J_4$ ،  $b_4$  مشخص شده است.  $J_4$  و  $b_4$  لختی دورانی و ضریب اصطکاک بار را نیز دربر دارند.



شکل ۵-۵۱

سیستم چرخنده.

حل: برای این مجموعه چرخنده می‌توانیم سه معادله زیر را بنویسیم: برای محور ۱

$$J_1 \ddot{\theta}_1 + b_1 \dot{\theta}_1 + T_1 = T_m \quad (۶۳-۵)$$

که در آن  $T_m$  گشتاور ایجاد شده توسط موتور و  $T_1$  گشتاور بار روی چرخنده ۱، ناشی از بقیه مجموعه

است. برای محور ۲

$$J_2 \ddot{\theta}_2 + b_2 \dot{\theta}_2 + T_2 = T_1 \quad (۶۴-۵)$$

که در آن  $T_2$  گشتاور منتقل شده به چرخنده ۲ و  $T_2$  گشتاور بار روی چرخنده ۳، ناشی از بقیه مجموعه است. چون کاری که چرخنده ۱ انجام می‌دهد با کاری که چرخنده ۲ انجام می‌دهد برابر است

$$T_1 \theta_1 = T_2 \theta_2 \quad \text{یا} \quad T_2 = T_1 \frac{N_1}{N_2}$$

به ازای  $N_1 / N_2 < 1$ ، نسبت دنده سرعت را کم و گشتاور را زیاد می‌کند. برای محور سوم

$$J_3 \ddot{\theta}_3 + b_3 \dot{\theta}_3 + T_L = T_2 \quad (۶۵-۵)$$

که در آن  $T_L$  گشتاور بار و  $T_2$ ، گشتاور منتقل شده به چرخنده ۴ است. رابطه  $T_2$  و  $T_3$  عبارت است از

$$T_2 = T_3 \frac{N_2}{N_3}$$

رابطه  $\theta_1$  و  $\theta_3$  نیز عبارت است از

$$\theta_3 = \theta_2 \frac{N_2}{N_3} = \theta_1 \frac{N_1}{N_2} \frac{N_2}{N_3}$$

با حذف  $T_1$ ،  $T_2$ ،  $T_3$  و  $T_4$  از معادلات (۶۳-۵)، (۶۴-۵)، و (۶۵-۵) به دست می‌آوریم

$$J_1 \ddot{\theta}_1 + b_1 \dot{\theta}_1 + \frac{N_1}{N_2} (J_2 \ddot{\theta}_2 + b_2 \dot{\theta}_2) + \frac{N_1}{N_2} \frac{N_2}{N_3} (J_3 \ddot{\theta}_3 + b_3 \dot{\theta}_3 + T_L) = T_m$$

با حذف  $\theta_2$  و  $\theta_3$  از این معادله و نوشتن معادله حاصل بر حسب  $\theta_1$  و مشتقات زمانی آن به دست می‌آوریم

$$\left[ J_1 + \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 J_2 + \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 \left( \frac{N_2}{N_3} \right)^2 J_3 \right] \ddot{\theta}_1 + \left[ b_1 + \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 b_2 + \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 \left( \frac{N_2}{N_3} \right)^2 b_3 \right] \dot{\theta}_1 + \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 \left( \frac{N_2}{N_3} \right)^2 T_L = T_m \quad (۶۶-۵)$$

پس لختی دورانی و ضریب اصطکاک و چسبندگی مجموعه چرخنده در محور ۱ عبارت است از

$$J_{1eq} = J_1 + \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 J_2 + \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 \left( \frac{N_2}{N_3} \right)^2 J_3$$

$$b_{1eq} = b_1 + \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 b_2 + \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 \left( \frac{N_2}{N_3} \right)^2 b_3$$

به نحوی مشابه لختی دورانی و ضریب اصطکاک چسبندگی مجموعه چرخنده در محور بار (محور ۳) عبارت‌اند از

$$J_{req} = J_r + \left( \frac{N_r}{N_f} \right)^2 J_r + \left( \frac{N_r}{N_1} \right)^2 \left( \frac{N_f}{N_r} \right)^2 J_1$$

$$b_{req} = b_r + \left( \frac{N_r}{N_f} \right)^2 b_r + \left( \frac{N_r}{N_1} \right)^2 \left( \frac{N_f}{N_r} \right)^2 b_1$$

پس رابطه بین  $J_{req}$  و  $J_1$  عبارت است از

$$J_{1eq} = \left( \frac{N_1}{N_f} \right)^2 \left( \frac{N_r}{N_f} \right)^2 J_{req}$$

همچنین رابطه بین  $b_{req}$  و  $b_{1eq}$  به صورت زیر است

$$b_{1eq} = \left( \frac{N_1}{N_f} \right)^2 \left( \frac{N_r}{N_f} \right)^2 b_{req}$$

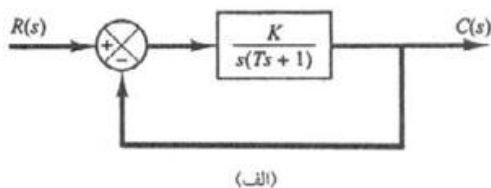
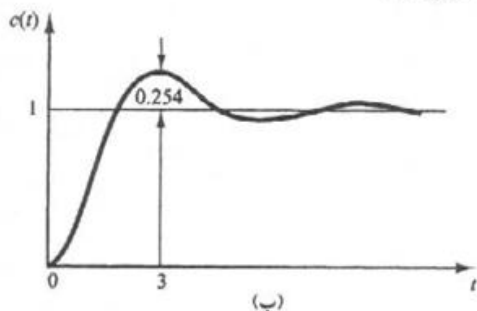
اثر  $J_r$  و  $J_1$  لختی دورانی معادل، توسط نسبت دورهای  $N_1/N_f$  و  $N_r/N_f$  تعیین می‌شود. برای مجموعه چرخنده‌های کاهنده سرعت  $N_1/N_f$  و  $N_r/N_f$  معمولاً از ۱ کوچکترند. اگر  $N_1/N_f \ll 1$  و  $N_r/N_f \ll 1$ ، اثر  $J_r$  و  $J_1$  بر لختی دورانی معادل ناچیز است. در مورد ضریب اصطکاک چسبندگی  $b_{1eq}$  نیز مطلب مشابهی صادق است. معادله (۵-۶۶) را بر حسب لختی دورانی معادل  $J_{1eq}$  و ضریب اصطکاک چسبندگی معادل  $b_{1eq}$  می‌توان به صورت زیر ساده کرد

$$J_{1eq} \ddot{\theta}_1 + b_{1eq} \dot{\theta}_1 + n T_L = T_m$$

که در آن

$$n = \frac{N_1 N_r}{N_f N_f}$$

الف ۵-۳ سیستم شکل ۵۲-۵ (الف) در پاسخ به ورودی پله واحد، خروجی نشان داده شده در شکل ۵۲-۵ (ب) را دارد. مقادیر  $T$  و  $K$  را با توجه به منحنی پاسخ تعیین کنید.



شکل ۵۲-۵ (الف) سیستم حلقه بسته؛ (ب) منحنی پاسخ پله.

حل: ماکزیمم فراجهش ۲۵٪ درصدی با  $\zeta = ۰.۴$  متناظر است. با توجه به منحنی پاسخ داریم

$$t_p = 3$$

در نتیجه

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-0.4^2}} = 3$$

با توجه به نمودار بلوکی داریم

$$\omega_n = 1.14$$

که نتیجه می‌دهد

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Ts^2 + s + K}$$

و از آن به دست می‌آوریم

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{T}} \quad , \quad 2\zeta\omega_n = \frac{1}{T}$$

پس مقادیر  $K$  و  $T$  به صورت زیر تعیین می‌شوند

$$T = \frac{1}{2\zeta\omega_n} = \frac{1}{2 \times 0.4 \times 1.14} = 1.09$$

$$K = \omega_n^2 T = 1.14^2 \times 1.09 = 1.42$$

الف ۴-۵ مقادیر  $K$  و  $k$  سیستم حلقه بسته شکل ۵-۵۳ را به نحوی تعیین کنید که ماکزیمم فراجهش پاسخ پله ۲۵٪ و زمان اوج آن ۲ sec باشد. فرض کنید  $J = 1 \text{ kgm}^2$ .

حل: تابع تبدیل کنترل عبارت است از

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Js^2 + Kks + K}$$

و با گذاشتن  $J = 1 \text{ kgm}^2$  در این معادله به دست می‌آوریم

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^2 + Kks + K}$$

توجه کنید که

$$\omega_n = \sqrt{K} \quad , \quad 2\zeta\omega_n = Kk$$

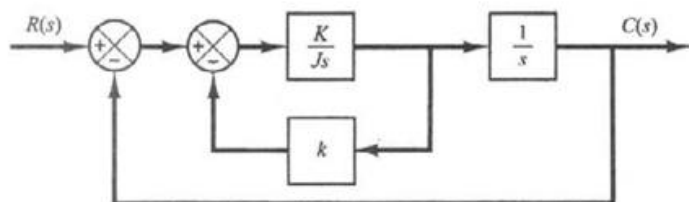
ماکزیمم فراجهش  $M_p$  عبارت است از

$$M_p = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

که برابر ۲۵٪ تعیین شده است. پس

$$e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.25$$

و بر اساس آن



شکل ۵-۵  
سیستم حلقه بسته.

$$\frac{\zeta \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 1.386$$

$$\zeta = 0.404$$

یا

زمان اوج  $t_p$  برابر ۲ sec تعیین شده است. پس

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = 2$$

$$\omega_d = 1.57$$

یا

پس فرکانس طبیعی نامیرا  $\omega_n$  عبارت است از

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{1.57}{\sqrt{1-0.404^2}} = 1.72$$

بنابراین به دست می‌آوریم

$$K = \omega_n^2 = 1.72^2 = 2.95 \text{ N.m}$$

$$k = \frac{2\zeta \omega_n}{K} = \frac{2 \times 0.404 \times 1.72}{2.95} = 0.471 \text{ sec}$$

الف ۵-۵ شکل ۵۴-۵ (الف) یک سیستم مکانیکی نوسانی را نشان می‌دهد. با اعمال یک نیروی ۲ پوندی (پله‌ای) به سیستم، جرم به صورت نشان داده شده در شکل ۵۴-۵ (ب) نوسان می‌کند. با توجه به این منحنی پاسخ،  $m$ ،  $b$ ، و  $k$  سیستم را مشخص کنید. جابه‌جایی  $x$  نسبت به وضعیت تعادل سنجیده می‌شود.  
حل: تابع تبدیل این سیستم عبارت است از

$$\frac{X(s)}{P(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

$$P(s) = \frac{2}{s}$$

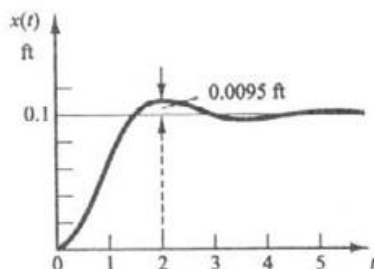
چون

به دست می‌آوریم

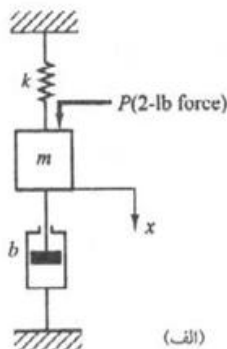
$$X(s) = \frac{2}{s(ms^2 + bs + k)}$$

که نتیجه می‌دهد مقدار حالت ماندگار  $x$  عبارت است از

$$x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \frac{2}{k} = 0.1 \text{ ft}$$



(ب)



(الف)

شکل ۵-۵

(الف) سیستم مکانیکی نوسانی؛

(ب) پاسخ پله.

پس

$$k = 20 \text{ lb}_f / \text{ft}$$

توجه کنید که  $M_p = 95\%$  با  $\zeta = 0.6$  متناظر است. زمان اوج  $t_p$  عبارت است از

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{\pi}{0.8 \omega_n}$$

منحنی به دست آمده در آزمایش نشان می‌دهد که  $t_p = 2 \text{ sec}$ . پس

$$\omega_n = \frac{3.14}{2 \times 0.8} = 1.96 \text{ rad / sec}$$

چون  $\omega_n^2 = k / m = 20 / m$  به دست می‌آوریم

$$m = \frac{20}{\omega_n^2} = \frac{20}{1.96^2} = 5.2 \text{ اسلاگ} = 167 \text{ lb}$$

(توجه کنید که ۱ اسلاگ = ۱ پوند نیرو مجذور ثانیه بر فوت.) پس  $b$  از رابطه زیر به دست می‌آید

$$2\zeta \omega_n = \frac{b}{m}$$

یعنی

$$b = 2\zeta \omega_n m = 2 \times 0.6 \times 1.96 \times 5.2 = 12.2 \text{ lb}_f / \text{ft} / \text{sec}$$

الف ۵-۶ پاسخ پله سیستم مرتبه دوم زیر را در نظر بگیرید.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2}$$

دامنه سینوسی میرای نمای به صورت سری هندسی تغییر می‌کند. در  $t = t_p = \pi / \omega_d$  دامنه برابر  $e^{-(\sigma / \omega_d)\pi}$  است. پس از یک نوسان، در  $t = t_p + 2\pi / \omega_d = 3\pi / \omega_d$  دامنه برابر  $e^{-(\sigma / \omega_d)3\pi}$  است؛ پس از یک تناوب دیگر دامنه  $e^{-(\sigma / \omega_d)5\pi}$  می‌شود. لگاریتم نسبت دو دامنه متوالی کاهش لگاریتمی نامیده می‌شود کاهش

لگاریتمی این سیستم مرتبه دوم را تعیین کنید. روشی برای تعیین تجربی نسبت میرایی از آهنگ میرایی نوسانات بیان کنید.

حل: دامنه خروجی نوسانی در  $t = t_1$  را  $x_1$  می‌نامیم، که در آن  $t_1 = t_p + (i-1)T$  ( $T$  = دوره تناوب نوسان). نسبت دامنه در یک تناوب خروجی عبارت است از

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{e^{-(\sigma/\omega_d)\pi}}{e^{-(\sigma/\omega_d)2\pi}} = e^{2(\sigma/\omega_d)\pi} = e^{2\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

پس کاهش لگاریتمی  $\delta$  برابر است با

$$\delta = \ln \frac{x_1}{x_2} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

که تنها تابعی از میرایی است. پس نسبت میرایی  $\zeta$  را می‌توان با استفاده از کاهش لگاریتمی به دست آورد. در تعیین تجربی نسبت میرایی  $\zeta$  از روی آهنگ میرایی نوسانات، دامنه  $x_1$  را در  $t = t_p$  و دامنه  $x_n$  را در  $t = t_p + (n-1)T$  اندازه می‌گیریم. توجه کنید که باید  $n$  را آنقدر بزرگ بگیریم که نسبت  $x_1/x_n$  نزدیک یک نباشد. پس

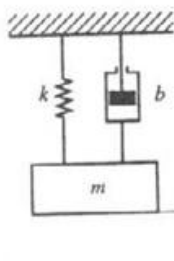
$$\frac{x_1}{x_n} = e^{(n-1)2\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

یا

$$\ln \frac{x_1}{x_n} = (n-1) \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

پس

$$\zeta = \frac{\frac{1}{n-1} \left( \ln \frac{x_1}{x_n} \right)}{\sqrt{4\pi^2 + \left[ \frac{1}{n-1} \left( \ln \frac{x_1}{x_n} \right) \right]^2}}$$



الف ۷-۵ در سیستم شکل ۵-۵۵ مقادیر عددی  $m$ ،  $b$ ، و  $k$  عبارت‌اند از  $m = 1 \text{ kg}$ ،  $b = 2 \text{ Nsec/m}$ ، و  $k = 100 \text{ N/m}$ . جرم را به اندازه  $m/0.5$  جابه‌جا کرده، آن را بدون سرعت اولیه رها می‌کنیم. فرکانس نوسانات قابل مشاهده را بیابید. همچنین دامنه را پس از چهار تناوب بیابید. جابه‌جایی  $x$  از نقطه تعادل اندازه‌گیری می‌شود.

شکل ۵-۵۵ سیستم جرم-فنر-ضربه‌گیر.

حل: معادله حرکت سیستم عبارت است از

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

با گذاشتن مقادیر عددی  $m$ ،  $b$ ، و  $k$  معادله زیر را می‌یابیم

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + 100x = 0$$

شرایط اولیه  $x(0) = 0$  و  $x'(0) = 0.05$  هستند. از این معادله فرکانس طبیعی نامیرا  $\omega_n$  و نسبت میرایی  $\zeta$  را به

صورت زیر می یابیم

$$\omega_n = 1.0, \quad \zeta = 0.1$$

فرکانسی که عملاً مشاهده می‌شود، فرکانس طبیعی میرای  $\omega_d$  است

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 1.0 \sqrt{1 - 0.05^2} = 0.9987 \text{ rad/sec}$$

در تحلیل فعلی،  $\dot{x}(0)$  صفر است. پس حل  $x(t)$  را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$x(t) = x(0) e^{-\zeta \omega_n t} \left( \cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t \right)$$

پس در  $t = nT$  که در آن  $T = 2\pi / \omega_d$

$$x(nT) = x(\circ) e^{-\zeta \omega_n nT}$$

یعنی دامنه پس از چهار تناوب عبارت است از

$$x(\tau T) = x(0)e^{-\zeta \omega_n \tau T} = x(0)e^{-(0.1 \times 1 \times 0.01 \times 0.5 \tau \times 10)} \\ = 0.005 e^{-0.5 \tau} = 0.005 \times 0.67998 = 0.0034 \text{ m}$$

الف ۵-۸ پاسخ پله واحد سیستم مرتبه بالای زیر را هم به روش تحلیلی و هم به روش محاسباتی به دست آورید.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\tau s^r + \tau \Delta s^r + \tau \nabla s + \Lambda_0}{s^r + \Lambda s^r + \tau_0 s^r + q s + \Lambda_0}$$

[بسط به کسره‌های جزئی  $C(s)$  را به ازای  $R(s)$  پله واحد به کمک MATLAB بیابید.]

حل: برنامه MATLAB ۵-۱۸ منحنی پاسخ پله شکل ۵-۵۶ را به دست می‌دهد. همچنین بسط  $C(s)$  به کسرهایی جزئی را به صورت زیر تعیین می‌کند

$$C(s) = \frac{rs^7 + 10s^5 + 17s + 10}{s^8 + 18s^7 + 90s^6 + 96s^5 + 10s^4} \cdot \frac{1}{s}$$

$$= \frac{-0.18117 - j0.17119}{s + 2 - j\sqrt{2}} + \frac{-0.18117 + j0.17119}{s + 2 + j\sqrt{2}} + \frac{-0.43750}{s + 2} + \frac{-0.3750}{(s + 2)^2} + \frac{1}{s}$$

$$= \frac{-0.0926(s + 2)}{(s + 2)^2 + 2} + \frac{(0.3738) \times \sqrt{2}}{(s + 2)^2 + 2} - \frac{0.43750}{s + 2} - \frac{0.3750}{(s + 2)^2} + \frac{1}{s}$$

پس پاسخ زمانی  $c(t)$  عبارت است از

### MATLAB Program 5-18

```
% ----- Unit-Step Response of C(s)/R(s) and Partial-Fraction Expansion of C(s) -----
num = [3 25 72 80];
den = [1 8 40 96 80];
step(num,den);
v = [0 3 0 1.2]; axis(v), grid

% To obtain the partial-fraction expansion of C(s), enter commands
% num1 = [3 25 72 80];
% den1 = [1 8 40 96 80 0];
% [r,p,k] = residue(num1,den1)

num1 = [25 72 80];
den1 = [1 8 40 96 80 0];
[r,p,k] = residue(num1,den1)

r =
    -0.2813- 0.1719i
    -0.2813+ 0.1719i
    -0.4375
    -0.3750
    1.0000

p =
    -2.0000+ 4.0000i
    -2.0000- 4.0000i
    -2.0000
    -2.0000
    0

k =
    []
```

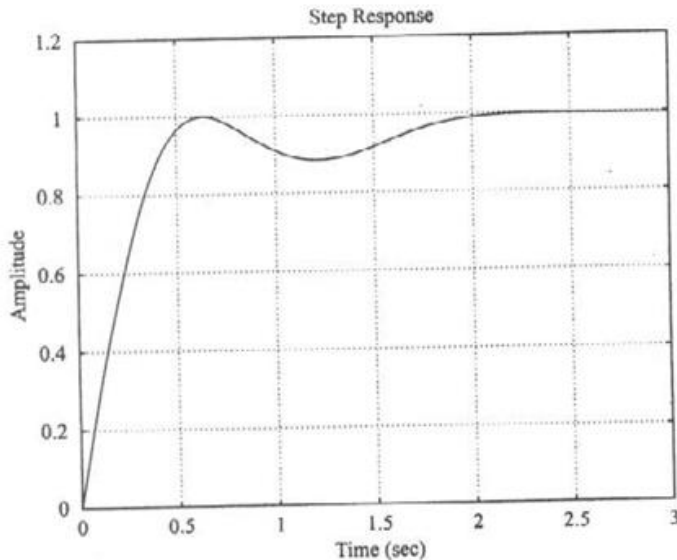
$$c(t) = -0.5626e^{-2t} \cos 4t + 0.3438e^{-2t} \sin 4t - 0.4375e^{-2t} - 0.3750te^{-2t} + 1$$

این که منحنی پاسخ یک نمایی میرا و یک سینوسی میراست از شکل ۵-۵۶ نیز آشکار است.

الف ۵-۹ وقتی صورت تابع تبدیل حلقه باز یک سیستم صفر دارد، پاسخ پله واحد می تواند فراجش بزرگی داشته باشد. پاسخ پله واحد سیستم زیر را با استفاده از MATLAB بیابید.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10s+4}{s^2+4s+4}$$

پاسخ شیب واحد را نیز با MATLAB به دست آورید.



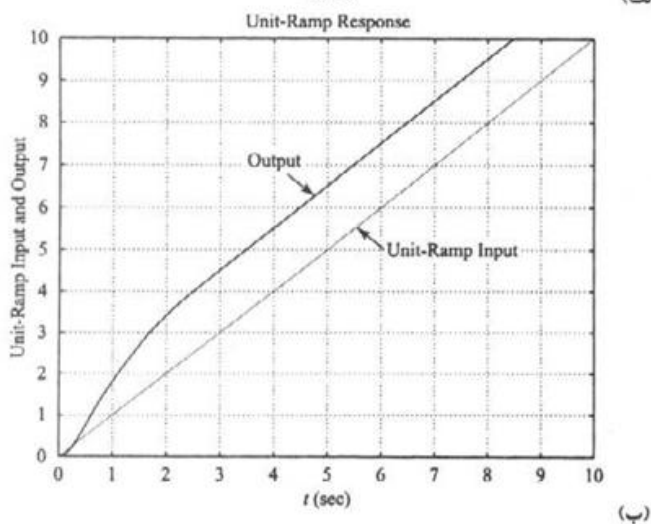
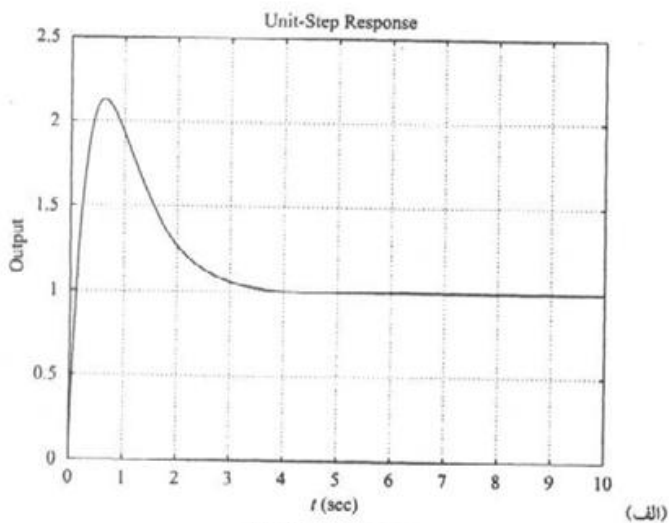
شکل ۵-۵۶  
منحنی پاسخ پله.

حل: برنامه ۵-۱۹ MATLAB منحنی‌های پاسخ پله واحد و پاسخ شیب سیستم را به دست می‌دهد. شکل‌های ۵-۵۷ (الف) و (ب) منحنی‌های پاسخ پله و پاسخ شیب، به همراه ورودی شیب، را نشان می‌دهد.

#### MATLAB Program 5-19

```
num = [10 4];
den = [1 4 4];
t = 0:0.02:10;
y = step(num,den,t);
plot(t,y)
grid
title('Unit-Step Response')
xlabel('t (sec)')
ylabel('Output')

num1 = [10 4];
den1 = [1 4 4 0];
y1 = step(num1,den1,t);
plot(t,t,'--',t,y1)
v = [0 10 0 10]; axis(v);
grid
title('Unit-Ramp Response')
xlabel('t (sec)')
ylabel('Unit-Ramp Input and Output')
text(6.1,5.0,'Unit-Ramp Input')
text(3.5,7.1,'Output')
```



شکل ۵-۵۷

(الف) منحنی پاسخ پله واحد؛

(ب) منحنی پاسخ شیب واحد

به همراه ورودی شیب.

توجه کنید که منحنی پاسخ پله واحد دارای فراجهش ۲۱۵٪ است. پاسخ شیب نیز از ورودی جلو می‌افتد. این پدیده‌ها به خاطر وجود جمله مشتقی بزرگ در صورت است.

الف ۵-۱۰ سیستم مرتبه بالای زیر را در نظر بگیرید.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{6/3223s^2 + 18s + 12/811}{s^2 + 6s^2 + 11/3223s^2 + 18s + 12/811}$$

پاسخ پله واحد این سیستم را به کمک MATLAB رسم کنید. همچنین به کمک MATLAB زمان صعود، زمان اوج، فراجهش ماکزیمم، و زمان نشست را بیابید.

حل: برنامه ۵-۲۰ منحنی پاسخ پله را رسم کرده، پارامترهای خواسته شده را به دست می‌آورد. منحنی پاسخ پله در شکل ۵-۵۸ نشان داده شده است.

### MATLAB Program 5-20

```
% ----- This program is to plot the unit-step response curve, as well as to
% find the rise time, peak time, maximum overshoot, and settling time.
% In this program the rise time is calculated as the time required for the
% response to rise from 10% to 90% of its final value. -----
```

```
num = [6.3223 18 12.811];
den = [1 6 11.3223 18 12.811];
t = 0:0.02:20;
```

```
[y,x,t] = step(num,den,t);
```

```
plot(t,y)
```

```
grid
```

```
title('Unit-Step Response')
```

```
xlabel('t (sec)')
```

```
ylabel('Output y(t)')
```

```
r1 = 1; while y(r1) < 0.1, r1 = r1+1; end;
```

```
r2 = 1; while y(r2) < 0.9, r2 = r2+1; end;
```

```
rise_time = (r2-r1)*0.02
```

```
rise_time =
```

```
0.5800
```

```
[ymax,tp] = max(y);
```

```
peak_time = (tp-1)*0.02
```

```
peak_time =
```

```
1.6600
```

```
max_overshoot = ymax-1
```

```
max_overshoot =
```

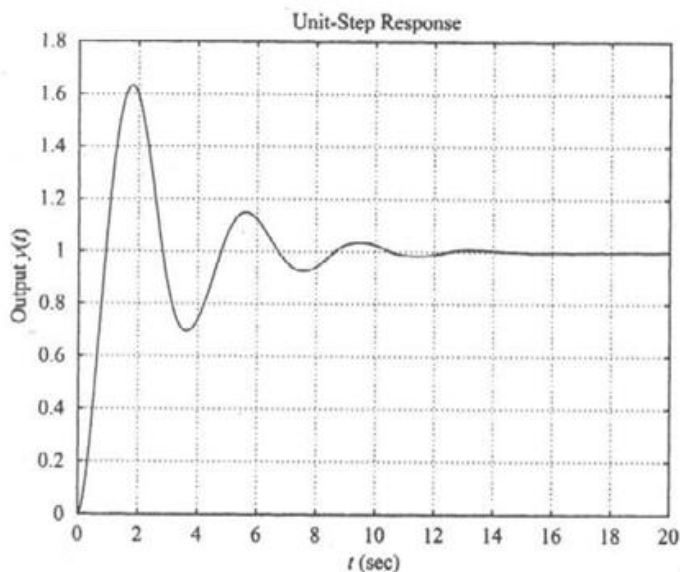
```
0.6182
```

```
s = 1001; while y(s) > 0.98 & y(s) < 1.02; s = s-1; end;
```

```
settling_time = (s-1)*0.02
```

```
settling_time =
```

```
10.0200
```



شکل ۵-۵۸ منحنی پاسخ پله.

الف ۵-۱۱ سیستم حلقه بسته تعریف شده به صورت زیر را در نظر بگیرید

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

با استفاده از حلقه for یک برنامه MATLAB بنویسید که پاسخ پله این سیستم را در حالتهای زیر حساب کند:

حالت ۱:  $\zeta = 0.3$  و  $\omega_n = 1$

حالت ۲:  $\zeta = 0.5$  و  $\omega_n = 2$

حالت ۳:  $\zeta = 0.7$  و  $\omega_n = 4$

حالت ۴:  $\zeta = 0.8$  و  $\omega_n = 6$

حل: تعریف می‌کنیم  $a = \omega_n^2$  و  $b = 2\zeta\omega_n$ . پس a و b هر یک چهار درایه به صورت زیر دارند

$$a = [1 \ 4 \ 16 \ 36]$$

$$b = [0.6 \ 2 \ 5.6 \ 9.6]$$

برنامه ۵-۲۱ با استفاده از بردارهای a و b منحنیهای پاسخ پله شکل ۵-۵۹ را به وجود می‌آورد.

الف ۵-۱۲ با استفاده از MATLAB پاسخ شیب واحد سیستم کنترلی با تابع تبدیل حلقه بسته زیر را بیابید.

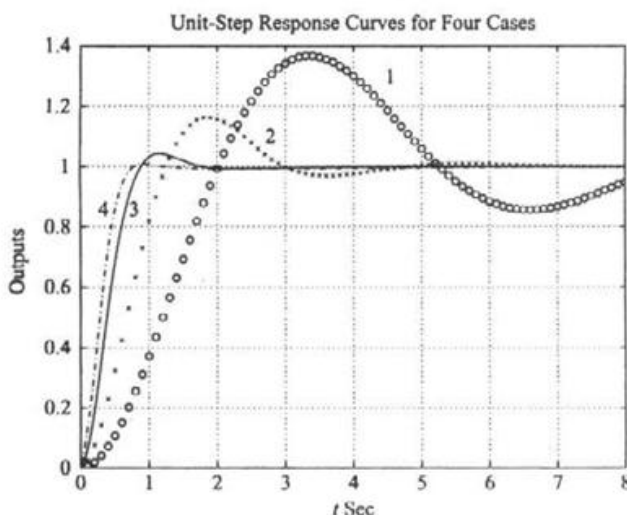
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s+10}{s^3 + 6s^2 + 9s + 10}$$

### MATLAB Program 5-21

```

a = [1 4 16 36];
b = [0.6 2 5.6 9.6];
t = 0:0.1:8;
y = zeros(81,4);
for i = 1:4;
    num = [a(i)];
    den = [1 b(i) a(i)];
    y(:,i) = step(num,den,t);
end
plot(t,y(:,1),'o',t,y(:,2),'x',t,y(:,3),'-',t,y(:,4),'-')
grid
title('Unit-Step Response Curves for Four Cases')
xlabel('t Sec')
ylabel('Outputs')
gtext('1')
gtext('2')
gtext('3')
gtext('4')

```



شکل ۵-۵

منحنی‌های پاسخ پله واحد  
در چهار حالت خواسته شده.

پاسخ این سیستم به ورودی زیر را نیز بیابید.

$$r = e^{-0.5t}$$

حل: برنامه ۲۲-۵ پاسخ شیب واحد و ورودی نمایی  $r = e^{-0.5t}$  را به دست می‌دهد. منحنی‌های پاسخ در شکل‌های ۵-۶۰ (الف) و (ب) نشان داده شده‌اند.

### MATLAB Program 5-22

```
% ----- Unit-Ramp Response -----

num = [1 10];
den = [1 6 9 10];
t = 0:0.1:10;
r = t;
y = lsim(num,den,r,t);
plot(t,r,'-',t,y,'o')
grid
title('Unit-Ramp Response by Use of Command "lsim"')
xlabel('t Sec')
ylabel('Output')
text(3.2,6.5,'Unit-Ramp Input')
text(6.0,3.1,'Output')

% ----- Response to Input r1 = exp(-0.5t). -----

num = [0 0 1 10];
den = [1 6 9 10];
t = 0:0.1:12;
r1 = exp(-0.5*t);
y1 = lsim(num,den,r1,t);
plot(t,r1,'-',t,y1,'o')
grid
title('Response to Input r1 = exp(-0.5t)')
xlabel('t Sec')
ylabel('Input and Output')
text(1.4,0.75,'Input r1 = exp(-0.5t)')
text(6.2,0.34,'Output')
```

الف ۵-۱۳ سیستم دارای تابع حلقه بسته زیر را در نظر بگیرید

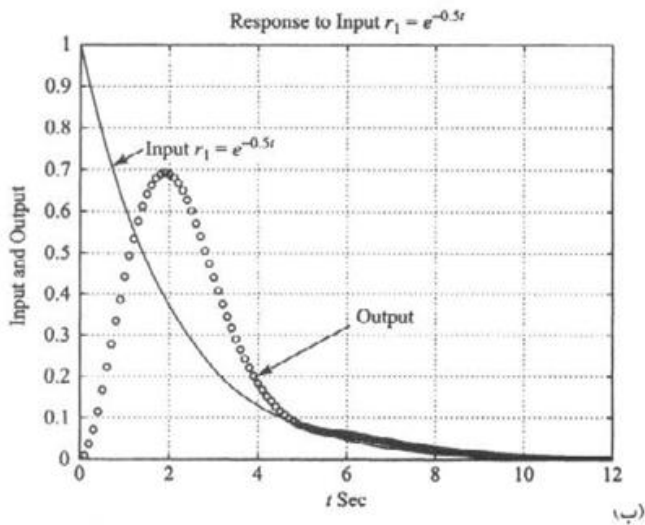
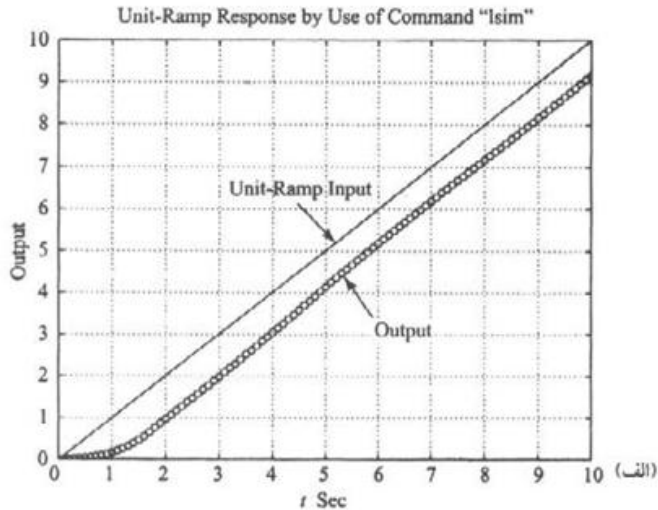
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{5}{s^2 + s + 5}$$

پاسخ سیستم را به ورودی  $r(t)$  زیر بیابید.

$$r(t) = 2 + t$$

[ورودی  $r(t)$  مجموع پله‌ای به اندازه ۲ و یک شیب واحد است.]

حل: برنامه ۵-۲۳ یک برنامه MATLAB ممکن را نشان می‌دهد. منحنی پاسخ حاصل به همراه تابع ورودی در شکل ۵-۶۱ نشان داده شده است.



شکل ۵-۶۰

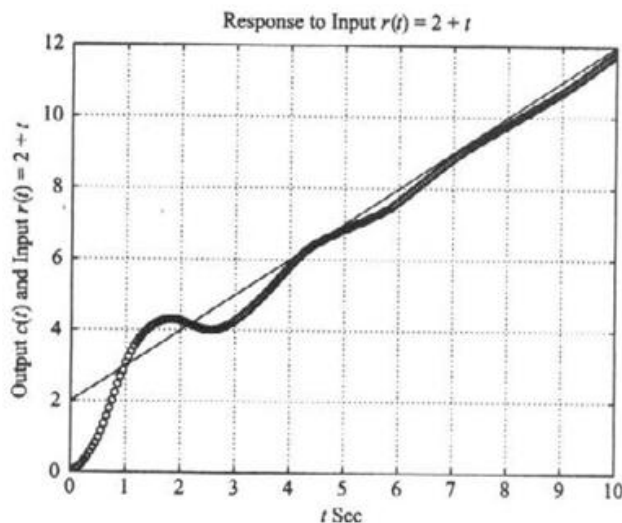
(الف) منحنی پاسخ پله واحد،

(ب) پاسخ به ورودی نمایی

$$r = e^{-t/2}$$

#### MATLAB Program 5-23

```
num = [5];
den = [1 1 5];
t = 0:0.05:10;
r = 2+t;
c = lsim(num,den,r,t);
plot(t,r,'-',t,c,'o')
grid
title('Response to Input r(t) = 2 + t')
xlabel('t Sec')
ylabel('Output c(t) and Input r(t) = 2 + t')
```



شکل ۵-۶۱

پاسخ به ورودی  $r = 2 + t$ .

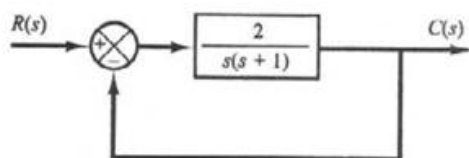
الف ۵-۱۴ پاسخ سیستم شکل ۵-۶۲ به ورودی  $r(t)$  (ورودی شتاب واحد) زیر را بیابید.

$$r(t) = \frac{1}{2}t^2$$

حل: تابع تبدیل حلقه بسته عبارت است از

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2}{s^2 + s + 2}$$

برنامه ۵-۲۴ پاسخ شتاب واحد را ایجاد می‌کند. پاسخ حاصل به همراه شتاب واحد در شکل ۵-۶۳ نشان داده شده است.

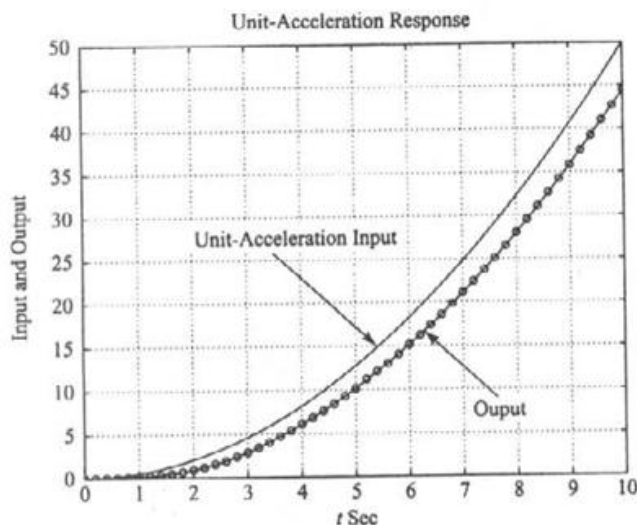


شکل ۵-۶۲

سیستم کنترل.

#### MATLAB Program 5-24

```
num = [2];
den = [1 1 2];
t = 0:0.2:10;
r = 0.5*t.^2;
y = lsim(num,den,r,t);
plot(t,r,'- ',t,y,'o ',t,y,'- ')
grid
title('Unit-Acceleration Response')
xlabel('t Sec')
ylabel('Input and Output')
text(2.1,27.5,'Unit-Acceleration Input')
text(7.2,7.5,'Output')
```



شکل ۵-۶۳  
پاسخ به ورودی شتاب.

الف ۵-۱۵ سیستم تعریف شده به صورت زیر را در نظر بگیرید

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2 + 2\zeta s + 1}$$

که در آن  $\zeta = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ . یک برنامه MATLAB با استفاده از حلقه for بنویسید که نمودارهای دویبعدی و یک بعدی پاسخ سیستم را رسم کند. ورودی پله واحد است.  
حل: برنامه ۵-۲۵ یک برنامه MATLAB ممکن برای رسم نمودارهای دویبعدی و سه بعدی را نشان می دهد. شکل ۵-۶۴ (الف) نمودارهای دو بعدی پاسخ پله را به ازای مقادیر مختلف  $\zeta$  نشان می دهد. شکل ۵-۶۴ (ب) نمودار سه بعدی حاصل از کاربرد دستور mesh (y) و شکل ۵-۶۴ (ج) نمودار سه بعدی حاصل از کاربرد دستور mesh (y) را نشان می دهد. (این دو نمودار سه بعدی در اصل یکی هستند. تنها تفاوت در جابه جایی محورهای x و y است.)

الف ۵-۱۶ سیستم در معرض شرایط اولیه زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -17 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(سیستم ورودی یا تابع تحریک ندارد.) پاسخ  $y(t)$  بر حسب t به ازای شرایط اولیه را با استفاده از معادلات (۵-۵۸) و (۵-۶۰) بیابید.

### MATLAB Program 5-25

```
t = 0:0.2:12;
    for n = 1:6;
        num = [1];
        den = [1 2*(n-1)*0.2 1];
        [y(1:61,n),x,t] = step(num,den,t);
    end
plot(t,y)
grid
title('Unit-Step Response Curves')
xlabel('t Sec')
ylabel('Outputs')
gtext('\zeta = 0'),
gtext('0.2')
gtext('0.4')
gtext('0.6')
gtext('0.8')
gtext('1.0')

% To draw a three-dimensional plot, enter the following command: mesh(y) or mesh(y').
% We shall show two three-dimensional plots, one using "mesh(y)" and the other using
% "mesh(y')". These two plots are the same, except that the x axis and y axis are
% interchanged.

mesh(y)
title('Three-Dimensional Plot of Unit-Step Response Curves using Command "mesh(y)"')
xlabel('n, where n = 1,2,3,4,5,6')
ylabel('Computation Time Points')
zlabel('Outputs')

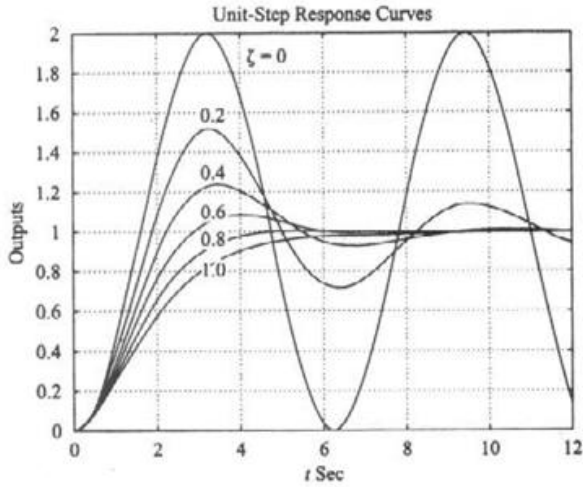
mesh(y')
title('Three-Dimensional Plot of Unit-Step Response Curves using "mesh(y transpose)"')
xlabel('Computation Time Points')
ylabel('n, where n = 1,2,3,4,5,6')
zlabel('Outputs')
```

حل: برنامه ۵-۲۶ یک برنامه MATLAB مبنی بر معادلات (۵-۵۸) و (۵-۶۰) است. منحنی پاسخ حاصل در شکل ۵-۶۵ نشان داده شده است. (توجه کنید که این مسئله در مثال ۵-۱۶ با استفاده از دستور initial حل شد. منحنی پاسخ به دست آمده دقیقاً مشابه منحنی شکل ۵-۳۴ است.)

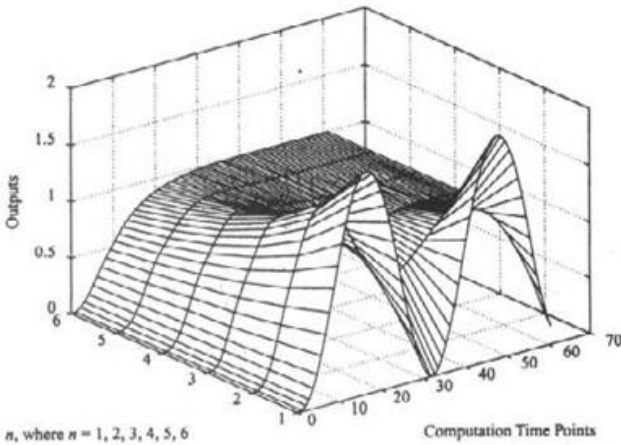
الف ۵-۱۷ معادله مشخصه زیر را در نظر بگیرید

$$s^3 + Ks^2 + s + 1 = 0$$

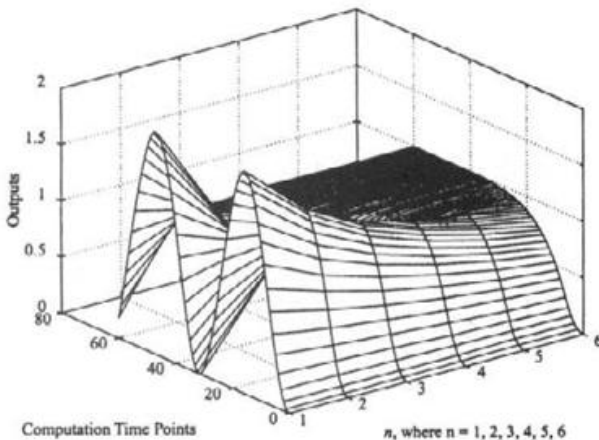
گستره  $K$  برای پایدار بودن را تعیین کنید.



(الف)



(ب)



(ج)

### شکل ۵-۶۴

(الف) منحنی‌های پاسخ پله دویبعده.

(ب) منحنی‌های پاسخ پله سه بعدی

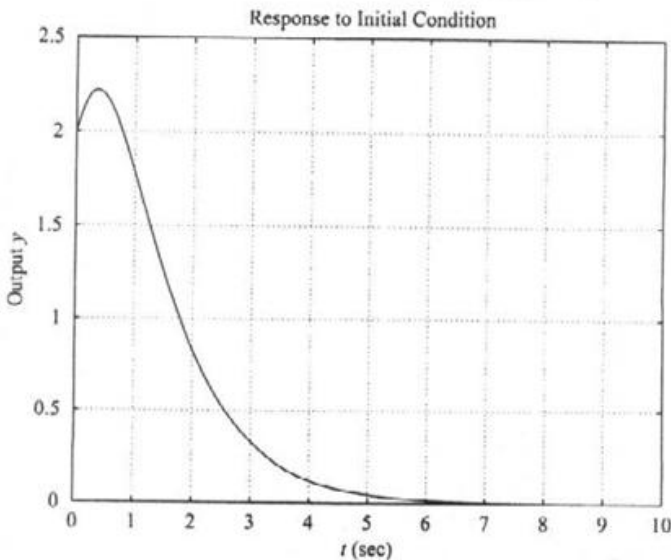
با استفاده از دستور (y) mesh

(ج) منحنی‌های پاسخ پله سه بعدی

با استفاده از دستور (y') mesh.

**MATLAB Program 5-26**

```
t = 0:0.05:10;
A = [0 1 0; 0 0 1; -10 -17 -8];
B = [2; 1; 0.5];
C = [1 0 0];
[y,x,t] = step(A,B,C*A,C*B,1,t);
plot(t,y)
grid;
title('Response to Initial Condition')
xlabel('t (sec)')
ylabel('Output y')
```



شکل ۵-۶۵

پاسخ  $y(t)$  به شرایط اولیه.

حل: آرایه روث عبارت است از

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 1 \ 1 \\ s^2 & K & 1 \ 0 \\ s^1 & \frac{K-1}{K} & 1 \\ s^0 & 1-\frac{K^*}{K-1} & \\ s^* & 1 & \end{array}$$

برای پایداری باید داشته باشیم

$$K > 0, \quad \frac{K-1}{K} > 0, \quad 1 - \frac{K^*}{K-1} > 0$$

شرط اول و دوم می‌گویند  $K$  باید بزرگتر از ۱ باشد. به ازای  $K > 1$ ،  $[K^2/(K-1)] - 1$  همواره منفی است، زیرا

$$\frac{K-1-K^2}{K-1} = \frac{-1+K(1-K)}{K-1} < 0$$

پس سه شرط به طور همزمان ارضا نمی‌شوند. بنابراین به ازای هیچ مقداری از  $K$  سیستم پایدار نیست.

الف ۱۸-۵ معادله مشخصه زیر را در نظر بگیرید

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (67-5)$$

معیار پایداری هورویتز، که به زودی آن را بیان می‌کنیم، شرایط منفی بودن بخش حقیقی تمام ریشه‌ها را برحسب ضرایب چندجمله‌ای تعیین می‌کند. همانطور که در بحث معیار پایداری روث در بخش ۵-۶ گفتیم برای منفی بودن بخش حقیقی تمام ریشه‌ها، تمام ضرایب  $a_i$  باید مثبت باشد. این شرط لازم است، ولی کافی نیست. در صورت برآورده نشدن این شرط بعضی ریشه‌ها بخش حقیقی مثبت دارند، موهومی‌اند یا صفزند. شرط کافی برای منفی بودن بخش حقیقی تمام ریشه‌ها در معیار پایداری هورویتز بیان می‌شود: اگر تمام ضرایب چندجمله‌ای مثبت باشد، آنها را به صورت درمیان زیر مرتب می‌کنیم:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & a_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-3} & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-4} & a_{n-2} & a_n \end{vmatrix}$$

در این آرایه به ازای  $s > n$ ،  $a_s$  را صفر قرار می‌دهیم. برای این که تمام ریشه‌ها دارای بخش حقیقی منفی باشند، لازم و کافی است که کهادهای اصلی متوالی  $\Delta_n$  مثبت باشند، کهادهای اصلی متوالی، درمیان‌های زیرند:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{2j-1} \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{2j-2} \\ 0 & a_1 & \dots & a_{2j-3} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_j \end{vmatrix} \quad (j=1, 2, \dots, n-1)$$

که در آن به ازای  $s > n$ ،  $a_s = 0$  (دقت کنید که بعضی از شرایط مربوط به درمیان‌های مرتبه پایین در شرایط درمیان‌های مرتبه بالا مستتر است). اگر تمام این درمیان‌ها مثبت باشند، و چنانچه فرض کرده‌ایم  $a_0 > 0$ ، حالت تعادلی سیستم دارای معادله مشخصه (۶۷-۵) پایداری مجانبی دارد. توجه کنید که مقدار دقیق درمیان‌ها مهم نیست، برای پایداری تنها علامت درمیان‌ها مهم است.

حال معادله مشخصه زیر را در نظر بگیرید:

$$a_0 s^r + a_1 s^{r-1} + a_2 s^{r-2} + \dots + a_r s + a_{r+1} = 0$$

با استفاده از معیار پایداری هورویتز شرط پایداری را بیابید.  
حل: شرط پایداری این است که تمام  $a$  ها مثبت باشند و

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} a_1 & a_r \\ a_0 & a_{r-1} \end{vmatrix} = a_1 a_{r-1} - a_0 a_r > 0$$

$$\begin{aligned} \Delta_r &= \begin{vmatrix} a_1 & a_r & 0 \\ a_0 & a_{r-1} & a_{r-2} \\ 0 & a_1 & a_r \end{vmatrix} \\ &= a_1(a_r a_{r-2} - a_1 a_{r-1}) - a_0 a_r^2 \\ &= a_r(a_1 a_{r-2} - a_0 a_r) - a_1^2 a_r > 0 \end{aligned}$$

واضح است که اگر  $a$  ها مثبت باشند و شرط  $\Delta_r > 0$  ارضا شود، شرط  $\Delta_r > 0$  نیز ارضا می شود. پس شرط لازم و کافی برای منفی بودن بخش حقیقی تمام ریشه های این معادله مشخصه این است که تمام ضرایب  $a_i$  مثبت باشند، و  $\Delta_r > 0$ .

الف ۵-۱۹ نشان دهید ستون اول آرایه روث چندجمله ای زیر

$$s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

عبارت است از

$$\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}, \dots, \frac{\Delta_r}{\Delta_r}, \frac{\Delta_r}{\Delta_1}, \Delta_1, 1$$

که در آن

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_r & a_r & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_0 & a_r & a_r & a_r & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r,r-1} & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & a_r \end{vmatrix} \quad (n \geq r \geq 1)$$

که اگر  $k > n$ ، آنگاه  $a_k = 0$ .

حل: آرایه روث عبارت است از

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n \\
 a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & \\
 b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & & \\
 c_1 & c_2 & . & & & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & & 
 \end{array}$$

اولین جمله ستون اول آرایه روث ۱ است.  $a_1$  جمله بعدی ستون اول است که با  $\Delta_1$  برابر است. جمله بعدی  $b_1$  است، که برابر است با

$$\frac{a_1 a_2 - a_3}{a_1} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}$$

جمله بعدی ستون اول  $c_1$  عبارت است از

$$\begin{aligned}
 \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1} &= \frac{\left[ \frac{a_1 a_2 - a_3}{a_1} \right] a_3 - a_1 \left[ \frac{a_1 a_4 - a_5}{a_1} \right]}{\left[ \frac{a_1 a_2 - a_3}{a_1} \right]} \\
 &= \frac{a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4 + a_1 a_5}{a_1 a_2 - a_3} = \frac{\Delta_3}{\Delta_2}
 \end{aligned}$$

جملات بعدی ستون اول آرایه روث را نیز می‌توان شیوه‌ای مشابه به دست آورد.

آرایه روث این ویژگی را دارد که آخرین جملات غیرصفر تمام ستونها یکی است؛ یعنی در آرایه زیر

$$\begin{array}{cccc}
 a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\
 a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\
 b_1 & b_2 & b_3 & \\
 c_1 & c_2 & c_3 & \\
 d_1 & d_2 & & \\
 e_1 & e_2 & & \\
 f_1 & & & \\
 g_1 & & & 
 \end{array}$$

$$a_5 = c_3 = e_2 = g_1$$

داریم

و در آرایه زیر

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & \\ c_1 & c_2 & 0 & \\ d_1 & d_2 & & \\ e_1 & 0 & & \\ f_1 & & & \end{array}$$

داریم

$$a_4 = b_3 = d_2 = f_1$$

در هر حال، آخرین جمله ستون اول برابر  $a_n$  است، یا

$$a_n = \frac{\Delta_{n-1} a_n}{\Delta_{n-1}} = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$$

برای مثال به ازای  $n=4$  داریم

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_2 & a_2 & a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 & a_3 & a_2 \\ a_4 & a_4 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_2 & a_2 & a_1 & 1 \\ 0 & a_2 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = \Delta_3 a_4$$

به این ترتیب نشان دادیم که عناصر ستون اول آرایه روث عبارت است از

$$\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}, \dots, \frac{\Delta_3}{\Delta_2}, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \Delta_1, 1$$

الف ۵-۲۰ نشان دهید که معیار پایداری روث و معیار پایداری هورویتز هم‌ارزند.

حل: اگر درترمینالهای هورویتز را به شکل مثلثی بنویسیم

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ * & & & a_{ii} \end{vmatrix} \quad (i=1,2,\dots,n)$$

که در آن تمام درایه‌های زیر قطر اصلی صفرند و درایه‌های بالای قطر اصلی هر عددی می‌تواند باشد، شرایط هورویتز برای پایداری مجانبی را می‌توان به شکل زیر بیان کرد

$$\Delta_i = a_{11} a_{22} \dots a_{ii} > 0 \quad (i=1,2,\dots,n)$$

که با شرایط زیر هم‌ارزند

$$a_{11} > 0, \quad a_{22} > 0, \quad \dots, \quad a_{nn} > 0$$

نشان خواهیم داد که این شرایط معادل این هستند که

$$a_1 > 0, \quad b_1 > 0, \quad c_1 > 0, \dots$$

که  $a_1, b_1, c_1, \dots$  و ... عناصر ستون اول آرایه روث هستند.

برای مثال دترمینان هورویتز زیر، متناظر با  $i=4$  را در نظر بگیرید:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix}$$

اگر  $k$  برابر ردیف  $i$  ام را از ردیف  $i$  ام کم کنیم، دترمینان تغییر نمی کند.  $a_0/a_1$  برابر ردیف اول را از ردیف دوم کم می کنیم و به دست می آوریم

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_3 & a_5 & a_7 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix}$$

که در آن

$$a_{11} = a_1$$

$$a_{22} = a_2 - \frac{a_0}{a_1} a_3$$

$$a_{23} = a_3 - \frac{a_0}{a_1} a_5$$

$$a_{24} = a_4 - \frac{a_0}{a_1} a_7$$

به نحوی مشابه  $a_0/a_1$  برابر ردیف سوم را از ردیف چهارم کم می کنیم و به دست می آوریم

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_3 & a_5 & a_7 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & 0 & \hat{a}_{23} & \hat{a}_{24} \end{vmatrix}$$

که در آن

$$\hat{a}_{23} = a_3 - \frac{a_0}{a_1} a_5$$

$$\hat{a}_{24} = a_4 - \frac{a_0}{a_1} a_7$$

سپس  $a_1/a_{22}$  برابر ردیف دوم را از ردیف سوم کم می‌کنیم و به دست می‌آوریم

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_2 & a_5 & a_7 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & \hat{a}_{43} & \hat{a}_{44} \end{vmatrix}$$

که در آن

$$a_{33} = a_2 - \frac{a_1}{a_{22}} a_{23}$$

$$a_{34} = a_5 - \frac{a_1}{a_{22}} a_{24}$$

سرانجام  $\hat{a}_{23}/a_{33}$  برابر ردیف سوم را از ردیف چهارم کم می‌کنیم، که نتیجه می‌دهد

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_2 & a_5 & a_7 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$$

که در آن

$$a_{44} = \hat{a}_{44} - \frac{\hat{a}_{23}}{a_{33}} a_{34}$$

این تحلیل نشان می‌دهد که

$$\Delta_2 = a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}$$

$$\Delta_3 = a_{11} a_{22} a_{33}$$

$$\Delta_4 = a_{11} a_{22}$$

$$\Delta_1 = a_{11}$$

شرایط هورویتز برای پایداری مجانبی عبارت است از

$$\dots, \Delta_4 > 0, \Delta_3 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_1 > 0$$

که به شرایط زیر تبدیل می‌شوند

$$\dots, a_{44} > 0, a_{33} > 0, a_{22} > 0, a_{11} > 0$$

آرایه روث برای چندجمله‌ای

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + a_{n-3} s^{n-3} + a_{n-4} s^{n-4} + \dots = 0$$

که در آن  $a_n > 0$  و  $n=4$ ، عبارت است از

$$a_*, a_2, a_4$$

$$a_1, a_3$$

$$b_1, b_2$$

$$c_1$$

$$d_1$$

با توجه به آرایه روث می‌بینیم که

$$a_{11} = a_1$$

$$a_{22} = a_2 - \frac{a_*}{a_1} a_2 = b_1$$

$$a_{33} = a_3 - \frac{a_1}{a_{22}} a_{23} = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{b_1} = c_1$$

$$a_{44} = \hat{a}_{44} - \frac{\hat{a}_{23}}{\hat{a}_{33}} a_{34} = a_4 = d_1$$

(زیرا  $a_{24} = 0$ ,  $\hat{a}_{22} = a_2$ , و  $a_4 = b_2 = d_1$ ) پس شرط روث برای پایداری مجانبی به صورت زیر درمی‌آید

$$a_1 > 0, \quad b_1 > 0, \quad c_1 > 0, \quad d_1 > 0$$

پس نشان دادیم که شرط روث برای پایداری مجانبی و شرط هورویتز برای پایداری مجانبی یکسان‌اند. این استدلال را می‌توان به دترمینانی با هر مرتبه تعمیم داد، و هم‌ارزی معیار پایداری روث و معیار پایداری هورویتز را اثبات کرد.

الف ۵-۲۱ معادله مشخصه زیر را در نظر بگیرید:

$$s^4 + 2s^3 + (4+K)s^2 + 9s + 25 = 0$$

با استفاده از معیار پایداری هورویتز گستره  $K$  برای پایدار بودن معادله مشخصه را تعیین کنید.

حل: معادله مشخصه داده شده

$$s^4 + 2s^3 + (4+K)s^2 + 9s + 25 = 0$$

را با معادله مشخصه مرتبه چهارم زیر مقایسه می‌کنیم

$$a_* s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4 = 0$$

و درمی‌یابیم که

$$a_* = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 4 + K, \quad a_3 = 9, \quad a_4 = 25$$

معیار پایداری هورویتز می‌گوید  $\Delta_4$  عبارت است از

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_2 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_2 & a_2 & a_4 \end{vmatrix}$$

برای این که بخش حقیقی تمام ریشه‌ها منفی باشد، لازم و کافی است که کهادهای متوالی  $\Delta_2$  مثبت باشد. کهادهای متوالی عبارت است از

$$\Delta_1 = |a_1| = 2$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 4+K \end{vmatrix} = 2K-1$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_2 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 0 \\ 1 & 4+K & 25 \\ 0 & 2 & 9 \end{vmatrix} = 18K-109$$

برای مثبت بودن تمام کهادها باید  $\Delta_i$  (مثبت باشد. پس باید داشته باشیم

$$2K-1 > 0$$

$$18K-109 > 0$$

که گستره پایداری  $K$  را به صورت زیر به دست می‌دهد

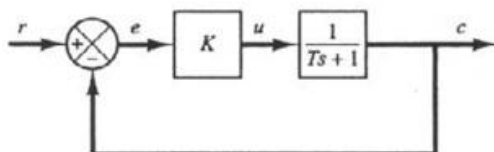
$$K > \frac{109}{18}$$

الف ۵-۲۲ توضیح دهید چرا کنترل تناسبی وسیله‌ای که خاصیت انتگرالگیری ندارد (یعنی تابع تبدیل آن عامل

$1/s$  ندارد) به سیستمی می‌انجامد که پاسخ حالت ماندگار آن به ازای ورودی پله‌ای آفست دارد.

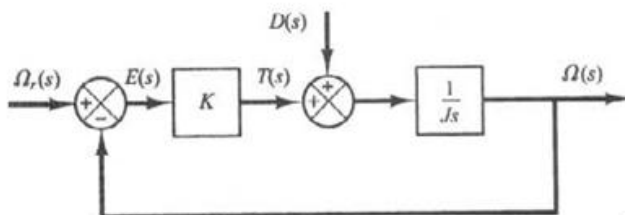
حل: سیستم شکل ۵-۶۶ را به عنوان نمونه در نظر بگیرید. اگر در حالت ماندگار  $c$  با مقدار ثابت غیر صفر  $r$  برابر باشد، آنگاه  $e=0$  و  $u=Ke=0$ ، که نتیجه می‌دهد  $c=0$ . این با فرض اولیه مان راجع به صفر نبودن  $c$  و  $r$  تناقض دارد.

برای عملکرد درست این سیستم باید بین خروجی و ورودی اختلاف وجود داشته باشد. به عبارت دیگر در حالت ماندگار اگر  $e$  برابر  $r/(1+K)$  باشد، آنگاه  $u = Kr/(1+K)$  و  $c = Kr/(1+K)$  که سیگنال خطای مفروض  $e = r/(1+K)$  را ایجاد می‌کند. پس بین خروجی و ورودی این سیستم باید اختلافی برابر  $r/(K+1)$  وجود داشته باشد.



شکل ۵-۶۶

سیستم کنترل.



شکل ۵-۶۷

نمودار بلوکی یک سیستم کنترل سرعت.

الف ۵-۲۳ نمودار بلوکی شکل ۵-۶۷ یک سیستم کنترل سرعت را نشان می‌دهد که در آن عضو خروجی در معرض اغتشاش گشتاور قرار دارد. در این نمودار  $\Omega_r(s)$ ،  $\Omega(s)$ ،  $T(s)$  و  $D(s)$  به ترتیب تبدیل لاپلاس‌های سرعت مرجع، سرعت خروجی، گشتاور تحریک و گشتاور اغتشاشی هستند. در صورت نبودن اغتشاش گشتاور سرعت خروجی با سرعت مرجع برابر است.

پاسخ این سیستم به یک گشتاور اغتشاشی پله واحد را بیابید فرض کنید ورودی مرجع صفر است، یعنی  $\Omega_r(s) = 0$ .

حل: شکل ۵-۶۸ نمودار بلوکی مناسبی برای تحلیل مورد نظر است. تابع تبدیل حلقه بسته عبارت است از

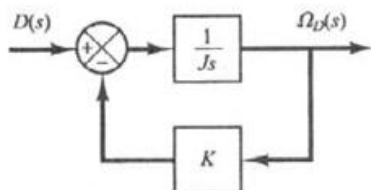
$$\frac{\Omega_D(s)}{D(s)} = \frac{1}{Js + K}$$

که در آن  $\Omega_D(s)$  تبدیل لاپلاس سرعت خروجی ناشی از گشتاور اغتشاشی است. به ازای گشتاور اغتشاشی پله واحد سرعت خروجی در حالت ماندگار عبارت است از

$$\begin{aligned} \omega_D(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \Omega_D(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{Js + K} \frac{1}{s} \\ &= \frac{1}{K} \end{aligned}$$

از این تحلیل نتیجه می‌گیریم که اگر یک گشتاور اغتشاشی پله‌ای به عضو خروجی سیستم اعمال بشود، خطای سرعت حاصل به نحوی است که گشتاور تولید شده توسط موتور دقیقاً گشتاور اغتشاشی را حذف می‌کند. برای این که موتور این گشتاور را ایجاد کند، سرعت باید خطا داشته باشد تا گشتاور حاصل صفر نباشد. (این مبحث در مسئله الف ۵-۲۴ ادامه می‌یابد.)

الف ۵-۲۴ در سیستم مسئله الف-۵-۲۳ می‌خواهیم خطای سرعت ناشی از گشتاورهای اغتشاشی را تا حد ممکن حذف کنیم.

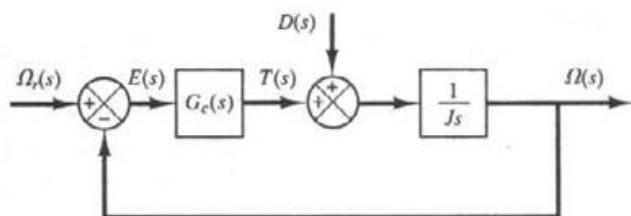


شکل ۵-۶۸

نمودار بلوکی سیستم کنترل

سرعت شکل ۵-۶۷ به ازای

$$\Omega_r(s) = 0$$



شکل ۵-۶۹

نمودار بلوکی یک سیستم کنترل سرعت.

آیا ممکن است اثر گشتاور اغتشاشی را در حالت ماندگار به نحوی حذف کرد که به ازای یک گشتاور اغتشاشی ثابت اعمال شده به عضو خروجی، سرعت در حالت ماندگار تغییر نکند؟  
 حل: فرض کنید مطابق شکل ۵-۶۹ کنترل کننده مناسبی با تابع تبدیل  $G_c(s)$  برگزیده‌ایم. در این صورت تابع تبدیل حلقه بسته بین سرعت خروجی  $\Omega_D(s)$  و گشتاور اغتشاشی  $D(s)$  در نبود ورودی مرجع عبارت است از

$$\begin{aligned}\frac{\Omega_D(s)}{D(s)} &= \frac{\frac{1}{Js}}{1 + \frac{1}{Js}G_c(s)} \\ &= \frac{1}{Js + G_c(s)}\end{aligned}$$

سرعت خروجی حالت ماندگار ناشی گشتاور اغتشاشی پله واحد عبارت است از

$$\begin{aligned}\omega_D(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} s\Omega_D(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{Js + G_c(s)} \frac{1}{s} \\ &= \frac{1}{G_c(0)}\end{aligned}$$

برای این که داشته باشیم

$$\omega_D(\infty) = 0$$

باید برگزینیم  $G_c(0) = \infty$ . برای این منظور باید داشته باشیم

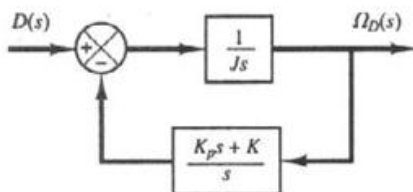
$$G_c(s) = \frac{K}{s}$$

عمل کنترل انتگرالی خطا را تصحیح می‌کند تا سرانجام صفر شود. ولی این کنترل کننده مشکل پایداری به همراه دارد، زیرا معادله مشخصه دو قطب موهومی پیدا می‌کند.

یک راه برای پایدار کردن چنین سیستمی افزودن یک بخش تناسبی به کنترل کننده است، یعنی باید کنترل

کننده‌ای به صورت زیر برگزینیم

$$G_c(s) = K_p + \frac{K}{s}$$



شکل ۵-۷۰

نمودار بلوکی سیستم کنترل سرعت

شکل ۵-۷۴ به ازای  $\Omega_r(s) = 0$

و  $G_c(s) = K_p + (K/s)$

با این کنترل کننده نمودار بلوکی شکل ۵-۶۹ را در صورت صفر بودن ورودی مرجع می توان به صورت زیر شکل ۵-۷۰ رسم کرد. تابع تبدیل حلقه بسته  $\Omega_D(s)/D(s)$  به صورت زیر درمی آید

$$\frac{\Omega_D(s)}{D(s)} = \frac{s}{Js^2 + K_p s + K}$$

به ازای گشتاور اغتشاشی پله ای، خطای حالت ماندگار سرعت خروجی عبارت است از

$$\omega_D(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \Omega_D(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2}{Js^2 + K_p s + K} \cdot \frac{1}{s} = 0$$

پس می بینیم که کنترل کننده تناسبی - انتگرالی خطای سرعت را در حالت ماندگار حذف می کند. عمل کنترل انتگرالی مرتبه سیستم را یک واحد افزایش می دهد. (این افزایش امکان ایجاد پاسخ نوسانی را فراهم می کند.)

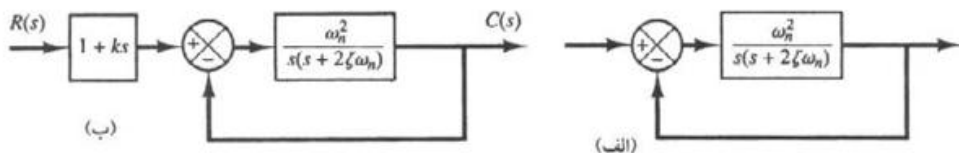
در این سیستم گشتاور اغتشاشی پله ای باعث خطای گذرا در سرعت خروجی می شود، ولی در حالت ماندگار این خطا صفر می شود. انتگرالگیر یک خروجی غیرصفر بدون خطا ایجاد می کند. (خروجی غیرصفر انتگرالگیر باعث می شود موتور گشتاور لازم برای حذف کامل گشتاور اغتشاشی را ایجاد کند.)

توجه کنید که انتگرالگیر موجود در وسیله، خطای حالت ماندگار ناشی از گشتاور اغتشاشی پله ای را حذف نمی کند. برای حذف این خطا انتگرالگیر باید در محلی قبل از نقطه ورودی گشتاور اغتشاشی قرار داشته باشد.

الف ۵-۲۵ سیستم شکل ۵-۷۱ (الف) را در نظر بگیرید. خطای حالت ماندگار به ورودی شیب واحد عبارت است از  $e_{ss} = 2\zeta/\omega_n$ . نشان دهید که در صورت عبور ورودی از یک فیلتر تناسبی - انتگرالی و تنظیم مناسب  $k$  به صورت شکل ۵-۷۱ (ب)، می توان خطای حالت ماندگار در دنبال کردن شیب را صفر کرد. توجه کنید که خطای  $e(t)$  برابر  $r(t) - c(t)$  است.

حل: تابع تبدیل حلقه بسته سیستم شکل ۵-۷۱ (ب) عبارت است از

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{(1 + ks)\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$



شکل ۵-۷۱ (الف) سیستم کنترل؛ (ب) سیستم کنترل با فیلتر ورودی.

$$R(s) - C(s) = \left( \frac{s^\gamma + \gamma \zeta \omega_n s - \omega_n^\gamma k s}{s^\gamma + \gamma \zeta \omega_n s + \omega_n^\gamma} \right) R(s)$$

به ازای ورودی شیب واحد خطای حالت ماندگار عبارت است از

$$\begin{aligned} e(\infty) &= r(\infty) - c(\infty) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{s^\gamma + \gamma \zeta \omega_n s - \omega_n^\gamma k s}{s^\gamma + \gamma \zeta \omega_n s + \omega_n^\gamma} \right) \frac{1}{s^\gamma} \\ &= \frac{\gamma \zeta \omega_n - \omega_n^\gamma k}{\omega_n^\gamma} \end{aligned}$$

پس انتخاب  $k$  به صورت زیر

$$k = \frac{\gamma \zeta}{\omega_n}$$

خطای حالت ماندگار در دنبال کردن ورودی شیب واحد را به صفر می‌رساند. توجه کنید که اگر در اثر تغییرات محیط یا پیر شدن مقادیر  $\zeta$  و  $\omega_n$  تغییر کنند، خروجی به ازای ورودی شیب خای حالت ماندگار دارد.

الف ۵-۲۶ سیستم کنترل پایداری با فیدبک واحد و تابع تبدیل پیشخورد  $G(s)$  در نظر بگیرید. فرض کنید تابع تبدیل حلقه بسته را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots (T_m s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_r s + 1) \cdots (T_n s + 1)} \quad (m \leq n)$$

نشان دهید که

$$\int_0^\infty c(t) dt = (T_1 + T_r + \cdots + T_n) - (T_a + T_b + \cdots + T_m)$$

که در آن  $e(t) = r(t) - c(t)$  خطای پاسخ به پله واحد است. همچنین نشان دهید که

$$\begin{aligned} \frac{1}{K_v} &= \lim_{s \rightarrow 0} s G(s) \\ &= (T_1 + T_r + \cdots + T_n) - (T_a + T_b + \cdots + T_m) \end{aligned}$$

حل: تعریف می‌کنیم

$$(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots (T_m s + 1) = P(s)$$

$$(T_1 s + 1)(T_r s + 1) \cdots (T_n s + 1) = Q(s)$$

و

پس

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

$$E(s) = \frac{Q(s) - P(s)}{Q(s)} R(s)$$

به ازای ورودی پله واحد  $R(s) = 1/s$  و

$$E(s) = \frac{Q(s) - P(s)}{sQ(s)}$$

چون سیستم پایدار است  $\int_0^{\infty} e(t) dt$  به مقداری ثابت همگرا می‌شود. با توجه به این که

$$\int_0^{\infty} e(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{E(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} E(s)$$

داریم

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e(t) dt &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{Q(s) - P(s)}{sQ(s)} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{Q'(s) - P'(s)}{Q(s) - sQ'(s)} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} [Q'(s) - P'(s)] \end{aligned}$$

چون

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} P'(s) &= T_a + T_b + \dots + T_m \\ \lim_{s \rightarrow 0} Q'(s) &= T_1 + T_2 + \dots + T_n \end{aligned}$$

داریم

$$\int_0^{\infty} e(t) dt = (T_1 + T_2 + \dots + T_n) - (T_a + T_b + \dots + T_m)$$

به ازای ورودی پله واحد، چون

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e(t) dt &= \lim_{s \rightarrow 0} E(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R(s)}{G(s) + 1} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{G(s) + 1} \frac{1}{s} \\ &= \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)} = \frac{1}{K_v} \end{aligned}$$

داریم

$$\begin{aligned} \frac{1}{K_v} &= \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)} \\ &= (T_1 + T_2 + \dots + T_n) - (T_a + T_b + \dots + T_m) \end{aligned}$$

توجه کنید که صفرهای نیم صفحه چپ (یعنی مقادیر مثبت  $T_a, T_b, \dots, T_m$ ) را بهتر می‌کنند. قطبهای نزدیک مبدأ ثابت خطای سرعت کوچکی ایجاد می‌کنند، مگر این که در نزدیکی شان صفر وجود داشته باشد.

## مسائل

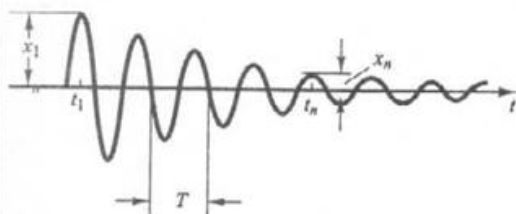
ب ۵-۵ پاسخ ضربه و پاسخ پله یک سیستم فیدبک واحد با تابع تبدیل حلقه باز زیر را بیابید.

$$G(s) = \frac{2s+1}{s^2}$$

ب ۵-۶ می‌دانیم که تابع تبدیل یک سیستم نوسانی به صورت زیر است

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

فرض کنید که نوسانات میرای این سیستم مطابق شکل ۵-۷۳ است. نسبت میرایی  $\zeta$  این سیستم را تعیین کنید.



شکل ۵-۷۳ نوسانات میرا.

ب ۵-۷ سیستم شکل ۵-۷۴ (الف) را در نظر بگیرید (الف) را در نظر بگیرید. نسبت میرایی این سیستم  $1/158$  و فرکانس طبیعی نامیرای آن  $3/16 \text{ rad/s}$  است. برای بهبود پایداری نسبی از فیدبک تاکومتری استفاده می‌کنیم. شکل ۵-۷۴ (ب) سیستم دارای فیدبک تاکومتری را نشان می‌دهد.

مقدار  $K_h$  را به نحوی تعیین کنید که نسبت میرایی سیستم  $0/5$  شود. منحنی‌های پاسخ پله سیستم اصلی و سیستم دارای فیدبک تاکومتری را رسم کنید. منحنی‌های خطا برحسب زمان هر دو سیستم را نیز رسم کنید.

ب ۵-۱ یک دقیقه طول می‌کشد تا پاسخ یک داماسنج به ورودی پله واحد به  $98\%$  مقدار نهایی‌اش برسد. فرض کنید این داماسنج یک سیستم مرتبه اول است، و ثابت زمانی آن را بیابید.

این داماسنج در تستی قرار می‌گیرد که دامایش با آهنگ ثابت  $10^\circ/\text{min}$  تغییر می‌کند. مقداری که داماسنج نشان می‌دهد چقدر خطا دارد؟

ب ۵-۲ پاسخ پله واحد یک سیستم کنترل با فیدبک واحد، با تابع تبدیل حلقه باز زیر را در نظر بگیرید

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

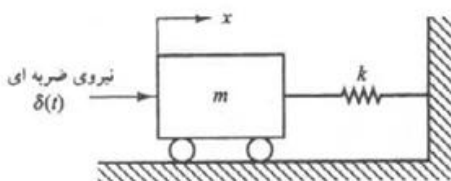
زمان صعود، زمان اوج، ماکزیمم فراجش، و زمان نشست را بیابید.

ب ۵-۳ سیستم حلقه بسته زیر را در نظر بگیرید

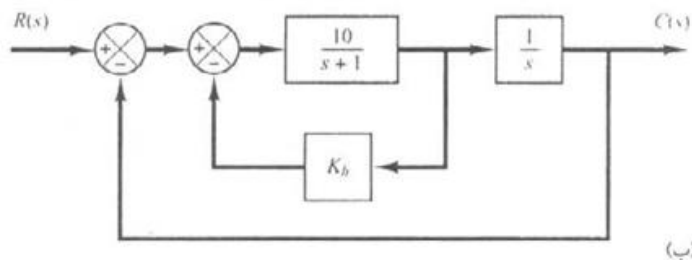
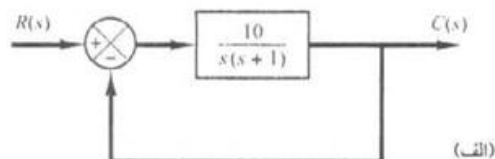
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

مقادیر  $\zeta$  و  $\omega_n$  را به نحوی تعیین کنید که سیستم به ورودی پله واحد با فراجش تقریبی  $5\%$  و زمان نشست  $2 \text{ sec}$  (معیار  $2\%$ ) پاسخ دهد.

ب ۵-۴ سیستم شکل ۵-۷۲ را در نظر بگیرید. سیستم ابتدائاً ساکن است. فرض کنید که ارایه با یک نیروی ضربه‌ای با اندازه یک به حرکت درمی‌آید. آیا می‌توان آن را با یک نیروی ضربه‌ای دیگر متوقف کرد؟



شکل ۵-۷۲ سیستم مکانیکی.



شکل ۷۴-۵

(الف) سیستم کنترل؛

(ب) سیستم کنترل با

فیدبک تاکومتری.

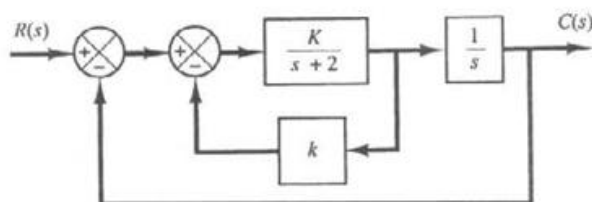
ب ۵-۱۰ با استفاده از MATLAB پاسخ پله، پاسخ شیب و پاسخ ضربه سیستم زیر را بیابید.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10}{s^2 + 2s + 10}$$

$R(s)$  و  $C(s)$  به ترتیب تبدیل لاپلاس ورودی و خروجی  $c(t)$  است.

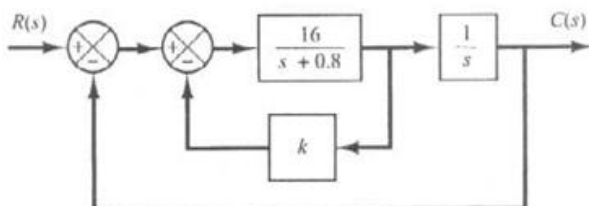
ب ۵-۸ برای سیستم شکل ۷۵-۵ مقادیر  $K$  و  $k$  را طوری تعیین کنید که نسبت میرایی  $\zeta = 0.7$ ، و فرکانس طبیعی میرا  $\omega_n = 4$  rad/sec باشد.

ب ۵-۹ سیستم شکل ۷۶-۵ را در نظر بگیرید. مقدار  $k$  را طوری تعیین کنید که نسبت میرایی  $\zeta = 0.5$  باشد. سپس زمان صعود  $t_r$ ، زمان اوج  $t_p$ ، ماکزیمم فراجهش  $M_p$  و زمان نشست  $t_s$  پاسخ پله را بیابید.



شکل ۷۵-۵

سیستم حلقه بسته.



شکل ۷۶-۵

نمودار بلوکی یک سیستم.

سیستم I یک سیستم سرووی کنترل موقعیت است. سیستم II یک سیستم سرووی کنترل موقعیت با کنترل کننده PD است. سیستم III یک سیستم سرووی کنترل موقعیت با فیدبک سرعت است. پاسخ پله، پاسخ ضربه، و پاسخ شیب سه سیستم را مقایسه کنید. کدام سیستم از لحاظ سرعت پاسخ و ماکزیمم فرآهش پاسخ پله از بقیه بهتر است؟

ب ۵-۱۴ سیستم کنترل موقعیت شکل ۵-۷۸ را در نظر بگیرید. یک برنامه MATLAB برای یافتن پاسخ پله و پاسخ شیب این سیستم بنویسید. منحنیهای  $x_1(t)$ ،  $x_2(t)$ ،  $x_3(t)$ ، و  $e(t)$ ، و سیگنال خطای  $[e(t) = r(t) - x_1(t)]$  برحسب  $t$  را به ازای ورودی پله واحد و ورودی شیب واحد رسم کنید.

ب ۵-۱۱ با استفاده از MATLAB پاسخ پله واحد، پاسخ شیب واحد و پاسخ ضربه واحد سیستم زیر را بیابید:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -0.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

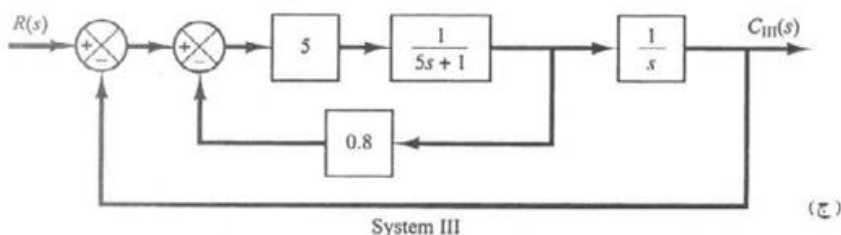
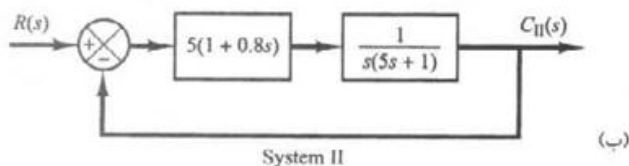
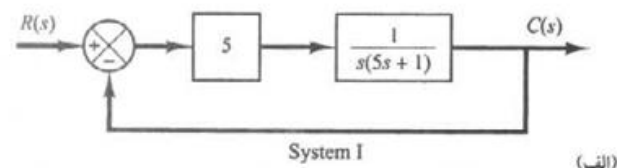
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

که در آن  $u$  ورودی و  $y$  خروجی است.

ب ۵-۱۲ زمان صعود، زمان اوج، ماکزیمم فرآهش، و زمان نشست پاسخ پله سیستم حلقه بسته زیر را هم به صورت تحلیلی و هم به صورت محاسباتی به دست آورید.

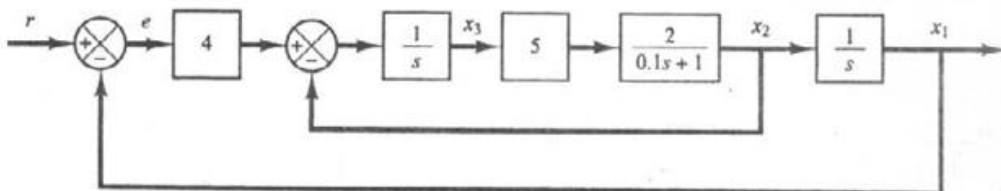
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{36}{s^2 + 2s + 36}$$

ب ۵-۱۳ شکل ۵-۷۷ سه سیستم را نشان می دهد.



شکل ۵-۷۷

- (الف) سیستم سرووی کنترل موقعیت؛  
 (ب) سیستم سرووی کنترل موقعیت با کنترل کننده PD؛  
 (ج) سیستم سرووی کنترل موقعیت با فیدبک سرعت.



شکل ۵-۷۸ سیستم کنترل موقعیت.

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

که در آن  $u$  ورودی و  $y$  خروجی است. پاسخ شیب را با استفاده از دستور `lsim` به دست آورید.

ب ۵-۱۹ سیستمی با معادله دیفرانسیل زیر توصیف شده است

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 0 \quad y(0) = 0.1 \quad \dot{y}(0) = 0.05$$

$y(t)$  را به ازای شرایط اولیه داده شده، با استفاده از MATLAB، به دست آورید.

ب ۵-۲۰ گستره  $K$  برای پایداری یک سیستم کنترل دارای فیدبک واحد و تابع تبدیل حلقه باز زیر را تعیین کنید.

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

ب ۵-۲۱ معادله مشخصه زیر را در نظر بگیرید

$$s^3 + 2s^2 + (4+K)s + 25 = 0$$

با استفاده از معیار روث گستره  $K$  برای پایداری بودن سیستم را تعیین کنید.

ب ۵-۲۲ سیستم حلقه بسته شکل ۵-۷۹ را در نظر بگیرید. گستره  $K$  برای پایداری بودن سیستم را تعیین کنید. فرض کنید که  $K > 0$ .

ب ۵-۲۳ سیستم کنترل وضعیت ماهواره شکل ۵-۸۰(الف) را در نظر بگیرید. خروجی این سیستم

ب ۵-۱۵ با استفاده از MATLAB پاسخ پله سیستمی با فیدبک واحد، و تابع تبدیل حلقه باز زیر را بیابید

$$G(s) = \frac{10}{s(s+2)(s+4)}$$

همچنین به کمک MATLAB زمان صعود، زمان اوج، ماکزیمم فراجش، و زمان نشست پاسخ پله را بیابید.

ب ۵-۱۶ سیستم حلقه بسته‌ای به صورت زیر تعریف شده است

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2\zeta s + 1}{s^2 + 2\zeta s + 1}$$

که در آن  $\zeta = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ . با استفاده از MATLAB نمودار دویعدی منحنی‌های پاسخ ضربه را بیابید. همچنین یک نمودار سه بعدی از منحنی‌های پاسخ ضربه رسم کنید.

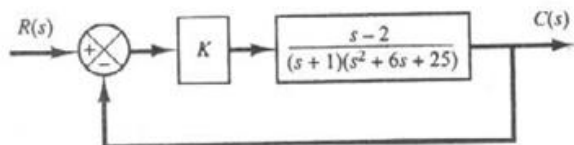
ب ۵-۱۷ سیستم حلقه بسته‌ای به صورت زیر تعریف شده است

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s+1}{s^2 + 2\zeta s + 1}$$

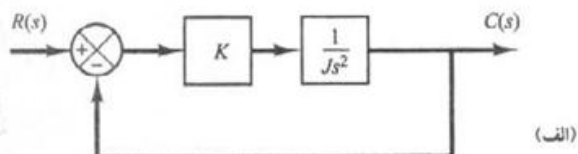
که در آن  $\zeta = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ . یک نمودار سه بعدی از منحنی‌های پاسخ پله واحد رسم کنید.

ب ۵-۱۸ پاسخ شیب واحد سیستم زیر را بیابید:

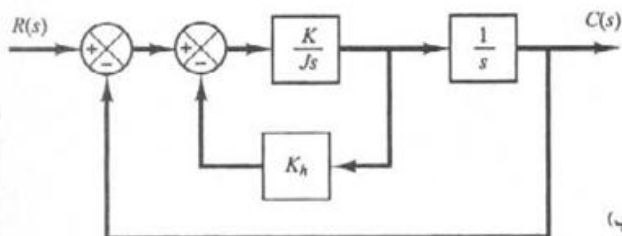
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$



شکل ۵-۷۹ سیستم حلقه بسته.



(الف)



(ب)

شکل ۵-۸۰

(الف) سیستم ناپایدار کنترل وضعیت  
ماهواره (ب) سیستم پایدار شده.

که در آن ماتریس  $A$  آن به صورت زیر است

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -b_2 & 0 & 1 \\ 0 & -b_1 & -b_0 \end{bmatrix}$$

( $A$  ماتریس شوارتز خوانده می شود). نشان دهید که

ستون اول آرایه روث معادله مشخصه  $|sI - A| = 0$

از  $1, b_1, b_2, b_0$  تشکیل شده است.

ب ۵-۲۶ یک سیستم کنترل با فیدبک واحد و تابع

تبدیل حلقه بسته زیر را در نظر بگیرید

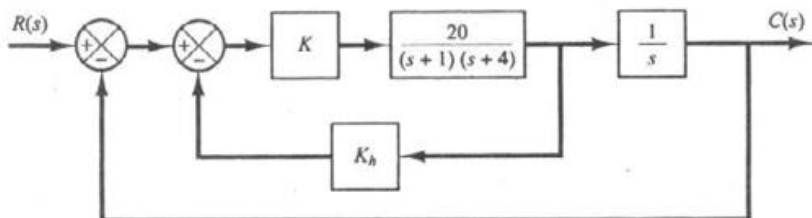
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{Ks + b}{s^2 + as + b}$$

نوسانات میرایی دارد که مطلوب نیست. این سیستم را می توان با استفاده از فیدبک تاکومتری به صورت نشان داده شده در شکل ۵-۸۰ (ب) پایدار کرد. داریم  $K/J = 4$ .  $K_h$  باید چه باشد تا نسبت میرایی ۰/۶ شود؟

ب ۵-۲۴ سیستم سرووی دارای فیدبک تاکومتری شکل ۵-۸۱ را در نظر بگیرید. گسترده های  $K$  و  $K_h$  برای پایدار بودن سیستم را تعیین کنید. (توجه کنید که  $K_h$  باید مثبت باشد).

ب ۵-۲۵ سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x} = Ax$$



شکل ۵-۸۱ سیستم سروو با فیدبک تاکومتری.

تابع تبدیل حلقه باز  $G(s)$  را بیابید.

نشان دهید که خطای حالت ماندگار پاسخ شیب عبارت است از

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{a-K}{b}$$

ب ۲۷-۵ سیستم کنترلی با فیدبک واحد تابع تبدیل حلقه باز زیر در نظر بگیرید

$$G(s) = \frac{K}{s(Js + B)}$$

در مورد اثر تغییر مقادیر  $K$  و  $B$  بر خطای حالت ماندگار پاسخ به ورودی شیب بحث کنید. منحنی‌های نوعی پاسخ شیب را به ازای مقادیر کوچک، متوسط، و بزرگ  $K$ ، با فرض ثابت بودن  $B$ ، رسم کنید.

ب ۲۸-۵ اگر در مسیر پیشخورد یک سیستم کنترل حداقل یک انتگرالگیر وجود داشته باشد، تا وقتی خطایی وجود دارد خروجی تغییر می‌کند. تغییر خروجی وقتی متوقف می‌شود که خطا دقیقاً صفر شود. در مواردی که اغتشاش خارجی به سیستم وارد می‌شود، وجود یک عنصر انتگرالگیر بین وسیله اندازه‌گیری خطا و نقطه ورودی اغتشاش امری مطلوب است، زیرا باعث می‌شود اثر اغتشاش خارجی در خطای حالت ماندگار صفر شود.

نشان دهید که اگر اغتشاش یک تابع شیبی باشد، حذف خطای حالت ماندگار ناشی از آن تنها در صورتی ممکن است که قبل از نقطه ورود اغتشاش دو انتگرالگیر وجود داشته باشد.