

تحلیل سیستمهای کنترل در فضای حالت

۱-۹ مقدمه^۱

یک سیستم پیچیده مدرن می تواند چندین ورودی و چندین خروجی داشته باشد، و اندرکنش بین این ورودی ها و خروجی ها می تواند پیچیده باشد. برای تحلیل چنین سیستمی کاستن از پیچیدگی عبارتهای ریاضی و توسل به کامپیوتر برای انجام عملیات طولانی لازم برای تحلیل ضروری است. از این دیدگاه رهیافت فضای حالت برای تحلیل سیستم مناسب ترین رهیافت است.

گر چه اساس نظریه سستی را رابطه ورودی - خروجی، یا تابع تبدیل تشکیل می دهد، ولی نظریه کنترل نوین بر توصیف معادلات سیستم برحسب n معادله دیفرانسیل مرتبه اول بنا نهاده شده است. این معادلات را می توان به صورت یک معادله دیفرانسیل ماتریسی مرتبه اول درآورد. کاربرد نمادهای ماتریسی نمایش ریاضی معادلات سیستم را بسیار ساده می کند. افزایش تعداد معادلات حالت، تعداد ورودی ها و تعداد خروجی ها پیچیدگی معادلات را بیشتر نمی کند. در واقع سیستمهای پیچیده چند ورودی - چند خروجی را می توان به روشی تحلیل کرد که اندکی مشکلتر از روش تحلیل سیستمهای اسکالر با معادله دیفرانسیل مرتبه اول است. این فصل و فصل بعدی به تحلیل و طراحی سیستمهای کنترل در فضای حالت مربوط است. مطالب پایه ای

^۱ در این کتاب اگر ستاره برای یک ماتریس به صورت بالانویس به کار رود، مثل A^* معنی آن ترانزاده مزدوج ماتریس A است. ترانزاده مزدوج همان مزدوج مختلط ترانزاده یک ماتریس است. برای ماتریس حقیقی (ماتریسی با درایه های حقیقی) ترانزاده مزدوج A^* با ترانزاده A^T یکی است.

تحلیل فضای حالت، شامل نمایش سیستم در فضای حالت، کنترل پذیری، و مشاهده پذیری در این فصل معرفی می شوند. روشهای طراحی براساس فیدبک حالت در فصل ۱۰ مطرح خواهد شد.

نمای کلی فصل. در بخش ۹-۱ مطالب مقدماتی تحلیل فضای حالت سیستمهای کنترل معرفی می شود. بخش ۹-۲ به نمایش تابع تبدیل در فضای حالت اختصاص دارد. در این بخش شکلهای متعارف معادلات حالت معرفی می شود. بخش ۹-۳ به تبدیل مدل های سیستم (مثلاً تابع تبدیل به فضای حالت و برعکس) با MATLAB اختصاص دارد. در بخش ۹-۴ روش حل معادلات حالت مستقل از زمان معرفی می شود. بخش ۹-۵ چند نتیجه مفید در مورد تحلیل ماتریسی را دربر دارد که برای مطالعه تحلیل فضای حالت سیستمهای کنترل ضروری است. در بخش ۹-۶ کنترل پذیری سیستمهای کنترل و در بخش ۹-۷ مشاهده پذیری سیستمهای کنترل مورد بحث قرار می گیرد.

۹-۲ نمایش فضای حالت سیستمهای تابع تبدیل

برای یافتن فضای حالت سیستمهای تابع تبدیل روشهای متفاوتی وجود دارد. در فصل ۲ چند روش را معرفی کردیم. در این بخش نمایشهای فضای حالت به صورتهای متعارف کنترل پذیر، مشاهده پذیر، قطری، یا جردن معرفی می شود. (روشهای یافتن چنین نمایشهایی از توابع تبدیل طی مسائل الف ۹-۱ تا الف ۹-۴ مورد بحث قرار می گیرند.)

نمایش فضای حالت به شکلهای متعارف. سیستم تعریف شده به صورت زیر را در نظر بگیرید.

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_0 u + b_1 \dot{u} + \dots + b_{n-1} \ddot{u} + b_n \ddot{u} \quad (1-9)$$

که در آن u ورودی و y خروجی است. این معادله را می توان به صورت زیر هم نوشت

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (2-9)$$

در ادامه نمایشهای فضای حالت سیستم تعریف شده با معادلات (۱-۹) یا (۲-۹) به شکل متعارف کنترل پذیر، شکل متعارف مشاهده پذیر، و شکل متعارف قطری (یا جردن) معرفی می شود.

شکل متعارف کنترل پذیر. نمایش فضای حالت زیر را شکل متعارف کنترل پذیر می نامند:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (3-9)$$

$$y = [b_n - a_n b_* \mid b_{n-1} - a_{n-1} b_* \mid \dots \mid b_1 - a_1 b_*] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_* u \quad (4-9)$$

شکل متعارف کنترل‌پذیر در مبحث طراحی سیستم کنترل با رهیافت جایدهی قطب اهمیت دارد.

شکل متعارف مشاهده‌پذیر. نمایش فضای حالت زیر شکل متعارف مشاهده‌پذیر نامیده می‌شود.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - b_* a_n \\ b_{n-1} - b_* a_{n-1} \\ \vdots \\ b_1 - b_* a_1 \end{bmatrix} u \quad (5-9)$$

$$y = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_* u \quad (6-9)$$

توجه کنید که ماتریس حالت $n \times n$ معادله حالت (۵-۹)، ترانزاده ماتریس حالت معادله حالت (۳-۹) است.

شکل متعارف قطری. تابع تبدیل تعریف شده در معادله (۲-۹) را در نظر بگیرید. در اینجا حالتی را در نظر می‌گیریم که چندجمله‌ای مخرج تنها ریشه‌های مجزا دارد. برای این حالت معادله (۲-۹) را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{b_* s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)} \\ &= b_* + \frac{c_1}{s + p_1} + \frac{c_2}{s + p_2} + \dots + \frac{c_n}{s + p_n} \end{aligned} \quad (7-9)$$

شکل متعارف قطری نمایش فضای حالت این سیستم به صورت زیر است

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & & & 0 \\ & -p_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (8-9)$$

$$y = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_u u \quad (9-9)$$

شکل متعارف جردن. حال موردی را که چند جمله‌ای مخرج معادله (۹-۲) ریشه چندگانه دارد در نظر می‌گیریم در این مورد شکل متعارف قطری باید به شکل متعارف جردن اصلاح شود. برای مثال فرض کنید تمام p_i ها بجز سه p_i اولی متفاوت‌اند، یا $p_1 = p_2 = p_3$. پس شکل تجزیه شده $Y(s)/U(s)$ عبارت است از

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{(s + p_1)^r (s + p_2)(s + p_3) \dots (s + p_n)}$$

بسط به کسرهایی جزئی این معادله به صورت زیرست

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = b_0 + \frac{c_1}{(s + p_1)^r} + \frac{c_2}{(s + p_1)^r} + \frac{c_3}{s + p_1} + \frac{c_4}{s + p_2} + \dots + \frac{c_n}{s + p_n}$$

یک نمایش فضای حالت این سیستم شکل متعارف جردن است که به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -p_1 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & -p_1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & & -p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (10-9)$$

$$y = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_u u \quad (11-9)$$

سیستم بیان شده به صورت زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$$

مثال ۹-۱

نمایش فضای حالت این سیستم را به شکلهای متعارف کنترل‌پذیر، مشاهده‌پذیر، و قطری بنویسید.

شکل متعارف کنترل‌پذیر:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

شکل متعارف مشاهده‌پذیر:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

شکل متعارف قطری:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه ماتریس $n \times n$. مقادیر ویژه ماتریس A (ماتریس $n \times n$) ریشه‌های معادله مشخصه زیرند

$$|\lambda I - A| = 0$$

مقادیر ویژه را ریشه‌های مشخصه نیز می‌نامند.

برای مثال ماتریس A زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$$

معادله مشخصه عبارت است از

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 6 & 11 & \lambda + 6 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0$$

مقادیر ویژه A ریشه‌های معادله مشخصه، یا -1 ، -2 ، و -3 هستند.قطری کردن ماتریس $n \times n$. اگر یک ماتریس $n \times n$ با مقادیر ویژه مجزا به صورت زیر بیان شود

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \quad (9-12)$$

تبدیل $x = Pz$ که در آن

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_n$ مقدار ویژه مجزای A هستند

$P^{-1}AP$ را به یک ماتریس قطری تبدیل می‌کند

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

اگر ماتریس A معادله (۹-۱۲) مقادیر ویژه چندگانه داشته باشد، قطری کردن ممکن نیست. برای مثال

ماتریس 3×3 زیر

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$$

با مقادیر ویژه $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ، تبدیل $x = Sz$ با

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \lambda_1 & 1 & \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & \lambda_2^2 \end{bmatrix}$$

به دست می‌دهد

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

این شکل متعارف جردن است.

مثال ۲-۹

نمایش فضای حالت یک سیستم به صورت زیر است

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} u \quad (13-9)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (14-9)$$

معادلات (۱۳-۹) و (۱۴-۹) را می‌توان به شکل استاندارد زیر نوشت

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (15-9)$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (16-9)$$

که در آن

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه ماتریس $\mathbf{A}$ عبارت است از

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = -3$$

پس سه مقدار ویژه متفاوت‌اند. متغیرهای حالت جدید z_1 ، z_2 ، و z_3 را با تبدیل زیر تعریف می‌کنیم

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

یا

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{z} \quad (17-9)$$

که در آن

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \quad (18-9)$$

با گذاشتن معادله (۱۷-۹) در معادله (۱۵-۹) به دست می‌آوریم

$$\mathbf{P}\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{z} + \mathbf{B}u$$

با ضرب دو معادله بالا در $\mathbf{P}^{-1}$ از طرف چپ، به دست می‌آوریم

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{z} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}u \quad (19-9)$$

یا

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2/5 & 0/5 \\ -3 & -4 & -1 \\ 1 & 1/5 & 0/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2/5 & 0/5 \\ -3 & -4 & -1 \\ 1 & 1/5 & 0/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} u$$

با ساده کردن معادلات به دست می‌آوریم

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} u \quad (20-9)$$

معادله (۲۰-۹) نیز معادله حالتی است که همان معادلات (۱۳-۹) را تعریف می‌کند.

معادله خروجی، معادله (۱۶-۹) نیز به صورت زیر درمی‌آید

$$y = CPz$$

یا

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \quad (21-9)$$

توجه کنید که ماتریس تبدیل P تعریف شده در معادله (۱۸-۹) ماتریس ضرائب z را به ماتریس قطری تبدیل می‌کند. معادله (۲۰-۹) به وضوح نشان می‌دهد که سه معادله اسکالر از هم مجزا هستند. همچنین توجه کنید که عناصر قطر $P^{-1}AP$ معادله (۱۹-۹) همان مقادیر ویژه ماتریس A هستند. توجه به این نکته که مقادیر ویژه A و مقادیر ویژه $P^{-1}AP$ مشابه‌اند، بسیار مهم است. در ادامه این خاصیت را در حالت کلی اثبات می‌کنیم.

ناوردایی مقادیر ویژه. برای اثبات ناوردایی مقادیر ویژه تحت یک تبدیل خطی، باید نشان دهیم که چندجمله‌ای‌های مشخصه $|\lambda I - A|$ و $|\lambda I - P^{-1}AP|$ مشابه‌اند.

چون دترمینان یک حاصلضرب با حاصلضرب دترمینان‌ها برابر است، داریم

$$\begin{aligned} |\lambda I - P^{-1}AP| &= |\lambda P^{-1}P - P^{-1}AP| \\ &= |P^{-1}(\lambda I - A)P| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\lambda I - P^{-1}AP| &= |P^{-1}||\lambda I - A||P| \\ &= |P^{-1}||P||\lambda I - A| \end{aligned}$$

چون حاصلضرب دترمینانهای $|P|$ و $|P^{-1}|$ با دترمینان حاصلضرب $|P^{-1}P|$ برابر است، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} |\lambda I - P^{-1}AP| &= |P^{-1}P||\lambda I - A| \\ &= |\lambda I - A| \end{aligned}$$

پس ثابت کردیم که مقادیر ویژه A تحت یک تبدیل خطی ناورد هستند.

یکتا نبودن مجموعه متغیرهای حالت. گفتیم که مجموعه متغیرهای حالت برای یک سیستم یکتا نیست. فرض کنید $x_1, x_2, \dots, x_n$ یک مجموعه متغیر حالت هستند. هر مجموعه تابعی به صورت زیر می‌تواند یک مجموعه متغیر حالت باشد

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 &= X_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \hat{x}_2 &= X_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \hat{x}_n &= X_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

به شرطی که به ازای هر مجموعه مقادیر $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n$ مجموعه یکتایی از مقادیر $x_1, x_2, \dots, x_n$ وجود داشته باشد، و برعکس. پس اگر x بردار حالت باشد، $\hat{x}$ زیر هم یک بردار حالت است.

$$\hat{x} = Px$$

به شرط این که P ماتریسی غیرتکین باشد. مجموعه‌های متفاوت متغیر حالت همگی اطلاعات یکسانی از رفتار سیستم دربر دارند.

۳-۹ تبدیل مدل‌های سیستم به کمک MATLAB

در این بخش تبدیل مدل سیستم از تابع تبدیل به فضای حالت و برعکس را در نظر می‌گیریم. بحث را از بردن تابع تبدیل به فضای حالت شروع می‌کنیم.

تابع تبدیل حلقه بسته را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\text{چندجمله‌ای صورت بر حسب } s}{\text{چندجمله‌ای مخرج بر حسب } s} = \frac{\text{num}}{\text{den}}$$

پس از تعریف این تابع تبدیل، دستور زیر نمایش فضای حالت را به دست می‌دهد

$$[A, B, C, D] = \text{tf2ss}(\text{num}, \text{den})$$

توجه به این نکته مهم است که نمایش فضای حالت سیستم یکتا نیست. برای هر سیستمی تعداد زیادی (در

واقع بی‌نهایت) نمایش فضای حالت وجود دارد. دستور MATLAB یکی از این نمایشهای فضای حالت را به دست می‌دهد.

فرمولبندی فضای حالت سیستمهای تابع تبدیل. سیستم تابع زیر را در نظر بگیرید

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10s+10}{s^3+6s^2+5s+10} \quad (22-9)$$

برای این سیستم تعدد زیادی (باز هم بی‌نهایت) نمایش فضای حالت وجود دارد. یک نمایش فضای حالت ممکن به صورت زیر است

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ -50 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u$$

یک نمایش دیگر (از میان بی‌نهایت نمایش ممکن) به صورت زیر است

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -5 & -10 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (23-9)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u \quad (24-9)$$

MATLAB تابع تبدیل معادله (22-9) را به نمایش فضای حالت داده شده با معادلات (23-9) و (24-9) تبدیل می‌کند. برای این سیستم برنامه ۹-۱ ماتریسهای A ، B ، C ، و D را به دست می‌دهد.

تبدیل از فضای حالت به تابع تبدیل. برای یافتن تابع تبدیل از معادلات فضای حالت دستور زیر را به کار می‌بریم

$$[\text{num}, \text{den}] = \text{ss2tf}(A, B, C, D, iu)$$

برای سیستمهای با بیش از یک ورودی باید iu مشخص شود. مثلاً برای سیستمی با سه ورودی (u_1, u_2, u_3) ، iu باید یکی از سه عدد ۱، ۲، یا ۳ باشد، ۱ ورودی u_1 ، ۲ ورودی u_2 و ۳ ورودی u_3 را برمی‌گزیند.

اگر سیستم تنها یک ورودی داشته باشد، هر دو دستور زیر را می‌توان به کار برد

$$[\text{num}, \text{den}] = \text{ss2tf}(A, B, C, D)$$

$$[\text{num}, \text{den}] = \text{ss2tf}(A, B, C, D, 1)$$

(مثال ۳-۹) و برنامه MATLAB ۹-۲ را ببینید.

برای سیستمهای با چند ورودی و چند خروجی مثال ۹-۴ را ببینید.

MATLAB Program 9-1

```
num = [10 10];
den = [1 6 5 10];
[A,B,C,D] = tf2ss(num,den)

A =
    -6    -5   -10
     1     0     0
     0     1     0

B =
     1
     0
     0

C =
     0    10    10

D =
     0
```

مثال ۳-۹

تابع تبدیل سیستم تعریف شده با معادلات فضای حالت زیر را بیابید:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5/0.08 & -25/1.026 & -5/0.3247 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 25/0.4 \\ -12/0.05 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

برنامه ۳-۹ تابع تبدیل سیستم را به دست می‌دهد. تابع تبدیل به دست آمده عبارت است از

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{25/0.4s + 5/0.08}{s^3 + 5/0.3247s^2 + 25/1.026s + 5/0.08}$$

مثال ۴-۹

یک سیستم چند ورودی، چند خروجی را در نظر بگیرید. اگر سیستم بیش از یک خروجی داشته باشد، دستور

$$[\text{num}, \text{den}] = \text{ss2tf}(A, B, C, D, \text{iu})$$

تابع تبدیل از ورودی خواسته شده به تمام خروجی‌ها را به دست می‌دهد. (ضرائب صورت به شکل ماتریسی داده می‌شوند که تعداد سطرهای آن با تعداد خروجی‌ها برابر است.)

MATLAB Program 9-2

```
A = [0 1 0; 0 0 1; -5.008 -25.1026 -5.03247];
```

```
B = [0; 25.04; -121.005];
```

```
C = [1 0 0];
```

```
D = [0];
```

```
[num,den] = ss2tf(A,B,C,D)
```

```
num =
```

```
0 -0.0000 25.0400 5.0080
```

```
den =
```

```
1.0000 5.0325 25.1026 5.0080
```

```
% ***** The same result can be obtained by entering the following command *****
```

```
[num,den] = ss2tf(A,B,C,D,1)
```

```
num =
```

```
0 -0.0000 25.0400 5.0080
```

```
den =
```

```
1.0000 5.0325 25.1026 5.0080
```

سیستم تعریف شده به صورت زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

این سیستم دو ورودی و دو خروجی دارد. چهار تابع تبدیل عبارت‌اند از $Y_1(s)/U_1(s)$ ، $Y_1(s)/U_2(s)$ ، $Y_2(s)/U_1(s)$ ، $Y_2(s)/U_2(s)$. هنگام در نظر گرفتن ورودی u_1 ، ورودی u_2 صفر فرض می‌شود (و برعکس). خروجی برنامه ۹-۳ را ببینید.

این خروجی معادل چهار تابع تبدیل زیر است

$$\frac{Y_1(s)}{U_1(s)} = \frac{s+4}{s^2+4s+25}$$

$$\frac{Y_1(s)}{U_2(s)} = \frac{s+5}{s^2+4s+25}$$

$$\frac{Y_2(s)}{U_1(s)} = \frac{-25}{s^2+4s+25}$$

$$\frac{Y_2(s)}{U_2(s)} = \frac{s-25}{s^2+4s+25}$$

MATLAB Program 9-3

```
A = [0 1;-25 -4];
B = [1 1;0 1];
C = [1 0;0 1];
D = [0 0;0 0];
[NUM,den] = ss2tf(A,B,C,D,1)
```

```
NUM =
```

```
0 1 4
0 0 -25
```

```
den =
```

```
1 4 25
```

```
[NUM,den] = ss2tf(A,B,C,D,2)
```

```
NUM =
```

```
0 1.0000 5.0000
0 1.0000 -25.0000
```

```
den =
```

```
1 4 25
```

۴-۹ حل معادلات حالت مستقل از زمان

در این بخش حل کلی معادلات حالت خطی مستقل از زمان را به دست می‌آوریم. ابتدا حالت همگن و سپس حالت ناهمگن را در نظر می‌گیریم.

حل معادلات حالت همگن. قبل از پرداخت به حل معادلات دیفرانسیل ماتریسی، روش حل معادله

دیفرانسیل اسکالر زیر را مرور می‌کنیم

$$\dot{x} = ax \quad (25-9)$$

برای حل این معادله جوابی به صورت زیر فرض می‌کنیم

$$x(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_k t^k + \dots \quad (26-9)$$

با گذاشتن جواب فرضی در معادله (۲۵-۹) به دست می‌آوریم

$$b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^2 + \dots + k b_k t^{k-1} + \dots = a(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_k t^k + \dots) \quad (27-9)$$

اگر جواب فرض شده بخواهد جواب درست باشد، معادله (۲۷-۹) باید به ازای تمام مقادیر t برآورده شود. پس

با برابر قرار دادن ضرایب جملات هم توان به دست می‌آوریم

$$b_1 = a b_0$$

$$b_2 = \frac{1}{2} a b_1 = \frac{1}{2} a^2 b_0$$

$$b_3 = \frac{1}{3} a b_2 = \frac{1}{3 \times 2} a^3 b_0$$

$\vdots$

$$b_k = \frac{1}{k!} a^k b_0$$

مقدار b_0 با گذاشتن $t=0$ در معادله (۹-۲۶) به دست می‌آید

$$x(0) = b_0$$

پس حل $x(t)$ را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$x(t) = \left(1 + at + \frac{1}{2!} a^2 t^2 + \dots + \frac{1}{k!} a^k t^k + \dots \right) x(0) \\ = e^{at} x(0)$$

اکنون معادله دیفرانسیل ماتریسی زیر را حل می‌کنیم

$$\dot{x} = Ax \quad (9-28)$$

که در آن $x = n \times 1$ بردار

$$A = n \times n \text{ ماتریس}$$

به قیاس حالت اسکالر حلی به صورت سری توانی برداری برحسب t فرض می‌کنیم

$$x(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_k t^k + \dots \quad (9-29)$$

با گذاشتن جواب فرضی در معادله (۹-۲۸) به دست می‌آوریم

$$b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^2 + \dots + k b_k t^{k-1} + \dots \\ = A(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_k t^k + \dots) \quad (9-30)$$

اگر حل فرضی بخواهد حل درستی باشد، معادله (۹-۳۰) باید به ازای تمام مقادیر t برقرار باشد. پس با برابر قرار دادن ضرایب جملات هم توان معادله (۹-۳۰) به دست می‌آوریم

$$b_1 = A b_0$$

$$b_2 = \frac{1}{2} A b_1 = \frac{1}{2} A^2 b_0$$

$$b_3 = \frac{1}{3} A b_2 = \frac{1}{3 \times 2} A^3 b_0$$

$\vdots$

$$b_k = \frac{1}{k!} A^k b_0$$

و با گذاشتن $t=0$ در معادله (۹-۲۹) به دست می‌آوریم

$$x(0) = b_0$$

پس حل $x(t)$ را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$x(t) = \left(I + A t + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \dots + \frac{1}{k!} A^k t^k + \dots \right) x(0)$$

عبارت داخل پرانتز یک ماتریس $n \times n$ است. به خاطر تشابهی که این سری توانی نامحدود با سری توانی تابع نمایی اسکالر دارد، این را نیز تابع نمایی ماتریسی می‌نامیم و می‌نویسیم

$$I + A t + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \dots + \frac{1}{k!} A^k t^k + \dots = e^{At}$$

جواب معادله (۹-۲۸) را با استفاده از تابع نمایی ماتریسی می‌توان به شکل زیر نوشت

$$x(t) = e^{At} x(0) \quad (9-31)$$

چون تابع نمایی ماتریسی در تحلیل فضای حالت سیستمهای خطی بسیار مهم است، به بررسی خواص آن می‌پردازیم.

تابع نمایی ماتریسی. می‌توان ثابت کرد که تابع نمایی ماتریس مربعی A

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

به ازای تمام مقادیر محدود t مطلقاً همگراست. (بنابراین به سادگی می‌توان با کامپیوتر درایه‌های ماتریس e^{At} را با استفاده از بسط سری به دست آورد.)

به خاطر همگرایی سری بینهایت $\sum_{k=0}^{\infty} A^k t^k / k!$ می‌توان از آن جمله به جمله مشتق گرفت و به دست

آورد

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{At} &= A + A^2 t + \frac{A^3 t^2}{2!} + \dots + \frac{A^k t^{k-1}}{(k-1)!} + \dots \\ &= A \left[I + A t + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{A^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!} + \dots \right] = A e^{At} \\ &= \left[I + A t + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{A^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!} + \dots \right] A = e^{At} A \end{aligned}$$

تابع نمایی ماتریسی دارای خاصیت زیر است

$$e^{A(t+s)} = e^{At} e^{As}$$

این خاصیت را می‌توان به صورت زیر ثابت کرد

$$\begin{aligned} e^{At} e^{As} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{A^l s^l}{l!} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} A^k \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l s^{k-l}}{l!(k-l)!} \right) \end{aligned}$$

$$e^{At} e^{As} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{(t+s)^k}{k!} \\ = e^{A(t+s)}$$

در حالت خاص $s = -t$

$$e^{At} e^{-At} = e^{-At} e^{At} = e^{A(t-t)} = I$$

پس وارون e^{At} برابر e^{-At} است. چون وارون همیشه وجود دارد، e^{At} ماتریسی غیرتکین است. به خاطر سپردن این نکات مهم است که

$$e^{(A+B)t} = e^{At} e^{Bt} \quad AB=BA \text{ به ازای}$$

$$e^{(A+B)t} \neq e^{At} e^{Bt} \quad AB \neq BA \text{ به ازای}$$

برای اثبات این مطلب توجه کنید که

$$e^{(A+B)t} = I + (A+B)t + \frac{(A+B)^2}{2!} t^2 + \frac{(A+B)^3}{3!} t^3 + \dots \\ e^{At} e^{Bt} = \left(I + At + \frac{A^2}{2!} t^2 + \frac{A^3}{3!} t^3 + \dots \right) \left(I + Bt + \frac{B^2}{2!} t^2 + \frac{B^3}{3!} t^3 + \dots \right) \\ = I + (A+B)t + \frac{A^2}{2!} t^2 + ABt^2 + \frac{B^2}{2!} t^2 + \frac{A^3}{3!} t^3 + \frac{A^2 B}{2!} t^3 + \frac{AB^2}{2!} t^3 + \frac{B^3}{3!} t^3 + \dots$$

پس

$$e^{(A+B)t} - e^{At} e^{Bt} = \frac{BA - AB}{2!} t^2 + \frac{BA^2 + ABA + B^2 A + BAB - 2A^2 B - 2AB^2}{3!} t^3 + \dots$$

به ازای $AB=BA$ ، تفاضل $e^{At} e^{Bt}$ و $e^{(A+B)t}$ صفر می‌شود.

کاربرد تبدیل لاپلاس در حل معادلات حالت همگن. ابتدا حالت اسکالر را در نظر می‌گیریم

$$\dot{x} = ax \quad (۹-۳۲)$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس (۹-۳۲) به دست می‌آوریم

$$sX(s) - x(0) = aX(s) \quad (۹-۳۳)$$

که در آن $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ با حل معادله (۹-۳۳) به دست می‌آوریم

$$X(s) = \frac{x(0)}{s-a} = (s-a)^{-1} x(0)$$

عکس تبدیل لاپلاس معادله اخیر جواب زیر را به دست می‌دهد

$$x(t) = e^{at} x(0)$$

روش بالا برای حل معادله دیفرانسیل همگن اسکالر را می‌توان برای حل معادله حالت همگن زیر تعمیم

داد:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad (34-9)$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس از دو طرف معادله (۳۴-۹) به دست می‌آوریم

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s)$$

که در آن $\mathbf{X}(s) = \mathcal{L}[\mathbf{x}]$. پس

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}(0)$$

با ضرب دو معادله بالا در $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ از سمت چپ، به دست می‌آوریم

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}(0)$$

عکس تبدیل لاپلاس $\mathbf{X}(s)$ جواب $\mathbf{x}(t)$ را به دست می‌دهد. پس

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] \mathbf{x}(0) \quad (35-9)$$

توجه کنید که

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\mathbf{I}}{s} + \frac{\mathbf{A}}{s^2} + \frac{\mathbf{A}^2}{s^3} + \dots$$

پس عکس تبدیل لاپلاس $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ عبارت است از

$$\mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3 t^3}{3!} + \dots = e^{\mathbf{A}t} \quad (36-9)$$

(عکس تبدیل لاپلاس یک ماتریس، ماتریسی است که عکس تبدیل لاپلاس تمام درایه‌های ماتریس اصلی را دربر دارد.) از معادلات (۳۵-۹) و (۳۶-۹) جواب زیر را به دست می‌آوریم

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0)$$

اهمیت معادله (۳۶-۹) در این حقیقت نهفته است که راه مناسبی برای یافتن جواب بسته‌نمایی ماتریسی (یعنی به صورتی غیر از سری بی‌نهایت) پیش پایمان می‌گذارد.

ماتریس گذر حالت. حل معادله حالت همگن زیر

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (37-9)$$

را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t) \mathbf{x}(0) \quad (38-9)$$

که در آن $\Phi(t)$ یک ماتریس $n \times n$ و جواب یکنای معادله زیر است

$$\dot{\Phi}(t) = \mathbf{A}\Phi(t) \quad , \quad \Phi(0) = \mathbf{I}$$

برای اثبات این مطلب توجه کنید که

$$\mathbf{x}(0) = \Phi(0)\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(0)$$

و

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\Phi}(t)\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\Phi(t)\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$$

بنابراین معادله (۹-۳۸) واقعاً جواب معادله (۹-۳۷) است.

با توجه به معادلات (۹-۳۱)، (۹-۳۵) و (۹-۳۸) به دست می‌آوریم

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]$$

توجه کنید که

$$\Phi^{-1}(t) = e^{-\mathbf{A}t} = \Phi(-t)$$

معادله (۹-۳۸) نشان می‌دهد که جواب معادله (۹-۳۷) چیزی جز تبدیل شرایط اولیه نیست. به همین دلیل ماتریس یکتای $\Phi(t)$ ماتریس گذر حالت نامیده می‌شود. ماتریس گذر حالت تمام اطلاعات مربوط به حرکت آزاد سیستم تعریف شده با معادله (۹-۳۷) را در بر دارد.

اگر مقادیر ویژه $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ماتریس $\mathbf{A}$ مجزا باشند، $\Phi(t)$ از n تابع نمایی تشکیل می‌شود

$$e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$$

در حالت خاصی که ماتریس $\mathbf{A}$ قطری است

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad (\mathbf{A} \text{ قطری})$$

اگر بعضی مقادیر ویژه $\mathbf{A}$ چندگانه باشند، مثلاً به صورت زیر

$$\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

$\Phi(t)$ علاوه بر نمایی‌های $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots$ و $e^{\lambda_n t}$ جملاتی مانند $t e^{\lambda_1 t}$ و $t^2 e^{\lambda_1 t}$ نیز دارد.

خواص ماتریس گذر حالت، اکنون خواص مهم ماتریس گذر حالت $\Phi(t)$ را برمی‌شماریم. برای سیستم مستقل از زمان

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

که برای آن

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t}$$

خواص زیر برقرار است:

$$\Phi(0) = e^{\mathbf{A} \cdot 0} = \mathbf{I} \quad ۱.$$

$$\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t) \quad \text{یا} \quad \Phi(t) = e^{At} = (e^{-At})^{-1} = [\Phi(-t)]^{-1} \quad ۲.$$

$$\Phi(t_1 + t_2) = e^{A(t_1 + t_2)} = e^{At_1} e^{At_2} = \Phi(t_1) \Phi(t_2) = \Phi(t_2) \Phi(t_1) \quad ۳.$$

$$[\Phi(t)]^n = \Phi(nt) \quad ۴.$$

$$\Phi(t_2 - t_1) \Phi(t_1 - t_0) = \Phi(t_2 - t_0) = \Phi(t_1 - t_0) \Phi(t_2 - t_1) \quad ۵.$$

مثال ۹-۵

ماتریس گذر حالت $\Phi(t)$ سیستم زیر را بیابید.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

وارون ماتریس گذر حالت $\Phi^{-1}(t)$ را نیز بیابید.

برای این سیستم

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

ماتریس گذر حالت $\Phi(t)$ عبارت است از

$$\Phi(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]$$

داریم

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}$$

وارون $(sI - A)$ عبارت است از

$$\begin{aligned} (sI - A)^{-1} &= \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

پس

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}] \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

چون $\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$ وارون ماتریس گذر حالت را به صورت زیر می‌یابیم:

$$\Phi^{-1}(t) = e^{-At} = \begin{bmatrix} 2e^t - e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ -2e^t + 2e^{2t} & -e^t + 2e^{2t} \end{bmatrix}$$

حل معادلات حالت ناهمگن. ابتدا حالت اسکالر را در نظر می‌گیریم

$$\dot{x} = ax + bu \quad (۳۹-۹)$$

معادله (۳۹-۹) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\dot{x} - ax = bu$$

با ضرب دو طرف معادله در e^{-at} به دست می‌آوریم

$$e^{-at} [\dot{x}(t) - ax(t)] = \frac{d}{dt} [e^{-at} x(t)] = e^{-at} bu(t)$$

از این معادله از $t=0$ تا t انتگرال می‌گیریم

$$e^{-at} x(t) - x(0) = \int_0^t e^{-a\tau} bu(\tau) d\tau$$

یا

$$x(t) = e^{at} x(0) + e^{at} \int_0^t e^{-a\tau} bu(\tau) d\tau$$

جمله اول طرف راست پاسخ به شرایط اولیه و جمله دوم پاسخ به ورودی $u(t)$ است.

اکنون معادله حالت ناهمگن زیر را در نظر می‌گیریم

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (۴۰-۹)$$

که در آن $\mathbf{x}$ بردار $n \times 1$

$\mathbf{A}$ = ماتریس ثابت $n \times n$

$\mathbf{u}$ بردار $r \times 1$

$\mathbf{B}$ = ماتریس ثابت $n \times r$

معادله (۴۰-۹) را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t) = \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

دو طرف این معادله را از سمت چپ در $e^{-\mathbf{A}t}$ ضرب می‌کنیم

$$e^{-\mathbf{A}t} [\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t)] = \frac{d}{dt} [e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{x}(t)] = e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

از معادله حاصل از $t=0$ تا t انتگرال می‌گیریم

$$e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(0) = \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau$$

یا

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (۴۱-۹)$$

معادله (۴۱-۹) را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau) \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (42-9)$$

که در آن $\Phi(t) = e^{At}$. معادله (۴۲-۹) یا (۴۱-۹) حل معادله (۴۰-۹) است. روشن است که این حل جمع جمله گذرای حالت اولیه و جمله‌ای ناشی از بردار ورودی است.

روش تبدیل لاپلاس برای حل معادلات ناهمگن. حل معادله حالت ناهمگن زیر

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}$$

را می‌توان با استفاده از تبدیل لاپلاس به دست آورد. با گرفتن تبدیل لاپلاس از این معادله به دست می‌آوریم

$$s \mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A} \mathbf{X}(s) + \mathbf{B} \mathbf{U}(s)$$

یا

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

با ضرب دو جمله معادله بالا در $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ از سمت چپ، به دست می‌آوریم

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \mathbf{U}(s)$$

استفاده از رابطه معادله (۳۶-۹) به دست می‌دهد

$$\mathbf{X}(s) = \mathcal{L}[e^{At}] \mathbf{x}(0) + \mathcal{L}[e^{At}] \mathbf{B} \mathbf{U}(s)$$

عکس تبدیل لاپلاس معادله اخیر را می‌توان با استفاده از انتگرال کانولوشن، به شکل زیر یافت

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

حل برحسب $\mathbf{x}(t_*)$. تا اینجا فرض کرده بودیم که جواب از $t=0$ شروع می‌شود. ولی اگر زمان ابتدا t_* باشد نه 0 ، حل معادله (۴۰-۹) به صورت زیر درمی‌آید

$$\mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_*)} \mathbf{x}(t_*) + \int_{t_*}^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (43-9)$$

پاسخ زمانی سیستم زیر را بیابید

مثال ۶-۹

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

که در آن $u(t)$ تابع پله واحدی است که در $t=0$ شروع می‌شود، یا

$$u(t) = 1(t)$$

برای این سیستم

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس گذر حالت $\Phi(t) = e^{At}$ را در مثال ۹-۵ به شکل زیر یافتیم

$$\Phi(t) = e^{At} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

پاسخ به ورودی پله واحد به صورت زیر به دست می‌آید

$$x(t) = e^{At} x(0)$$

$$+ \int_0^t \begin{bmatrix} 2e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ -2e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} & -e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau$$

یا

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

اگر حالت اولیه صفر باشد، یعنی $x(0) = 0$ ، $x(t)$ به شکل زیر ساده می‌شود

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

۹-۵ نتایجی از تحلیل ماتریسی

در این بخش چند نتیجه مفید از تحلیل ماتریسی را که در بخش ۹-۶ کاربرد دارد، معرفی می‌کنیم. این نتایج عبارت‌اند از قضیه کیلی - هامیلتون، چندجمله‌ای کهنه، روش درونیایی سیلوستر برای محاسبه e^{At} ، و بستگی خطی بردارها.

قضیه کیلی - هامیلتون. قضیه کیلی - هامیلتون در اثبات قضایای مربوط به معادلات ماتریسی یا حل مسائل شامل معادلات ماتریسی به کار می‌رود.

ماتریس A ($n \times n$) و معادله مشخصه آن را در نظر بگیرید:

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

قضیه کیلی - هامیلتون می‌گوید ماتریس A این معادله مشخصه را ارضا می‌کند، یعنی

$$A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_{n-1} A + a_n I = 0 \quad (9-24)$$

برای اثبات این قضیه توجه کنید که $\text{adj}(\lambda I - A)$ یک چندجمله‌ای درجه $n-1$ از λ است. یعنی

$$\text{adj}(\lambda I - A) = B_1 \lambda^{n-1} + B_2 \lambda^{n-2} + \dots + B_{n-1} \lambda + B_n$$

که در آن $B_1 = I$. چون

$$(\lambda I - A) \operatorname{adj}(\lambda I - A) = [\operatorname{adj}(\lambda I - A)](\lambda I - A) = |\lambda I - A| I$$

به دست می آوریم

$$\begin{aligned} |\lambda I - A| I &= I \lambda^n + a_1 I \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} I \lambda + a_n I \\ &= (\lambda I - A) (B_1 \lambda^{n-1} + B_2 \lambda^{n-2} + \dots + B_{n-1} \lambda + B_n) \\ &= (B_1 \lambda^{n-1} + B_2 \lambda^{n-2} + \dots + B_{n-1} \lambda + B_n) (\lambda I - A) \end{aligned}$$

این معادله نشان می دهد A و B_i ($i=0, 1, 2, \dots, n$) جابه جا پذیرند. پس اگر $(\lambda I - A)$ یا $\operatorname{adj}(\lambda I - A)$ صفر باشد، حاصلضربشان هم صفر است. اگر در معادله اخیر به جای λ قرار دهیم A ، مسلماً $(\lambda I - A)$ صفر می شود. پس داریم

$$A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_{n-1} A + a_n I = 0$$

و قضیه کیلی - هامیلتون معادله (۴۴-۹) اثبات می شود.

چندجمله ای کهنه. قضیه کیلی - هامیلتون می گوید هر ماتریس مربعی A ($n \times n$) معادله مشخصه خود را ارضا می کند. ولی معادله مشخصه لزوماً کم درجه ترین معادله اسکالاری که A آن را ارضا می کند نیست. کم درجه ترین چندجمله ای که A ریشه آن است، چندجمله ای کهنه نامیده می شود. به عبارت دیگر چندجمله ای کهنه ماتریس A ($n \times n$) کم درجه ترین چندجمله ای $\phi(\lambda)$ است که برای آن $\phi(A) = 0$ ، یا

$$\phi(\lambda) = \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \dots + a_{m-1} \lambda + a_m, \quad m \leq n$$

به نحوی که

$$\phi(A) = A^m + a_1 A^{m-1} + \dots + a_{m-1} A + a_m I = 0$$

چندجمله ای کهنه نقش مهمی در محاسبه چندجمله ایهای یک ماتریس ($n \times n$) بازی می کند.

فرض کنید که $d(\lambda)$ یک چندجمله ای بر حسب λ ، بزرگترین مقسوم علیه مشترک تمام درایه های $\operatorname{adj}(\lambda I - A)$ است. می توان نشان داد که اگر ضریب بزرگترین توان λ در $d(\lambda)$ برابر ۱ باشد، چند جمله ای کهنه $\phi(\lambda)$ عبارت است از

$$\phi(\lambda) = \frac{|\lambda I - A|}{d(\lambda)} \quad (۴۵-۹)$$

[برای اثبات معادله (۴۵-۹) مسئله الف ۹-۸ را ببینید.]

چندجمله ای کهنه $\phi(\lambda)$ ماتریس A ($n \times n$) را می توان به روش زیر تعیین کرد:

۱. تمام درایه های ماتریس $\operatorname{adj}(\lambda I - A)$ را به صورت چندجمله ای های تجزیه شده بر حسب λ بنویسید.

۲. $d(\lambda)$ ، یعنی بزرگترین مقسوم علیه مشترک تمام درایه های $\operatorname{adj}(\lambda I - A)$ را تعیین کنید. با تقسیم بر یک عدد، ضریب بزرگترین توان λ در $d(\lambda)$ را برابر ۱ قرار دهید. اگر درایه ها مقسوم علیه مشترک

نداشته باشند، $d(\lambda) = 1$.

۳. چندجمله‌ای کهنه $\phi(\lambda)$ از تقسیم $|\lambda I - A|$ بر $d(\lambda)$ به دست می‌آید.

تابع نمایی ماتریسی e^{At} . در حل مسائل مهندسی کنترل غالباً محاسبه e^{At} لازم می‌شود. اگر ماتریس A را داشته باشیم، می‌توانیم به کمک MATLAB e^{At} را به ازای هر مقدار T حساب کنیم. علاوه بر روشهای عددی چند روش تحلیلی نیز برای محاسبه e^{At} وجود دارد. در اینجا سه روش را معرفی می‌کنیم.

محاسبه e^{At} : روش ۱. اگر بتوان ماتریس A را به یک ماتریس قطری تبدیل کرد، e^{At} را می‌توان به صورت زیر به دست آورد

$$e^{At} = P e^{Dt} P^{-1} = P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} P^{-1} \quad (۴۶-۹)$$

که در آن P ماتریس قطری کننده A است. [برای اثبات معادله (۴۶-۹) مسئله الف ۹-۱۱ را ببینید.]

اگر بتوان ماتریس A را به شکل متعارف جردن نوشت، e^{At} به صورت زیر به دست می‌آید

$$e^{At} = S e^{Jt} S^{-1}$$

که در آن S یک ماتریس تبدیل است که ماتریس A را به شکل متعارف جردن J در می‌آورد.

به عنوان مثال ماتریس A زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

معادله مشخصه عبارت است از

$$|\lambda I - A| = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3 = 0$$

پس ماتریس A یک مقدار ویژه مرتبه ۳ در $\lambda = 1$ دارد. می‌توان نشان داد که ماتریس A یک بردار ویژه مرتبه

۳ دارد. ماتریس تبدیلی که A را به شکل متعارف جردن تبدیل می‌کند عبارت است از

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

عکس ماتریس S عبارت است از

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

می‌توان دید که

$$\begin{aligned} S^{-1}AS &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = J \end{aligned}$$

چون

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^t & te^t & \frac{1}{2}t^2e^t \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$$

به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} e^{At} &= Se^{Jt}S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & te^t & \frac{1}{2}t^2e^t \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^t - te^t + \frac{1}{2}t^2e^t & te^t - t^2e^t & \frac{1}{2}t^2e^t \\ \frac{1}{2}t^2e^t & e^t - te^t - t^2e^t & te^t + \frac{1}{2}t^2e^t \\ te^t + \frac{1}{2}t^2e^t & -3te^t - t^2e^t & e^t + 2te^t + \frac{1}{2}t^2e^t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

محاسبه e^{At} : روش ۲. دومین روش محاسبه e^{At} استفاده از روش تبدیل لاپلاس است. با توجه به معادله (۹-۳۶)، e^{At} را می‌توان به صورت زیر یافت:

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]$$

پس برای یافتن e^{At} ابتدا عکس ماتریس $(sI - A)$ را می‌یابیم. به این ترتیب ماتریسی داریم که درایه‌های آن توابعی گویا از s است. سپس عکس تبدیل لاپلاس هر درایه را حساب می‌کنیم.

ماتریس A زیر را در نظر بگیرید

مثال ۷-۹

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

e^{At} را به دو روش تحلیلی بیان شده در بالا بیابید.

روش ۱. 0 و -2 مقادیر ویژه A هستند ($\lambda_1 = 0$ و $\lambda_2 = -2$). ماتریس تبدیل P را می‌توان به صورت زیر

یافت

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

پس e^{At} را از معادله (۹-۴۶) به صورت زیر می‌یابیم

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^s & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

روش ۲. چون

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}$$

داریم

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

پس

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1} \mathcal{L}^{-1} [(sI - A)^{-1}] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

محاسبه e^{At} : روش ۳. روش سوم براساس روش درونیایی سیلوستر است (برای اطلاع از فرمول درونیایی سیلوستر مسئله الف-۹-۱۲ را ببینید). ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که ریشه‌های چندجمله‌ای کهنه $\phi(\lambda)$ ماتریس A مجزا هستند. سپس حالت ریشه‌های چندگانه را در نظر می‌گیریم.

حالت ۱: چندجمله‌ای کهنه A تنها ریشه‌های مجزا دارد. درجه چندجمله‌ای کهنه A را m فرض می‌کنیم. با استفاده از فرمول درونیایی سیلوستر می‌توان نشان داد که e^{At} را می‌توان با حل معادله درمینیایی زیر یافت:

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{m-1} & e^{\lambda_1 t} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{m-1} & e^{\lambda_2 t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_m & \lambda_m^2 & \dots & \lambda_m^{m-1} & e^{\lambda_m t} \\ I & A & A^2 & \dots & A^{m-1} & e^{At} \end{bmatrix} = 0 \quad (۹-۴۷)$$

حل معادله (۹-۴۷)، e^{At} را برحسب A^k ($k=0, 1, 2, \dots, m-1$) و $e^{\lambda_i t}$ ($i=1, 2, 3, \dots, m$) به دست می‌دهد. [برای مثال می‌توان معادله (۹-۴۷) را حول ستون آخر بسط داد].
توجه کند که حل معادله (۹-۴۷) معادل آن است که بنویسیم

$$e^{At} = \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A + \alpha_2(t)A^2 + \dots + \alpha_{m-1}(t)A^{m-1} \quad (۹-۴۸)$$

و $\alpha_k(t)$ ($k=0,1,2,\dots,m-1$) را با حل m معادله زیر به دست آوریم:

$$\begin{aligned}\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_1 + \alpha_2(t)\lambda_1^2 + \dots + \alpha_{m-1}(t)\lambda_1^{m-1} &= e^{\lambda_1 t} \\ \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_2 + \alpha_2(t)\lambda_2^2 + \dots + \alpha_{m-1}(t)\lambda_2^{m-1} &= e^{\lambda_2 t} \\ &\vdots \\ \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_m + \alpha_2(t)\lambda_m^2 + \dots + \alpha_{m-1}(t)\lambda_m^{m-1} &= e^{\lambda_m t}\end{aligned}$$

اگر A یک ماتریس $n \times n$ یا مقادیر ویژه مجزا باشند، باید $m=n$ تابع $\alpha_k(t)$ را تعیین کنیم. اگر A مقادیر ویژه مکرر داشته باشد، ولی ریشه‌های چندجمله‌ای کهنه آن مجزا باشند، تعداد $\alpha_k(t)$ هایی که باید تعیین شود کمتر از n است.

حالت ۲: چندجمله‌ای کهنه A ریشه مکرر دارد. به عنوان مثال حالتی را در نظر بگیرید که چندجمله‌ای کهنه A سه ریشه برابر دارد ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$) و بقیه ریشه‌ها ($\lambda_4, \dots, \lambda_m$) متمایزند. با اعمال فرمول درونیایی سیلوستر می‌توان نشان داد که e^{At} از حل معادله دترمینانی زیر به دست می‌آید

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 3\lambda_1 & \dots & \frac{(m-1)(m-2)}{2}\lambda_1^{m-2} & \frac{t^2}{2}e^{\lambda_1 t} \\ 0 & 1 & 2\lambda_1 & 3\lambda_1^2 & \dots & (m-1)\lambda_1^{m-2} & te^{\lambda_1 t} \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 & \dots & \lambda_1^{m-1} & e^{\lambda_1 t} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \lambda_2^3 & \dots & \lambda_2^{m-1} & e^{\lambda_2 t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_m & \lambda_m^2 & \lambda_m^3 & \dots & \lambda_m^{m-1} & e^{\lambda_m t} \\ I & A & A^2 & A^3 & \dots & A^{m-1} & e^{At} \end{vmatrix} = 0 \quad (49-9)$$

معادله (۴۹-۹) را می‌توان با بسط حول ستون آخر حل کرد و e^{At} را به دست آورد. توجه کنید که همانند حالت ۱، حل معادله (۴۹-۹) معادل نوشتن عبارت زیر است

$$e^{At} = \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A + \alpha_2(t)A^2 + \dots + \alpha_{m-1}(t)A^{m-1} \quad (50-9)$$

و تعیین $\alpha_k(t)$ ($k=0,1,2,\dots,m-1$) از معادلات زیر است

$$\begin{aligned}\alpha_2(t) + 2\alpha_3(t)\lambda_1 + 3\alpha_4(t)\lambda_1^2 + \dots + \frac{(m-1)(m-2)}{2}\alpha_{m-1}(t)\lambda_1^{m-2} &= \frac{t^2}{2}e^{\lambda_1 t} \\ \alpha_1(t) + 2\alpha_2(t)\lambda_1 + 3\alpha_3(t)\lambda_1^2 + \dots + (m-1)\alpha_{m-1}(t)\lambda_1^{m-2} &= te^{\lambda_1 t} \\ \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_1 + \alpha_2(t)\lambda_1^2 + \dots + \alpha_{m-1}(t)\lambda_1^{m-1} &= e^{\lambda_1 t} \\ \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_2 + \alpha_2(t)\lambda_2^2 + \dots + \alpha_{m-1}(t)\lambda_2^{m-1} &= e^{\lambda_2 t} \\ &\vdots \\ \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_m + \alpha_2(t)\lambda_m^2 + \dots + \alpha_{m-1}(t)\lambda_m^{m-1} &= e^{\lambda_m t}\end{aligned}$$

چگونگی تعمیم به موارد دیگر، مثلاً وقتی مجموعه ریشه‌های مکرر بیش از یک است، واضح است. توجه کنید که اگر چندجمله‌ای کهنه λ به دست نیامده باشد، می‌توان به جای آن چندجمله‌ای مشخصه را به کار برد. البته مقدار محاسبات لازم زیادتر می‌شود.

مثال ۸-۹

ماتریس زیر را در نظر بگیرید

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

e^{At} را با استفاده از فرمول درونیابی سیلوستر حساب کنید.

طبق معادله (۴۷-۹) داریم

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & e^{\lambda_1 t} \\ 1 & \lambda_2 & e^{\lambda_2 t} \\ I & A & e^{At} \end{vmatrix} = 0$$

با گذاشتن ۰ و -۲ به جای λ_1 و λ_2 در این معادله به دست می‌آوریم

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & e^{-2t} \\ I & A & e^{At} \end{vmatrix} = 0$$

بسط دترمینان عبارت است از

$$-2e^{At} + A + 2I - Ae^{-2t} = 0$$

یا

$$\begin{aligned} e^{At} &= \frac{1}{2} (A + 2I - Ae^{-2t}) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} e^{-2t} \right\} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

روش دیگر استفاده از معادله (۴۸-۹) است. ابتدا $\alpha_1(t)$ و $\alpha_2(t)$ را از معادلات زیر می‌یابیم

$$\alpha_2(t) + \alpha_1(t)\lambda_1 = e^{\lambda_1 t}$$

$$\alpha_2(t) + \alpha_1(t)\lambda_2 = e^{\lambda_2 t}$$

این معادلات با جایگذاری $\lambda_1 = 0$ و $\lambda_2 = -2$ به شکل زیر درمی‌آیند

$$\alpha_*(t) = 1$$

$$\alpha_*(t) - 2\alpha_1(t) = e^{-2t}$$

که از آنها $\alpha_1(t)$ و $\alpha_*(t)$ به دست می‌آید

$$\alpha_1(t) = \frac{1}{3}(1 - e^{-2t}), \quad \alpha_*(t) = 1$$

پس e^{At} را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} e^{At} &= \alpha_*(t) \mathbf{I} + \alpha_1(t) \mathbf{A} \\ &= \mathbf{I} + \frac{1}{3}(1 - e^{-2t}) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3}(1 - e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

استقلال خطی بردارها. بردارهای $x_n, \dots, x_2, x_1$ را مستقل خطی می‌نامند اگر

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = 0$$

که در آن $c_n, \dots, c_2, c_1$ ثابت‌اند، مستلزم این باشد که

$$c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$$

برعکس $x_n, \dots, x_2, x_1$ را وابسته خطی می‌نامند اگر و تنها اگر بتوان x_i را به صورت ترکیبی خطی از x_j

نوشت؛ یا به عبارت دیگر بتوان یک مجموعه c_j یافت که

$$x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n c_j x_j$$

یعنی اگر بتوان x_i را به صورت ترکیبی خطی از بقیه بردارهای مجموعه نوشت، می‌گوییم این بردار به بردارهای دیگر وابستگی خطی دارد، یا از آنها استقلال خطی ندارد.

بردارهای

مثال ۹-۹

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

وابستگی خطی دارند، زیرا

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

بردارهای

$$y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

مستقل خطی‌اند، زیرا

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 = 0$$

مستلزم صفر بودن c_1 ، c_2 و c_3 است.

توجه کنید که اگر یک ماتریس $n \times n$ غیرتکین باشد (یعنی ماتریس رتبه n باشد)، یا دترمینانی غیرصفر داشته باشد) n ستون (یا m ردیف) آن استقلال خطی دارند. برای روش کردن مطلب توجه کنید که

$$[x_1 | x_2 | x_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \text{تکین}$$

$$[y_1 | y_2 | y_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \text{غیرتکین}$$

۹-۶ کنترل پذیری

کنترل پذیری و مشاهده پذیری. اگر بتوان توسط یک بردار کنترل غیرمقیمد سیستم را در فاصله زمانی محدودی از حالت دلخواه $x(t_0)$ به حالت دلخواه دیگری برد، سیستم را کنترل پذیر در زمان t_0 می خوانند. سیستم را مشاهده پذیر در زمان t_0 می نامند، اگر بتوان با مشاهده خروجی در یک فاصله زمانی محدود، حالت سیستم در زمان t_0 را تعیین کرد.

مفاهیم کنترل پذیری و مشاهده پذیری توسط کالمن ابداع شده اند. این مفاهیم در طراحی سیستمهای کنترل در فضای حالت نقش مهمی دارند. در واقع شرایط کنترل پذیری و مشاهده پذیری می توانند وجود جوابی کامل برای یک مسئله طراحی کنترل را تعیین کند. اگر سیستم کنترل پذیر نباشد ممکن است این مسئله جواب نداشته باشد. گرچه اکثر سیستمهای فیزیکی کنترل پذیر و مشاهده پذیرند، ولی مدلهای ریاضی آنها ممکن است این ویژگیها را نداشته باشند. بنابراین دانستن شرایطی که تحت آنها سیستم کنترل پذیر یا مشاهده پذیر است مهم می باشد. این بخش به کنترل پذیری اختصاص دارد و مشاهده پذیری در بخش بعد مورد بحث قرار می گیرد. در ادامه ابتدا شرط کنترل پذیری کامل حالت را به دست می آوریم. سپس شکلهای دیگری از شرط کنترل پذیری کامل رابه دست آورده، به دنبال آن در مورد کنترل پذیری کامل خروجی صحبت خواهیم کرد. سرانجام مفهوم قابلیت پایدار سازی را معرفی می کنیم.

کنترل پذیری حالت کامل سیستمهای پیوسته در زمان. سیستم پیوسته در زمان زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (9-51)$$

که در آن x = بردار حالت (بردار $n \times 1$)

u = بردار کنترل (اسکالر)

A = ماتریس $n \times n$

B = ماتریس $n \times 1$

سیستم توصیف شده با معادله (۵۱-۹) را کنترل پذیر حالت در $t = t_0$ می نامند، اگر بتوان یک سیگنال کنترل غیرمقید ایجاد کرد که بتواند سیستم را طی فاصله زمانی محدود $t_0 \leq t \leq t_1$ از هر حالت اولیه دلخواهی به یک حالت نهایی دلخواه ببرد. اگر تمام حالت های ممکن کنترل پذیر باشند، سیستم دارای ویژگی کنترل پذیری کامل حالت است.

اکنون به یافتن شرایط لازم برای کنترل پذیری کامل حالت می پردازیم. بدون این که از کلیت مطلب کاسته شود می توانیم فرض کنیم که حالت نهایی، مبدا فضای حالت؛ و زمان شروع صفر است، یعنی $t_0 = 0$.
حل معادله (۵۱-۹) عبارت است از

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

با اعمال تعریف داده شده در مورد کنترل پذیری کامل حالت به دست می آوریم

$$x(t_1) = 0 = e^{At_1} x(0) + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

یا

$$x(0) = - \int_0^{t_1} e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau \quad (52-9)$$

با توجه به معادلات (۴۸-۹) یا (۵۰-۹) می توان $e^{-A\tau}$ را به شکل زیر نوشت

$$e^{-A\tau} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\tau) A^k \quad (53-9)$$

جایگزینی معادله (۵۳-۹) در معادله (۵۲-۹) به دست می دهد

$$x(0) = - \sum_{k=0}^{n-1} A^k B \int_0^{t_1} \alpha_k(\tau) u(\tau) d\tau \quad (54-9)$$

با تعریف

$$\int_0^{t_1} \alpha_k(\tau) u(\tau) d\tau = \beta_k$$

معادله (۵۴-۹) به شکل زیر درمی آید

$$x(0) = - \sum_{k=0}^{n-1} A^k B \beta_k$$

$$= - \left[B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1} B \right] \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} \quad (55-9)$$

اگر سیستم کاملاً کنترلپذیر باشد، معادله (۹-۵۵) باید به ازای هر حالت داده شده $x(0)$ ارضا شود. لازمه این امر این است که رتبه ماتریس $n \times n$ زیر n باشد

$$[B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B]$$

با توجه به این تحلیل می‌توانیم شرط کنترلپذیری کامل حالت را به این ترتیب بیان کنیم: سیستم تعریف شده یا معادله (۹-۵۱) کنترلپذیر حالت است، اگر و تنها اگر $AB, B, \dots, A^{n-1}B$ مستقل خطی باشند، یا رتبه ماتریس $n \times n$ زیر n باشد

$$[B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B]$$

نتیجه‌ای را که به دست می‌آوریم می‌توانیم برای حالتی که بردار کنترل $r \times 1$ است تعمیم دهیم. اگر سیستم به صورت زیر تعریف شود

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

که در آن u یک بردار $r \times 1$ است، می‌توان ثابت کرد که شرط کنترلپذیری کامل حالت این است که ماتریس $n \times nr$ زیر دارای رتبه n باشد، یا به عبارت دیگر n بردار ستونی مستقل خطی داشته باشد

$$[B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B]$$

ماتریس بالا را **ماتریس کنترلپذیری** می‌نامند.

مثال ۹-۱۰

سیستم تعریف شده به صورت زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

چون

$$[B \mid AB] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{تکین}$$

پس سیستم کنترلپذیر کامل نیست.

مثال ۹-۱۱

سیستم تعریف شده به صورت زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

چون

$$[B \mid AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \text{ناتکین}$$

پس سیستم کنترلپذیر کامل است.

شکل دیگر شرط کنترل پذیری کامل حالت، سیستم تعریف شده به صورت زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (۵۶-۹)$$

که در آن x = بردار حالت (بردار $n \times 1$)

u = بردار کنترل (بردار $r \times 1$)

A = ماتریس حالت (ماتریس $n \times n$)

B = ماتریس $n \times r$

اگر بردارهای ویژه A متمایز باشند، می توان ماتریس P را به نحوی یافت که

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

توجه کنید که اگر مقادیر ویژه A متمایز باشند، بردارهای ویژه A متمایزند، ولی برعکس این مطلب صادق

نیست. برای مثال یک ماتریس متقارن حقیقی $n \times n$ دارای مقادیر ویژه مکرر، n بردار ویژه متمایز دارد. همچنین

توجه کنید که هر ستون ماتریس P یک بردار ویژه A متناظر با هر λ_i ($i=1,2,\dots,n$) است.

تعریف می کنیم

$$x = Pz \quad (۵۷-۹)$$

با گذاشتن معادله (۵۷-۹) در معادله (۵۶-۹) به دست می آوریم

$$\dot{z} = P^{-1}APz + P^{-1}Bu \quad (۵۸-۹)$$

با تعریف

$$P^{-1}B = F = (f_{ij})$$

می توانیم معادله (۵۸-۹) را به شکل زیر بنویسیم

$$\dot{z}_1 = \lambda_1 z_1 + f_{11}u_1 + f_{12}u_2 + \dots + f_{1r}u_r$$

$$\dot{z}_2 = \lambda_2 z_2 + f_{21}u_1 + f_{22}u_2 + \dots + f_{2r}u_r$$

$\vdots$

$$\dot{z}_n = \lambda_n z_n + f_{n1}u_1 + f_{n2}u_2 + \dots + f_{nr}u_r$$

اگر در یکی از ردیفهای ماتریس F ($n \times r$) تمام درایه ها صفر باشند، هیچ کدام از u_i ها نمی توانند متغیر حالت

متناظر با آن ردیف را کنترل کنند. پس شرط کنترل پذیری کامل حالت این است: اگر تمام بردارهای ویژه A

متمایز باشند، سیستم کنترل پذیر کامل است اگر و تنها اگر در هیچ یک از ردیفهای ماتریس $P^{-1}B$ تمام

درایه ها صفر نباشند. توجه به این نکته مهم است که برای اعمال این شرط باید ماتریس $P^{-1}AP$ معادله

(۵۸-۹) قطری شده باشد.

اگر بردارهای ویژه ماتریس A معادله (۹-۵۶) متمایز نباشند، قطری کردن ناممکن است. در چنین حالتی می‌توانیم A را به شکل متعارف جردن تبدیل کنیم. مثلاً اگر A دارای مقادیر ویژه $\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \dots, \lambda_n$ و $n-3$ بردار ویژه متمایز باشد، شکل متعارف جردن A عبارت است از

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & & & & & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & \lambda_1 & & & & & \\ \hline & & & \lambda_4 & 1 & & & \\ & & & 0 & \lambda_4 & & & \\ & & & & & \lambda_5 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \lambda_n \\ 0 & & & & & & & \end{bmatrix}$$

زیر ماتریسهای مربعی روی قطر اصلی بلوکهای جردن نامیده می‌شوند.

فرض کنید می‌توانیم ماتریس تبدیل S را بیابیم، به نحوی که

$$S^{-1}AS = J$$

با تعریف بردار حالت جدید z به صورت

$$x = Sz \quad (۹-۵۹)$$

و گذاشتن معادله (۹-۵۹) در معادله (۹-۵۶) به دست می‌آوریم

$$\dot{z} = S^{-1}ASz + S^{-1}Bu \quad (۹-۶۰)$$

$$= Jz + S^{-1}Bu$$

حال شرط کنترل‌پذیری کامل حالت سیستم معادله (۹-۵۶) را می‌توان به این ترتیب بیان کرد: سیستم کنترل پذیر کامل حالت است، اگر و تنها اگر (۱) هیچ دو بلوک جردنی از J معادله (۹-۶۰) مقادیر ویژه یکسانی نداشته باشند، (۲) هیچ یک از ردیفهای $S^{-1}B$ متناظر با ردیفهای آخر بلوکهای جردن دارای درایه‌های تماماً صفر نباشند؛ و (۳) درایه‌های هر ردیف متناظر با مقادیر ویژه متمایز $S^{-1}B$ تماماً صفر نباشد.

سیستمهای زیر کنترل پذیر کامل هستند:

مثال ۹-۱۲

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|cc} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

سیستمهای زیر کنترل پذیر کامل حالت نیستند:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|cc} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

شرط کنترل پذیری کامل حالت در صفحه s، شرط کنترل پذیری کامل حالت را می توان برحسب توابع تبدیل یا ماتریسهای تبدیل نیز بیان کرد.

شرط لازم و کافی برای کنترل پذیری کامل حالت این است که در تابع تبدیل یا ماتریس تبدیل هیچ حذفی صورت نگیرد. اگر حذفی صورت بگیرد نمی توان سیستم را در جهت وجه حذف شده کنترل کرد.

تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{(s+2/5)}{(s+2/5)(s-1)}$$

مثال ۹-۱۳

واضح است که در صورت و مخرج این تابع تبدیل عامل $(s+2/5)$ حذف می شود. (به این ترتیب یک درجه آزادی کم می شود). به خاطر این حذف این سیستم کنترل پذیر کامل حالت نیست.

با نوشتن این تابع تبدیل به صورت معادله حالت نیز می توان همین نتیجه را گرفت. یک نمایش فضای حالت عبارت است از

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2/5 & -1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$[B \mid A B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

رتبه ماتریس $[B \mid A B]$ یک است، بنابراین به همان نتیجه کنترل پذیر کامل حالت نبودن سیستم می‌رسیم.

کنترل پذیری خروجی، در طراحی یک سیستم کنترل عملی می‌خواهیم خروجی را کنترل کنیم نه حالت سیستم را. برای کنترل پذیر بودن خروجی سیستم، کنترل پذیری کامل حالت نه لازم است نه کافی. به همین دلیل باید کنترل پذیری کامل خروجی را جداگانه تعریف کنیم.

سیستم تعریف شده به صورت زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (۹-۶۱)$$

$$y = Cx + Du \quad (۹-۶۲)$$

که در آن x = بردار حالت (بردار $n \times 1$)

y = بردار خروجی (بردار $m \times 1$)

u = بردار کنترل (بردار $r \times 1$)

A = ماتریس حالت (ماتریس $n \times n$)

B = ماتریس کنترل ($n \times r$)

C = ماتریس خروجی (ماتریس $m \times n$)

D = ماتریس انتقال مستقیم (ماتریس $m \times r$)

سیستم توصیف شده با معادلات (۹-۶۱) و (۹-۶۲) را کنترل پذیر کامل خروجی می‌نامند، اگر بتوان بردار کنترل غیرمقیم $u(t)$ را به نحوی ساخت که طی فاصله زمانی محدود $t_0 \leq t \leq t_1$ خروجی را از خروجی اولیه $y(t_0)$ به خروجی نهایی $y(t_1)$ ببرد.

می‌توان ثابت کرد که شرط کنترل پذیری کامل خروجی را می‌توان به این صورت بیان کرد: سیستم توصیف شده با معادلات (۹-۶۱) و (۹-۶۲) کنترل پذیر کامل خروجی است، اگر و تنها اگر ماتریس $m \times (n+1)$ زیر دارای رتبه m باشد.

$$[CB \mid CAB \mid CA^2B \mid \dots \mid CA^{n-1}B \mid D]$$

(اثبات را در مسئله الف ۹-۱۶ ببینید) توجه کنید که وجود جمله Du در معادله (۹-۶۲) به کنترل پذیری خروجی کمک می‌کند.

سیستم کنترل ناپذیر، سیستم کنترل ناپذیر زیرسیستمی دارد که به لحاظ فیزیکی به ورودی مرتبط نیست.

قابلیت پایدار شدن، برای سیستمی که کنترل پذیر نسبی است، اگر وجوه کنترل ناپذیر پایدار و وجوه ناپایدار کنترل پذیر باشند، می‌گوییم سیستم قابلیت پایداری دارد. مثلاً سیستم تعریف شده به صورت زیر

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

کنترل پذیر حالت نیست. وجه پایدار متناظر با مقدار ویژه ۱- کنترل پذیر نیست. وجه ناپایدار متناظر با مقدار ویژه ۱ کنترل پذیر است. چنین سیستمی را می توان با فیدبک مناسب پایدار کرد. بنابراین سیستم قابلیت پایدار شدن دارد.

۷-۹ مشاهده پذیری

در این بخش در مورد مشاهده پذیری سیستمهای خطی صحبت می کنیم. سیستم غیر واداشته تعریف شده با معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = Ax \quad (۹-۶۳)$$

$$y = Cx \quad (۹-۶۴)$$

که در آن x = بردار حالت (بردار $n \times 1$)

y = بردار خروجی (بردار $m \times 1$)

A = ماتریس $n \times n$

C = ماتریس $m \times n$

اگر بتوان هر حالت $x(t_0)$ را با مشاهده $y(t)$ در فاصله زمانی محدود $t_0 \leq t \leq t_1$ تعیین کرد، سیستم را کاملاً مشاهده پذیر می نامند. بنابراین سیستمی کاملاً مشاهده پذیر است که هر تغییر حالتی سرانجام بر تمام درایه های بردار خروجی تاثیر بگذارد. مفهوم مشاهده پذیری در مسائل مربوط به بازسازی متغیرهای حالت غیر قابل اندازه گیری، از روی متغیرهای قابل اندازه گیری در کوتاهترین زمان ممکن به کار می آید. در این بخش تنها سیستمهای خطی مستقل از زمان را بررسی می کنیم. بنابراین بدون از دست رفتن کلیت می توانیم فرض کنیم $t_0 = 0$.

مفهوم مشاهده پذیری بسیار مهم است، زیرا مشکل کنترل با فیدبک حالت در عمل این است که بعضی متغیرهای حالت در دسترس مستقیم قرار ندارند، بنابراین برای ساختن سیگنالهای کنترل باید این متغیرهای خارج از دسترس را تخمین زد. در بخش ۱۰-۵ نشان خواهیم داد که تخمین زدن متغیرهای حالت تنها و تنها وقتی ممکن است که سیستم کاملاً مشاهده پذیر باشد.

در بحث راجع به شرایط مشاهده پذیری سیستم غیر واداشته توصیف شده با معادلات (۹-۶۳) و (۹-۶۴) را در نظر می گیریم. علت این است که برای سیستم دارای معادلات زیر

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

داریم

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

و $y(t)$ عبارت است از

$$y(t) = Ce^{At} x(0) + C \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + Du$$

چون ماتریسهای A ، B ، C ، و D معلوم اند و $u(t)$ نیز معلوم است، دو جمله آخر سمت راست معادله اخیر کمیتی معلوم است. بنابراین می توان آن را از مقادیر مشاهده شده $y(t)$ کنار گذاشت. بنابراین برای بررسی شرط لازم و کافی برای مشاهده پذیری کامل، کافی است سیستم توصیف شده با معادلات (۶۳-۹) و (۶۴-۹) را در نظر بگیریم.

مشاهده پذیری کامل سیستمهای پیوسته در زمان. سیستم توصیف شده با معادلات (۶۳-۹) و (۶۴-۹) را در نظر بگیرید. بردار خروجی $y(t)$ عبارت است از

$$y(t) = Ce^{At} x(0)$$

با توجه به معادلات (۴۸-۹) یا (۵۰-۹)

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) A^k$$

که در آن n مرتبه چندجمله ای مشخصه است. [توجه کنید که معادلات (۴۸-۹) و (۵۰-۹) با m به جای n را می توان با استفاده از معادله مشخصه به دست آورد.] پس به دست می آوریم

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) C A^k x(0)$$

یا

$$y(t) = \alpha_0(t) C x(0) + \alpha_1(t) C A x(0) + \dots + \alpha_{n-1}(t) C A^{n-1} x(0) \quad (۶۵-۹)$$

اگر سیستم کاملاً مشاهده پذیر باشد، با داشتن بردار $y(t)$ در فاصله زمانی $0 \leq t \leq t_1$ از $x(0)$ معادله (۶۵-۹) به صورتی یکتا تعیین می شود. می توان نشان داد که به این منظور باید رتبه ماتریس $nm \times n$ زیر برابر n باشد

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

(برای اثبات این شرط به مسئله الف ۹-۱۹ مراجعه کنید.)

با توجه به تحلیل بالا می توانیم شرط مشاهده پذیری کامل را به این صورت بیان کنیم: سیستم توصیف شده با معادلات (۶۳-۹) و (۶۴-۹) کاملاً مشاهده پذیر است اگر و تنها اگر ماتریس $nm \times n$ زیر دارای رتبه n باشد

$$[C^* \mid A^* C^* \mid \dots \mid (A^*)^{n-1} C^*]$$

یا به عبارت دیگر n ستون آن بردارهای مستقل خطی باشند. این ماتریس را **ماتریس مشاهده پذیری** می نامند.

مثال ۹-۱۴

سیستم توصیف شده به صورت زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

آیا سیستم کنترل‌پذیر و مشاهده‌پذیر هست یا نه؟

رتبه ماتریس

$$[B \mid AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

۲ است، پس سیستم کنترل‌پذیر کامل حالت است.

برای کنترل‌پذیری کامل خروجی باید رتبه ماتریس $[CB \mid CAB]$ را تعیین کنیم. چون

$$[CB \mid CAB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

رتبه ماتریس ۱ است. بنابراین سیستم کنترل‌پذیر کامل حالت خروجی است.

برای بررسی شرط مشاهده‌پذیری باید رتبه $[C^* \mid A^*C^*]$ را تعیین کنیم. چون

$$[C^* \mid A^*C^*] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

رتبه $[C^* \mid A^*C^*]$ رتبه ۲ دارد. پس سیستم کاملاً مشاهده‌پذیر است.

شرایط مشاهده‌پذیری کامل در صفحه ۸. شرط مشاهده‌پذیری کامل را نیز می‌توان برحسب توابع تبدیل یا ماتریسهای تبدیل بیان کرد. شرایط لازم و کافی برای مشاهده‌پذیری کامل این است که در تابع تبدیل یا ماتریس تبدیل هیچ حذفی رخ ندهد. اگر حذفی صورت گیرد، وجه حذف شده در خروجی مشاهده نمی‌شود.

مثال ۹-۱۵

نشان دهید که سیستم زیر کاملاً مشاهده‌پذیر نیست

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

که در آن

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

توجه کنید که تابع کنترل u اثری بر مشاهده‌پذیری سیستم ندارد. پس برای بررسی مشاهده‌پذیری کامل می‌توانیم قرار دهیم $u = 0$. برای این سیستم داریم

$$[C^* | A^* C^* | (A^*)^T C^*] = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 6 \\ 5 & -7 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

چون

$$\begin{vmatrix} 4 & -6 & 6 \\ 5 & -7 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

رتبه ماتریس $[C^* | A^* C^* | (A^*)^T C^*]$ کمتر از ۳ است. پس سیستم کاملاً مشاهده پذیر نیست.

در واقع در تابع تبدیل این سیستم حذف رخ نمی دهد. تابع تبدیل بین $X_1(s)$ و $U(s)$ عبارت است از

$$\frac{X_1(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

و تابع تبدیل بین $Y(s)$ و $X_1(s)$ عبارت است از

$$\frac{Y(s)}{X_1(s)} = (s+1)(s+4)$$

پس تابع تبدیل بین $Y(s)$ و $U(s)$ عبارت است از

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(s+1)(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

که در آن عامل $(s+1)$ حذف می شود. بنابراین حالت های اولیه غیر صفری وجود دارد که نمی توان آن را با اندازه گیری $y(t)$ تعیین کرد.

توضیح. در تابع تبدیل هیچ حذفی رخ نمی دهد، اگر و تنها اگر سیستم کاملاً کنترل پذیر حالت و کاملاً مشاهده پذیر باشد. یعنی تابع تبدیلی که در آن حذف رخ داده است تمام اطلاعات مشخص کننده رفتار دینامیکی سیستم را دربر ندارد.

شکل دیگر شرایط مشاهده پذیری کامل. سیستم توصیف شده با معادلات زیر را که همان معادلات (۶۳-۹) و

(۶۴-۹) در نظر بگیرید

$$\dot{x} = Ax \quad (66-9)$$

$$y = Cx \quad (67-9)$$

فرض کنید ماتریس تبدیل P ماتریس A را به یک ماتریس قطری تبدیل می کند، یعنی

$$P^{-1}AP = D$$

که D یک ماتریس قطری است. با تعریف

$$x = Pz$$

می‌توان معادلات (۹-۶۶) و (۹-۶۷) را به شکل زیر بازنویسی کرد

$$\dot{z} = P^{-1}APz = Dz$$

$$y = CPz$$

پس

$$y(t) = CP e^{Dt} z(0)$$

یا

$$y(t) = CP \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} z(0) = CP \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} z_1(0) \\ e^{\lambda_2 t} z_2(0) \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} z_n(0) \end{bmatrix}$$

سیستم به شرطی کاملاً مشاهده‌پذیر است که هیچ ستونی از ماتریس CP ($m \times n$) درایه‌های تماماً صفر نداشته باشد. علت این است که اگر تمام درایه‌های ستون i ام CP صفر باشد، متغیر حالت $z_i(0)$ در معادله خروجی ظاهر نمی‌شود و نمی‌توان آن را با مشاهده $y(t)$ تعیین کرد. پس $x(0)$ را که توسط ماتریس غیرتکین P به $z(0)$ مرتبط می‌شود، نمی‌توان تعیین کرد. (به خاطر بسپارید که این آزمون تنها در صورتی امکان‌پذیر است که ماتریس $P^{-1}AP$ قطری باشد.)

اگر ماتریس A را نتوان به یک ماتریس قطری تبدیل کرد، با یک ماتریس تبدیل مناسب S می‌توان A را به شکل متعارف جردن درآورد، یعنی

$$S^{-1}AS = J$$

که J به شکل متعارف جردن است.

با تعریف

$$x = Sz$$

معادلات (۹-۶۶) و (۹-۶۷) را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\dot{z} = S^{-1}ASz = Jz$$

$$y = CSz$$

پس

$$y(t) = CS e^{Jt} z(0)$$

سیستم کاملاً مشاهده‌پذیر است اگر (۱) هیچ دو بلوک جردنی از J مقادیر ویژه یکسان نداشته باشند؛ (۲) هیچ یک از ستونهای CS متناظر با سطرهاى اول بلوکهای جردن تماماً صفر نباشند؛ و (۳) هیچ یک از ستونهای CS متناظر با مقادیر ویژه تماماً صفر نباشد.

برای روشن شدن شرط (۲) در مثال ۹-۱۶ ستونهای CS متناظر با سطرهاى اول بلوکهای جردن را با خط‌چین بسته مشخص کرده‌ایم.

مثال ۹-۱۶

سیستمهای زیر کاملاً مشاهدهپذیرند

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} & y &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

سیستمهای زیر کاملاً مشاهدهپذیر نیستند

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} & y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

اصل همزادی. اکنون رابطه بین کنترلپذیری و مشاهدهپذیری را مورد بحث قرار می‌دهیم. در اینجا اصل همزادی ارائه شده توسط کالمن را بیان می‌کنیم تا شباهت‌های آشکار کنترلپذیری و مشاهدهپذیری نمایان شوند.

سیستم S_1 توصیف شده به صورت زیر را در نظر بگیرید.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx}$$

که در آن $\mathbf{x}$ بردار حالت (بردار $n \times 1$)

$\mathbf{y}$ بردار خروجی (بردار $m \times 1$)

$\mathbf{u}$ بردار کنترل (بردار $r \times 1$)

$\mathbf{A}$ = ماتریس حالت (ماتریس $n \times n$)

$\mathbf{B}$ = ماتریس کنترل ($n \times r$)

$\mathbf{C}$ = ماتریس خروجی (ماتریس $m \times n$)

سیستم همزاد S_2 به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\dot{z} = A^* z + C^* v$$

$$n = B^* z$$

که در آن z بردار حالت (بردار $n \times 1$)

n = بردار خروجی (بردار $m \times 1$)

v = بردار کنترل (بردار $r \times 1$)

$$A^* = \text{ترانهاده مزدوج } A$$

$$B^* = \text{ترانهاده مزدوج } B$$

$$C^* = \text{ترانهاده مزدوج } C$$

اصل همزادی می‌گوید سیستم S_1 کنترل‌پذیر کامل حالت است، اگر و تنها اگر S_2 کاملاً مشاهده‌پذیر باشد و برعکس.

برای اثبات این اصل شرایط لازم و کافی برای کنترل‌پذیری و مشاهده‌پذیری سیستمهای S_1 و S_2 را می‌نویسیم.

برای سیستم S_1 :

۱. شرط لازم و کافی برای کنترل‌پذیری کامل حالت این است که رتبه ماتریس $n \times nr$ زیر n باشد

$$[B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B]$$

۲. شرط لازم و کافی برای کاملاً مشاهده‌پذیر بودن این است که رتبه ماتریس $n \times nm$ زیر n باشد

$$[C^* \mid A^*C^* \mid \dots \mid (A^*)^{n-1}C^*]$$

برای سیستم S_2 :

۱. شرط لازم و کافی برای کنترل‌پذیری کامل حالت این است که رتبه ماتریس $n \times nm$ زیر n باشد

$$[C^* \mid A^*C^* \mid \dots \mid (A^*)^{n-1}C^*]$$

۲. شرط لازم و کافی برای کاملاً مشاهده‌پذیر بودن این است که رتبه ماتریس $n \times nr$ زیر n باشد

$$[B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B]$$

با مقایسه این شرایط درستی اصل همزادی اثبات می‌شود. با توجه به این اصل می‌توان مشاهده‌پذیری یک سیستم را با بررسی کنترل‌پذیری سیستم همزاد آن تعیین کرد.

قابلیت مشاهده. برای یک سیستم مشاهده‌پذیر نسبی، اگر وجوه مشاهده‌ناپذیر پایدار و وجوه مشاهده‌پذیر ناپایدار باشند، می‌گوییم سیستم قابلیت مشاهده دارد. توجه کنید که مفهوم قابلیت مشاهده همزاد مفهوم قابلیت کنترل‌پذیری است.

مسائل نمونه و حلشان

الف ۹-۱ تابع تبدیل سیستم تعریف شده با معادله (۹-۲) معادله زیر را در نظر بگیرید

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (۹-۶۸)$$

نمایش فضای حالت این سیستم را به شکل متعارف کنترلپذیر زیر به دست آورید:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (۹-۶۹)$$

$$y = [b_n - a_n b_0 \mid b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \mid \dots \mid b_1 - a_1 b_0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u \quad (۹-۷۰)$$

حل: معادله (۹-۶۸) را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = b_0 + \frac{(b_1 - a_1 b_0) s^{n-1} + \dots + (b_{n-1} + a_{n-1} b_0) s + (b_n - a_n b_0)}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

که می‌توان آن را به صورت زیر درآورد

$$Y(s) = b_0 U(s) + \hat{Y}(s) \quad (۹-۷۱)$$

که در آن

$$\hat{Y}(s) = \frac{(b_1 - a_1 b_0) s^{n-1} + \dots + (b_{n-1} + a_{n-1} b_0) s + (b_n - a_n b_0)}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} U(s)$$

حال معادله بالا را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\frac{\hat{Y}(s)}{(b_1 - a_1 b_0) s^{n-1} + \dots + (b_{n-1} + a_{n-1} b_0) s + (b_n - a_n b_0)} = \frac{U(s)}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} = Q(s)$$

از معادله اخیر می‌توان دو معادله زیر را یافت

$$s^n Q(s) = -a_1 s^{n-1} Q(s) - \dots - a_{n-1} s Q(s) - a_n Q(s) + U(s) \quad (۹-۷۲)$$

$$\hat{Y}(s) = (b_1 - a_1 b_0) s^{n-1} Q(s) + \dots + (b_{n-1} + a_{n-1} b_0) s Q(s) + (b_n - a_n b_0) Q(s) \quad (۹-۷۳)$$

متغیرهای حالت رابطه بالا را زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}X_1(s) &= Q(s) \\X_2(s) &= sQ(s) \\&\vdots \\X_{n-1}(s) &= s^{n-2}Q(s) \\X_n(s) &= s^{n-1}Q(s)\end{aligned}$$

واضح است که

$$\begin{aligned}sX_1(s) &= X_2(s) \\sX_2(s) &= X_3(s) \\&\vdots \\sX_{n-1}(s) &= X_n(s)\end{aligned}$$

که می‌توان آنها را به شکل زیر نوشت

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n\end{aligned}\quad (۷۲-۹)$$

با توجه به این که $sX_n(s) = s^n Q(s)$ ، معادله (۷۲-۹) را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$sX_n(s) = -a_1X_n(s) - \dots - a_{n-1}X_2(s) - a_nX_1(s) + U(s)$$

یا

$$\dot{x}_n = -a_nx_1 - a_{n-1}x_2 - \dots - a_1x_n + u \quad (۷۵-۹)$$

همچنین از معادلات (۷۱-۹) و (۷۳-۹) به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}Y(s) &= b_nU(s) + (b_1 - a_1b_n)s^{n-1}Q(s) + \dots + (b_{n-1} - a_{n-1}b_n)sQ(s) + (b_n - a_nb_n)Q(s) \\ &= b_nU(s) + (b_1 - a_1b_n)X_n(s) + \dots + (b_{n-1} - a_{n-1}b_n)X_2(s) + (b_n - a_nb_n)X_1(s)\end{aligned}$$

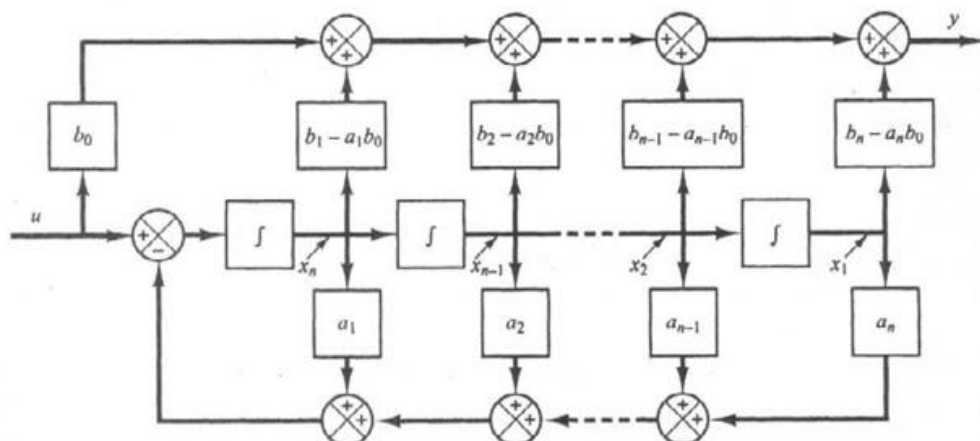
عکس تبدیل لاپلاس این معادله خروجی عبارت است از

$$y = (b_n - a_nb_n)x_1 + (b_{n-1} - a_{n-1}b_n)x_2 + \dots + (b_1 - a_1b_n)x_n + b_nu \quad (۷۶-۹)$$

با ترکیب معادلات (۷۴-۹) و (۷۵-۹) به صورت یک معادله دیفرانسیل ماتریسی، معادله (۶۹-۹) به دست می‌آید. معادله (۷۶-۹) را می‌توان به صورت معادله (۷۰-۹) نوشت. معادلات (۶۹-۹) و (۷۰-۹) شکل متعارف کنترل‌پذیر خوانده می‌شود. شکل ۱-۹ نمایش نمودار بلوکی سیستم تعریف شده با معادلات (۶۹-۹) و (۷۰-۹) را نشان می‌دهد.

الف ۲-۹ سیستم با تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_ns^n + b_1s^{n-1} + \dots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n} \quad (۷۷-۹)$$



شکل ۹-۱ نمودار بلوکی سیستم تعریف شده با معادلات (۹-۶۹) و (۹-۷۰) (شکل متعارف کنترل پذیر).

نمایش فضای حالت زیر را که شکل متعارف مشاهده پذیر است، برای این سیستم به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_s \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_s \\ \vdots \\ b_1 - a_1 b_s \end{bmatrix} u \quad (9-78)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_s u \quad (9-79)$$

حل: معادله (۹-۷۷) را می توان به شکل زیر درآورد:

$$s^n [Y(s) - b_s U(s)] + s^{n-1} [a_1 Y(s) - b_1 U(s)] + \cdots + s [a_{n-1} Y(s) - b_{n-1} U(s)] + a_n Y(s) - b_n U(s) = 0$$

با تقسیم معادله بالا بر s^n و بازآرایی به دست می آوریم

$$Y(s) = b_s U(s) + \frac{1}{s} [b_1 U(s) - a_1 Y(s)] + \cdots + \frac{1}{s^{n-1}} [b_{n-1} U(s) - a_{n-1} Y(s)] + \frac{1}{s^n} [b_n U(s) - a_n Y(s)] \quad (9-80)$$

حالت متغیرهای حالت را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\begin{aligned} X_n(s) &= \frac{1}{s} [b_1 U(s) - a_1 Y(s) + X_{n-1}(s)] \\ X_{n-1}(s) &= \frac{1}{s} [b_2 U(s) - a_2 Y(s) + X_{n-2}(s)] \\ &\vdots \\ X_2(s) &= \frac{1}{s} [b_{n-1} U(s) - a_{n-1} Y(s) + X_1(s)] \\ X_1(s) &= \frac{1}{s} [b_n U(s) - a_n Y(s)] \end{aligned} \quad (۸۱-۹)$$

معادله (۸۰-۹) را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$Y(s) = b_* U(s) + X_n(s) \quad (۸۲-۹)$$

با گذاشتن معادله (۸۲-۹) در معادله (۸۱-۹) و ضرب دو طرف در s به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} s X_n(s) &= X_{n-1}(s) - a_1 X_n(s) + (b_1 - a_1 b_*) U(s) \\ s X_{n-1}(s) &= X_{n-2}(s) - a_2 X_n(s) + (b_2 - a_2 b_*) U(s) \\ &\vdots \\ s X_2(s) &= X_1(s) - a_{n-1} X_n(s) + (b_{n-1} - a_{n-1} b_*) U(s) \\ s X_1(s) &= -a_n X_n(s) + (b_n - a_n b_*) U(s) \end{aligned}$$

گرفتن عکس تبدیل لاپلاس از n معادله بالا و نوشتن آنها به ترتیب معکوس به دست می‌دهد

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -a_n x_n + (b_n - a_n b_*) u \\ \dot{x}_2 &= x_1 - a_{n-1} x_n + (b_{n-1} - a_{n-1} b_*) u \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_{n-2} - a_2 x_n + (b_2 - a_2 b_*) u \\ \dot{x}_n &= x_{n-1} + a_1 x_n + (b_1 - a_1 b_*) u \end{aligned}$$

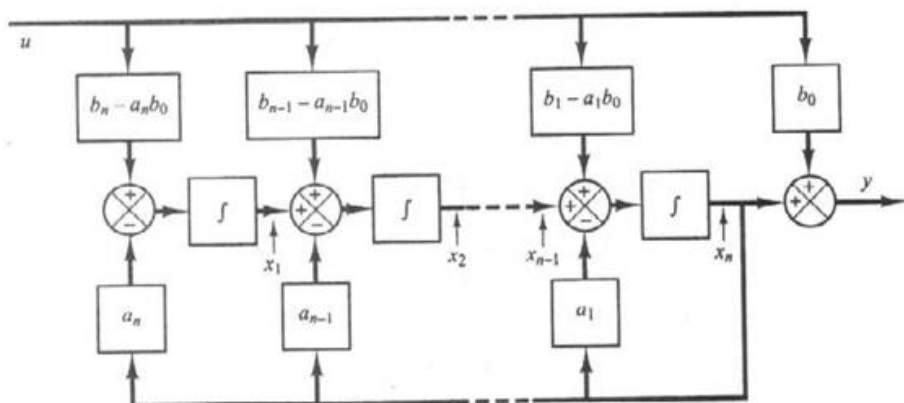
عکس تبدیل لاپلاس معادله (۸۲-۹) نیز به صورت زیر است

$$y = b_* u + x_n$$

بازنویسی معادلات حالت و خروجی به شکل استاندارد ماتریسی معادلات (۷۸-۹) و (۷۹-۹) را به دست می‌دهد. شکل ۲-۹ نمایش نمودار بلوکی سیستم تعریف شده با معادلات (۷۸-۹) و (۷۹-۹) را نشان می‌دهد.

الف ۳-۹ سیستم تعریف شده با تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{b_* s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)} \\ &= b_* + \frac{c_1}{s + p_1} + \frac{c_2}{s + p_2} + \dots + \frac{c_n}{s + p_n} \end{aligned} \quad (۸۳-۹)$$



شکل ۹-۲ نمودار بلوکی سیستم تعریف شده با معادلات (۷۸-۹) و (۷۹-۹) (شکل متعارف مشاهده پذیر).

که در آن $p_i \neq p_j$. نمایش فضای حالت زیر، شکل متعارف قطری را برای این سیستم بیابید.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & 0 & & \\ & -p_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (۸۴-۹)$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_* u \quad (۸۵-۹)$$

حل: معادله (۸۳-۹) را می توان به شکل زیر نوشت

$$Y(s) = b_* U(s) + \frac{c_1}{s + p_1} U(s) + \frac{c_2}{s + p_2} U(s) + \cdots + \frac{c_n}{s + p_n} U(s) \quad (۸۶-۹)$$

معادلات حالت را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$X_1(s) = \frac{1}{s + p_1} U(s)$$

$$X_2(s) = \frac{1}{s + p_2} U(s)$$

$\vdots$

$$X_n(s) = \frac{1}{s + p_n} U(s)$$

که می توانیم آنها را به صورت زیر بازنویسی کنیم

$$\begin{aligned} sX_1(s) &= -p_1 X_1(s) + U(s) \\ sX_2(s) &= -p_2 X_2(s) + U(s) \\ &\vdots \\ sX_n(s) &= -p_n X_n(s) + U(s) \end{aligned}$$

عکس تبدیل لاپلاس این معادلات عبارت است از

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -p_1 x_1 + u \\ \dot{x}_2 &= -p_2 x_2 + u \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= -p_n x_n + u \end{aligned} \quad (۸۷-۹)$$

این n معادله، معادلات حالت را تشکیل می‌دهند.

معادله (۸۶-۹) را برحسب متغیرهای حالت $X_1(s), \dots, X_n(s)$ می‌توان به صورت زیر نوشت

$$Y(s) = b_n U(s) + c_1 X_1(s) + c_2 X_2(s) + \dots + c_n X_n(s)$$

عکس تبدیل لاپلاس این معادله عبارت است از

$$y = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n + b_n u \quad (۸۸-۹)$$

که معادله خروجی است.

معادله (۸۷-۹) را می‌توان به شکل ماتریس (۸۴-۹) درآورد. معادله (۸۸-۹) را نیز می‌توان به صورت معادله

(۸۵-۹) نوشت.

شکل ۳-۹ نمایش نمودار بلوکی سیستم تعریف شده با معادلات (۸۴-۹) و (۸۵-۹) را نشان می‌دهد.

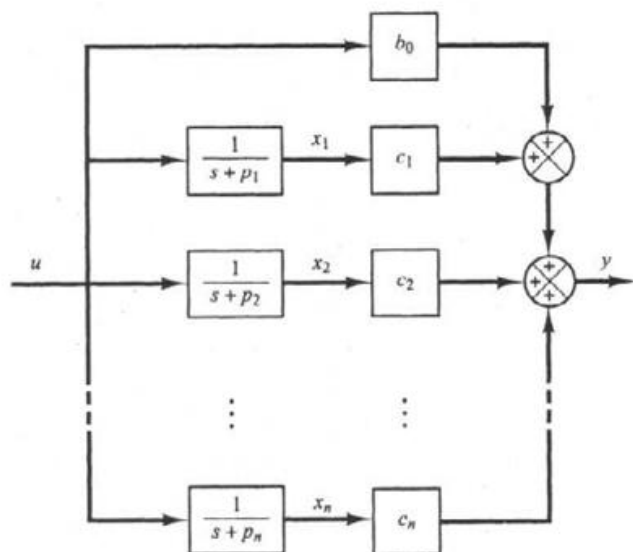
اگر متغیرهای حالت را به صورت زیر فرض کنیم

$$\begin{aligned} \hat{X}_1(s) &= \frac{c_1}{s + p_1} U(s) \\ \hat{X}_2(s) &= \frac{c_2}{s + p_2} U(s) \\ &\vdots \\ \hat{X}_n(s) &= \frac{c_n}{s + p_n} U(s) \end{aligned}$$

نمایش فضای حالت دیگری، با تفاوت اندک، به دست می‌آوریم. این انتخاب به دست می‌دهد

$$\begin{aligned} s\hat{X}_1(s) &= -p_1 \hat{X}_1(s) + c_1 U(s) \\ s\hat{X}_2(s) &= -p_2 \hat{X}_2(s) + c_2 U(s) \\ &\vdots \\ s\hat{X}_n(s) &= -p_n \hat{X}_n(s) + c_n U(s) \end{aligned}$$

که از آن به دست می‌آوریم



شکل ۳-۹

نمودار بلوکی سیستم تعریف

شده با معادلات (۸۴-۹)

و (۸۵-۹) (شکل متعارف قطری).

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= -p_1 \hat{x}_1 + c_1 u \\ \dot{\hat{x}}_2 &= -p_2 \hat{x}_2 + c_2 u \\ &\vdots \\ \dot{\hat{x}}_n &= -p_n \hat{x}_n + c_n u\end{aligned}\quad (۸۹-۹)$$

با توجه به معادله (۸۶-۹) معادله خروجی عبارت است از

$$Y(s) = b_* U(s) + \hat{X}_1(s) + \hat{X}_2(s) + \dots + \hat{X}_n(s)$$

که از آن به دست می آوریم

$$y = \hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \dots + \hat{x}_n + b_* u \quad (۹۰-۹)$$

معادلات (۸۹-۹) و (۹۰-۹) نمایش فضای حالت زیر را برای سیستم به دست می دهد

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & & 0 \\ & -p_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & -p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} u$$

معادله خروجی به صورت زیر است

$$y = [1 \quad 1 \quad \dots \quad 1] \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \end{bmatrix} + b_* u$$

الف ۹-۴ سیستم تعریف شده با معادله زیر را در نظر بگیرید

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{(s + p_1)^r (s + p_2)(s + p_3) \dots (s + p_n)} \quad (9-91)$$

این سیستم سه قطب در $s = -p_1$ دارد. (فرض می‌کنیم بجز سه قطب اول، بقیه قطبها از هم متمایزند.) شکل متعارف جردن را برای نمایش فضای حالت این سیستم بیابید.

حل: بسط معادله (۹-۹۱) به کسرهای جزئی عبارت است از

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = b_n + \frac{c_1}{(s + p_1)^r} + \frac{c_2}{(s + p_1)^{r-1}} + \frac{c_3}{s + p_1} + \frac{c_4}{s + p_2} + \dots + \frac{c_n}{s + p_n}$$

که می‌توان آن را به شکل زیر نوشت

$$\begin{aligned} Y(s) = & b_n U(s) + \frac{c_1}{(s + p_1)^r} U(s) + \frac{c_2}{(s + p_1)^{r-1}} U(s) \\ & + \frac{c_3}{s + p_1} U(s) + \frac{c_4}{s + p_2} U(s) + \dots + \frac{c_n}{s + p_n} U(s) \end{aligned} \quad (9-92)$$

تعریف می‌کنیم

$$X_1(s) = \frac{1}{(s + p_1)^r} U(s)$$

$$X_2(s) = \frac{1}{(s + p_1)^{r-1}} U(s)$$

$$X_3(s) = \frac{1}{s + p_1} U(s)$$

$$X_4(s) = \frac{1}{s + p_2} U(s)$$

⋮

$$X_n(s) = \frac{1}{s + p_n} U(s)$$

توجه کنید که بین $X_1(s)$ ، $X_2(s)$ و $X_3(s)$ این روابط برقرار است

$$\frac{X_1(s)}{X_2(s)} = \frac{1}{s + p_1}$$

$$\frac{X_2(s)}{X_3(s)} = \frac{1}{s + p_1}$$

از تعریف معادلات حالت و روابط قبل به دست می‌آوریم

$$s X_1(s) = -p_1 X_1(s) + X_2(s)$$

$$s X_2(s) = -p_1 X_2(s) + X_3(s)$$

$$sX_1(s) = -p_1 X_1(s) + U(s)$$

$$sX_2(s) = -p_1 X_2(s) + U(s)$$

$$\vdots$$

$$sX_n(s) = -p_n X_n(s) + U(s)$$

عکس تبدیل لاپلاس n معادله بالا به دست می دهد

$$\dot{x}_1 = -p_1 x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = -p_1 x_2 + x_3$$

$$\dot{x}_3 = -p_1 x_3 + u$$

$$\dot{x}_4 = -p_2 x_4 + u$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n = -p_n x_n + u$$

معادله خروجی معادله (۹-۹۲) را می توان به شکل زیر نوشت

$$Y(s) = b_* U(s) + c_1 X_1(s) + c_2 X_2(s) + c_3 X_3(s) + c_4 X_4(s) + \dots + c_n X_n(s)$$

عکس تبدیل لاپلاس این معادله عبارت است از

$$y = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4 + \dots + c_n x_n + b_* u$$

پس نمایش فضای حالت سیستم، برای حالتی که چند جمله ای منخرج یک قطب مرتبه سه در $-p_1$ دارد، به صورت زیر است

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -p_1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -p_1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -p_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (9-93)$$

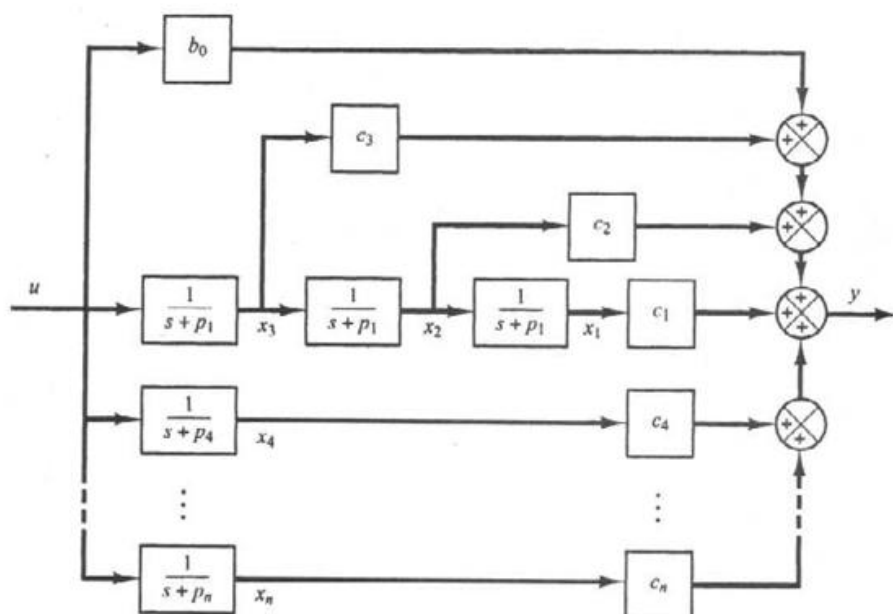
$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_* u \quad (9-94)$$

نمایش فضای حالت داده شده با معادلات (۹-۹۳) و (۹-۹۴) را شکل متعارف جردن می نامند. شکل ۹-۴ نمایش نمودار بلوکی سیستم تعریف شده با معادلات (۹-۹۳) و (۹-۹۴) را نشان می دهد.

الف ۹-۵ سیستم تعریف شده با تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{25s^2 + 5s + 0.8}{s^3 + 5.3247s^2 + 25.1026s + 5.008}$$

نمایش فضای حالت این سیستم را با استفاده از MATLAB بیابید.



شکل ۹-۴ نمودار بلوکی سیستم تعریف شده یا معادلات (۹۳-۹) و (۹۴-۹) (شکل متعارف جردن).

حل: دستور زیر نمایش فضای حالت سیستم را به دست می‌دهد

$$[A,B,C,D] = \text{tf2ss}(\text{num}, \text{den})$$

برنامه ۹-۴ را ببینید.

پس نمایش فضای حالت به دست آمده توسط MATLAB عبارت است از

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.0325 & -25.1026 & -5.0008 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 25.04 & 5.0008 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u$$

الف ۹-۶ سیستم به صورت زیر تعریف شده است

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

که در آن $\mathbf{x}$ بردار حالت (بردار $1 \times n$)

$\mathbf{u}$ = بردار کنترل (بردار $1 \times r$)

$\mathbf{A}$ = ماتریس حالت (ماتریس $n \times n$)

$\mathbf{B}$ = ماتریس کنترل ($n \times r$)

MATLAB Program 9-4

```
num = [25.04 5.008];
den = [1 5.03247 25.1026 5.008];
[A,B,C,D] = tf2ss(num,den)
```

A =

```
-5.0325    -25.1026    -5.0080
 1.0000         0         0
         0         1.0000         0
```

B =

```
1
0
0
```

C =

```
0    25.0400    5.0080
```

D =

```
0
```

پاسخ سیستم هر یک از ورودی‌های زیر را بیابید:

(الف) r مؤلفه ورودی u سیستم توابع ضربه‌ای با دامنه‌های متفاوت هستند.

(ب) r مؤلفه ورودی u سیستم توابع پله‌ای با دامنه‌های متفاوت هستند.

(ج) r مؤلفه ورودی u سیستم توابع شیب با دامنه‌های متفاوت هستند.

حل: (الف) پاسخ ضربه: با توجه به معادله (۹-۴۳) حل معادله حالت عبارت است از

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

با گذاشتن $t_0 = 0^-$ در این معادله به دست می‌آوریم

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(t_0) \Big|_{0^-} + \int_{0^-}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

ورودی ضربه‌ای $\mathbf{u}(t)$ را به این شکل می‌نویسیم

$$\mathbf{u}(t) = \delta(t) \mathbf{w}$$

که برداری مشتمل بر دامنه‌های r ورودی ضربه‌ای اعمال شده در $t = 0$ است. حل معادله حالت به ازای

ورودی ضربه‌ای $\delta(t) \mathbf{w}$ اعمال شده در $t = 0$ عبارت است از

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0^-) + \int_{0^-}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \delta(\tau) \mathbf{w} d\tau \\ &= e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0^-) + e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} \mathbf{w} \end{aligned} \quad (95-9)$$

(ب) پاسخ پله: ورودی پله‌ای $u(t)$ را به صورت زیر می‌نویسیم

$$u(t) = k$$

k برداری است که دامنه‌های t تابع پله‌ای اعمال شده در $t=0$ را در بر دارد. حل معادله حالت به ازای ورودی پله‌ای اعمال شده در $t=0$ عبارت است از

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B k d\tau \\ &= e^{At} x(0) + e^{At} \left[\int_0^t \left(I - A\tau + \frac{A^2 \tau^2}{2!} - \dots \right) d\tau \right] B k \\ &= e^{At} x(0) + e^{At} \left(I t - \frac{A t^2}{2!} + \frac{A^2 t^3}{3!} - \dots \right) B k \end{aligned}$$

اگر A غیرتکین باشد می‌توان معادله اخیر را به صورت زیر ساده کرد

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At} x(0) + e^{At} \left[-(A^{-1})(e^{-At} - I) \right] B k \\ &= e^{At} x(0) + A^{-1} (e^{At} - I) B k \end{aligned} \quad (96-9)$$

(ج) پاسخ شیب: ورودی شیب $u(t)$ را به صورت زیر می‌نویسیم

$$u(t) = tv$$

v برداری دربردارنده دامنه توابع شیب اعمال شده در $t=0$ است. حل معادله حالت به ازای این ورودی عبارت است از

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \tau v d\tau \\ &= e^{At} x(0) + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} \tau d\tau B v \\ &= e^{At} x(0) + e^{At} \left(\frac{I}{2} t^2 - \frac{2A}{3!} t^3 + \frac{2A^2}{4!} t^4 - \frac{2A^3}{5!} t^5 + \dots \right) B v \end{aligned}$$

اگر A غیرتکین باشد، می‌توان معادله اخیر را به صورت زیر ساده کرد

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At} x(0) + (A^{-2})(e^{At} - I - At) B v \\ &= e^{At} x(0) + [A^{-2} (e^{At} - I) - A^{-1} t] B v \end{aligned} \quad (97-9)$$

الف ۷-۹ پاسخ $y(t)$ سیستم زیر را بیابید

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -0.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$u(t)$ تابعی پله‌ای است که در $t=0$ رخ می‌دهد، یعنی

$$u(t) = 1(t)$$

حل: برای این سیستم

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -0.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس گذر حالت $\Phi(t) = e^{At}$ را می‌توان به صورت زیر یافت

$$\Phi(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]$$

چون

$$\begin{aligned} (sI - A)^{-1} &= \begin{bmatrix} s+1 & 0.5 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2 + s + 0.5} \begin{bmatrix} s & -0.5 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{s+0.5-0.5}{(s+0.5)^2 + 0.5} & \frac{-0.5}{(s+0.5)^2 + 0.5} \\ \frac{1}{(s+0.5)^2 + 0.5} & \frac{s+0.5+0.5}{(s+0.5)^2 + 0.5} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

داریم

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}] \\ &= \begin{bmatrix} e^{-0.5t}(\cos 0.5t - \sin 0.5t) & -e^{-0.5t} \sin 0.5t \\ 2e^{-0.5t} \sin 0.5t & e^{-0.5t}(\cos 0.5t + \sin 0.5t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

چون $x(0) = 0$ و $k=1$ با توجه به معادله (۹-۹۶) به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x(0) + A^{-1}(e^{At} - I)Bk = A^{-1}(e^{At} - I)B \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5e^{-0.5t}(\cos 0.5t - \sin 0.5t) - 0.5 \\ e^{-0.5t} \sin 0.5t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-0.5t} \sin 0.5t \\ -e^{-0.5t}(\cos 0.5t + \sin 0.5t) + 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

پس خروجی $y(t)$ را می‌توان به شکل زیر یافت

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 = e^{-0.5t} \sin 0.5t$$

الف ۸-۹ قضیه کیلی - هامیلتون می‌گوید هر ماتریس مربعی $A (n \times n)$ معادله مشخصه خود را ارضا می‌کند. ولی معادله مشخصه کم‌درجه‌ترین معادله اسکالری نیست که A آن را ارضا می‌کند. کم‌درجه‌ترین چندجمله‌ای A ریشه آن است، چندجمله‌ای کهنه نامیده می‌شود. چندجمله‌ای کهنه ماتریس A طبق تعریف کم‌درجه‌ترین چندجمله‌ای $\phi(\lambda)$ به صورت زیر است.

$$\phi(\lambda) = \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \dots + a_{m-1} \lambda + a_m, \quad m \leq n$$

به نحوی که $\phi(A) = 0$ ، یا

$$\phi(A) = A^m + a_1 A^{m-1} + \dots + a_{m-1} A + a_m I = 0$$

چندجمله‌ای کهنه نقش مهمی در محاسبه چندجمله‌ایهای یک ماتریس $n \times n$ دارد. فرض کنید $d(\lambda)$ ، یک چندجمله‌ای برحسب λ ، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک درایه‌های $\text{adj}(\lambda I - A)$ است. نشان دهید اگر ضریب بزرگترین توان λ در $d(\lambda)$ برابر ۱ شود، چندجمله‌ای کهنه $\phi(\lambda)$ عبارت است از

$$\phi(\lambda) = \left| \frac{\lambda I - A}{d(\lambda)} \right|$$

حل: طبق فرض بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک درایه‌های ماتریس $\text{adj}(\lambda I - A)$ برابر $d(\lambda)$ است. یعنی

$$\text{adj}(\lambda I - A) = d(\lambda) B(\lambda)$$

که در آن بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک n^λ درایه $B(\lambda)$ یک است (تمام درایه‌ها تابعی از λ هستند). چون

$$(\lambda I - A) \text{adj}(\lambda I - A) = |\lambda I - A| I$$

به دست می‌آوریم

$$d(\lambda)(\lambda I - A)B(\lambda) = |\lambda I - A| I \quad (98-9)$$

که نشان می‌دهد $|\lambda I - A|$ بر $d(\lambda)$ قابل تقسیم است. پس قرار می‌دهیم

$$|\lambda I - A| = d(\lambda) \psi(\lambda) \quad (99-9)$$

چون ضریب بزرگترین رتبه λ در $d(\lambda)$ برابر ۱ است، ضریب بزرگترین رتبه λ در $\psi(\lambda)$ نیز ۱ است. با توجه به معادلات (۹۸-۹) و (۹۹-۹) داریم

$$(\lambda I - A)B(\lambda) = \psi(\lambda)I$$

پس

$$\psi(A) = 0$$

$\psi(\lambda)$ را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\psi(\lambda) = g(\lambda)\phi(\lambda) + \alpha(\lambda)$$

که در آن $\alpha(\lambda)$ مرتبه‌ای کمتر از $\phi(\lambda)$ دارد. چون $\psi(A) = 0$ و $\phi(A) = 0$ ، باید داشته باشیم $\alpha(A) = 0$. چون $\phi(\lambda)$ چندجمله‌ای کهنه فرض شده است، $\alpha(\lambda)$ باید متحد با صفر باشد، یا

$$\psi(\lambda) = g(\lambda)\phi(\lambda)$$

توجه کنید که چون $\phi(A) = 0$ می‌توانیم بنویسیم

$$\phi(\lambda)I = (\lambda I - A)C(\lambda)$$

پس

$$\psi(\lambda)I = g(\lambda)\phi(\lambda)I = g(\lambda)(\lambda I - A)C(\lambda)$$

و با توجه به این که $(\lambda I - A)B(\lambda) = \psi(\lambda)I$ ، به دست می آوریم
 $B(\lambda) = g(\lambda)C(\lambda)$

چون بزرگترین مقسوم علیه مشترک n^2 درایه $B(\lambda)$ یک است، داریم
 $g(\lambda) = 1$

پس

$$\psi(\lambda) = \phi(\lambda)$$

و از این معادله و معادله (۹۹-۹) به دست می آوریم

$$\phi(\lambda) = \frac{|\lambda I - A|}{d(\lambda)}$$

الف ۹-۹ اگر ماتریس $A (n \times n)$ مقادیر ویژه مجزا داشته باشد، چندجمله ای کهنه A همان چندجمله ای مشخصه است. همچنین اگر مقادیر ویژه چندگانه A در یک زنجیره جردن به هم متصل شوند، چندجمله ای کهنه و چندجمله ای مشخصه یکسان است. ولی اگر مقادیر ویژه چندگانه A در زنجیره جردن متصل نشوند، چندجمله ای کهنه درجه ای کمتر از چندجمله ای مشخصه دارد.

با استفاده از دو ماتریس A و B زیر به عنوان نمونه، درستی گزاره های بالا را در موردی که مقادیر ویژه چندگانه اند نشان دهید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

حل: ابتدا ماتریس A را در نظر بگیرید. چندجمله ای مشخصه عبارت است از

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & -4 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & -3 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2 (\lambda - 1)$$

پس مقادیر ویژه A عبارت است از ۲، ۲، و ۱. می توان نشان داد که شکل متعارف جردن A عبارت است از

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

و مقادیر ویژه چندگانه به صورت نشان داده شده در زنجیره جردن متصل شده اند.

برای تعیین چندجمله ای کهنه ابتدا $\text{adj}(\lambda I - A)$ را می یابیم، که به صورت زیر است

$$\text{adj}(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} (\lambda - 2)(\lambda - 1) & \lambda + 1 & 4(\lambda - 2) \\ 0 & (\lambda - 2)(\lambda - 1) & 0 \\ 0 & 3(\lambda - 2) & (\lambda - 2)^2 \end{bmatrix}$$

چون درایه‌های $\text{adj}(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})$ مقسوم علیه مشترک ندارند، $d(\lambda) = 1$. پس چندجمله‌ای کهنه $\phi(\lambda)$ با چندجمله‌ای مشخصه یکی است

$$\begin{aligned}\phi(\lambda) &= |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = (\lambda - 2)^T (\lambda - 1) \\ &= \lambda^T - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4\end{aligned}$$

محاسبه ساده‌ای نشان می‌دهد که

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^T - 5\mathbf{A}^2 + 8\mathbf{A} - 2\mathbf{I} &= \begin{bmatrix} 8 & 72 & 28 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 21 & 1 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 4 & 16 & 12 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 9 & 1 \end{bmatrix} + 8 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

ولی

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^T - 3\mathbf{A} + 2\mathbf{I} &= \begin{bmatrix} 4 & 16 & 12 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 9 & 1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}\end{aligned}$$

پس چندجمله‌ای کهنه و چندجمله‌ای مشخصه ماتریس $\mathbf{A}$ یکسان‌اند.
حال ماتریس $\mathbf{B}$ را در نظر بگیرید. چندجمله‌ای مشخصه عبارت است از

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{B}| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & -3 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^T (\lambda - 1)$$

محاسبه‌ای ساده نشان می‌دهد که ماتریس $\mathbf{B}$ سه بردار ویژه دارد و شکل متعارف جردن آن عبارت است از

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

پس مقادیر ویژه مضاعف به هم متصل نیستند. برای یافتن چندجمله‌ای کهنه ابتدا $\text{adj}(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{B})$ را می‌یابیم.

$$\text{adj}(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{B}) = \begin{vmatrix} (\lambda - 2)(\lambda - 1) & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda - 2)(\lambda - 1) & 0 \\ 0 & 3(\lambda - 2) & (\lambda - 2)^T \end{vmatrix}$$

که به وضوح نشان می‌دهد $d(\lambda) = \lambda - 2$ ؛ پس

$$\phi(\lambda) = \frac{|\lambda I - B|}{d(\lambda)} = \frac{(\lambda - 2)^T(\lambda - 1)}{\lambda - 2} = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

برای امتحان $\phi(B)$ را محاسبه می‌کنیم

$$\phi(B) = B^2 - 3B + 2I = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

برای این ماتریس B درجه چندجمله‌ای کهنه از درجه چندجمله‌ای مشخصه یکی کمتر است. چنانچه در اینجا نشان دادیم اگر مقادیر ویژه چندگانه یک ماتریس $n \times n$ در زنجیره جردن متصل نشوند، درجه چندجمله‌ای کهنه از درجه چندجمله‌ای مشخصه کمتر است.

الف ۹-۱۵ نشان دهید که با استفاده از چندجمله‌ای کهنه می‌توان وارون ماتریس غیرتکین A را به صورت یک چندجمله‌ای برحسب A ، با ضرایب اسکالر نشان داد:

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_m} (A^{m-1} + a_1 A^{m-2} + \dots + a_{m-2} A + a_{m-1} I) \quad (9-100)$$

که در آن $a_1, a_2, \dots, a_m$ ضرایب چندجمله‌ای کهنه‌اند:

$$\phi(\lambda) = \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \dots + a_{m-1} \lambda + a_m$$

سپس وارون ماتریس A زیر را بیابید:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

حل: برای ماتریس غیرتکین A ، چندجمله‌ای کهنه $\phi(A)$ را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\phi(A) = A^m + a_1 A^{m-1} + \dots + a_{m-1} A + a_m I = 0$$

که در آن $a_m \neq 0$ ، بنابراین

$$I = -\frac{1}{a_m} (A^m + a_1 A^{m-1} + \dots + a_{m-2} A^2 + a_{m-1} A)$$

با ضرب A^{-1} از سمت چپ به دست می‌آوریم

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_m} (A^{m-1} + a_1 A^{m-2} + \dots + a_{m-2} A + a_{m-1} I)$$

که همان معادله (۹-۱۰۰) است.

برای ماتریس A داده شده $\text{adj}(\lambda I - A)$ را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\text{adj}(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda^2 + 4\lambda + 3 & 2\lambda + 6 & -4 \\ 3\lambda + 7 & \lambda^2 + 2\lambda - 3 & -2\lambda + 2 \\ \lambda + 1 & 2 & \lambda^2 - 7 \end{bmatrix}$$

چون درایه‌های $\text{adj}(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})$ مقسوم‌علیه مشترک ندارند، $d(\lambda) = 1$. پس چندجمله‌ای کهنه $\phi(\lambda)$ عبارت است از

$$\phi(\lambda) = \frac{|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}|}{d(\lambda)} = |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}|$$

یعنی چندجمله‌ای کهنه $\phi(\lambda)$ همان چندجمله‌ای مشخصه است.

چون چندجمله‌ای مشخصه به صورت زیر است

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda^3 + 3\lambda^2 - 7\lambda - 17$$

به دست می‌آوریم

$$\phi(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 - 7\lambda - 17$$

با توجه به ضرایب چندجمله‌ای کهنه (که در اینجا همان چندجمله‌ای مشخصه است) داریم

$$a_1 = 3, \quad a_2 = -7, \quad a_3 = -17$$

پس با توجه به معادله (۹-۱۰۰) می‌توان وارون $\mathbf{A}$ را به صورت زیر به دست آورد

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} &= -\frac{1}{a_3} (\mathbf{A}^2 + a_1 \mathbf{A} + a_2 \mathbf{I}) = \frac{1}{17} (\mathbf{A}^2 + 3\mathbf{A} - 7\mathbf{I}) \\ &= \frac{1}{17} \left\{ \begin{bmatrix} 7 & 0 & -4 \\ -2 & 7 & 8 \\ -2 & 2 & 9 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} - 7 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{17} \begin{bmatrix} 3 & 6 & -4 \\ 7 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{3}{17} & \frac{6}{17} & -\frac{4}{17} \\ \frac{7}{17} & -\frac{3}{17} & \frac{2}{17} \\ \frac{1}{17} & \frac{2}{17} & -\frac{7}{17} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

الف ۹-۱۱ نشان دهید که اگر بتوان ماتریس $\mathbf{A}$ را قطری کرد، آنگاه

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P} e^{\mathbf{D}t} \mathbf{P}^{-1}$$

که در آن $\mathbf{P}$ ماتریس قطری کننده ماتریس $\mathbf{A}$ است، یعنی $\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{D}$ که $\mathbf{D}$ ماتریسی قطری است.

همچنین نشان دهید که اگر ماتریس $\mathbf{A}$ را بتوان به شکل متعارف جردن درآورد، آنگاه

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{S} e^{\mathbf{J}t} \mathbf{S}^{-1}$$

که $\mathbf{S}$ ماتریس تبدیل کننده $\mathbf{A}$ به شکل متعارف جردن $\mathbf{J}$ است، یعنی $\mathbf{S}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{S} = \mathbf{J}$.

حل: معادله حالت زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}$$

اگر ماتریسی را بتوان قطری کرد، برای آن یک ماتریس قطری کننده (ماتریس تبدیل) وجود دارد، که یافتنش روشی استاندارد دارد. P را ماتریس قطری کننده A فرض کنید. با تعریف

$$\mathbf{x} = P \hat{\mathbf{x}}$$

داریم

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = P^{-1} A P \hat{\mathbf{x}} = D \hat{\mathbf{x}}$$

که D ماتریس قطری است. حل معادله اخیر عبارت است از

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = e^{D^t} \hat{\mathbf{x}}(0)$$

پس

$$\mathbf{x}(t) = P \hat{\mathbf{x}}(t) = P e^{D^t} P^{-1} \mathbf{x}(0)$$

$\mathbf{x}(t)$ را می‌توان از رابطه زیر نیز به دست آورد

$$\mathbf{x}(t) = e^{A^t} \mathbf{x}(0)$$

پس $e^{A^t} = P e^{D^t} P^{-1}$ یا

$$e^{A^t} = P e^{D^t} P^{-1} = P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} P^{-1} \quad (9-10)$$

حال به موردی می‌پردازیم که ماتریس A را می‌توان به شکل متعارف جردن درآورد. برای معادله حالت زیر

$$\dot{\mathbf{x}} = A \mathbf{x}$$

ابتدا ماتریس S را، که A را به شکل متعارف جردن درمی‌آورد، می‌یابیم؛ یعنی

$$S^{-1} A S = J$$

که J ماتریسی به شکل متعارف جردن است. حال تعریف می‌کنیم

$$\mathbf{x} = S \hat{\mathbf{x}}$$

پس

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = S^{-1} A S \hat{\mathbf{x}} = J \hat{\mathbf{x}}$$

حل این معادله عبارت است از

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = e^{J^t} \hat{\mathbf{x}}(0)$$

پس

$$\mathbf{x}(t) = S \hat{\mathbf{x}}(t) = S e^{J^t} S^{-1} \mathbf{x}(0)$$

$\mathbf{x}(t)$ را می‌توان به صورت زیر نیز یافت

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0)$$

بنابراین

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{S} e^{\mathbf{J}t} \mathbf{S}^{-1}$$

$e^{\mathbf{J}t}$ یک ماتریس مثلثی است [یعنی درایه‌های زیر (یا بالای) قطر اصلی آن صفر است] و درایه‌هایی به شکل $e^{\lambda_1 t}$ ، $t e^{\lambda_1 t}$ ، $\frac{1}{2} t^2 e^{\lambda_1 t}$ و غیره دارد. برای مثال اگر $\mathbf{J}$ یک ماتریس متعارف جردن به شکل زیر باشد

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

داریم

$$e^{\mathbf{J}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & t e^{\lambda_1 t} & \frac{1}{2} t^2 e^{\lambda_1 t} \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & t e^{\lambda_1 t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix}$$

به نحوی مشابه اگر

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & & 0 \\ & & & \lambda_p & 1 \\ & & & 0 & \lambda_p \\ & & & & & \lambda_q \\ & & & & & & \lambda_v \end{bmatrix}$$

آنگاه

$$e^{\mathbf{J}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & t e^{\lambda_1 t} & \frac{1}{2} t^2 e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & t e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & & & e^{\lambda_p t} & t e^{\lambda_p t} \\ & & & 0 & e^{\lambda_p t} \\ & & & & & e^{\lambda_q t} \\ & & & & & & e^{\lambda_v t} \end{bmatrix}$$

الف ۹-۱۲ چندجمله‌ای درجه $m-1$ زیرا در نظر بگیرید. فرض کرده‌ایم $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ متمایزند:

$$p_k(\lambda) = \frac{(\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_{k-1})(\lambda - \lambda_{k+1}) \cdots (\lambda - \lambda_m)}{(\lambda_k - \lambda_1) \cdots (\lambda_k - \lambda_{k-1})(\lambda_k - \lambda_{k+1}) \cdots (\lambda_k - \lambda_m)}$$

که $k = 1, 2, \dots, m$. توجه کنید که

$$p_k(\lambda_i) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } i = k \\ 0 & \text{اگر } i \neq k \end{cases}$$

پس چندجمله‌ای $f(\lambda)$ زیر از درجه $m-1$ است

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \sum_{k=1}^m f(\lambda_k) p_k(\lambda) \\ &= \sum_{k=1}^m f(\lambda_k) \frac{(\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_{k-1})(\lambda - \lambda_{k+1}) \cdots (\lambda - \lambda_m)}{(\lambda_k - \lambda_1) \cdots (\lambda_k - \lambda_{k-1})(\lambda_k - \lambda_{k+1}) \cdots (\lambda_k - \lambda_m)} \end{aligned}$$

و مقدارش در λ_k برابر است با $f(\lambda_k)$. این معادله معمولاً فرمول درونیابی لاگرانژ نامیده می‌شود. چندجمله‌ای $f(\lambda)$ ، با درجه $m-1$ ، از m داده مستقل $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_m)$ به دست می‌آید. یعنی چندجمله‌ای $f(\lambda)$ از m نقطه $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_m)$ می‌گذرد. چون درجه $f(\lambda)$ ، $m-1$ است، این چندجمله‌ای به نحوی یکتا مشخص می‌شود. هر نمایش دیگری از این چندجمله‌ای مرتبه $m-1$ باید به چندجمله‌ای لاگرانژ $f(\lambda)$ تحویل یابد.

با فرض متمایز بودن مقادیر ویژه ماتریس A ($n \times n$)، را در چندجمله‌ای $p_k(\lambda)$ به جای λ قرار می‌دهیم و به دست می‌آوریم

$$p_k(A) = \frac{(A - \lambda_1 I) \cdots (A - \lambda_{k-1} I)(A - \lambda_{k+1} I) \cdots (A - \lambda_m I)}{(\lambda_k - \lambda_1) \cdots (\lambda_k - \lambda_{k-1})(\lambda_k - \lambda_{k+1}) \cdots (\lambda_k - \lambda_m)}$$

توجه کنید که $p_k(A)$ یک چندجمله‌ای درجه $m-1$ برحسب A است. همچنین دقت کنید که

$$p_k(\lambda_i I) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } i = k \\ 0 & \text{اگر } i \neq k \end{cases}$$

حال تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} f(A) &= \sum_{k=1}^m f(\lambda_k) p_k(A) \\ &= \sum_{k=1}^m f(\lambda_k) \frac{(A - \lambda_1 I) \cdots (A - \lambda_{k-1} I)(A - \lambda_{k+1} I) \cdots (A - \lambda_m I)}{(\lambda_k - \lambda_1) \cdots (\lambda_k - \lambda_{k-1})(\lambda_k - \lambda_{k+1}) \cdots (\lambda_k - \lambda_m)} \end{aligned} \quad (102-9)$$

معادله (۱۰۲-۹) فرمول درونیابی سیلوستر نامیده می‌شود. معادله (۱۰۲-۹) با معادله زیر هم ارز است:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & I \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_m & A \\ \lambda_1^T & \lambda_2^T & \dots & \lambda_m^T & A^T \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{m-1} & \lambda_2^{m-1} & \dots & \lambda_m^{m-1} & A^{m-1} \\ f(\lambda_1) & f(\lambda_2) & \dots & f(\lambda_m) & f(A) \end{pmatrix} = 0 \quad (103-9)$$

معادلات (۹-۱۰۲) و (۹-۱۰۳) برای محاسبه تابع $f(A)$ ماتریس A مثلاً $(\lambda I - A)^{-1}$ ، e^{At} و غیره بسیار به کار می‌رود. معادله (۹-۱۰۳) را می‌توان به صورت زیر هم نوشت:

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^T & \dots & \lambda_1^{m-1} & f(\lambda_1) \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^T & \dots & \lambda_2^{m-1} & f(\lambda_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_m & \lambda_m^T & \dots & \lambda_m^{m-1} & f(\lambda_m) \\ I & A & A^T & \dots & A^{m-1} & f(A) \end{pmatrix} \quad (104-9)$$

نشان دهید که معادلات (۹-۱۰۲) و (۹-۱۰۳) هم‌ارزند. برای ساده کردن آرگومانها فرض کنید $m=4$. حل: معادله (۹-۱۰۳) را به ازای $m=4$ می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & I \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & A \\ \lambda_1^T & \lambda_2^T & \lambda_3^T & \lambda_4^T & A^T \\ \lambda_1^T & \lambda_2^T & \lambda_3^T & \lambda_4^T & A^T \\ f(\lambda_1) & f(\lambda_2) & f(\lambda_3) & f(\lambda_4) & f(A) \end{pmatrix} \\ &= f(A) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_1^T & \lambda_2^T & \lambda_3^T & \lambda_4^T \\ \lambda_1^T & \lambda_2^T & \lambda_3^T & \lambda_4^T \end{pmatrix} - f(\lambda_4) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & I \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & A \\ \lambda_1^T & \lambda_2^T & \lambda_3^T & A^T \\ \lambda_1^T & \lambda_2^T & \lambda_3^T & A^T \end{pmatrix} + \\ &\quad + f(\lambda_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & I \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_4 & A \\ \lambda_1^T & \lambda_2^T & \lambda_4^T & A^T \\ \lambda_1^T & \lambda_2^T & \lambda_4^T & A^T \end{pmatrix} - f(\lambda_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & I \\ \lambda_1 & \lambda_3 & \lambda_4 & A \\ \lambda_1^T & \lambda_3^T & \lambda_4^T & A^T \\ \lambda_1^T & \lambda_3^T & \lambda_4^T & A^T \end{pmatrix} \\ &\quad + f(\lambda_1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & I \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & A \\ \lambda_2^T & \lambda_3^T & \lambda_4^T & A^T \\ \lambda_2^T & \lambda_3^T & \lambda_4^T & A^T \end{pmatrix} \end{aligned}$$

چون

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \end{vmatrix} = (\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)$$

و

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & I \\ \lambda_i & \lambda_j & \lambda_k & A \\ \lambda_i^2 & \lambda_j^2 & \lambda_k^2 & A^2 \\ \lambda_i^3 & \lambda_j^3 & \lambda_k^3 & A^3 \end{vmatrix} = (A - \lambda_k I)(A - \lambda_j I)(A - \lambda_i I)(\lambda_k - \lambda_j)(\lambda_k - \lambda_i)(\lambda_j - \lambda_i)$$

به دست می آوریم

$$\begin{aligned} \Delta &= f(A) [(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)] \\ &\quad - f(\lambda_4) [(A - \lambda_3 I)(A - \lambda_2 I)(A - \lambda_1 I)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)] \\ &\quad + f(\lambda_3) [(A - \lambda_4 I)(A - \lambda_2 I)(A - \lambda_1 I)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)] \\ &\quad - f(\lambda_2) [(A - \lambda_4 I)(A - \lambda_3 I)(A - \lambda_1 I)(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)] \\ &\quad + f(\lambda_1) [(A - \lambda_4 I)(A - \lambda_3 I)(A - \lambda_2 I)(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

با حل این معادله $f(A)$ را به صورت زیر می یابیم

$$\begin{aligned} f(A) &= f(\lambda_1) \frac{(A - \lambda_2 I)(A - \lambda_3 I)(A - \lambda_4 I)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)} + f(\lambda_2) \frac{(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_3 I)(A - \lambda_4 I)}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)} \\ &\quad + f(\lambda_3) \frac{(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I)(A - \lambda_4 I)}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4)} + f(\lambda_4) \frac{(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I)(A - \lambda_3 I)}{(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)} \\ &= \sum_{k=1}^m f(\lambda_k) \frac{(A - \lambda_1 I) \cdots (A - \lambda_{k-1} I)(A - \lambda_{k+1} I) \cdots (A - \lambda_m I)}{(\lambda_k - \lambda_1) \cdots (\lambda_k - \lambda_{k-1})(\lambda_k - \lambda_{k+1}) \cdots (\lambda_k - \lambda_m)} \end{aligned}$$

که در آن $m=4$ ، به این ترتیب هم ارزی معادلات (۹-۱۰۲) و (۹-۱۰۳) نشان داده می شود گرچه فرض کرده ایم $m=4$ ، ولی اگر گمانها را می توان به ازای هر مقدار مثبت m بسط داد. (حالتی که ماتریس A مقادیر ویژه مکرر دارد، در مسئله الف ۹-۱۳ بررسی شده است.)

الف ۹-۱۳ فرمول درونیایی سیلوستر بیان شده با معادله (۹-۱۰۴) را در نظر بگیرید:

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{m-1} & f(\lambda_1) \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{m-1} & f(\lambda_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_m & \lambda_m^2 & \cdots & \lambda_m^{m-1} & f(\lambda_m) \\ I & A & A^2 & \cdots & A^{m-1} & f(A) \end{vmatrix} = 0$$

این فرمول برای تعیین $f(A)$ برای موردی قابل اعمال است که چند جمله‌ای کهنه A فقط ریشه‌های مجزا داشته باشد.

فرض کنید چندجمله‌ای کهنه A ریشه‌های مکرر داشته باشد. بنابراین سطرهای متناظر با ریشه‌های مکرر مشابه می‌شوند و تصحیح درمیان معادله (۹-۱۰۴) ضروری است.

درمیان معادله (۹-۱۰۴) را برای حالتی که چندجمله‌ای کهنه A ریشه مکرر دارد اصلاح کنید. در یافتن معادله درمیان اصلاح شده فرض کنید چندجمله‌ای کهنه A سه ریشه برابر دارد $(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3)$ و بقیه ریشه‌ها $(\lambda_4, \lambda_5, \dots, \lambda_m)$ متمایزند.

حل: چون چندجمله‌ای کهنه A سه ریشه برابر دارد، چند جمله‌ای کهنه $\phi(\lambda)$ را هم می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\begin{aligned}\phi(\lambda) &= \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \dots + a_{m-1} \lambda + a_m \\ &= (\lambda - \lambda_1)^3 (\lambda - \lambda_4) (\lambda - \lambda_5) \dots (\lambda - \lambda_m)\end{aligned}$$

تابع دلخواه $f(A)$ ماتریس $(n \times n)$ را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$f(A) = g(A)\phi(A) + \alpha(A)$$

که در آن چندجمله‌ای کهنه $\phi(A)$ دارای مرتبه m و $\alpha(A)$ یک چندجمله‌ای با درجه $m-1$ یا کمتر است. پس داریم

$$f(\lambda) = g(\lambda)\phi(\lambda) + \alpha(\lambda)$$

که در آن $\alpha(\lambda)$ یک چندجمله‌ای مرتبه $m-1$ یا کم‌ترست و می‌توان آن را به شکل زیر نوشت

$$\alpha(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2 + \dots + \alpha_{m-1} \lambda^{m-1} \quad (9-105)$$

در مورد فعلی داریم

$$\begin{aligned}f(\lambda) &= g(\lambda)\phi(\lambda) + \alpha(\lambda) \\ &= g(\lambda)[(\lambda - \lambda_1)^3 (\lambda - \lambda_4) \dots (\lambda - \lambda_m)] + \alpha(\lambda)\end{aligned} \quad (9-106)$$

با گذاشتن $\lambda_4, \dots, \lambda_m$ در معادله (۹-۱۰۶)، $m-2$ معادله زیر را به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}f(\lambda_1) &= \alpha(\lambda_1) \\ f(\lambda_4) &= \alpha(\lambda_4) \\ &\vdots \\ f(\lambda_m) &= \alpha(\lambda_m)\end{aligned} \quad (9-107)$$

با مشتق‌گیری از معادله (۹-۱۰۶) نسبت به λ به دست می‌آوریم

$$\frac{d}{d\lambda} f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^2 h(\lambda) + \frac{d}{d\lambda} \alpha(\lambda) \quad (9-108)$$

که در آن

$$(\lambda - \lambda_1)^T h(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \left[g(\lambda) (\lambda - \lambda_1)^T (\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_m) \right]$$

با جایگذاری λ_1 به جای λ در معادله (۹-۱۰۸) به دست می آوریم

$$\left. \frac{d}{d\lambda} f(\lambda) \right|_{\lambda=\lambda_1} = f'(\lambda_1) = \left. \frac{d}{d\lambda} \alpha(\lambda) \right|_{\lambda=\lambda_1}$$

با توجه به معادله (۹-۱۰۵) معادله اخیر به صورت زیر درمی آید

$$f'(\lambda_1) = \alpha_1 + 2\alpha_2 \lambda_1 + \cdots + (m-1)\alpha_{m-1} \lambda_1^{m-2} \quad (9-109)$$

به نحوی مشابه با دو بار مشتقگیری از معادله (۹-۱۰۶) نسبت به λ و گذاشتن λ_1 و به جای λ به دست می آوریم

$$\left. \frac{d^2}{d^2\lambda} f(\lambda) \right|_{\lambda=\lambda_1} = f''(\lambda_1) = \left. \frac{d^2}{d^2\lambda} \alpha(\lambda) \right|_{\lambda=\lambda_1}$$

این معادله آخری را می توان به شکل زیر بازنویسی کرد

$$f''(\lambda_1) = 2\alpha_2 + 6\alpha_3 \lambda_1 + \cdots + (m-1)(m-2)\alpha_{m-1} \lambda_1^{m-3} \quad (9-110)$$

معادلات (۹-۱۱۰) و (۹-۱۰۹) و (۹-۱۰۷) را می توان به شکل زیر بازنویسی کرد

$$\begin{aligned} \alpha_2 + 3\alpha_3 \lambda_1 + \cdots + \frac{(m-1)(m-2)}{2} \alpha_{m-1} \lambda_1^{m-3} &= \frac{f''(\lambda_1)}{2} \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 \lambda_1 + \cdots + (m-1)\alpha_{m-1} \lambda_1^{m-2} &= f'(\lambda_1) \\ \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_1^2 + \cdots + \alpha_{m-1} \lambda_1^{m-1} &= f(\lambda_1) \\ \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_2 + \alpha_2 \lambda_2^2 + \cdots + \alpha_{m-1} \lambda_2^{m-1} &= f(\lambda_2) \\ &\vdots \\ \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_m + \alpha_2 \lambda_m^2 + \cdots + \alpha_{m-1} \lambda_m^{m-1} &= f(\lambda_m) \end{aligned} \quad (9-111)$$

این m معادله همزمان مقادیر α_k ($k=0, 1, 2, \dots, m-1$) را به دست می دهند. $\phi(A)=0$ ، زیرا یک چندجمله ای کهنه است، پس $f(A)$ عبارت است از

$$f(A) = g(A)\phi(A) + \alpha(A) = \alpha(A)$$

حال با توجه به معادله (۹-۱۰۵) داریم

$$f(A) = \alpha(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \cdots + \alpha_{m-1} A^{m-1} \quad (9-112)$$

که در آن مقادیر α_k برحسب $f(\lambda_1)$ ، $f'(\lambda_1)$ ، $f''(\lambda_1)$ ، $f(\lambda_2)$ ، $f(\lambda_3)$ ، ...، و $f(\lambda_m)$ داده شده است. برحسب دترمینان می توان $f(A)$ را با حل معادله زیر به دست آورد:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 3\lambda_1 & \dots & \frac{(m-1)(m-2)}{2}\lambda_1^{m-2} & \frac{f'(\lambda_1)}{2} \\ 0 & 1 & 2\lambda_1 & 3\lambda_1^2 & \dots & (m-1)\lambda_1^{m-2} & f'(\lambda_1) \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 & \dots & \lambda_1^{m-1} & f(\lambda_1) \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \lambda_2^3 & \dots & \lambda_2^{m-1} & f(\lambda_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_m & \lambda_m^2 & \lambda_m^3 & \dots & \lambda_m^{m-1} & f(\lambda_m) \\ \text{I} & \text{A} & \text{A}^2 & \text{A}^3 & \dots & \text{A}^{m-1} & f(\text{A}) \end{vmatrix} = 0 \quad (113-9)$$

معادله (۱۱۳-۹) اصلاح خواسته شده را به شکل دترمینانی نشان می‌دهد. این معادله فرمول درونیابی سیلوستر را برای حالتی که معادله کهنه A ریشه مکرر دارد، نشان می‌دهد. (اصلاح لازم برای موارد دیگر به روشنی معلوم است).

الف ۹-۱۴ با استفاده از فرمول درونیابی سیلوستر، e^{At} را به ازای ماتریس زیر حساب کنید.

$$\text{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

حل: با توجه به مسئله الف ۹-۹، ماتریس A چندجمله‌ای مشخصه و چندجمله‌ای کهنه یکسانی دارد. چندجمله‌ای کهنه (چند جمله‌ای مشخصه) عبارت است از

$$\phi(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 1)$$

توجه کنید که $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ و $\lambda_3 = 1$. با توجه به معادله (۱۱۲-۹) و این که در این مسئله $f(\text{A}) = e^{At}$ داریم

$$e^{At} = \alpha_0(t)\text{I} + \alpha_1(t)\text{A} + \alpha_2(t)\text{A}^2$$

که $\alpha_0(t)$ ، $\alpha_1(t)$ و $\alpha_2(t)$ از معادلات زیر به دست می‌آیند

$$\alpha_0(t) + 2\alpha_1(t)\lambda_1 = te^{\lambda_1 t}$$

$$\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_1 + \alpha_2(t)\lambda_1^2 = e^{\lambda_1 t}$$

$$\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_2 + \alpha_2(t)\lambda_2^2 = e^{\lambda_2 t}$$

با گذاشتن $\lambda_1 = 2$ و $\lambda_2 = 1$ در این سه معادله به دست می‌آوریم

$$\alpha_0(t) + 4\alpha_1(t) = te^{2t}$$

$$\alpha_0(t) + 2\alpha_1(t) + \alpha_2(t) = e^{2t}$$

$$\alpha_0(t) + \alpha_1(t) + \alpha_2(t) = e^t$$

با حل این سه معادله $\alpha_0(t)$ ، $\alpha_1(t)$ و $\alpha_2(t)$ را به دست می‌آوریم

$$\alpha_2(t) = 4e^t - 3e^{2t} + 2te^{2t}$$

$$\alpha_3(t) = -4e^t + 4e^{2t} - 3te^{2t}$$

$$\alpha_4(t) = e^t - e^{2t} + te^{2t}$$

پس

$$e^{At} = (4e^t - 3e^{2t} + 2te^{2t}) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (-4e^t + 4e^{2t} - 3te^{2t}) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \\ + (e^t - e^{2t} + te^{2t}) \begin{bmatrix} 4 & 16 & 12 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 9 & 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} e^{2t} & 12e^t - 12e^{2t} + 13te^{2t} & -4e^t + 4e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & -3e^t + 3e^{2t} & e^t \end{bmatrix}$$

الف ۹-۱۵ نشان دهید سیستم توصیف شده با معادلات زیر

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (9-114)$$

$$y = Cx \quad (9-115)$$

که در آن x = بردار حالت (بردار $n \times 1$) y = بردار خروجی (بردار $m \times 1$) ($m \leq n$) u = بردار کنترل (بردار $r \times 1$) A = ماتریس حالت (ماتریس $n \times n$) B = ماتریس کنترل ($n \times r$) C = ماتریس خروجی (ماتریس $m \times n$)کاملاً کنترل پذیر خروجی است، اگر و تنها اگر رتبه ماتریس مرکب $m \times nr$ زیر برابر m باشد

$$P = [CB \mid CAB \mid CA^2B \mid \dots \mid CA^{n-1}B]$$

(توجه کنید که برای کنترل پذیری خروجی، کنترل پذیری حالت نه شرط لازم است نه شرط کافی).

حل: فرض کنید سیستم کنترل پذیر خروجی است و خروجی $y(t)$ شروع شده از $y(0)$ را می توان در فاصلهزمان محدود $0 \leq t \leq T$ به مبدأ فضای حالت برد؛ یعنی

$$y(T) = Cx(T) = 0 \quad (9-116)$$

حل معادله (۹-۱۱۴) به صورت زیر است

$$x(t) = e^{At} \left[x(0) + \int_0^t e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau \right]$$

در $t = T$ داریم

$$\mathbf{x}(T) = e^{AT} \left[\mathbf{x}(0) + \int_0^T e^{-A\tau} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \right] \quad (117-9)$$

با گذاشتن معادله (117-9) در معادله (116-9) به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(T) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(T) \\ &= \mathbf{C} e^{AT} \left[\mathbf{x}(0) + \int_0^T e^{-A\tau} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \right] = 0 \end{aligned} \quad (118-9)$$

از طرف دیگر $\mathbf{y}(0) = \mathbf{C} \mathbf{x}(0)$ و کنترل‌پذیری کامل خروجی به این معنی است که بردار $\mathbf{C} \mathbf{x}(0)$ فضای m بعدی خروجی را جارو می‌کند. چون e^{AT} غیرتکین است، اگر $\mathbf{C} \mathbf{x}(0)$ فضای m بعدی خروجی را جارو کند، $\mathbf{C} e^{AT} \mathbf{x}(0)$ نیز این فضا را جارو می‌کند و برعکس. از معادله (118-9) به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \mathbf{C} e^{AT} \mathbf{x}(0) &= -\mathbf{C} e^{AT} \int_0^T e^{-A\tau} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \\ &= -\mathbf{C} \int_0^T e^{A\tau} \mathbf{B} \mathbf{u}(T-\tau) d\tau \end{aligned}$$

توجه کنید که انتگرال بالا را می‌توان به صورت مجموعی از $\mathbf{A}^i \mathbf{B}_j$ ها بیان کرد

$$\int_0^T e^{A\tau} \mathbf{B} \mathbf{u}(T-\tau) d\tau = \sum_{l=0}^{p-1} \sum_{j=1}^r \gamma_{lj} \mathbf{A}^l \mathbf{B}_j$$

که در آن

$$\gamma_{lj} = \int_0^T \alpha_l(\tau) u_j(T-\tau) d\tau = \text{اسکالر}$$

و $\alpha_l(\tau)$ معادله زیر را ارضا می‌کند.

$$e^{A\tau} = \sum_{l=0}^{p-1} \alpha_l(\tau) \mathbf{A}^l$$

(p درجه چندجمله‌ای کهنه $\mathbf{A}$ است) و $\mathbf{B}_j$ ستون j ام ماتریس $\mathbf{B}$ است. بنابراین $\mathbf{C} e^{AT} \mathbf{x}(0)$ را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\mathbf{C} e^{AT} \mathbf{x}(0) = - \sum_{l=0}^{p-1} \sum_{j=1}^r \gamma_{lj} \mathbf{C} \mathbf{A}^l \mathbf{B}_j$$

معادله اخیر نشان می‌دهد که $\mathbf{C} e^{AT} \mathbf{x}(0)$ ترکیب خطی $\mathbf{C} \mathbf{A}^l \mathbf{B}_j$ ($j=1, 2, \dots, r$; $l=0, 1, 2, \dots, p-1$) است. ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{C} \mathbf{B} \mid \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{B} \mid \mathbf{C} \mathbf{A}^2 \mathbf{B} \mid \dots \mid \mathbf{C} \mathbf{A}^{p-1} \mathbf{B}] \quad (p \leq n)$$

اگر رتبه Q برابر m باشد، رتبه P هم همینطور است، و برعکس [به ازای $p=n$ مسئله کاملاً واضح است. اگر $p < n$ ، آنگاه $CA^h B_r$ (که در آن $p \leq h \leq n-1$) به طور خطی به CB_r ، CAB_r ، ...، و $CA^{p-1} B_r$ وابسته است. پس رتبه P با رتبه Q برابر است. اگر رتبه P برابر m باشد؛ $Ce^{AT}x(0)$ فضای خروجی m بعدی را جارو می‌کند. یعنی اگر رتبه P برابر m باشد، $Cx(0)$ نیز فضای خروجی m بعدی را جارو می‌کند و سیستم دارای ویژگی کنترل پذیری کامل خروجی است.

برعکس، فرض کنید سیستم کنترل‌پذیر کامل خروجی است، ولی رتبه P برابر k است و $k < m$. بنابراین تمام خروجی‌های اولیه‌ای که می‌توان آنها را به مبدأ برد، یک فضای k -بعدی تشکیل می‌دهند. پس ابعاد این فضا کمتر از m است. این مطلب با فرض کنترل‌پذیری کامل خروجی تناقض دارد. به این ترتیب اثبات کامل می‌شود.

توجه کنید که بی‌واسطه می‌توان اثبات کرد که در سیستم تعریف شده با معادلات (۹-۱۱۴) و (۹-۱۱۵) از کنترل‌پذیری کامل حالت در $0 \leq t \leq T$ می‌توان به کنترل‌پذیری خروجی $0 \leq t \leq T$ رسید، اگر و تنها اگر m ردیف C استقلال خطی داشته باشد.

الف ۹-۱۶ کنترل‌پذیری حالت سیستم زیر را بررسی کنید:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} u \quad (9-119)$$

حل: برای این سیستم

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1.5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

چون

$$AB = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

می‌بینیم که B و AB مستقل خطی نیستند، پس رتبه ماتریس $[B \mid AB]$ یک است. بنابراین سیستم فاقد ویژگی کنترل‌پذیری کامل حالت است. در واقع حذف x_2 از معادله (۹-۱۱۹) یا دو معادله همزمان زیر

$$\dot{x}_1 = -3x_1 + x_2 + u$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 + 1.5x_2 + 4u$$

به دست می‌دهد

$$\dot{x}_1 + 1.5\dot{x}_2 - 2.5x_1 = \dot{u} + 2.5u$$

و به صورت تابع تبدیل

$$\frac{X_1(s)}{U(s)} = \frac{s+2.5}{(s+2.5)(s-1)}$$

می‌بینیم که $(s+2.5)$ از صورت و مخرج این تابع تبدیل حذف می‌شود، پس سیستم کنترل‌پذیر کامل حالت

نیست. این سیستم ناپایدار است. توجه کنید که پایداری و کنترل پذیری دو چیز کاملاً متفاوت اند. سیستمهای بسیاری هستند که ناپایدارند ولی کاملاً کنترل پذیرند.

الف ۹-۱۷ نمایش فضای حالت یک سیستم به شکل متعارف کنترل پذیر عبارت است از

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.4 & -1.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (9-120)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0.8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (9-121)$$

همین سیستم را می توان با معادلات فضای حالت زیر، که شکل متعارف مشاهده پذیر است، نیز نشان داد.

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.4 \\ 1 & -1.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (9-122)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} \quad (9-123)$$

نشان دهید که نمایش فضای حالت معادلات (۹-۱۲۰) و (۹-۱۲۱) سیستمی کنترل پذیر، ولی مشاهده ناپذیر را توصیف می کند. همچنین نشان دهید که نمایش فضای حالت معادلات (۹-۱۲۲) و (۹-۱۲۳) سیستمی مشاهده پذیر ولی فاقد کنترل پذیری کامل حالت را بیان می کند. توضیح دهید که چه چیز این تفاوت آشکار در مشاهده پذیری و کنترل پذیری این سیستم را باعث شده است.

حل: سیستم توصیف شده با معادلات (۹-۱۲۰) و (۹-۱۲۱) را در نظر بگیرید. رتبه ماتریس کنترل پذیری زیر ۲ است

$$[B \mid AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1.3 \end{bmatrix}$$

پس سیستم کاملاً کنترل پذیر حالت است. رتبه ماتریس مشاهده پذیری زیر ۱ است

$$[C^* \mid A^*C^*] = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.4 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix}$$

پس سیستم مشاهده پذیر نیست.

حال سیستم تعریف شده با معادلات (۹-۱۲۲) و (۹-۱۲۳) را در نظر بگیرید. رتبه ماتریس کنترل پذیری زیر ۱ است

$$[B \mid AB] = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.4 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix}$$

پس سیستم کاملاً کنترل پذیر حالت نیست. رتبه ماتریس مشاهده پذیری زیر ۲ است

$$[C^* \mid A^*C^*] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1.3 \end{bmatrix}$$

پس سیستم مشاهده پذیر است.

تفاوت آشکار کنترل پذیری و مشاهده پذیری این سیستم در این است که در تابع تبدیل سیستم یک حذف صفر - قطب رخ می دهد. با توجه به معادله (۲-۲۹) (به ازای $D=0$) داریم

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

با توجه به معادلات (۹-۱۲۰) و (۹-۱۲۱) به دست می آوریم

$$\begin{aligned} G(s) &= \begin{bmatrix} 0.8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0.4 & s+1.3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2 + 1.3s + 0.4} \begin{bmatrix} 0.8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1.3 & 1 \\ -0.4 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{s+0.8}{(s+0.8)(s+0.5)} \end{aligned}$$

توجه کنید که معادلات (۹-۱۲۲) و (۹-۱۲۳) نیز همین تابع تبدیل را به دست می دهند. واضح است که در این تابع تبدیل حذف صفر - قطب رخ می دهد.

در صورت بروز حذف صفر - قطب در تابع تبدیل، کنترل پذیری و مشاهده پذیری، بسته به گزینش متغیرهای حالت، تغییر می کند. به خاطر داشته باشد که برای کنترل پذیر و مشاهده پذیر بودن باید هیچ حذف صفر - قطبی صورت نگیرد.

الف ۹-۱۸ ثابت کنید سیستم تعریف شده به صورت زیر

$$\dot{x} = Ax$$

$$y = Cx$$

که در آن x = بردار حالت (بردار $1 \times n$)

y = بردار خروجی (بردار $1 \times m$) ($m \leq n$)

A = ماتریس حالت (ماتریس $n \times n$)

C = ماتریس خروجی (ماتریس $m \times n$)

کاملاً مشاهده پذیر است، اگر و تنها اگر ماتریس مرکب P (ماتریس $n \times n$) زیر دارای رتبه n باشد.

$$P = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

حل: ابتدا شرط لازم را می یابیم. فرض کنید

رتبه $n > P$

بنابراین یک $x(0)$ وجود دارد که

$$P x^{(0)} = 0$$

یا

$$P x^{(0)} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x^{(0)} = \begin{bmatrix} Cx^{(0)} \\ CAx^{(0)} \\ \vdots \\ CA^{n-1}x^{(0)} \end{bmatrix} = 0$$

پس برای یک $x^{(0)}$ خاص داریم

$$CA^l x^{(0)} = 0 \quad l=0,1,2,\dots,n-1$$

با توجه به معادلات (۹-۴۸) یا (۹-۵۰) داریم

$$e^{At} = \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A + \alpha_2(t)A^2 + \dots + \alpha_{m-1}(t)A^{m-1}$$

که در آن m درجه چندجمله‌ای کهنه A است. پس برای یک $x^{(0)}$ خاص داریم

$$C e^{At} x^{(0)} = C \left[\alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A + \alpha_2(t)A^2 + \dots + \alpha_{m-1}(t)A^{m-1} \right] x^{(0)} = 0$$

پس برای این $x^{(0)}$

$$y(t) = Cx(t) = C e^{At} x^{(0)} = 0$$

که نشان می‌دهد به ازای $x^{(0)}$ نمی‌توان را از $y(t)$ به دست آورد. پس رتبه ماتریس P باید برابر n باشد.حال شرط کافی را به دست می‌آوریم. فرض کنید رتبه P برابر n است. چون

$$y(t) = C e^{At} x^{(0)}$$

با ضرب دو طرف این معادله (از سمت چپ) در $e^{A^*t} C^*$ به دست می‌آوریم

$$e^{A^*t} C^* y(t) = e^{A^*t} C^* C e^{At} x^{(0)}$$

با انتگرالگیری از این معادله بین 0 و t به دست می‌آوریم

$$\int_0^t e^{A^*t} C^* y(t) dt = \int_0^t e^{A^*t} C^* C e^{At} x^{(0)} dt \quad (9-124)$$

طرف چپ این معادله کمیتی معلوم است. تعریف می‌کنیم

$$Q(t) = \int_0^t e^{A^*t} C^* y(t) dt = \text{کمیت معلوم} \quad (9-125)$$

حال از معادلات (۹-۱۲۴) و (۹-۱۲۵) به دست می‌آوریم

$$Q(t) = W(t) x^{(0)} \quad (9-126)$$

که در آن

$$W(t) = \int_0^t e^{A^* \tau} C^* C e^{A \tau} d\tau$$

می توان به صورت زیر نشان داد که $W(t)$ ماتریسی غیرتکین است: اگر $|W(t)| = 0$ آنگاه

$$x^* W(t_1) x = \int_0^{t_1} \|C e^{A \tau} x\|^2 d\tau = 0$$

که نتیجه می دهد

$$C e^{A t} x = 0 \quad 0 \leq t \leq t_1$$

یعنی رتبه P کوچکتر از n است. پس $|W(t)| \neq 0$ یا $W(t)$ نانکین است. حال از معادله (۹-۱۲۶) به دست می آوریم

$$x(0) = [W(t)]^{-1} Q(t) \quad (9-127)$$

و $x(0)$ را می توان از معادله (۹-۱۲۷) به دست آورد.

پس نشان دادیم که اگر رتبه P برابر n باشد، می توان $x(0)$ را از $y(t)$ به دست آورد. توجه کنید که $x(0)$ و $y(t)$ به صورت زیر به هم مربوط می شوند

$$y(t) = C e^{A t} x(0) = \alpha_0(t) C x(0) + \alpha_1(t) C A x(0) + \dots + \alpha_{n-1}(t) C A^{n-1} x(0)$$

مسائل

$$\dot{x} = A x + B u$$

$$y = C x$$

ب ۹-۱ سیستمی با تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+6}{s^2+5s+6}$$

که در آن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 1]$$

نمایش فضای حالت این سیستم را به شکل متعارف (الف) کنترل پذیر؛ (ب) مشاهده پذیر، به دست آورید.

ب ۹-۲ سیستمی به صورت زیر تعریف شده است

$$\ddot{y} + 6\dot{y} + 11y + 6y = 6u$$

نمایش فضای حالت این سیستم به صورت متعارف قطری بیابید.

معادلات سیستم را به شکل متعارف کنترل پذیر در آورید.

ب ۹-۳ سیستمی به صورت زیر تعریف شده است

$$\dot{x} = A \dot{x} + B u$$

$$y = C x$$

که در آن

ب ۹-۳ سیستمی به صورت زیر تعریف شده است

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 0 \\ -11 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

نشان دهید که با استفاده از یک تبدیل مناسب می‌توان معادلات حالت را به شکل زیر درآورد

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

سیس خروجی y را برحسب z_1, z_2, z_3 و u بیابید.

ب ۹-۱۰ نمایش فضای حالت سیستم زیر را با استفاده از MATLAB بیابید.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10s^2 + 27s + 16}{s^3 + 14s^2 + 56s + 16}$$

ب ۹-۱۱ نمایش تابع تبدیل سیستم زیر را با استفاده از MATLAB بیابید.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

ب ۹-۱۲ نمایش تابع تبدیل سیستم زیر را با استفاده از MATLAB بیابید.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

تابع تبدیل $Y(s)/U(s)$ را بیابید.

ب ۹-۵ ماتریس A زیر را در نظر بگیرید

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ ماتریس را بیابید. سپس ماتریس تبدیل P را به نحوی بیابید که

$$P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$$

ب ۹-۶ ماتریس A زیر را در نظر بگیرید

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

e^{At} را به سه روش حساب کنید.

ب ۹-۷ سیستمی با معادلات زیر تعریف شده است

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

جواب را برحسب شرایط اولیه $x_1(0), x_2(0)$ و $x_3(0)$ بیابید.

ب ۹-۸ برای سیستم زیر $x_1(t)$ و $x_2(t)$ را بیابید.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

شرایط اولیه عبارت‌اند از

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ب ۹-۹ معادلات سیستم و خروجی زیر را در نظر بگیرید

ب ۹-۱۳ سیستم تعریف شده در زیر را در نظر بگیرید. ب ۹-۱۶ سیستم تعریف شده در زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

c_1 ، c_2 و c_3 را به نحوی برگزینید که سیستم مشاهدهپذیر نباشد. جوابی غیر از جواب واضح $c_3 = c_2 = c_1 = 0$ بیابید.

ب ۹-۱۷ سیستم زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

خروجی عبارت است از

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(الف) نشان دهید سیستم کاملاً مشاهدهپذیر نیست.
(ب) نشان دهید سیستم به ازای خروجی زیر کاملاً مشاهدهپذیر است.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

آیا سیستم کاملاً کنترلپذیر حالت و کاملاً مشاهدهپذیر هست یا نه؟

ب ۹-۱۴ سیستم تعریف شده در زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

آیا سیستم کاملاً کنترلپذیر حالت و کاملاً مشاهدهپذیر هست یا نه؟ آیا سیستم کنترلپذیر کامل خروجی هست یا نه؟

ب ۹-۱۵ آیا سیستم تعریف شده در زیر کاملاً کنترلپذیر حالت و کاملاً مشاهدهپذیر هست یا نه؟

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$