

جدولهای تبدیل لاپلاس

در پیوست الف ابتدا متغیرها و توابع مختلط را مرور می‌کنیم. سپس جدول زوجهای تبدیل لاپلاس و جدول ویژگی‌های تبدیل لاپلاس را ارائه می‌کنیم. سرانجام قضایای پرکاربرد و تبدیل لاپلاس توابع پالس و ضربه را معرفی می‌کنیم.

متغیر مختلط. عدد مختلط یک بخش حقیقی دارد و یک بخش موهومی، که هر دو ثابت‌اند. اگر بخش حقیقی و / یا بخش موهومی متغیر باشد، کمیت مختلط را **متغیر مختلط** می‌نامند. در تبدیل لاپلاس نماد s را به عنوان متغیر مختلط به کار می‌بریم، یعنی

$$s = \sigma + j\omega$$

که σ بخش حقیقی و ω بخش موهومی آن است.

تابع مختلط. تابع مختلط $G(s)$ ، که تابعی از s است، یک بخش حقیقی و یک بخش موهومی دارد

$$G(s) = G_x + jG_y$$

که در آن G_x و G_y کمیات حقیقی‌اند. اندازه $G(s)$ برابر $\sqrt{G_x^2 + G_y^2}$ و زاویه آن θ ، برابر $\tan^{-1}(G_y / G_x)$ است. زاویه در جهت پاد ساعتگرد نسبت به بخش مثبت محور حقیقی اندازه گرفته می‌شود. مزدوج مختلط $G(s)$ عبارت است از $\bar{G}(s) = G_x - jG_y$.

توابع مختلطی که معمولاً در تحلیل سیستمهای کنترلی مطرح می‌شوند توابعی تک مقداری از s هستند و برای هر s خاصی به نحوی یکتا تعیین می‌شوند.

تابع مختلط $G(s)$ را در یک ناحیه تحلیلی می‌نامند اگر $G(s)$ و تمام مشتق‌هایش در آن ناحیه وجود داشته باشند. مشتق تابع تحلیلی $G(s)$ عبارت است از

$$\frac{d}{ds} G(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{G(s + \Delta s) - G(s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta G}{\Delta s}$$

چون $\Delta s = \Delta \sigma + j\Delta \omega$ ، می‌تواند از بینهایت مسیر متفاوت به صفر میل کند. می‌توان ثابت کرد (در اینجا اثبات را بیان نمی‌کنیم) که اگر مشتق روی دو مسیر خاص، یعنی $\Delta s = \Delta \sigma$ و $\Delta s = j\Delta \omega$ برابر باشند، مشتق روی هر مسیر دلخواه $\Delta s = \Delta \sigma + j\Delta \omega$ یکتاست و بنابراین مشتق وجود دارد. برای مسیر خاص $\Delta s = \Delta \sigma$ (یعنی مسیر واقع بر محور حقیقی)

$$\frac{d}{ds} G(s) = \lim_{\Delta \sigma \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta G_x}{\Delta \sigma} + j \frac{\Delta G_y}{\Delta \sigma} \right) = \frac{\partial G_x}{\partial \sigma} + j \frac{\partial G_y}{\partial \sigma}$$

برای مسیر خاص $\Delta s = j\Delta \omega$ (یعنی روی محور موهومی)

$$\frac{d}{ds} G(s) = \lim_{j\Delta \omega \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta G_x}{j\Delta \omega} + j \frac{\Delta G_y}{j\Delta \omega} \right) = -j \frac{\partial G_x}{\partial \omega} + \frac{\partial G_y}{\partial \omega}$$

اگر این دو مشتق برابر باشند

$$\frac{\partial G_x}{\partial \sigma} + j \frac{\partial G_y}{\partial \sigma} = \frac{\partial G_y}{\partial \omega} - j \frac{\partial G_x}{\partial \omega}$$

یا به نحوی معادل دو شرط زیر ارضا شوند

$$\frac{\partial G_x}{\partial \sigma} = \frac{\partial G_y}{\partial \omega} \quad \text{و} \quad \frac{\partial G_y}{\partial \sigma} = -\frac{\partial G_x}{\partial \omega}$$

آنگاه مشتق $dG(s)/ds$ به نحوی یکتا تعیین می‌شود. این دو شرط را شرایط کوشی - ریمن می‌نامند. اگر این دو شرط ارضا شوند، تابع $G(s)$ تحلیلی است. به عنوان مثال تابع $G(s)$ زیر را در نظر بگیرید.

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

پس

$$G(\sigma + j\omega) = \frac{1}{\sigma + j\omega + 1} = G_x + jG_y$$

که در آن

$$G_x = \frac{\sigma + 1}{(\sigma + 1)^2 + \omega^2} \quad \text{و} \quad G_y = \frac{-\omega}{(\sigma + 1)^2 + \omega^2}$$

می‌توان دید که بجز در $s = -1$ (یعنی $\sigma = -1$ ، $\omega = 0$) $G(s)$ شرایط کوشی - ریمن را برآورد می‌کند:

$$\frac{\partial G_x}{\partial \sigma} = \frac{\partial G_y}{\partial \omega} = \frac{\omega^2 - (\sigma+1)^2}{[(\sigma+1)^2 + \omega^2]^2}$$

$$\frac{\partial G_y}{\partial \sigma} = -\frac{\partial G_x}{\partial \omega} = \frac{2\omega(\sigma+1)}{[(\sigma+1)^2 + \omega^2]^2}$$

پس $G(s) = 1/(s+1)$ در تمام صفحه s تحلیلی است. مشتق $dG(s)/ds$ در تمام صفحه بجز در $s = -1$ برابر است با

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}G(s) &= \frac{\partial G_x}{\partial \sigma} + j\frac{\partial G_y}{\partial \sigma} = \frac{\partial G_y}{\partial \omega} - j\frac{\partial G_x}{\partial \omega} \\ &= -\frac{1}{(\sigma + j\omega + 1)^2} = -\frac{1}{(s+1)^2} \end{aligned}$$

توجه کنید که مشتق یک تابع تحلیلی را می‌توان با مشتگیری از $G(s)$ نسبت به s به دست آورد. در این مثال

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+1}\right) = -\frac{1}{(s+1)^2}$$

نقاطی از صفحه s که در آنها تابع $G(s)$ تحلیلی است نقاط عادی نامیده می‌شود. نقاطی از صفحه s که در آنها تابع $G(s)$ تحلیلی نیست نقاط تکین نام دارند. نقاطی تکینی که در آنها تابع $G(s)$ یا مشتقهای آن به بی‌نهایت میل می‌کند قطب نامیده می‌شود. نقاطی که در آنها تابع $G(s)$ برابر صفر است، صفرهای تابع نام دارند. اگر $G(s)$ با میل s به $-p$ به بی‌نهایت میل کند و تابع

$$G(s)(s+p)^n \quad n=1, 2, 3, \dots$$

در $s = -p$ مقداری محدود و غیرصفر داشته باشد، $s = -p$ قطب مرتبه n نامیده می‌شود. به ازای $n=1$ ، قطب را قطب ساده می‌نامند. به ازای $n=2, 3, \dots$ ، قطب را مرتبه دوم، مرتبه سوم، می‌نامند. برای مثال تابع مختلط زیر را در نظر بگیرید.

$$G(s) = \frac{K(s+2)(s+10)}{s(s+1)(s+5)(s+15)^2}$$

در $G(s)$ در $s = -2$ و $s = -10$ صفر دارد، در $s = 0$ ، $s = -1$ ، و $s = -5$ قطب ساده دارد و در $s = -15$ قطب دوگانه (یا قطب مرتبه دوم) دارد. توجه کنید که $s = \infty$ صفر می‌شود. چون به ازای مقادیر بزرگ s

$$G(s) \approx \frac{K}{s^4}$$

در $G(s)$ در $s = \infty$ صفر سه گانه (یا صفر مرتبه سوم) دارد. (اگر نقاط بی‌نهایت را در نظر بگیریم، تعداد صفرها و قطبهای تابع $G(s)$ برابرند. به طور خلاصه تابع $G(s)$ پنج صفر ($s = \infty$ ، $s = \infty$ ، $s = \infty$ ، $s = -10$ ، $s = -2$) و پنج قطب ($s = -15$ ، $s = -15$ ، $s = -5$ ، $s = -1$ ، $s = 0$) دارد.

تبدیل لاپلاس، تعریف می‌کنیم

$$f(t) = 0, t < 0 \text{ برای } f(t) \text{ تابعی از زمان به نحوی که}$$

s = یک متغیر مختلط

$\mathcal{L}$ = نمادی که نشان می‌دهد باید تبدیل لاپلاس کمیت جلوی آن توسط انتگرال تبدیل لاپلاس

$$\int_0^{\infty} e^{-st} dt \text{ محاسبه شود.}$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} \text{ تبدیل لاپلاس}$$

تبدیل لاپلاس $f(t)$ عبارت است از

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

فرایند عکس یافتن تابع زمانی $f(t)$ از تبدیل لاپلاس $F(s)$ عکس تبدیل لاپلاس نام دارد. نمادی که برای عکس تبدیل لاپلاس به کار می‌بریم $\mathcal{L}^{-1}$ است. عکس تبدیل لاپلاس را می‌توان با انتگرال زیر از $F(s)$ به دست آورد.

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds, \quad t > 0 \text{ در}$$

که در آن c طول همگرایی، ثابتی حقیقی است که بزرگتر از بخش حقیقی تمام نقاط تکین $F(s)$ برگزیده می‌شود. پس مسیر انتگرالگیری با محور $j\omega$ موازی است و به فاصله c از آن قرار دارد. این مسیر سمت راست تمام نقاط تکین قرار دارد.

محاسبه انتگرال عکس پیچیده به نظر می‌رسد. در عمل برای یافتن $f(t)$ به ندرت از این انتگرال استفاده می‌شود و روشهای ساده‌تری برای یافتن $f(t)$ وجود دارد. معمولاً از روش بسط به کسرهای جزئی بیان شده در پیوست ب استفاده می‌شود.

در جدول الف-۱ فهرستی از زوجهای تبدیل لاپلاس توابع متداول، و در جدول الف-۲ ویژگیهای تبدیل لاپلاس ارائه شده است.

$F(s)$	$f(t)$	
۱	$\delta(t)$ ضربه واحد	۱
$\frac{1}{s}$	$1(t)$ پله واحد	۲
$\frac{1}{s^2}$	t	۳
$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$	۴
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$t^n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$	۵
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	۶
$\frac{1}{(s+a)^r}$	$t^r e^{-at}$	۷
$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$	۸
$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	$t^n e^{-at} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$	۹
$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\sin \omega t$	۱۰
$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$	۱۱
$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$	$\sinh \omega t$	۱۲
$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$	$\cosh \omega t$	۱۳
$\frac{1}{s(s+a)}$	$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$	۱۴
$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$	۱۵
$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{b-a}(be^{-bt} - ae^{-at})$	۱۶
$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{ab} \left[1 + \frac{1}{a-b}(he^{-at} - ae^{-bt}) \right]$	۱۷
$\frac{1}{s(s+a)^r}$	$\frac{1}{a^r}(1 - e^{-at} - ate^{-at})$	۱۸

$\frac{1}{s^\tau(s+a)}$	$\frac{1}{a}(at-1+e^{-at})$	۱۹
$\frac{\omega^\tau}{(s+a)^\tau+\omega^\tau}$	$e^{-at} \sin \omega t$	۲۰
$\frac{s+a}{(s+a)^\tau+\omega^\tau}$	$e^{-at} \cos \omega t$	۲۱
$\frac{\omega_n^\tau}{s^\tau+\tau\zeta\omega_n s+\omega_n^\tau}$	$\frac{\omega_n^\tau}{\sqrt{1-\zeta^\tau}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1-\zeta^\tau} t \quad (0 < \zeta < 1)$	۲۲
$\frac{s}{s^\tau+\tau\zeta\omega_n s+\omega_n^\tau}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^\tau}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^\tau} t - \phi)$ $\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^\tau}}{\zeta}$ $(0 < \zeta < 1, 0 < \phi < \pi/2)$	۲۳
$\frac{\omega_n^\tau}{s(s^\tau+\tau\zeta\omega_n s+\omega_n^\tau)}$	$1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^\tau}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^\tau} t + \phi)$ $\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^\tau}}{\zeta}$ $(0 < \zeta < 1, 0 < \phi < \pi/2)$	۲۴
$\frac{\omega^\tau}{s(s^\tau+\omega^\tau)}$	$1 - \cos \omega t$	۲۵
$\frac{\omega^\tau}{s^\tau(s^\tau+\omega^\tau)}$	$\omega t - \sin \omega t$	۲۶
$\frac{\tau\omega^\tau}{(s^\tau+\omega^\tau)^\tau}$	$\sin \omega t - \omega t \cos \omega t$	۲۷
$\frac{s}{(s^\tau+\omega^\tau)^\tau}$	$\frac{1}{\tau\omega} t \sin \omega t$	۲۸
$\frac{s^\tau - \omega^\tau}{(s^\tau+\omega^\tau)^\tau}$	$t \cos \omega t$	۲۹
$\frac{s}{(s^\tau+\omega_1^\tau)(s^\tau+\omega_2^\tau)}$	$\frac{1}{\omega_2^\tau - \omega_1^\tau} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) \quad (\omega_1^\tau \neq \omega_2^\tau)$	۳۰
$\frac{s^\tau}{(s^\tau+\omega^\tau)^\tau}$	$\frac{1}{\tau\omega} (\sin \omega t + \omega t \cos \omega t)$	۳۱

جدول الف-۲ خواص و قضیه‌های تبدیل لاپلاس

$\mathcal{L}[A f(t)] = A F(s)$	۱
$\mathcal{L}[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s)$	۲
$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] = s F(s) - f(0_{\pm})$	۳
$\mathcal{L}\left[\frac{d^{\gamma}}{dt^{\gamma}} f(t)\right] = s^{\gamma} F(s) - s f(0_{\pm}) - f'(0_{\pm})$	۴
$\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right] = s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0_{\pm})$ که در آن $f^{(k-1)}(t) = \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} f(t)$	۵
$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{1}{s} \left[\int f(t) dt \right]_{t=0_{\pm}}$	۶
$\mathcal{L}\left[\int_0^t \dots \int_0^t f(t) (dt)^n\right] = \frac{F(s)}{s^n} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{s^{n-k+1}} \left[\int_0^t \dots \int_0^t f(t) (dt)^k \right]_{t=0_{\pm}}$	۷
$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{F(s)}{s}$	۸
$\int_0^{\infty} f(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0^+} F(s)$ به شرط وجود $\int_0^{\infty} f(t) dt$	۹
$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(s+a)$	۱۰
$\mathcal{L}[f(t-\alpha) 1(t-\alpha)] = e^{-\alpha s} F(s), \alpha \geq 0$	۱۱
$\mathcal{L}[t f(t)] = -\frac{d}{ds} F(s)$	۱۲
$\mathcal{L}[t^{\gamma} f(t)] = \frac{d^{\gamma}}{ds^{\gamma}} F(s)$	۱۳
$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s) \quad (n=1, 2, 3, \dots)$	۱۴
$\mathcal{L}\left[\frac{1}{t} f(t)\right] = \int_s^{\infty} F(s) ds \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} f(t)$ به شرط وجود	۱۵
$\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right] = a F(as)$	۱۶
$\mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau\right] = F_1(s) F_2(s)$	۱۷
$\mathcal{L}[f(t)g(t)] = \frac{1}{\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p) G(s-p) dp$	۱۸

سرانجام دو قضیهٔ پرکاربرد و تبدیل لاپلاس تابع پالس و تابع ضربه را معرفی می‌کنیم.

$f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s)$	قضیهٔ مقدار اولیه
$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s)$	قضیهٔ مقدار نهایی
$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{A}{t_* s} - \frac{A}{t_* s} e^{-st_*}$	تابع پالس $f(t) = \frac{A}{t_*} 1(t) - \frac{A}{t_*} 1(t - t_*)$
$\begin{aligned} \mathcal{L}[g(t)] &= \lim_{t_* \rightarrow \infty} \left[\frac{A}{t_* s} (1 - e^{-st_*}) \right] \\ &= \lim_{t_* \rightarrow \infty} \frac{(d/dt_*) [A(1 - e^{-st_*})]}{(d/dt_*)(t_* s)} \\ &= \frac{As}{s} = A \end{aligned}$	تابع ضربه $g(t) = \lim_{t_* \rightarrow \infty} \frac{A}{t_*} \quad \text{در } 0 < t < t_*$ $g(t) = 0 \quad \text{در } t < 0, t > t_*$

بسط به کسرهای جزئی

پیش از معرفی روش MATLAB برای بسط به کسرهای جزئی توابع تبدیل، روش دستی این کار را ارائه می‌کنیم.

بسط به کسرهای جزئی در حالتی که $F(s)$ تنها قطبهای مجزای دارد. $F(s)$ را به صورت تجزیه شده در نظر بگیرد.

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)} \quad m < n$$

که در آن $p_1, p_2, \dots, p_n, z_1, z_2, \dots, z_m$ یا حقیقی‌اند یا مختلط، ولی به ازای هر p_i یا z_j مختلط، مزدوج آنها نیز وجود دارد. اگر $F(s)$ تنها قطبهای مجزا داشته باشد، می‌توان آن را به ترتیب زیر به شکل جمع کسرهای جزئی بسط داد

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{a_1}{s+p_1} + \frac{a_2}{s+p_2} + \cdots + \frac{a_n}{s+p_n} \quad (\text{ب-۱})$$

که در آن a_k ($k=1,2,\dots,n$) ثابت‌اند. ضریب a_k را باقیمانده در قطب $s=-p_k$ می‌نامند. مقدار a_k را می‌توان با ضرب دو طرف معادله (ب-۱) در $(s+p_k)$ و گذاشتن $s=-p_k$ به دست آورد

$$\begin{aligned} \left[(s+p_k) \frac{B(s)}{A(s)} \right]_{s=-p_k} &= \left[\frac{a_1}{s+p_1} (s+p_k) + \frac{a_2}{s+p_2} (s+p_k) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \frac{a_k}{s+p_k} (s+p_k) + \cdots + \frac{a_n}{s+p_n} (s+p_k) \right]_{s=-p_k} \\ &= a_k \end{aligned}$$

می‌بینیم که تمام جملات بسط بجز a_k حذف می‌شوند. پس باقیمانده a_k را می‌توان به شکل زیر یافت

$$a_k = \left[(s + p_k) \frac{B(s)}{A(s)} \right]_{s=p_k}$$

توجه کنید که چون $f(t)$ تابعی حقیقی است، اگر p_1 و p_2 مزدوج مختلط باشند، باقیمانده‌های a_1 و a_2 نیز مزدوج مختلط‌اند. یعنی تنها یکی از دو باقیمانده a_1 و a_2 را باید تعیین کرد و دیگری خود به خود تعیین می‌شود.

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{a_k}{s + p_k} \right] = a_k e^{-p_k t} \quad \text{چون}$$

$f(t)$ به صورت زیر به دست می‌آید

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = a_1 e^{-p_1 t} + a_2 e^{-p_2 t} + \dots + a_n e^{-p_n t} \quad t \geq 0$$

عکس تبدیل لاپلاس تابع زیر را بیابید.

مثال ب-۱

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

بسط به کسرهای جزیی عبارت است از

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{a_1}{s+1} + \frac{a_2}{s+2}$$

a_1 و a_2 را به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$a_1 = \left[(s+1) \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \right]_{s=-1} = \left[\frac{s+3}{s+2} \right]_{s=-1} = 2$$

$$a_2 = \left[(s+2) \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \right]_{s=-2} = \left[\frac{s+3}{s+1} \right]_{s=-2} = -1$$

پس

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2}{s+1} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{-1}{s+2} \right] \\ &= 2e^{-t} - e^{-2t} \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

عکس تبدیل لاپلاس زیر را بیابید.

مثال ب-۲

$$G(s) = \frac{s^2 + 5s^2 + 9s + 7}{(s+1)(s+2)}$$

در اینجا چون درجه صورت بزرگتر از درجه مخرج است، ابتدا باید صورت را بر مخرج تقسیم کنیم.

$$G(s) = s + 2 + \frac{s + 3}{(s + 1)(s + 2)}$$

توجه کنید که تبدیل لاپلاس تابع ضربی واحد $\delta(t)$ برابر ۱ و تبدیل لاپلاس $d\delta(t)/dt$ برابر s است. جمله سوم طرف راست این معادله همان $F(s)$ مثال ب-۱ است. پس عکس تبدیل لاپلاس $G(s)$ عبارت است از

$$g(t) = \frac{d}{dt} \delta(t) + 2\delta(t) + 2e^{-t} - e^{-2t} \quad t \geq 0$$

عکس تبدیل لاپلاس زیر را بیابید.

مثال ب-۳

$$F(s) = \frac{2s + 12}{s^2 + 2s + 5}$$

توجه کنید که چندجمله‌ای منخرج را می‌توان به صورت زیر تجزیه کرد

$$s^2 + 2s + 5 = (s + 1 + 2j)(s + 1 - 2j)$$

وقتی تابع $F(s)$ تنها یک زوج قطب مزدوج مختلط دارد، بهتر است آن را به صورت کسره‌های جزیی بسط ندهیم، بلکه آن را به صورت تبدیل لاپلاس توابع سینوس و کسینوس میرا درآوریم.

توجه کنید که $s^2 + 2s + 5 = (s + 1)^2 + 2^2$ و تبدیل لاپلاس توابع $e^{-at} \sin \omega t$ و $e^{-at} \cos \omega t$ به صورت

زیر است

$$\mathcal{L}[e^{-at} \sin \omega t] = \frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}[e^{-at} \cos \omega t] = \frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}$$

$F(s)$ داده شده را می‌توان به صورت مجموع تبدیل لاپلاسه‌های یک سینوسی میرا و یک کسینوسی میرا نوشت

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{2s + 12}{s^2 + 2s + 5} = \frac{10 + 2(s + 1)}{(s + 1)^2 + 2^2} \\ &= 5 \frac{2}{(s + 1)^2 + 2^2} + 2 \frac{(s + 1)}{(s + 1)^2 + 2^2} \end{aligned}$$

که نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \\ &= 5 \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s + 1)^2 + 2^2}\right] + 2 \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s + 1)}{(s + 1)^2 + 2^2}\right] \\ &= 5e^{-t} \sin 2t + 2e^{-t} \cos 2t \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

بسط به کسره‌های جزیی وقتی $F(s)$ قطب مکرر دارد، به جای بحث در مورد حالت کلی مثالی از چگونگی

یافتن بسط $F(s)$ به کسره‌های جزیی ارائه می‌کنیم.

$F(s)$ زیر را در نظر بگیرید:

$$F(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s+1)^3}$$

بسط $F(s)$ سه جمله دارد

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_1}{s+1} + \frac{b_2}{(s+1)^2} + \frac{b_3}{(s+1)^3}$$

b_1 ، b_2 ، و b_3 به صورت زیر تعیین می‌شود. با ضرب دو طرف معادله اخیر در $(s+1)^3$ به دست می‌آوریم

$$(s+1)^3 \frac{B(s)}{A(s)} = b_1(s+1)^2 + b_2(s+1) + b_3 \quad (\text{ب-۲})$$

پس با گذاشتن $s = -1$ در معادله (ب-۲) به دست می‌آوریم

$$\left[(s+1)^3 \frac{B(s)}{A(s)} \right]_{s=-1} = b_3$$

اگر از دو طرف معادله (ب-۲) نسبت به s مشتق بگیریم به دست می‌آوریم

$$\frac{d}{ds} \left[(s+1)^3 \frac{B(s)}{A(s)} \right] = b_2 + 2b_1(s+1) \quad (\text{ب-۳})$$

و با گذاشتن $s = -1$ در معادله (ب-۳) به دست می‌آوریم

$$\frac{d}{ds} \left[(s+1)^3 \frac{B(s)}{A(s)} \right]_{s=-1} = b_2$$

نتیجه گرفتن مشتق از دو طرف معادله (ب-۳) نسبت به s عبارت است از

$$\frac{d^2}{ds^2} \left[(s+1)^3 \frac{B(s)}{A(s)} \right] = 2b_1$$

تحلیل بالا نشان می‌دهد که برای یافتن مقادیر b_1 ، b_2 ، و b_3 می‌توانیم به روش سازمان یافته زیر عمل کنیم

$$\begin{aligned} b_3 &= \left[(s+1)^3 \frac{B(s)}{A(s)} \right]_{s=-1} \\ &= (s^2 + 2s + 3)_{s=-1} \\ &= 2 \\ b_2 &= \left\{ \frac{d}{ds} \left[(s+1)^3 \frac{B(s)}{A(s)} \right] \right\}_{s=-1} \\ &= \left[\frac{d}{ds} (s^2 + 2s + 3) \right]_{s=-1} \\ &= (2s + 2)_{s=-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{\tau!} \left\{ \frac{d^\tau}{ds^\tau} \left[(s+1)^\tau \frac{B(s)}{A(s)} \right] \right\}_{s=-1} \\ &= \frac{1}{\tau!} \left[\frac{d^\tau}{ds^\tau} (s^\tau + \tau s + \tau) \right]_{s=-1} \\ &= \frac{1}{\tau!} (\tau) = 1 \end{aligned}$$

پس به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1} [F(s)] \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+1} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\tau}{(s+1)^\tau} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\tau}{(s+1)^\tau} \right] \\ &= e^{-t} + 0 + t^\tau e^{-t} \\ &= (1+t^\tau) e^{-t} \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

توضیح. برای توابع پیچیده‌ای که مخرجشان چندجمله‌ای‌های مرتبه بالاست، بسط به کسره‌های جزئی می‌تواند بسیار وقت‌گیر باشد. در این موارد با MATLAB را توصیه می‌کنیم.

بسط به کسره‌های جزئی با MATLAB. MATLAB دستوری برای یافتن بسط $B(s)/A(s)$ به کسره‌های جزئی دارد. بسط به کسره‌های جزئی. تابع $B(s)/A(s)$ زیر را با استفاده MATLAB در نظر بگیرید.

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\text{num}}{\text{den}} = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$$

که در آن بعضی a_i ها و b_i ها ممکن است صفر باشد. در MATLAB ضرایب چندجمله‌ای‌های صورت و مخرج در بردارهای ردیفی مشخص می‌شوند. یعنی

$$\begin{aligned} \text{num} &= [b_n \quad b_{n-1} \quad \dots \quad b_0] \\ \text{den} &= [1 \quad a_{n-1} \quad \dots \quad a_0] \end{aligned}$$

دستور

$$[r, p, k] = \text{residue}(\text{num}, \text{den})$$

باقیمانده‌ها (r)، قطبها (p) و جملات غیرکسری (k) نسبت دو چندجمله‌ای $B(s)$ و $A(s)$ را به دست می‌دهد.

بسط به کسره‌های جزئی $B(s)/A(s)$ عبارت است از

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{r(1)}{s-p(1)} + \frac{r(2)}{s-p(2)} + \dots + \frac{r(n)}{s-p(n)} + k(s) \quad (\text{ب-۴})$$

از مقایسه معادلات (ب-۱) و (ب-۴) درمی‌یابیم که $p(1) = -p_1$ ، $p(2) = -p_2$ ، $\dots$ ، $p(n) = -p_n$ ، $r(1) = a_1$ ، $r(2) = a_2$ ، $\dots$ ، $r(n) = a_n$ ، $k(s)$ خارج قسمت است.

مثال ب-۴

بسط تابع تبدیل زیر به کسرهای جزئی را به دست آورید.

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{2s^3 + 5s^2 + 3s + 6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

برای این تابع

$$\text{num} = [2 \ 5 \ 3 \ 6]$$

$$\text{den} = [1 \ 6 \ 11 \ 6]$$

دستور

$$[r,p,k] = \text{residue}(\text{num}, \text{den})$$

نتیجه زیر را به دست می‌دهد:

$$\begin{aligned} [r,p,k] &= \text{residue}(\text{num}, \text{den}) \\ r &= \\ &\quad -6.0000 \\ &\quad -4.0000 \\ &\quad 3.0000 \\ p &= \\ &\quad -3.0000 \\ &\quad -2.0000 \\ &\quad -1.0000 \\ k &= \\ &\quad 2 \end{aligned}$$

(توجه کنید که باقیمانده‌ها در بردار ستونی r ، محل قطبها در بردار ستونی p ، و خارج قسمت در بردار k برگردانده می‌شود) یعنی بسط کسرهای جزئی $B(s)/A(s)$ به دست آمده با MATLAB عبارت است از

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{2s^3 + 5s^2 + 3s + 6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{-6}{s+3} + \frac{-4}{s+2} + \frac{3}{s+1} + 2$$

توجه کنید که اگر $p(j) = p(j+1) = \dots = p(j+m-1)$ [یعنی $p_j = p_{j+1} = \dots = p_{j+m-1}$] یک قطب مرتبه m است. در چنین حالتی بسط شامل جمله‌هایی به صورت زیر است

$$\frac{r(j)}{s-p(j)} + \frac{r(j+1)}{[s-p(j)]^2} + \dots + \frac{r(j+m-1)}{[s-p(j)]^m}$$

برای جزئیات بیشتر مثال ب-۵ را ببینید

مثال ب-۵

تابع زیر را با استفاده از MATLAB به کسره‌های جزئی بسط دهید.

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s+1)^3} = \frac{s^2 + 2s + 3}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$$

برای این تابع داریم

```
num = [0 1 2 3]
```

```
den = [1 3 3 1]
```

دستور زیر را به کار می‌بریم

```
[r,p,k] = residue(num, den)
```

نتیجه در زیر نشان داده شده است :

```
num = [1 2 3];
den = [1 3 3 1];
[r,p,k] = residue(num,den)

r =

    1.0000
    0.0000
    2.0000

p =

   -1.0000
   -1.0000
   -1.0000

k =

    []
```

بنابراین یعنی بسط $B(s)/A(s)$ به کسره‌های جزئی به صورت زیر است

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{1}{s+1} + \frac{0}{(s+1)^2} + \frac{2}{(s+1)^3}$$

توجه کنید که خارج قسمت k صفر است.

جبر برداری - ماتریسی

در این پیوست ابتدا دترمینان ماتریس را مرور می‌کنیم و سپس ماتریس الحاقی، وارون ماتریس، و مشتق و انتگرال ماتریس را تعریف می‌کنیم.

دترمینان ماتریس، هر ماتریس مربعی A یک دترمینان دارد. دترمینان ماتریس مربعی A را به صورت $|A|$ یا $\det A$ نشان می‌دهیم. دترمینان این ویژگی‌ها را دارد:

۱. اگر جای دو ردیف یا ستون پشت سرهم را عوض کنیم، علامت دترمینان تغییر می‌کند.
۲. اگر یک ردیف یا یک ستون همگی صفر باشند، مقدار دترمینان صفر است.
۳. اگر درایه‌های یک ردیف (یا یک ستون) دقیقاً k برابر یک ردیف (یا یک ستون) دیگر باشد، دترمینان صفر می‌شود.
۴. اگر به یک ردیف (یا یک ستون) مضرب ثابتی از یک ردیف دیگر (یا ستون دیگر) افزوده شود، مقدار دترمینان تغییر نمی‌کند.
۵. اگر یک دترمینان در مقدار ثابتی ضرب شود، تنها درایه‌های یک ردیف (یا یک ستون) در آن مقدار ثابت ضرب می‌شوند. ولی توجه کنید که دترمینان k برابر یک ماتریس $n \times n$ ، k^n برابر دترمینان آن ماتریس است؛ یعنی

$$|kA| = k^n |A|$$

علت این است که

$$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1m} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nm} \end{bmatrix}$$

۶. دترمینان حاصلضرب دو ماتریس مربعی A و B با حاصلضرب دترمینانهای آن دو ماتریس برابر است؛ یعنی

$$|AB| = |A||B|$$

اگر $B =$ یک ماتریس $n \times m$ و $C =$ یک ماتریس $m \times n$ باشد، آنگاه

$$\det(I_n + BC) = \det(I_m + CB)$$

اگر $A \neq 0$ و $D =$ یک ماتریس $m \times m$ باشد، آنگاه

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(A) \times \det(S)$$

که در آن $S = D - CA^{-1}B$.

اگر $D \neq 0$ ، آنگاه

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(D) \times \det(T)$$

که در آن $T = A - BD^{-1}C$.

اگر $B = 0$ یا $C = 0$ ، آنگاه

$$\det \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix} = \det(A) \times \det(D)$$

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} = \det(A) \times \det(D)$$

رتبه ماتریس. می‌گوییم ماتریس A دارای رتبه m است، اگر این ماتریس یک زیر ماتریس $m \times m$ (ماتریس M) داشته باشد، طوری که دترمینان M صفر نباشد، و دترمینان هر زیر ماتریس $r \times r$ ماتریس A با $r \geq m+1$ صفر باشد.

به عنوان مثال ماتریس A زیر را در نظر بگیرید

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

توجه کنید که $|A| = 0$. یکی از بزرگترین زیرماتریسهایی که دترمینان غیر صفر دارد، به صورت زیر است

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین رتبه ماتریس A برابر ۳ است.

کهاد M_{ij} . اگر ردیف i ام و ستون j ام یک ماتریس $n \times n$ را حذف کنیم، یک ماتریس $(n-1) \times (n-1)$ حاصل می‌شود. دترمینان این ماتریس $(n-1) \times (n-1)$ را کهاد M_{ij} ماتریس اصلی می‌نامند.

هم عامل A_{ij} . هم عامل A_{ij} درایه a_{ij} ماتریس A ($n \times n$) به صورت زیر تعریف می‌شود

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

یعنی هم عامل A_{ij} درایه a_{ij} حاصلضرب $(-1)^{i+j}$ و دترمینان ماتریسی است که با حذف ردیف i ام و ستون j ام ماتریس A به دست می‌آید. توجه کنید که هم عامل A_{ij} درایه a_{ij} ضرب درایه a_{ij} در بسط دترمینان $|A|$ است، زیرا می‌توان نشان داد که

$$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = |A|$$

اگر به جای $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ قرار دهیم $a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn}$ ، به دست می‌آوریم

$$a_{j1}A_{i1} + a_{j2}A_{i2} + \dots + a_{jn}A_{in} = 0 \quad i \neq j$$

زیرا دترمینان A در این حالت دو ردیف مشابه دارد. بنابراین داریم

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} A_{ik} = \delta_{ij} |A|$$

$$\sum_{k=1}^n a_{ki} A_{kj} = \delta_{ij} |A| \quad \text{به نحوی مشابه}$$

ماتریس الحاقی. ماتریس B که درایه ردیف i ام و ستون j ام آن با A_{ji} برابر است، ماتریس الحاقی A نامیده، و با نماد $\text{adj} A$ نشان داده می‌شود، یعنی

$$B = (b_{ij}) = (A_{ji}) = \text{adj} A$$

یعنی ماتریس الحاقی A ترانزاده ماتریسی است که درایه‌های آن هم عامل‌های A هستند؛ یا

$$\text{adj} A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

توجه کنید که درایه ردیف j ام و ستون i ام حاصلضرب $A(\text{adj} A)$ عبارت است از

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^n a_{jk} A_{ik} = \delta_{ji} |A|$$

بنابراین $A(\text{adj} A)$ یک ماتریس قطری است که درایه‌های قطر آن با $|A|$ برابرند، یا

$$A(\text{adj} A) = |A| I$$

به نحوی مشابه درایه ردیف j ام و ستون i ام حاصلضرب $(\text{adj} A)A$ عبارت است از

$$\sum_{k=1}^n b_{jk} a_{ki} = \sum_{k=1}^n A_{kj} a_{ki} = \delta_{ij} |A|$$

به این ترتیب به رابطه زیر می‌رسیم

$$A(\text{adj}A) = (\text{adj}A)A = |A| I \quad (\text{ج-۱})$$

بنابراین

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}A}{|A|} = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \dots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{bmatrix}$$

که در آن A_{ij} هم عامل a_{ij} ماتریس A است. پس جملات ستون i ام ماتریس A^{-1} حاصلضرب $1/|A|$ در هم عامل‌های ردیف i ام ماتریس اصلی A هستند. برای نمونه اگر

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

آنگاه ماتریس الحاقی A و دترمینان $|A|$ را می‌توان به صورت زیر تعیین کرد

$$\begin{aligned} \text{adj}A &= \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 6 & -4 \\ 7 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

و

$$|A| = 17$$

پس وارون A عبارت است از

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}A}{|A|} = \begin{bmatrix} \frac{3}{17} & \frac{6}{17} & -\frac{4}{17} \\ \frac{7}{17} & -\frac{3}{17} & \frac{2}{17} \\ \frac{1}{17} & \frac{2}{17} & -\frac{7}{17} \end{bmatrix}$$

در زیر فرمول‌هایی برای یافتن ماتریس وارون ماتریسهای 2×2 و 3×3 به دست می‌آوریم. برای ماتریس 2×2 زیر

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{به شرط } ad - bc \neq 0$$

ماتریس وارون عبارت است از

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

و برای ماتریس 3×3 زیر

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \quad \text{به شرط } |A| \neq 0$$

داریم

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

توجه کنید که

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$(A^{-1})' = (A')^{-1}$$

$$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$$

چند فرمول مفید دیگر نیز وجود دارد. فرض کنید $A =$ ماتریس $n \times n$ ، $B =$ ماتریس $n \times m$ ، $C =$ ماتریس $m \times n$ و $D =$ ماتریس $m \times m$. در این صورت

$$[A + BC]^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B[I_m + CA^{-1}B]^{-1}CA^{-1}$$

اگر $|A| \neq 0$ و $|D| \neq 0$ ، آنگاه

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix}$$

اگر $|A| \neq 0$ ، $S = D - CA^{-1}B$ ، و $|S| \neq 0$ ، آنگاه

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}BS^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BS^{-1} \\ -S^{-1}CA^{-1} & S^{-1} \end{bmatrix}$$

اگر $|D| \neq 0$ ، $T = A - BD^{-1}C$ ، و $|T| \neq 0$ ، آنگاه

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} T^{-1} & -T^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}CT^{-1} & D^{-1} + D^{-1}CT^{-1}BD^{-1} \end{bmatrix}$$

حال روش یافتن وارون یک ماتریس مربعی به کمک MATLAB را بیان می‌کنیم . در صورتی که تمام درایه‌ها مقادیر عددی باشند ، این روش بهترین راه یافتن ماتریس وارون است .

روش MATLAB برای یافتن وارون یک ماتریس مربعی . وارون ماتریس مربعی A را می‌توان با استفاده از دستور زیر به دست آورد

inv(A)

برای نمونه ، ماتریس A زیر را در نظر بگیرید

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

وارون A را می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

```
A = [1 1 2;3 4 0;1 2 5];
inv(A)
ans =
    2.2222    -0.1111   -0.8889
   -1.6667     0.3333    0.6667
    0.2222    -0.1111    0.1111
```

یعنی

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2/2222 & -0/1111 & -0/8889 \\ -1/6667 & 0/3333 & 0/6667 \\ 0/2222 & -0/1111 & 0/1111 \end{bmatrix}$$

حساس بودن MATLAB به بزرگ و کوچک بودن حروف . توجه به این نکته مهم است که MATLAB به بزرگ و کوچک بودن حروف حساس است . یعنی MATLAB بین حروف a و A فرق می‌گذارد ، بنابراین x و X دو متغیر متفاوت هستند. نام تمام توابع باید با حروف کوچک نوشته شود ، مثل $\text{poly}(A)$ ، $\text{eig}(A)$ ، $\text{inv}(A)$ و غیره .

مشتقگیری و انتگرالگیری از ماتریس . مشتق ماتریس $A(t)$ ($n \times m$) یک ماتریس $n \times m$ است که هر درایه آن مشتق درایه متناظر ماتریس اصلی است ، به شرطی که تمام داریه‌های $a_{ij}(t)$ ماتریس نسبت به t مشتق‌پذیر باشند. یعنی

$$\frac{d}{dt} \mathbf{A}(t) = \left(\frac{d}{dt} a_{ij}(t) \right) = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} a_{11}(t) & \frac{d}{dt} a_{12}(t) & \cdots & \frac{d}{dt} a_{1m}(t) \\ \frac{d}{dt} a_{21}(t) & \frac{d}{dt} a_{22}(t) & \cdots & \frac{d}{dt} a_{2m}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{d}{dt} a_{n1}(t) & \frac{d}{dt} a_{n2}(t) & \cdots & \frac{d}{dt} a_{nm}(t) \end{bmatrix}$$

به نحوی مشابه برای ماتریس $\mathbf{A}(t)$ ($n \times m$) انتگرال به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\int \mathbf{A}(t) dt = \left(\int a_{ij}(t) dt \right) = \begin{bmatrix} \int a_{11}(t) dt & \int a_{12}(t) dt & \cdots & \int a_{1m}(t) dt \\ \int a_{21}(t) dt & \int a_{22}(t) dt & \cdots & \int a_{2m}(t) dt \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \int a_{n1}(t) dt & \int a_{n2}(t) dt & \cdots & \int a_{nm}(t) dt \end{bmatrix}$$

مشتقگیری از حاصلضرب دو ماتریس. اگر ماتریس‌های $\mathbf{A}(t)$ و $\mathbf{B}(t)$ نسبت به t مشتق پذیر باشند، آنگاه

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t)] = \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} \mathbf{B}(t) + \mathbf{A}(t) \frac{d\mathbf{B}(t)}{dt}$$

در اینجا نیز ضرب $\mathbf{A}(t)$ و $d\mathbf{B}(t)/dt$ [یا $d\mathbf{A}(t)/dt$ و $\mathbf{B}(t)$] در حاصل کلی خاصیت جابه‌جایی ندارد.

مشتق $\mathbf{A}^{-1}(t)$. اگر ماتریس $\mathbf{A}(t)$ و ماتریس $\mathbf{A}^{-1}(t)$ نسبت به t مشتق‌پذیر باشند، مشتق $\mathbf{A}^{-1}(t)$ عبارت است از

$$\frac{d\mathbf{A}^{-1}(t)}{dt} = -\mathbf{A}^{-1}(t) \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} \mathbf{A}^{-1}(t)$$

مشتق را می‌توان با مشتقگیری از $\mathbf{A}(t)\mathbf{A}^{-1}(t)$ نسبت به t به دست آورد. چون

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{A}(t)\mathbf{A}^{-1}(t)] = \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} \mathbf{A}^{-1}(t) + \mathbf{A}(t) \frac{d\mathbf{A}^{-1}(t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{A}(t)\mathbf{A}^{-1}(t)] = \frac{d}{dt} \mathbf{I} = \mathbf{0} \quad \text{و}$$

نتیجه می‌گیریم

$$\mathbf{A}(t) \frac{d\mathbf{A}^{-1}(t)}{dt} = -\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} \mathbf{A}^{-1}(t)$$

یا

$$\frac{d\mathbf{A}^{-1}(t)}{dt} = -\mathbf{A}^{-1}(t) \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} \mathbf{A}^{-1}(t)$$



- A-1 Anderson, B. D. O., and J. B. Moore, *Linear Optimal Control*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1971.
- A-2 Athans, M., and P. L. Falb, *Optimal Control: An Introduction to the Theory and Its Applications*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1965.
- B-1 Barnet, S., "Matrices, Polynomials, and Linear Time-Invariant Systems," *IEEE Trans. Automatic Control*, **AC-18** (1973), pp. 1-10.
- B-2 Bayliss, L. E., *Living Control Systems*. London: English Universities Press Limited, 1966.
- B-3 Bellman, R., *Introduction to Matrix Analysis*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1960.
- B-4 Bode, H. W., *Network Analysis and Feedback Design*. New York: Van Nostrand Reinhold, 1945.
- B-5 Brogan, W. L., *Modern Control Theory*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1985.
- B-6 Butman, S., and R. Sivan (Sussman), "On Cancellations, Controllability and Observability," *IEEE Trans. Automatic Control*, **AC-9** (1964), pp. 317-8.
- C-1 Campbell, D. P., *Process Dynamics*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1958.
- C-2 Cannon, R., *Dynamics of Physical Systems*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1967.
- C-3 Chang, P. M., and S. Jayasuriya, "An Evaluation of Several Controller Synthesis Methodologies Using a Rotating Flexible Beam as a Test Bed," *ASME J. Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **117** (1995), pp. 360-73.
- C-4 Cheng, D. K., *Analysis of Linear Systems*. Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1959.
- C-5 Churchill, R. V., *Operational Mathematics*, 3rd ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1972.

- C-6 Coddington, E. A., and N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1955.
- C-7 Craig, J. J., *Introduction to Robotics, Mechanics and Control*. Reading, MA: AddisonWesley Publishing Company, Inc., 1986.
- C-8 Cunningham, W. J., *Introduction to Nonlinear Analysis*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1958.
- D-1 Dorf, R. C., and R. H. Bishop, *Modern Control Systems*, 9th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2001.
- E-1 Enns, M., J. R. Greenwood III, J. E. Matheson, and F. T. Thompson, "Practical Aspects of State-Space Methods Part I: System Formulation and Reduction," *IEEE Trans. Military Electronics*, **MIL-8** (1964), pp. 81-93.
- E-2 Evans, W. R., "Graphical Analysis of Control Systems," *AIEE Trans. Part II*, **67** (1948), pp. 547-51.
- E-3 Evans, W. R., "Control System Synthesis by Root Locus Method," *AIEE Trans Part II*, **69** (1950), pp. 66-9.
- E-4 Evans, W. R., "The Use of Zeros and Poles for Frequency Response or Transient Response," *ASME Trans.* **76** (1954), pp. 1135-44.
- E-5 Evans, W. R., *Control System Dynamics*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1954.
- F-1 Franklin, G. F, J. D. Powell, and A. Emami-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems*, 3rd ed. Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1994.
- F-2 Friedland, B., *Control System Design*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1986.
- F-3 Fu, K. S., R. C. Gonzalez, and C. S. G. Lee, *Robotics: Control, Sensing, Vision, and Intelligence*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1987.
- G-1 Gantmacher, F. R., *Theory of Matrices*, Vols. I and II. New York: Chelsea Publishing Company, Inc., 1959.
- G-2 Gardner, M. F. and J. L. Barnes, *Transients in Linear Systemx*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1942.
- G-3 Gibson, J. E., *Nonlinear Automatic Control*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1963.
- G-4 Gilbert, E. G., "Controllability and Observability in Multivariable Control Systems," *J.SIAM Control*, ser. A, **1** (1963), pp. 128-51.
- G-5 Graham, D., and R. C. Lathrop, "The Synthesis of Optimum Response: Criteria and Standard Forms," *AIEE Trans. Part II*, **72** (1953), pp. 273-88.
- H-1 Hahn, W., *Theory and Application of Liapunov's Direct Method*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1963.
- H-2 Halmos, P. R., *Finite Dimensional Vector Spaces*. New York: Van Nostrand Reinhold, 1958.
- H-3 Higdon, D. T., and R. H. Cannon, Jr., "On the Control of Unstable Multiple-Output Mechanical Systems," *ASME Paper no. 63-WA-148*, 1963.
- I-1 Irwin, J. D., *Basic Engineering Circuit Analysis*. New York: Macmillan, Inc., 1984.
- J-1 Jayasuriya, S., "Frequency Domain Design for Robust Performance Under Parametric, Unstructured, or Mixed Uncertainties," *ASME J. Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **115** (1993), pp. 439-51.
- K-1 Kailath, T., *Linear Systems*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1980.
- K-2 Kalman, R. E., "Contributions to the Theory of Optimal Control," *Bol. Soc. Mat. Mex.*, **5** (1960), pp. 102-19.
- K-3 Kalman, R. E., "On the General Theory of Control Systems," *Proc. First Intern. Cong. IFAC, Moscow, 1960, Automatic and Remote Control*. London: Butterworths & Company Limited, 1961, pp. 481-92.

- K-4 Kalman, R. E., "Canonical Structure of Linear Dynamical Systems," *Proc. Natl. Acad. Sci., USA*, **48** (1962), pp. 596-600.
- K-5 Kalman, R. E., "When Is a Linear Control System Optimal?" *ASME J. Basic Engineering*, ser. D, **86** (1964), pp. 51-60.
- K-6 Kalman, R. E., and J. E. Bertram, "Control System Analysis and Design via the Second Method of Lyapunov: I Continuous-Time Systems," *ASME J. Basic Engineering*, ser. D, **82** (1960), pp. 371-93.
- K-7 Kalman, R. E., Y. C. Ho, and K. S. Narendra, "Controllability of Linear Dynamic Systems," in *Contributions to Differential Equations*, Vol. 1. New York: Wiley-Interscience Publishers, Inc., 1962.
- K-8 Kautsky, J., and N. Nichols, "Robust Pole Assignment in Linear State Feedback," *Intern. J. Control*, **41** (1985), pp 1129-55.
- K-9 Kreindler, E., and P. E. Sarachick, "On the Concepts of Controllability and Observability of Linear Systems," *IEEE Trans. Automatic Control*, **AC-9** (1964), pp. 129-36.
- K-10 Kuo, B. C., *Automatic Control Systems*, 6th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1991.
- L-1 LaSalle, J. P. and S. Lefschetz, *Stability by Liapunov's Direct Method with Applications*. New York: Academic Press, Inc., 1961.
- L-2 Levin, W. S., *The Control Handbook*. Boca Raton, FL: CRC Press, 1996.
- L-3 Levin, W. S. *Control System Fundamentals*. Boca Raton, FL: CRC Press, 2000.
- L-4 Luenberger, D. G., "Observing the State of a Linear System," *IEEE Trans. Military Electr.*, **MIL-8** (1964), pp. 74-80.
- L-5 Luenberger, D. G., "An Introduction to Observers," *IEEE Trans. Automatic Control*, **AC-16** (1971), pp. 596-602.
- L-6 Lur'e, A. I., and E. N. Rozenvasser, "On Methods of Constructing Liapunov Functions in the Theory of Nonlinear Control Systems," *Proc. First Intern. Cong. IFAC*, Moscow, 1960, *Automatic and Remote Control*. London: Butterworths & Company Limited, 1961, pp. 928-33.
- M-1 MathWorks, Inc., *The Student Edition of MATLAB*, version 5. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1997.
- M-2 Melbourne, W. G., "Three Dimensional Optimum Thrust Trajectories for Power-Limited Propulsion Systems," *ARS J.*, **31** (1961), pp. 1723-8.
- M-3 Melbourne, W. G., and C. G. Sauer, Jr., "Optimum Interplanetary Rendezvous with Power-Limited Vehicles," *AIAA J.*, **1** (1963), pp. 54-60.
- M-4 Minorsky, N., *Nonlinear Oscillations*. New York: Van Nostrand Reinhold, 1962.
- M-5 Monopoli, R. V., "Controller Design for Nonlinear and Time-Varying Plants," *NASA CR152*, Jan., 1965.
- N-1 Noble, B., and J. Daniel, *Applied Linear Algebra*, 2nd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1977.
- N-2 Nyquist, H., "Regeneration Theory," *Bell System Tech. J.*, **11** (1932), pp. 126-47.
- O-1 Ogata, K., *State Space Analysis of Control Systems*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1967.
- O-2 Ogata, K., *Solving Control Engineering Problems with MATLAB*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1994.
- O-3 Ogata, K., *Designing Linear Control Systems with MATLAB*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1994.
- O-4 Ogata, K., *Discrete-Time Control Systems*, 2nd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1995.
- O-5 Ogata, K., *System Dynamics*, 4th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2004.

- O-6 Ogata, K., *MATLAB for Control Engineers*. Upper Saddle River, NJ: Pearson Prentice Hall, 2008.
- P-1 Phillips, C. L., and R. D. Harbor, *Feedback Control Systems*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1988.
- P-2 Pontryagin, L. S., V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, and E. F. Mishchenko, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1962.
- R-1 Rekasius, Z. V., "A General Performance Index for Analytical Design of Control Systems," *IRE Trans. Automatic Control*, **AC-6** (1961), pp. 217-22.
- R-2 Rowell, G., and D. Wormley, *System Dynamics*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1997.
- S-1 Schultz, W. C., and V. C. Ridcut, "Control System Performance Measures: Past, Present, and Future," *IRE Trans. Automatic Control*, **AC-6** (1961), pp. 22-35.
- S-2 Smith, R. J., *Electronics: Circuits and Devices*, 2d ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1980.
- S-3 Staats, P. F. "A Survey of Adaptive Control Topics," *Plan B paper*, Dept. of Mech. Eng., University of Minnesota, March 1966.
- S-4 Strang, G., *Linear Algebra and Its Applications*. New York: Academic Press, Inc., 1976.
- T-1 Truxal, J. G., *Automatic Feedback Systems Synthesis*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1955.
- U-1 Umez-Eronini, E., *System Dynamics and Control*. Pacific Grove, CA: Brooks/Cole Publishing Company, 1999.
- V-1 Valkenburg, M. E., *Network Analysis*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1974.
- V-2 Van Landingham, H. F., and W. A. Blackwell, "Controller Design for Nonlinear and Time-Varying Plants," *Educational Monograph*, College of Engineering, Oklahoma State University, 1967.
- W-1 Webster, J. G., *Wiley Encyclopedia of Electrical and Electronics Engineering*, Vol. 4. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1999.
- W-2 Wilcox, R. B., "Analysis and Synthesis of Dynamic Performance of Industrial Organizations—The Application of Feedback Control Techniques to Organizational Systems," *IRE Trans. Automatic Control*, **AC-7** (1962), pp. 55-67.
- W-3 Willems, J. C., and S. K. Mitter, "Controllability, Observability, Pole Allocation, and State Reconstruction," *IEEE Trans. Automatic Control*, **AC-16** (1971), pp. 582-95.
- W-4 Wojcik, C. K., "Analytical Representation of the Root Locus," *ASME J. Basic Engineering*, ser. D, **86** (1964), pp. 37-43.
- W-5 Wonham, W. M., "On Pole Assignment in Multi-Input Controllable Linear Systems," *IEEE Trans. Automatic Control*, **AC-12** (1967), pp. 660-65.
- Z-1 Zhou, K., J. C. Doyle, and K. Glover, *Robust and Optimal Control*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1996.
- Z-2 Zhou, K., and J. C. Doyle, *Essentials of Robust Control*, Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1998.
- Z-3 Ziegler, J. G., and N. B. Nichols, "Optimum Settings for Automatic Controllers," *ASME Trans.* **64** (1942), pp. 759-68.
- Z-4 Ziegler, J. G., and N. B. Nichols, "Process Lags in Automatic Control Circuits," *ASME Trans.* **65** (1943), pp. 433-44.

