

بسمه تعالی



نام جزوه: دینامیک

نام استاد: دکتر مهدی قاسمیه

دانشگاه: تهران

فهرست

فصل اول:	
سینماتیک نقاط مادی	۳
فصل دوم:	
سینتیک نقطه مادی	۱۴
فصل سوم:	
سینتیک نقطه مادی	۲۰
فصل چهارم:	
سیستم نقاط مادی	۳۹
فصل پنجم:	
سینماتیک اجسام صلب	۴۸
فصل ششم:	
حرکت صفحه‌ای اجسام	۶۹
فصل هفتم:	
حرکت صفحه‌ای اجسام صلب	۷۶

فصل اول : سينماتيك نقاط مادي

www.ttnar.ir

حرکت مستقيم الخط

سرعت لحظه اي : $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$

سرعت متوسط : $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

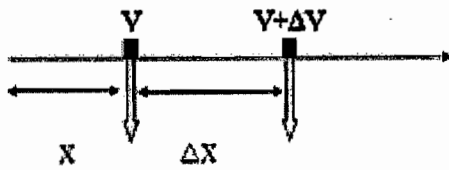
سيستم / واحد	جرم	طول	زمان	نيرو
SI	Kg	m	s	Kg.m/s ²
FPS	lb.s ² /ft	Ft	s	lb

$Slug = lb \cdot s^2/ft$, $g = 32.2 ft/s^2$, $1ft = 12 inch$, $1 inch = 1" = 2.54 cm$, $1ft = 1' = 30 cm$

$v =$ سرعت

$x =$ موقعيت

$a =$ شتاب



شتاب متوسط $\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(v + \Delta v) - v}{(t + \Delta t) - t}$
 $\Delta t \rightarrow 0$

شتاب لحظه اي $a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$

$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$, $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$, $v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dt = \frac{dx}{v}$, $a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{\frac{dx}{v}} = \frac{v dv}{dx}$, $v dv = a dx$

حرکت مستقيم الخط يکنواخت: ($a = 0$)

$a = 0 \Rightarrow v = \text{ثابت} \Rightarrow x = x_0 + vt$, $v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow v dt = dx \Rightarrow \int_0^t v dt = \int_{x_0}^x dx$

حرکت مستقيم الخط با شتاب ثابت: (ثابت: a)

$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow a dt = dv \Rightarrow \int_0^t a dt = \int_{v_0}^v dv \Rightarrow at = v - v_0 \rightarrow v = v_0 + at$

$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_0^t v dt = \int_{x_0}^x dx \Rightarrow x - x_0 = \int_0^t (v_0 + at) dt \Rightarrow x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$

حرکت نقطه مادی

۱- اگر شتاب تابع زمان باشد:

$$a = f(t) \quad , \quad a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow f(t)dt = dv \Rightarrow \int_0^t f(t)dt = \int_{v_0}^v dv \Rightarrow v = g(t)$$

$$v = g(t), v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_0^t vdt = \int_{x_0}^x dx = \int_0^t g(t)dt \Rightarrow x = h(t)$$

۲- اگر شتاب تابع مکان باشد:

$$a = f(x) \quad , \quad a dx = v dv = f(x)dx = v dv \Rightarrow \int_{x_0}^x f(x)dx = \int_{v_0}^v v dv = \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) \Rightarrow v = g(x)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = g(x) \Rightarrow \frac{dx}{g(x)} = dt \Rightarrow \int_{x_0}^x \frac{dx}{g(x)} = \int_0^t dt \Rightarrow t = h(x) \Rightarrow x = j(t)$$

۳- اگر شتاب تابع سرعت باشد:

$$a = f(v) \quad , \quad a = \frac{dv}{dt} = f(v) \Rightarrow \frac{dv}{f(v)} = dt \Rightarrow \int_{x_0}^x \frac{dv}{f(v)} = \int_0^t dt \Rightarrow t = g(v) \Rightarrow v = h(t)$$

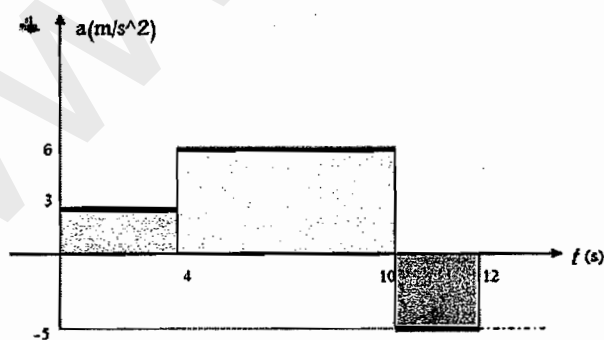
$$v dv = a dx \Rightarrow v dv = f(v)dx \Rightarrow \int_v^v \frac{v dv}{f(v)} = \int_{x_0}^x dx \Rightarrow x = j(v), \quad v = h(t) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int h(t)dt = \int dx$$

۴- ارتباط بین معادله و سرعت و شتاب:

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a dt \quad , \quad \int_{v_1}^{v_2} dv = \int_{t_1}^{t_2} a dt \Rightarrow V_2 - V_1 = \int_{t_1}^{t_2} a dt \quad , \quad a = \frac{dv}{dt} \quad , \quad v = \frac{dx}{dt} \quad , \quad v_2 - v_1 = \int_{t_1}^{t_2} a dt$$

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{t_1}^{t_2} v dt$$

مثال: مطلوب است نمودار منحنی $x-t$, $v-t$ در بین $0 < t < 20$ و همچنین سرعت و موقعیت نقطه مادی در زمان $t=12$ (s) و مسافت طی شده تا 12 s. ($x_0=0$ و $v_0=-18$ m/s)



$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a dt \Rightarrow \int_{v_0}^{v_4} dv = \int_0^4 a dt \Rightarrow v_4 = v_0 + 12 = -18 + 12 = -6 \text{ m/s}$$

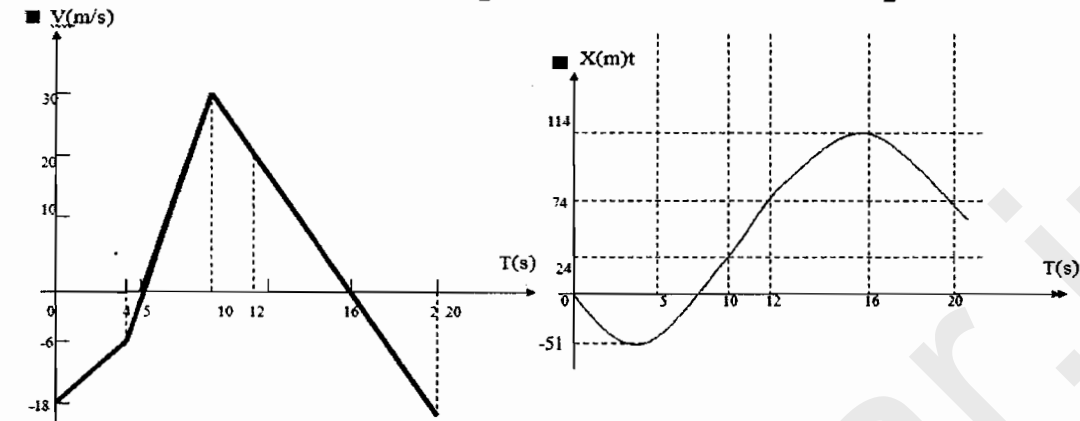
$$v_{10} = v_4 + 6(6) = -6 + 36 = 30 \text{ m/s} \Rightarrow v_{12} = v_{10} + 2(-5) = 30 - 10 = 20 \text{ m/s} \Rightarrow$$

$$v_{20} = v_{12} + 8(-5) = -20 \text{ m/s}$$

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v dt \Rightarrow \int_{x_0=0}^{x_4} dx = \int_0^{20} v dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_4 = x_0 + \int_0^{20} v dt = 0 - \frac{1}{2}(18+6)(4) = -48m, \quad x_5 = x_4 + \frac{1}{2}(6)(-1) = -51m, \quad x_{10} = x_5 + \frac{1}{2}(30)(5) = 24m$$

$$x_{12} = x_{10} + \frac{1}{2}(30+20)(2) = 74m, \quad x_{16} = x_{12} + \frac{1}{2}(20)(4) = 114m, \quad x_{20} = x_{16} + \frac{1}{2}(4)(-20) = 74m$$



$t=12$: مسافت طی شده $= 74+51+51 = 176m$

$$v dv = a dx, \quad \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = \int a dx, \quad v = (v_0^2 + 2 \int a dx)^{\frac{1}{2}}$$

مثال: با توجه به نمودار $v-x$ ، مطلوبست ترسیم نمودار $a-x$ و زمان لازم برای رسیدن به موقعیت $x=400(m)$

$$0 \leq x \leq 200 \Rightarrow v = 0.2x + 10 \Rightarrow a = v \frac{dv}{dx} = (0.2x + 10)(0.2)$$

$$\Rightarrow a = 0.04x + 2, \quad v = 0.2x + 10$$

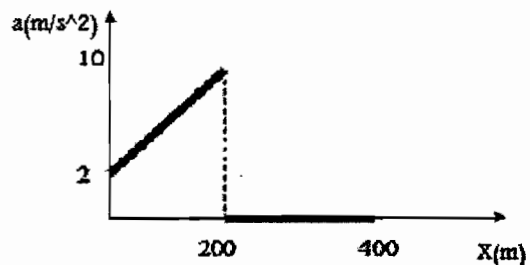
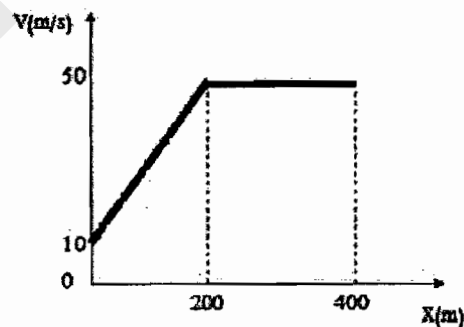
$$200 \leq x \leq 400 \Rightarrow v = 50, \quad a = 50(0) = 0$$

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dt = \frac{dx}{v} \Rightarrow \int_0^t dt = \int_0^{200} \frac{dx}{0.2x + 10}$$

$$x(m) \Rightarrow t = \frac{1}{0.2} \ln(0.2x + 10) \Big|_0^{200}$$

$$t = 5[\ln(40 + 10) - \ln(10)] \Rightarrow t = 8.05(s)$$

$$dt = \frac{dx}{v} \Rightarrow \int_{8.05}^t dt = \int_{200}^{400} \frac{dx}{50} \Rightarrow t - 8.05 = \frac{x}{50} \Big|_{200}^{400} \Rightarrow t = 12.05(s)$$



حرکت نسبی چندین نقطه مادی

موقعیت مطلق نقطه $x_A = A$, موقعیت مطلق نقطه $x_B = B$

موقعیت نسبی نقطه B نسبت به نقطه A $x_{B/A} = x_B - x_A$

سرعت نسبی نقطه A نسبت به B

$$\frac{d}{dt}(x_{B/A}) = \frac{d}{dt}(x_B) - \frac{d}{dt}(x_A) = \dot{x}_{B/A} = \dot{x}_B - \dot{x}_A \Rightarrow v_{B/A} = v_B - v_A :$$

سرعت مطلق $v_B = v_{B/A} + v_A = B$

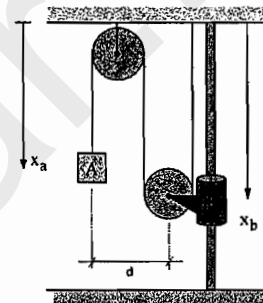
$$\frac{d}{dt}(v_{B/A}) = \frac{d}{dt}(v_B) - \frac{d}{dt}(v_A) \Rightarrow \dot{x}_{B/A} = \ddot{x}_B - \ddot{x}_A , a_B = a_{B/A} + a_A = B \text{ شتاب مطلق}$$

حرکت وابسته چند جرم

مثال : با توجه به ثابت بودن طول طناب داریم :

$$L = \text{ثابت} , (x_A - c_1) + c_2 + (x_B - c_3) + c_4 + (x_B - c_5) = c$$

$$x_A + 2x_B = c' , v_A + 2v_B = 0 , a_A + 2a_B = 0$$



توجه : جهت مثبت را به سمت پایین گرفتیم

مثال : با توجه به ثابت بودن طول طناب ها داریم :

$$L = \text{ثابت} , L = x_A + \sqrt{d^2 + x_B^2} + x_B$$

$$[d = \text{ثابت}, \dot{d} = 0 , \ddot{d} = 0]$$

$$\dot{L} = 0 \Rightarrow \dot{x}_A + \frac{1}{2}(d^2 + x_B^2)^{-\frac{1}{2}}(2x_B \dot{x}_B) + \dot{x}_B$$

$$\ddot{L} = 0$$

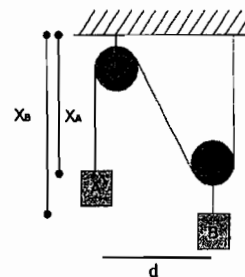
$$L_1 + x_A + C_1 , L_2 = \sqrt{d^2 + x_B^2} , L_3 = x_B - C_3$$

مثال : با توجه به ثابت بودن طول طناب ها داریم :

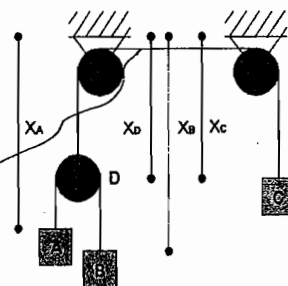
$$(x_A - x_D) + (x_B - x_D) = c_1 , x_A + x_B - 2x_D = C_1 , x_D + x_C = C_2$$

$$v_A + v_B - 2v_D = 0 , v_D + v_C = 0$$

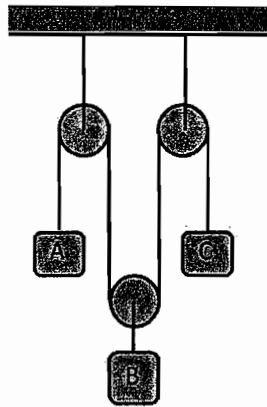
$$a_A + a_B - 2a_D = 0 , a_D + a_C = 0$$



این طول همواره ثابت است

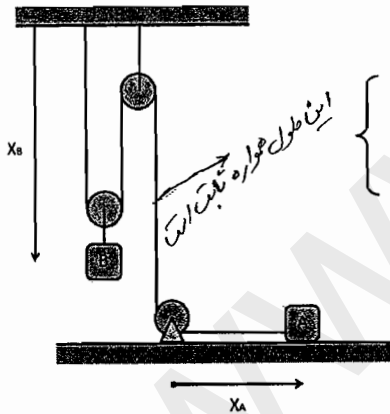


مثال :



$$\begin{cases} X_A + X_B + X_B + X_C = Cte \\ X_A + 2X_B + X_C = Cte \\ V_A + 2V_B + V_C = 0 \\ a_A + 2a_B + a_C = 0 \end{cases}$$

مثال :



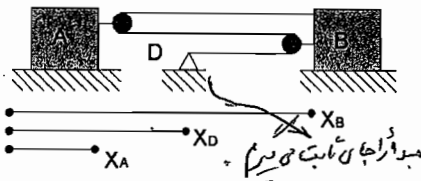
$$\begin{cases} X_B + X_B + C1 + X_A = Cte \\ X_A + 2X_B = Cte \\ V_A + 2V_B = 0 \\ a_A + 2a_B = 0 \end{cases}$$

مثال: اگر $V_B = 18 \text{ m/s}$ (ثابت و در جهت x) مطلوبست:

(الف) سرعت بلوک A

(ب) سرعت نقطه D کابل

(ج) سرعت نسبی A نسبت به B



$$(x_B - x_A) + (x_B - x_A) + x_B = C, \quad 3x_B - 2x_A = C, \quad 3V_B - 2V_A = 0$$

$$V_A = 1.5V_B = 3/2(18) = 27 \text{ m/s} \Rightarrow V_A = 27 \text{ m/s} \rightarrow$$

$$(x_B - x_A) + (x_D - x_A) = c_1, \quad x_B + x_D - 2x_A = c_1, \quad V_B + V_D - 2V_A = 0$$

$$18 + V_D - 2(27) = 0 \Rightarrow V_D = 36 \text{ m/s} \rightarrow$$

$$(x_B - x_D) + x_B = c_2$$

$$2x_B - x_D = c_2$$

$$2V_B - V_D = 0 \Rightarrow V_D = 2V_B = 36 \text{ m/s} \rightarrow$$

$$V_{A/B} = V_A - V_B = [27 \rightarrow] - [18 \rightarrow] = 9 \text{ m/s} \rightarrow$$

در واقع اگر فرض کنیم A در نقطه مرجع باشد می توانیم رابطه را به صورت زیر بنویسیم:



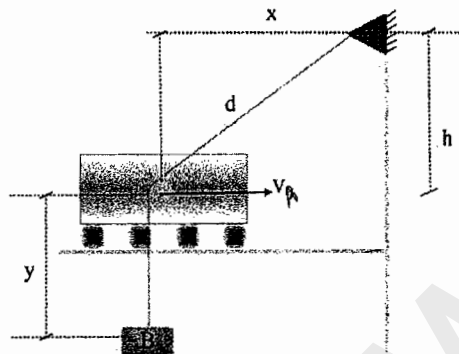
روش دیگر:



مثال: مطلوب است سرعت B نسبت به A

$$V_A = ?$$

$$V_B = ?$$



حل:

$$V_B = V_A + V_{B/A}$$

$$V_B = [V_A \leftrightarrow] + [V_{B/A} \updownarrow] \Rightarrow V_B = \sqrt{V_A^2 + V_{B/A}^2}$$

$$V_A = \dot{x}$$

$$L = d + y \quad \text{ثابت} \quad \dot{d} + \dot{y} = 0$$

$$|\dot{y}| = |v_{B/A}| = |\dot{d}| \quad d = \sqrt{h^2 + x^2}$$

$$d^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow 2d\dot{d} = 2x\dot{x} \Rightarrow \dot{d} = \frac{x\dot{x}}{d}$$

$$V_B = \sqrt{\dot{x}^2 + \left(\frac{x\dot{x}}{d}\right)^2} \Rightarrow V_B = \sqrt{\dot{x}^2 + \frac{x^2\dot{x}^2}{d^2}}$$

$$V_B = \dot{x} \sqrt{1 + \frac{x^2}{d^2}} \quad V_B = V_A \sqrt{1 + \frac{x^2}{d^2}}$$

حرکت منحنی الخط

سرعت متوسط:

$$\bar{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \bar{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, v = \frac{ds}{dt}$$

$\Delta t \rightarrow 0$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right) \left(\frac{ds}{dt}\right)$$

$$\bar{v} = \left(\frac{ds}{dt}\right) \left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right) \Rightarrow \bar{v} = \left(\frac{ds}{dt}\right) \vec{e}_t$$

ار واحد مماس بر مسیر حرکت، $\vec{e}_t \Rightarrow \bar{v} = v\vec{e}_t$

$$\text{شتاب متوسط} = \bar{a} = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t}$$

$$\text{شتاب لحظه ای} = \bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

$\Delta t \rightarrow 0$

شتاب نقطه $\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt}$ ، سرعت نقطه $\bar{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ ، بردار موقعیت $\vec{r}$

مولفه های متعامد سرعت و شتاب

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

مولفه های بردار های واحد $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

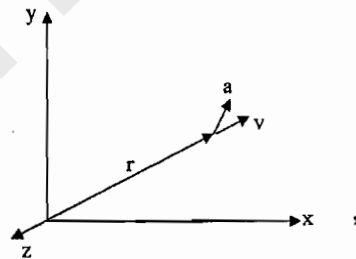
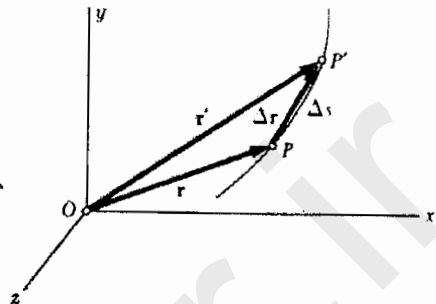
$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$$

$$\bar{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + x\frac{d}{dt}(\vec{i}) + \frac{dy}{dt}\vec{j} + y\frac{d}{dt}(\vec{j}) + \frac{dz}{dt}\vec{k} + z\frac{d}{dt}(\vec{k})$$

$$\bar{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}, \quad \bar{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}, \quad v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}$$

$$v_z = \dot{z}$$

$$\bar{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}, \quad \bar{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$



حرکت نسبی

$\vec{r}_A = A$ موقعیت نقطه

$\vec{r}_B = B$ موقعیت نقطه

$$\vec{r}_B - \vec{r}_A = \vec{r}_{B/A} = A \text{ نسبت به } B \text{ موقعیت نسبی نقطه}$$

$$\Rightarrow \vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{B/A}$$

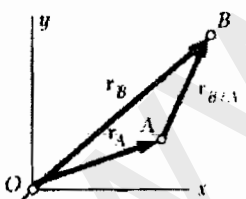
سرعت نسبی نقطه B نسبت به A :

شتاب نسبی نقطه B نسبت به A :

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_{B/A}) = \frac{d}{dt}(\vec{r}_B) - \frac{d}{dt}(\vec{r}_A) \Rightarrow \vec{v}_{B/A} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$$

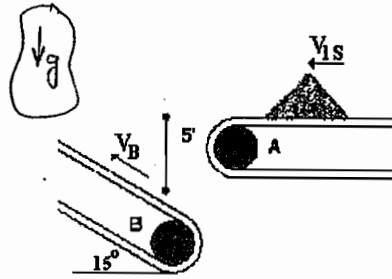
$$\frac{d}{dt}(\vec{v}_{B/A}) = \frac{d}{dt}(\vec{v}_B) - \frac{d}{dt}(\vec{v}_A) \Rightarrow \vec{a}_{B/A} = \vec{a}_B - \vec{a}_A$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$$



* مثال: سرعت نسبی شن و ماسه نسبت به تسمه B؟ $V_{S/B}$ به هنگام ریختن روی تسمه

$$v_{1S} = 6 \text{ ft/s} , \quad v_B = 8 \text{ ft/s}$$



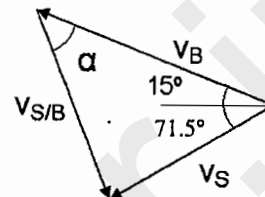
$$\vec{v}_{S/B} = \vec{v}_S - \vec{v}_B$$

$$\vec{v}_S = \vec{v}_{sx} + \vec{v}_{sy} \quad v_{sx} = 6 \text{ ft/s} \leftarrow \quad v_{sy} = \sqrt{2g(5)} = \sqrt{2(32.2)(5)} = 17.94 \text{ ft/s} \downarrow$$

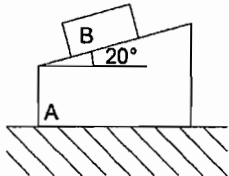
$$\Rightarrow \vec{v}_{2S} = [6 \leftarrow] + [17.94 \downarrow] = 18.92 \text{ ft/s}$$

$$v_{2S/B} = \sqrt{v_B^2 + v_{2S}^2 - 2v_B v_{2S} \cos 86.5} = 20.01 \text{ ft/s}$$

$$\frac{\sin(\alpha)^\circ}{18.92} = \frac{\sin(15 + 71.5)^\circ}{20.01} \Rightarrow \alpha = 70.69^\circ$$

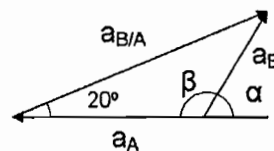


مثال: بلوک A با شتاب ثابت 80 mm/s^2 به سمت چپ در حال حرکت است و بلوک B با شتاب نسبی ثابت 120 mm/s^2 به سمت بالا روی بلوک A در حال حرکت است. مطلوبست شتاب مطلق B.



$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A} , \quad a_B = \sqrt{120^2 + 80^2 - 2(120)(80) \cos 20}$$

$$\left. \begin{aligned} a_B &= 52.5 \text{ mm/s}^2 \\ \frac{\sin \beta}{120} &= \frac{\sin 20^\circ}{52.5} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \beta = 128.6^\circ \quad \alpha = 51.4^\circ$$



مولفه‌های مماسی و نرمال

$\vec{e}_t$ = بردار واحد مماسی

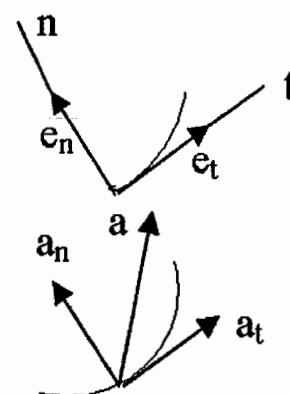
$\vec{e}_n$ = بردار واحد عمودی

$$\vec{r} = \vec{r}(t) , \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} , \quad \vec{v} = v\vec{e}_t$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} , \quad \vec{a} = a_t\vec{e}_t + a_n\vec{e}_n$$

$$\frac{d\vec{e}_t}{dt} = \left(\frac{d\vec{e}_t}{d\theta}\right)\left(\frac{d\theta}{ds}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right) \quad \boxed{a_t = \frac{dv}{dt}}$$

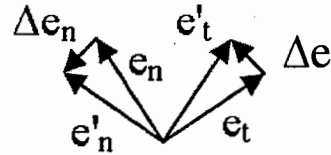
$$\rho = \frac{[1 + (\frac{dy}{dx})^2]^{3/2}}{d^2y/dx^2}$$



شعاع خمیدگی:

$$\frac{\Delta e_t}{\Delta \theta} = \frac{2 \sin \frac{\Delta \theta}{2}}{\Delta \theta} = \frac{\sin(\Delta \theta / 2)}{(\Delta \theta / 2)}$$

$$\rightarrow \frac{de_t}{d\theta} = 1 \lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \frac{\Delta e_t}{\Delta \theta} = \lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{\Delta \theta}{2})}{\sin(\frac{\Delta \theta}{2})} = 1$$



چون بر t عمود است و مقدار 1 را نیز داراست. $\frac{de_t}{d\theta} = \vec{e}_n$

$$\vec{a} = a_t \vec{e}_t + a_n \vec{e}_n = \frac{dv}{dt} \vec{e}_t + v \left(\frac{d\vec{e}_t}{dt} \right) = \frac{dv}{dt} \vec{e}_t + v^2 / \rho \vec{e}_n$$

با معادل گذاری: $a_n = \frac{v^2}{\rho}$

پس به دست آوردیم: $\frac{d\vec{e}_t}{dt} = \frac{v}{\rho} \vec{e}_n$

(در حرکت مستقیم الخط یکنواخت)

$$\begin{cases} \vec{v} = v \vec{e}_t \\ \vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho} \vec{e}_n \end{cases} \quad a=0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{dv}{dt} = 0 \\ \frac{v^2}{\rho} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{d\vec{e}_t}{d\theta} = \vec{e}_n \\ \frac{d\vec{e}_n}{d\theta} = -\vec{e}_t \end{cases}$$

مثال:

$20.8 \text{ m/s} = v_A = [75 \text{ km/h} \rightarrow] \quad a_A = 1.5 \text{ m/s}^2 \quad \vec{v}_{A/B} = ?$

$11.1 \text{ m/s} = v_B = 40 \text{ km/h} \quad a_B = -8.9 \text{ m/s}^2 \quad \vec{a}_{A/B} = ?$

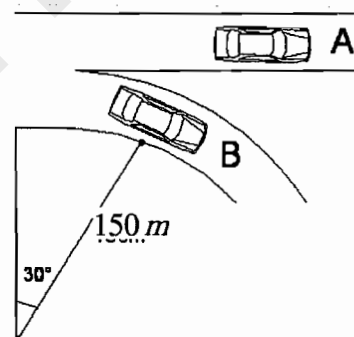
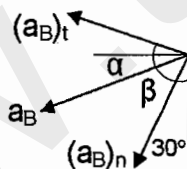
حل:

$V_A = 20.8 \text{ m/s}$

$V_B = 11.1 \text{ m/s}$

$\vec{V}_{A/B} = \vec{V}_A - \vec{V}_B$

$\vec{V}_{A/B} = [20.8 \rightarrow] - [11.1]$



$\vec{V}_{A/B} = \sqrt{(20.8)^2 + (11.1)^2 - 2(20.8)(11.1)\cos 30} \Rightarrow V_{A/B} = 12.5 \text{ m/s} \quad \frac{\sin \alpha}{11.1} = \frac{\sin 30}{45} \rightarrow \alpha = 26.4^\circ$

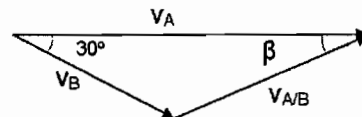
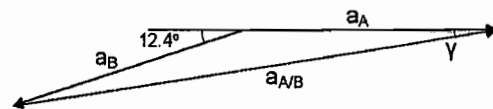
$(a_B)_t = 0.9(a_B)_n = v^2 / \rho = \frac{11.1^2}{150} = 0.8 \text{ m/s}^2$

$\rightarrow a_B = 1.2 \text{ m/s}^2 \quad \beta = 12.4^\circ$

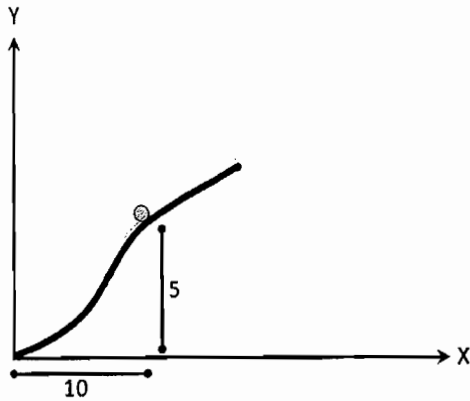
$a_{A/B} = \sqrt{(1.5)^2 + (1.2)^2 - 2(1.5)(1.2)\cos 167.6} = 2.70 \text{ m/s}^2$

$\frac{\sin \gamma}{1.2} = \frac{\sin 167.6}{2.7} \rightarrow \gamma = 5.6^\circ$

$\vec{a}_{A/B} = 2.7$



مثال : سرعت اسکی باز در مسیر سهموی در نقطه A ، 6 m/s ،
و در حال افزایش با نسبت 2 m/s^2 است . مطلوبست : $\vec{a}_A$ ، $\vec{v}_A$



$$\begin{cases} y = (1/20)x^2 \\ dy/dx = (1/10)x \longrightarrow \\ d^2y/d^2x = (1/10) \end{cases}$$

at: $x=10$ $dy/dx = 1$

$\vec{V}_A = 6 \text{ (m/s)}$ $\nearrow 45^\circ$

$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$

$\vec{a}_t = 2 \text{ (m/s}^2\text{)}$ $\nearrow 45^\circ$

$\rho = [1 + y'^2]^{3/2} / y'' = 28.28$

$\vec{a}_n = (v^2/\rho) = 1.27 \text{ (m/s}^2\text{)}$ $\searrow 45^\circ$

$|\vec{a}_A| = \sqrt{2^2 + 1.27^2}$

$\vec{a}_A = 2.37 \text{ (m/s}^2\text{)}$

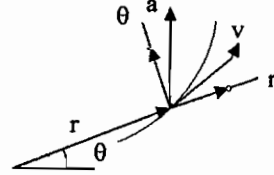
$\nearrow 12.5^\circ$

(مختصات قطبی) مولفه‌های شعاعی و عرضی

$\theta =$ مختصات زاویه‌ای

$\vec{e}_r =$ بردار واحد شعاعی

$\vec{e}_\theta =$ بردار واحد عرضی



بردار موقعیت:

$$\vec{r} = r\vec{e}_r \rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r\vec{e}_r)}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

$$\vec{v} = v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta$$

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r}$$

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \left(\frac{d\vec{e}_r}{d\theta}\right)\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\frac{rd\vec{e}_r}{dt} = \underbrace{r\dot{\theta}\vec{e}_\theta}_{v_\theta} = v_\theta\vec{e}_\theta$$

$$v_\theta = r\dot{\theta}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\frac{d\vec{e}_r}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$$

$$\vec{a} = a_r\vec{e}_r + a_\theta\vec{e}_\theta$$

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \ddot{r}\vec{e}_r + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}^2\vec{e}_r = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_r$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$$

شتاب زاویه‌ای: $\ddot{\theta} = \alpha \text{ rad/s}^2$

مختصات استوانه‌ای

بردار موقعیت:

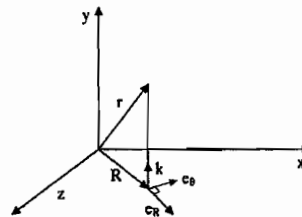
$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{z} = R\vec{e}_R + z\vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(R\vec{e}_R) + \frac{d}{dt}(z\vec{k})$$

$$\rightarrow \vec{v} = v_R\vec{e}_R + v_\theta\vec{e}_\theta + v_z\vec{k}$$

$$v_R = \dot{R}, \quad v_\theta = R\dot{\theta}, \quad v_z = \dot{z}$$



بردار شتاب:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_R\vec{e}_R + a_\theta\vec{e}_\theta + a_z\vec{k}$$

$$a_R = \ddot{R} - R\dot{\theta}^2$$

$$a_\theta = R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta}$$

$$a_z = \ddot{z}$$

مثال: سرعت و شتاب نقطه‌ی B را اگر بازوی OC با سرعت زاویه ای ثابت دوران کند بیابید.
حل:

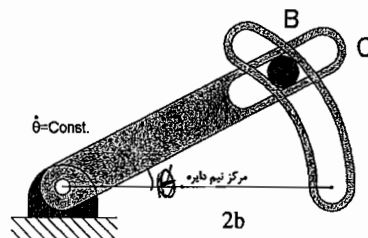
$$r = 2b \cos \theta$$

$$v_r = \dot{r} = \frac{d}{dt}(2b \cos \theta) = 2b(-\sin \theta)(\dot{\theta})$$

$$v_\theta = r\dot{\theta} = 2b\dot{\theta} \cos(\theta)$$

$$v = \sqrt{v_\theta^2 + v_r^2} = 2b\dot{\theta}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = ?$$



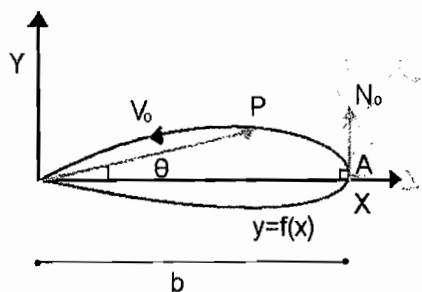
$$\ddot{r} = 2b[(-\cos \theta)(\ddot{\theta}) + (-\sin \theta)\dot{\theta}^2] = -2b\dot{\theta}^2 \cos \theta$$

$$a_r = -2b\dot{\theta}^2 \cos \theta - 2b \cos \theta \dot{\theta}^2 = -4b\dot{\theta}^2 \cos \theta$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = -4b\dot{\theta}^2 \sin \theta$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = 4b\dot{\theta}^2$$

مثال: در مسیر داده شده، سرعت ثابت و برابر v_0 است. مطلوبست شتاب متحرک در موقعیت A؟ ($R = b \cos 3\theta$)
حل:



$$A = \begin{cases} a_t = 0 \\ a_n = \frac{v^2}{\rho} \end{cases} \quad a_A = \begin{cases} a_r = \ddot{R} - R\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta} = 0 \end{cases}$$

$R = b \cos 3\theta$ زیرمهر θ و A هم‌راست

$$\dot{R} = b(-\sin 3\theta)(3)(\dot{\theta}) = -3b\dot{\theta} \sin 3\theta$$

$$\ddot{R} = -3b\ddot{\theta} \sin 3\theta - 9b\dot{\theta}^2 \cos 3\theta$$

$$v_A = \begin{cases} v_r = \dot{R} = 0 \\ v_\theta = R\dot{\theta} = v_0 \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{v_0}{b} \end{cases}$$

$$A \rightarrow \dot{\theta} = \frac{v_0}{b}, R = b, \ddot{R} = -9b\dot{\theta}^2 = -9\frac{v_0^2}{b}$$

$$a_A = a_r = -9\frac{v_0^2}{b} - b\left(\frac{v_0^2}{b^2}\right) \Rightarrow \boxed{a_A = -10\frac{v_0^2}{b}}$$

@ A

$$(R=b) \rightarrow b \cos 3\theta = b$$

$$\rightarrow \cos 3\theta = 1$$

$$\rightarrow \cos 3\theta = \cos 2k\pi$$

$$\rightarrow 3\theta = 2k\pi$$

$$\rightarrow \sin 3\theta = \sin 2k\pi = 0$$

$$\text{So} \rightarrow \ddot{R} = -9b\dot{\theta}^2 = -9\frac{v_0^2}{b}$$

فصل دوم : سينتيك نقطه مادي (KINETICS)

حذف خبری
12.12
12.13
معانی فقار
ما نون بلیز

قوانین نیوتن

قانون اول :

قانون دوم :

$$\Sigma \vec{F} = 0$$

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad \Sigma \vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}), \quad \Sigma \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\Sigma \vec{F} - m\vec{a} = 0$$

نیروی مؤثر یا نیروی اینرسی (شبه نیرو) $ma =$

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\Sigma \vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$$

دیگرام آزاد نیروها

دیگرام سینتیک

اصل دالامبر

قانون دوم نیوتن باید نسبت به یک دستگاه مختصات ثابت باشد.

ممنتوم خطی، با اندازه حرکت خطی (Linear Momentum)

$$\Sigma m\vec{v} = \vec{L}$$

$$\Sigma \vec{F} = \dot{\vec{L}}$$

$$\vec{L} = \Sigma m\vec{v}$$

$$kg \ m/s = (kg \cdot m/s^2) \cdot s = N \cdot s$$

$$lb \cdot s$$

$$\Leftarrow SI$$

$$\Leftarrow FPS$$

واحد ممنتوم :

مختصات سه بعدی کارتزین

$$+ \rightarrow \Sigma F_x = ma_x = m\ddot{x}$$

$$+ \uparrow \Sigma F_y = ma_y = m\ddot{y}$$

$$+ \downarrow \Sigma F_z = ma_z = m\ddot{z}$$

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$$

مختصات مؤلفه های مماسی و عمودی

$$+ \uparrow \Sigma F_t = ma_t = m \left(\frac{dv}{dt} \right)$$

$$+ \leftarrow \Sigma F_n = ma_n = m \left(\frac{v^2}{\rho} \right)$$

$$\Sigma F = ma$$

مختصات قطبی (مختصات مؤلفه های شعاعی و عرضی)

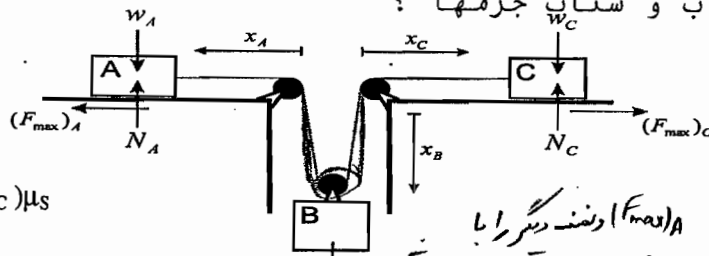
$$\Sigma F = ma$$

$$+ \rightarrow r \Sigma F_r = ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$

$$+ \uparrow \Sigma F_\theta = ma_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$$

دینامیک / فصل دوم / سینتیک نقطه مادی (KINETICS)

مثال : سه وزنه به جرم های $m_A=5 \text{ kg}, m_B=10 \text{ kg}, m_C=10 \text{ kg}$ مطابق شکل زیر به هم متصل می باشد. اگر ضریب اصطکاک بین وزنه های A, C و سطح $\mu_s=0.24, \mu_k=0.20$ باشد؛ مطلوبست وضعیت سیستم؟
و مقدار کش طناب و شتاب جرمها؟



حل :

$$F_{\max} = \mu_s \cdot N = (N_A + N_C) \mu_s$$

$$W_A = 5 \text{ g} = N_A$$

$$W_C = 10 \text{ g} = N_C$$

$$W_B = 10 \text{ g} = N_B$$

$$F_{\max} < W_B \rightarrow (5 \text{ g} + 10 \text{ g}) 0.24 < 10 \text{ g} = W_B \rightarrow (F_{\max})_C + (F_{\max})_A = 0.24(15 \text{ g}) < 10 \text{ g} = W_B$$

پس وزنه ها حرکت می کنند.

$$+ \rightarrow \Sigma \vec{F} = m \vec{a} \Rightarrow T - F_A = m_A a_A$$

$$\Rightarrow T - 0.2(5 \text{ g}) = 5 a_A$$

$$+ \downarrow \Sigma \vec{F} = m \vec{a} \Rightarrow W_B - 2T = m_B a_B$$

$$\Rightarrow 10 \text{ g} - 2T = 10 a_B$$

$$+ \leftarrow \Sigma \vec{F} = m \vec{a} \Rightarrow T - F_C = m_C a_C$$

$$\Rightarrow T - 0.2(10 \text{ g}) = 10 a_C$$

$$F_A \leftarrow A \rightarrow T = A \rightarrow m_A a_A$$

$$\begin{array}{c} N \\ \uparrow \\ B \\ \downarrow W_B \\ m_B a_B \end{array} = B \downarrow m_B a_B$$

$$\begin{array}{c} W_C \\ \downarrow \\ C \\ \uparrow N_C \\ T \leftarrow C \rightarrow F_C \\ m_C a_C \end{array} = C \leftarrow m_C a_C$$

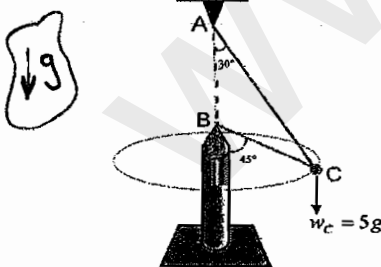
با فرض ثابت بودن طول طناب:

$$-x_A + 2x_B - x_C = \text{cte} \Rightarrow -v_A + 2v_B - v_C = 0 \Rightarrow -a_A + 2a_B - a_C = 0 \Rightarrow a_B = 1/2(a_A + a_C)$$

با استفاده از چهار معادله بالا داریم:

$$a_A = 4.76 \text{ m/s}^2 \rightarrow, a_B = 3.08 \text{ m/s}^2 \downarrow, a_C = 1.40 \text{ m/s}^2 \leftarrow, T = 33.6 \text{ (N)}$$

مثال : اگر جسم C به جرم 5 kg با سرعت ثابت v در حال دوران حول میله قائم باشد، مطلوبست حدود سرعت ثابت v که همواره دو کابل BC, AC در کشش باشند. ($g=9.81 \text{ m/s}^2$)



$$V = \Rightarrow a_r = \frac{dv}{dt} = 0 \quad a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{1.6}$$

$$m_c a_c = m_c \frac{v^2}{1.6}$$

ثابت

در این حالت، شتاب مماسی صفر است و شتاب مرکزگرا برابر با $\frac{v^2}{r}$ است.

$$\left\{ \begin{array}{l} + \leftarrow \Sigma F_x = m_c a_c \Rightarrow T_{AC} \sin 30^\circ + T_{BC} \sin 45^\circ = \frac{5}{1.6} v^2 \\ + \uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_{AC} \cos 30^\circ + T_{BC} \cos 45^\circ - 5g = 0 \end{array} \right.$$

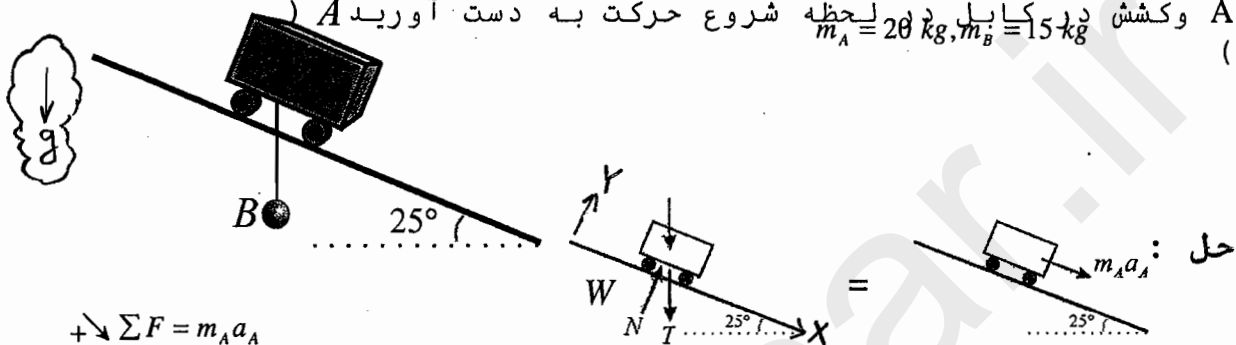
$$\left\{ \begin{array}{l} T_{AC} \sin 30^\circ + T_{BC} \sin 45^\circ = \frac{5}{1.6} v^2 \\ T_{AC} \cos 30^\circ + T_{BC} \cos 45^\circ = 5g \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} T_{AC} = 0 \Rightarrow \tan 45^\circ = \frac{v^2}{1.6g} \Rightarrow v = 3.96 \text{ m/s} \\ T_{BC} = 0 \Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{v^2}{1.6g} \Rightarrow v = 3.01 \text{ m/s} \end{array} \right.$$

حل :

$$\Rightarrow m/s \ 3.01 < v < 3.96 \ m/s$$

حال اگر v کمتر یا بیشتر از بازه بالا باشد ، باید طناب با کشش منفی را حذف کرده و معادلات را از اول بنویسیم و داریم
 $v=4 \Rightarrow T_{AB} < 0$
 $v=3 \Rightarrow T_{BC} < 0$

مثال : اگر سیستم فوق از حالت سکون شروع به حرکت کند؛ شتاب جسم A و کشش کابل $m_A = 20 \ kg, m_B = 15 \ kg$ در لحظه شروع حرکت به دست آورید A



$$+\nearrow \Sigma F = m_A a_A$$

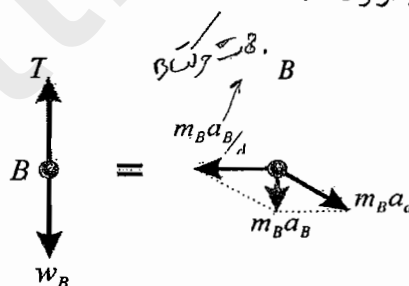
$$\Rightarrow N \cos 90^\circ + (W_A + T) \sin 25^\circ = 20 a_A$$

$$(20g + T) \sin 25^\circ = 20 a_A \quad (1)$$

چون در لحظه اول که A به سمت راست حرکت می کند ، B می خواهد به سمت چپ برود :

$$\left\{ \begin{array}{l} +\leftarrow \Sigma F = ma \Rightarrow 0 = m_B a_{B/A} - m_B a_A \cos 25^\circ \quad (3) \\ +\downarrow \Sigma F = ma \Rightarrow W_B - T = m_B a_A \sin 25^\circ \quad (2) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} T = 106.6 \ N \\ a_A = 6.4 \ m/s^2 \rightarrow \\ a_{B/A} = 5.8 \ m/s^2 \leftarrow \end{array} \right.$$



ممنتوم زاویه ای (لنگر حرکتی) $\vec{H}_O$

ANGULAR MOMENTUM - MOMENT OF MOMENTUM

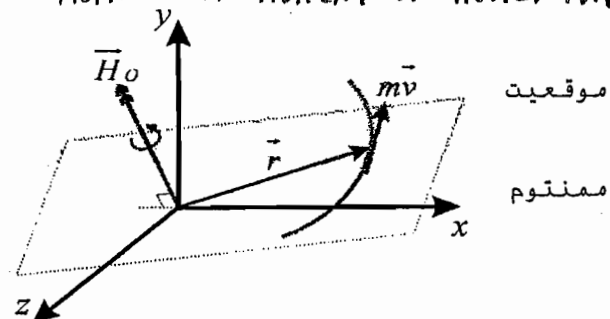
$$\vec{L} = m\vec{v}$$

$$\vec{r} =$$

$$\vec{H}_O = \vec{r} \times m\vec{v} =$$

$$H_O = r(mv) \sin \phi$$

$$\vec{H}_O \perp (\vec{r}, m\vec{v})$$



واحد ممنتوم زاویه ای :

$$kg \ m/s^2$$

$$\Leftarrow SI$$

$$lb \cdot ft \cdot s$$

$$\Leftarrow FPS$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad m\vec{v} = m(v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k})$$

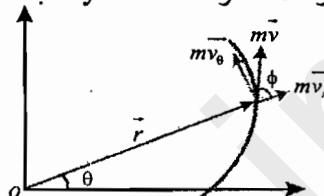
$$\vec{H}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \times m \Rightarrow \vec{H}_O = m(yv_z - zv_y)\vec{i} + m(zv_x - xv_z)\vec{j} + m(xv_y - yv_x)\vec{k}$$

$$\vec{H}_O = H_x\vec{i} + H_y\vec{j} + H_z\vec{k} \quad \vec{H}_O = \frac{d(\vec{r} \times m\vec{v})}{dt} = 0 + \vec{r} \times \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{r} \times (m\vec{a}) = \sum \vec{M}_O$$

اگر حرکت در صفحه xy باشد؛ داریم: $\vec{H}_O = H_z\vec{k}$

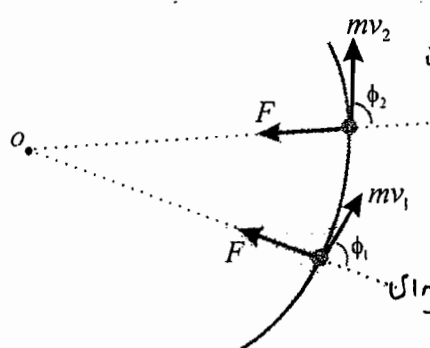
$$\vec{H}_O = \vec{r} \times m\vec{v} \Rightarrow H_z = rmv \sin \phi$$

$$\left. \begin{aligned} H_z &= rmv_\theta \\ v_\theta &= r\dot{\theta} \end{aligned} \right\} \Rightarrow H_z = mr^2\dot{\theta}$$



حرکت تحت اثر نیروی مرکزی (Central Force)

اگر نیروی روی جرم وارد گردد که همه جرم به سمت یک نقطه خاص باشد، به آن حرکت نیروی مرکزی می نامند.



$$F = G \frac{Mm}{R^2} \quad \text{قانون گرانش:}$$

حفظ ممثوم زاویه ای یا بقای ممثوم زاویه ای

$$r_1 m v_1 \sin \phi_1 = r_2 m v_2 \sin \phi_2 = \dots$$

$$r_1 v_{\theta 1} = r_2 v_{\theta 2} = \dots$$

ثابت

$$\sum \vec{F} = \vec{L} \Rightarrow \sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{L} = 0 \Rightarrow \vec{L}_1 = \vec{L}_2 \quad \text{بقای ممثوم}$$

$$\sum \vec{M}_O = \vec{H}_O \Rightarrow \sum \vec{M}_O = 0 \Rightarrow \vec{H}_O = 0 \Rightarrow (\vec{H}_O)_1 = (\vec{H}_O)_2$$

بقای ممثوم زاویه ای: $\vec{H}_O$ ثابت است

$$\rightarrow r_1 \times m v_1 = r_2 \times m v_2 = \dots$$

حالات خاص

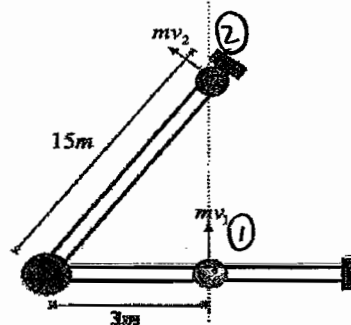
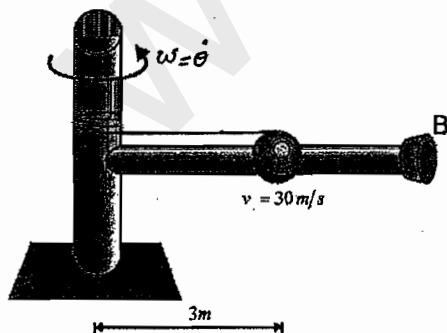
حفظ ممثوم:

اگر

حفظ ممثوم زاویه ای:

اگر

مثال: اگر جرم گلوله 4 kg و از جرم میله صرف نظر شود، سرعت گلوله به هنگام رسیدن به نقطه B پس از قطع کردن کابل، را محاسبه کنید.

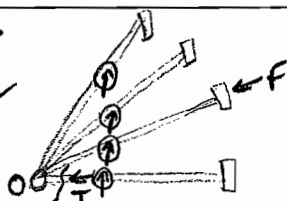


$$\sum \vec{M}_O = \vec{H}_O = 0 \Rightarrow (\vec{H}_O)_1 = (\vec{H}_O)_2 \Rightarrow 3 \times (mv_1) = 15 \times (mv_2) \Rightarrow 3 \times 30 = 15 \times v_2 \Rightarrow v_2 = 6 \text{ m/s}$$

حل:

حفظ ممثوم زاویه ای: $\vec{H}_O = \sum \vec{M}_O = 0$ از آنجا که $\vec{H}_O$ ثابت است.

بقای ممثوم زاویه ای: $\vec{H}_O = \sum \vec{M}_O = 0$ از آنجا که $\vec{H}_O$ ثابت است.



فصل سوم :
سينتيك نقطه مادي
(روش هاي انرژي و ممنتوم)

کار نیرو

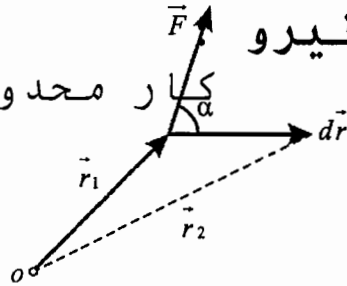
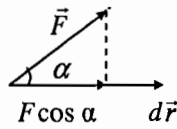
$$dU = \vec{F} \cdot d\vec{r} = |\vec{F}| \cos \alpha \, dr$$

کار محدود انجام شده :

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

$$d\vec{r} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$$

$$dU = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

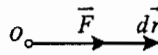


واحدکار: (SI) : (ژول) $N.m$ (FPS) $lb.ft$

واحد لنگر: (SI) $N.m$ (FPS) $ft-lb$

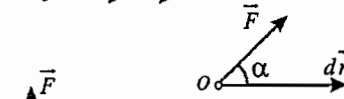
1) $dU = F \cdot dr > 0$

$\alpha = 0$



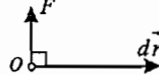
2) $dU = F \, dr \cos \alpha > 0$

$0 < \alpha < 90$



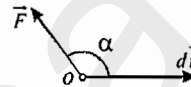
3) $dU = 0$

$\alpha = 90$



4) $dU = F \, dr \cos \alpha < 0$

$90 < \alpha < 180$



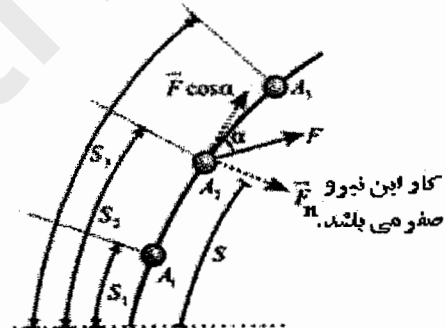
5) $dU = -F \cdot dr < 0$

$\alpha = 180$



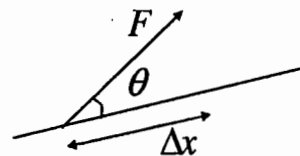
$$U_{1 \rightarrow 3} = \int_{A_1}^{A_3} (F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}) \cdot (dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k})$$

$$U_{1 \rightarrow 3} = \int_{A_1}^{A_3} dU = \int_{A_1}^{A_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{s_1}^{s_3} F \cos \alpha \, ds = \int_{s_1}^{s_3} \vec{F}_t \cdot ds$$



کار یک نیروی ثابت :

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int dU = F (\Delta x) \cos \theta$$

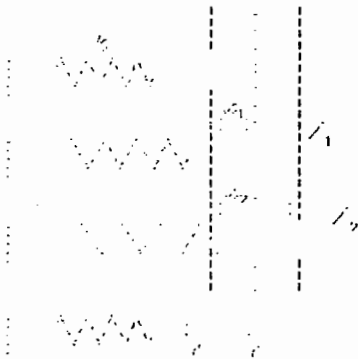


کار نیروی وزنی :

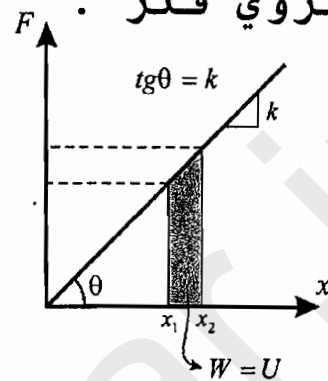
$$F_x = 0, \quad F_z = 0, \quad F_y = cte$$

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{y_1}^{y_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \Rightarrow$$

$$U_{1 \rightarrow 2} = -W \Delta y = -W (y_2 - y_1) = \int_{y_1}^{y_2} F_y dy$$



کار نیروی فنر :



$$F = kx, \quad dU = -F dx$$

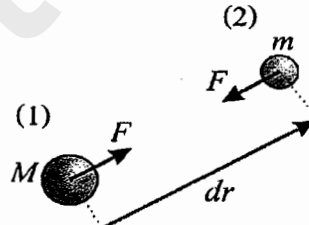
$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{x_1}^{x_2} dU = \int_{x_1}^{x_2} -(kx) dx = \left[-\frac{1}{2} kx^2 \right]_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{2} kx_1^2 - \frac{1}{2} kx_2^2 \Rightarrow (U_{1 \rightarrow 2})_e = -\frac{1}{2} (F_1 + F_2) \Delta x$$

در حالت بازگشت به حالت اولیه کار نیروی فنر مثبت است.

کار نیروی گرانش :

$$F = G \frac{mM}{r^2}, \quad G = 66.7 \times 10^{-12} \left(\frac{m^3}{kg \cdot s^2} \right)$$

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{r_1}^{r_2} dU = \int_{r_1}^{r_2} F dr \Rightarrow U_{1 \rightarrow 2} = G \frac{mM}{r_2} - G \frac{mM}{r_1}$$



انرژی جنبشی واصل کار و انرژی :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

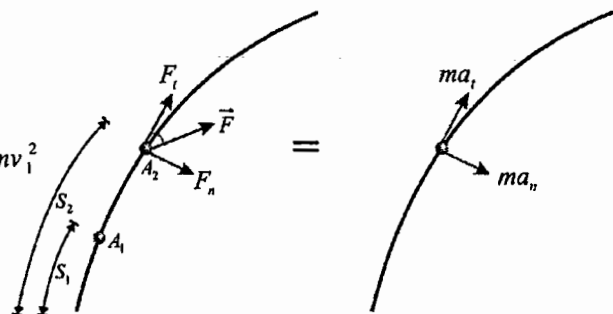
$$F_t = ma_t \Rightarrow F_t = m \frac{dv}{dt} = m \left(\frac{dv}{ds} \right) \times \left(\frac{ds}{dt} \right)$$

$$F_t ds = m v dv \Rightarrow \int_{s_1}^{s_2} F_t ds = m \int_{v_1}^{v_2} v dv = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

$$T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2$$

$$T_1 = \frac{1}{2} m v_1^2, \quad T_2 = \frac{1}{2} m v_2^2$$

$$K = T = \frac{1}{2} m v^2 \quad \text{انرژی}$$

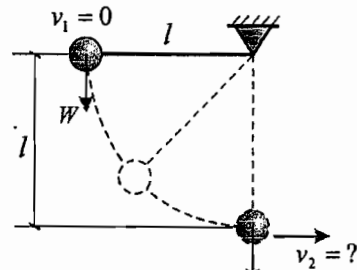


جنبشی

مثال: در شکل، اگر گلوله ۱ رها شده باشد، سرعت آنرا در وضعیت ۲ بیابید؟

(توجه : کار نیروی کششی صفر است زیرا همیشه عمود بر مسیر حرکت است.)
حل:

$$\left. \begin{aligned} T_1 + U_{1 \rightarrow 2} &= T_2 \\ T_1 = 0, T_2 &= \frac{1}{2} m v_2^2 \\ (U_{1 \rightarrow 2})_g &= mgl \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0 + mgl = \frac{1}{2} m v_2^2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gl}$$



قدرت یا توان - راندمان یا بازده :

$$P = \frac{dU}{dt} = \frac{\sum (\vec{F} \cdot d\vec{r})}{dt} = \sum \vec{F} \cdot \vec{v}$$

(SI) : Watt=N.m/s =J/s , (FPS):

$$\text{قدرت} \quad P = \sum (\vec{F} \cdot \vec{v})$$

واحد: . lb.ft/s , 550 lb.ft/s= 1HP

$$P = \frac{dT}{dt} = F \cdot v \quad \text{قدرت} \quad T = \frac{1}{2} m v^2, \quad \frac{dT}{dt} = m v \frac{dv}{dt} = (ma)v = Fv = p \Rightarrow$$

$$P = \frac{dT}{dt}, \quad U_{1 \rightarrow 2} = T_2 - T_1, \quad \Delta t = t_2 - t_1$$

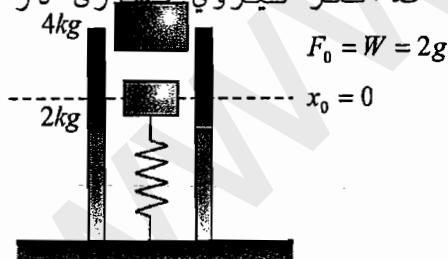
$$\text{متوسط توان} \quad \bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t}, \quad \bar{P} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} P dt = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \frac{dT}{dt} dt = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} dT = \frac{T_2 - T_1}{t_2 - t_1}$$

$$\bar{P} = \frac{U_{1 \rightarrow 2}}{\Delta t}, \quad \eta_m = \frac{P_{out}}{P_{in}} < 1 \quad \text{راندمان مکانیکی}$$

$$\eta_e = \text{راندمان الکتریکی}, \quad \eta_{th} = \text{راندمان حرارتی}, \quad \eta = \eta_e \cdot \eta_m \cdot \eta_{th} < 1$$

مثال: اگر بلوک ۴ kg را روی بلوک ۲ kg قرار دهیم، تناوب آغاز می گردد: مطلوبست: (K=400 N/m)

الف) حداکثر سرعت بلوک ۴ kg ؟
ب) حداکثر نیروی فشاری در فنر ؟



الف)

$$T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2$$

$$T_1 = 0, \quad T_2 = \frac{1}{2} m v^2$$

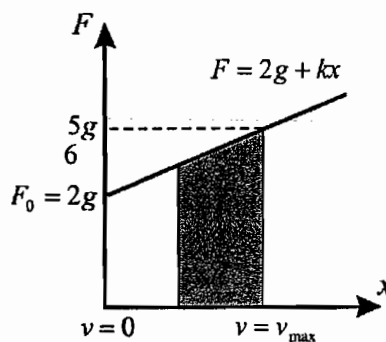
$$U_{1 \rightarrow 2} = (U_{1 \rightarrow 2})_g + (U_{1 \rightarrow 2})_e$$

$$(U_{1 \rightarrow 2})_e = -\frac{1}{2} (F_1 + F_2) x = -2gx - 200x^2 \Rightarrow U_{1 \rightarrow 2} = 4gx - 200x^2 = \frac{1}{2} m v^2$$

$$(U_{1 \rightarrow 2})_g = 6gx$$

حداکثر سرعت :

$$\frac{d(U_{1 \rightarrow 2})}{dx} = 0 \Rightarrow x = 0.098(m), \quad v_{max} = 0.8(m/s)$$



حل:

دینامیک / فصل سوم / سینتیک نقطه مادی (روش های انرژی و ممنتوم)

حداکثر نیروی فشاری زمانی است که، سرعت صفر می شود (اما جایی که تعادل استاتیکی داریم : $a=0$)

$$T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2$$

$$\frac{1}{2}mv_{\max}^2 = mgh_{\max} \Rightarrow h_{\max} = \frac{1}{2g}v_{\max}^2 \Rightarrow T_{\max} = k.h_{\max}$$

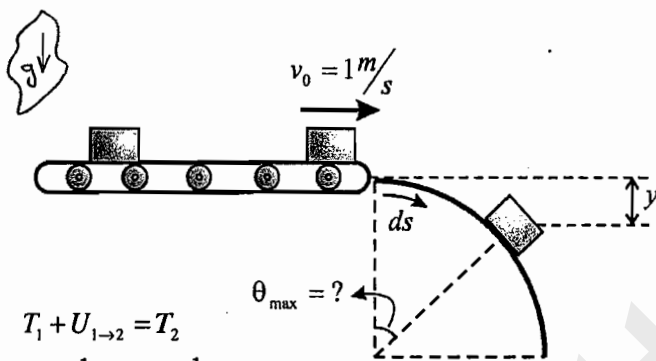
$$v_2 = 0$$

$$4(9.81)x - 200x^2 = 0$$

$$x = 0.196(m)$$

$$F_{\max} = 2(9.81) + 400(0.196) = 98.1(N)$$

مثال: بسته های 2kg توسط یک تسمه نقاله به روی یک رمپ دایره ای شکل با سرعت 1m/s می افتند. مطلوبست، حداکثر زاویه ای که این بسته ها از سطح جدا می شوند؟



$$T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2$$

$$T_1 = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}(2)(1)^2 = 1J$$

$$U_{1 \rightarrow 2} = W.y = mgr(1 - \cos \theta_{\max}) = g(1 - \cos \theta_{\max}) \quad , \quad T_2 = v^2$$

$$\Rightarrow 1 + mgr(1 - \cos \theta_{\max}) = v^2 \Rightarrow 1 + (1 - \cos \theta_{\max})g = v^2 \quad (I)$$

$$: \quad N=0 \Rightarrow N - W \cos \theta_{\max} = -ma_n \quad \text{هنگام جدا شدن}$$

$$\Rightarrow -mg \cos \theta_{\max} = -m \frac{v^2}{0.5} \quad (III)$$

$$(I, II) \Rightarrow \cos \theta_{\max} = \frac{2v^2}{g} \Rightarrow \theta_{\max} = 42.7^\circ$$

$$N=0 \quad \leftarrow \text{ترک جاذبه شدن}$$

$$\sum F_t = + \downarrow ma_t$$

$$mg \sin \theta = ma_t = m \frac{dv}{dt} \rightarrow mg \sin \theta = m \frac{dv}{dt} \rightarrow g \sin \theta = \frac{dv}{dt} = a_t \quad (r d\theta)$$

$$\rightarrow v dv = g \sin \theta (0.5) d\theta \rightarrow \int_1^v v dv = \int_0^{\theta_{\max}} 0.5g \sin \theta d\theta$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}v^2 \Big|_1^v = -0.5g \cos \theta \Big|_0^{\theta_{\max}} \rightarrow \frac{1}{2}(v^2 - 1) = -\frac{1}{2}g(\cos \theta_{\max} - 1)$$

$$\rightarrow v^2 - 1 = -g(\cos \theta_{\max} - 1) \rightarrow v^2 = 1 + (1 - \cos \theta_{\max}) \quad (I)$$

مثال : در شکل زیر مطلوب است توان موتورسیستم بالابر اگر
الف : اگر آسانسور با سرعت ثابت ۱۵ ft/s به سمت بالا در حرکت باشد .
ب : اگر آسانسور با سرعت ۱۵ ft/s و شتاب ۳ ft/s² به سمت بالا در حرکت باشد .

$$(W_c = 2200 \text{ lb}, W_E = 5000 \text{ lb}, \frac{ft}{s^2} g = 32.2)$$

$$P = \sum \vec{F} \cdot \vec{v} \Rightarrow P = F \cdot v$$

$$m_c g - T = m_c a_c$$

$$\textcircled{1} 2200 - T = \frac{2200}{g} a_c$$

$$2F + T - m_E g = m_E a_E$$

$$\textcircled{2} 2F + T - 5000 = \frac{5000}{g} a_E$$

$$v_E = cte, a_E = 0 \Rightarrow a_c = 0$$

$$\begin{cases} 2200 - T = 0 \Rightarrow T = 2200 \text{ (lb)} \\ 2F + T - 5000 = 0 \Rightarrow F = 1400 \text{ (lb)} \end{cases}$$

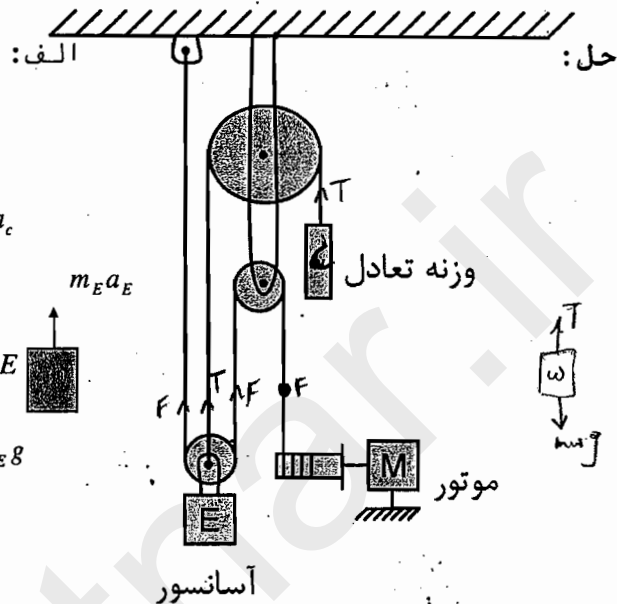
$$\begin{cases} 2200 - T = 0 \Rightarrow T = 2200 \text{ (lb)} \\ 2F + T - 5000 = 0 \Rightarrow F = 1400 \text{ (lb)} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} T &= T \\ W_c &= m_c g \\ m_c a_c &= m_c a_c \end{aligned}$$

$$2F + T = m_E a_E$$

$$E = E$$

$$W_E = m_E g$$



طول کابل متصل به وزنه تعادل ثابت است :

$$\uparrow a_E = a_c \downarrow$$

طول کابل تا نقطه M نیز ثابت است :

$$2X_E + X_m = cte. \Rightarrow 2v_E \uparrow = v_m \downarrow \Rightarrow v_m = 30 \frac{ft}{s}$$

$$P_m = (1400)(30) = 42000 \text{ (lb} \cdot \frac{ft}{s}) \Rightarrow P_m = \frac{42000}{550} = 76.4 \text{ (HP)}$$

ب :

$$v_E = 15 \left(\frac{ft}{s} \right) \uparrow, a_E = 3 \left(\frac{ft}{s^2} \right) \uparrow \Rightarrow a_c = 3 \left(\frac{ft}{s^2} \right) \downarrow$$

با توجه به قسمت الف داریم :

$$F = 1735.4 \text{ (lb)}, v_m = 30 \left(\frac{ft}{s} \right) \downarrow, P_m = (1735.4)(30) = 52062 \text{ (lb} \cdot \frac{ft}{s}) \Rightarrow P_m = \frac{1735.4 \times 30}{550} = 94.7 \text{ (HP)}$$

اصل حفظ انرژی (مکانیکی) :

شرط استفاده از اصل حفظ انرژی آن است که نیروهای ما پایستار و یا محافظه کار باشند. (Conservative Force)

نیروهای ما به دو صورت قابل تقسیم بندی هستند : نیروهای پایستار و غیر پایستار یا نا پایستار .

۱: کار نیروهای غیر پایستار به مسیر حرکت بستگی دارد. $U_{friction} = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ (غیر پایستار)

۲: کار نیروهای پایستار به مسیر حرکت بستگی ندارد و فقط به Δy و ΔW بستگی دارد. $U_{زن} = \int \vec{W} \cdot d\vec{r}$ (پایستار)

استار

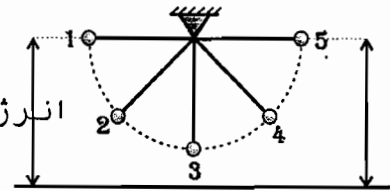
ان

انرژی پتانسیل :

$$U_{1 \rightarrow 2} = -\Delta y W = W y_1 - W y_2$$

$$V_g = W y$$

انرژی پتانسیل نیروی وزنی



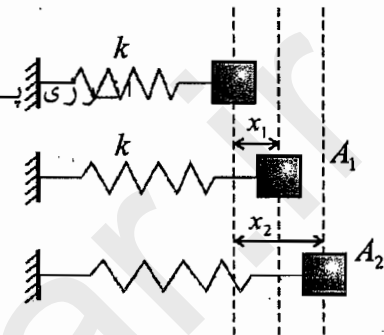
$$U_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{2} k x_1^2 - \frac{1}{2} k x_2^2$$

$$V_e = \frac{1}{2} k x^2$$

$$U_{1 \rightarrow 2} = V_1 - V_2$$

$$V_1 = V_{g1} + V_{e1}, V_2 = V_{g2} + V_{e2}$$

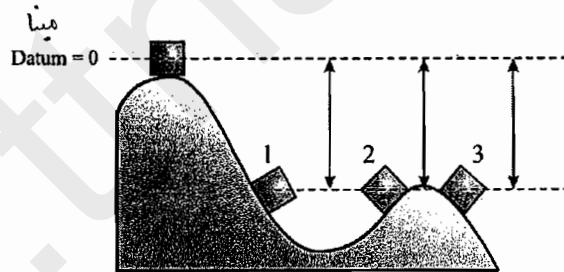
پتانسیل نیروی فنر



اصل حفظ انرژی مکانیکی :

$$\left. \begin{aligned} T_1 + U_{1 \rightarrow 2} &= T_2 \\ T_1 + V_1 - V_2 &= T_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

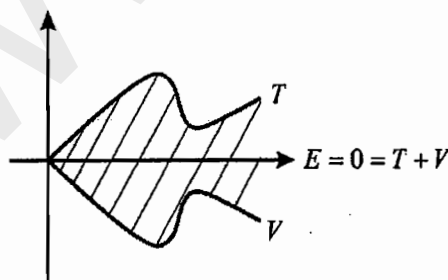
$$E_1 = E_2 = E_3 = \dots = E_n ; E = T + V$$



$$V = cte. \Rightarrow V_1 = V_2 = V_3$$

$$E_1 = E_2 = E_3 = \dots$$

اگر انرژی مکانیکی ثابت باشد، آنگاه E روی محور $y = 0$ در نظر می گیریم و T قرینه ی U می شود، زیرا :



تابع پتانسیل :

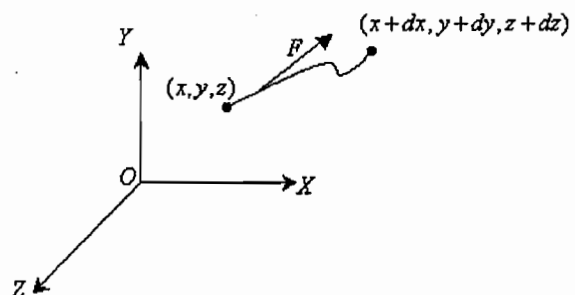
$$V = V_g + V_e$$

$$U_{1 \rightarrow 2} = V_1 - V_2 = -\Delta V, U = V(x, y, z)$$

$$dU = V(x, y, z) - V(x + dx, y + dy, z + dz)$$

$$dU = -dV(x, y, z) = -dV \Rightarrow dU = -dV$$

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$



$$dU = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$$dU = -dV = -\left[\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz\right]$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= -F_x \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= -F_y \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= -F_z \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{F} = -\text{grad } V, \vec{F} = -\nabla V$$

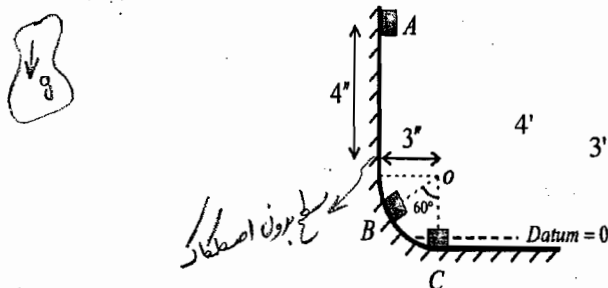
$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$$

توجه: هرگاه $\vec{F} = -\nabla V$ شود، می توانیم از اصل حفظ انرژی مکانیکی استفاده کنیم.

$$V = Wy, \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial y} = W, \vec{F} = -\vec{W}$$

برای نیروهای وزنی:

مثال: اگر جسم از نقطه A رها شود، مطلوب است نیروی وارده از سطح به جسم در نقاط B و C؟ ($W=1.25 \text{ lb}$)



حل:

$$\begin{cases} N_B - W \cos 60 = ma_n = m \frac{v_B^2}{\rho} \Rightarrow N_B - 1.25(0.5) = \frac{1.25}{32.2} \left(\frac{v_B^2}{3}\right) \\ N_C - W = ma_n = m \frac{v_C^2}{\rho} \Rightarrow N_C - 1.25 = \frac{1.25}{32.2} \left(\frac{v_C^2}{3}\right) \end{cases}$$

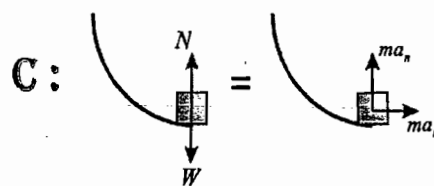
$$E_A = E_B = E_C \Rightarrow T_A + V_A = T_B + V_B = T$$

$$E_A = T_A + V_A = 0 + 7W = 7(1.25), E_B = 1$$

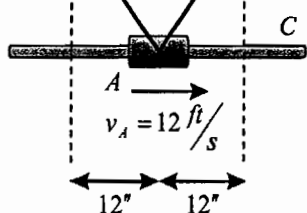
$$\frac{1}{2} \left(\frac{1.25}{32.2}\right) v_B^2 + 3(0.5)(1.25) = \frac{1}{2} \left(\frac{1.25}{32.2}\right) v_C^2 = 7(1.25)$$

$$v_B^2 = 11g \Rightarrow N_B = 5.21 \text{ (lb)}$$

$$v_C^2 = 14g \Rightarrow N_C = 7.08 \text{ (lb)}$$



مثال: مطلوبست نیروی کششی فنر در موقعیت اولیه ی A اگر سرعت در نقطه ی A برابر 12 ft/s و سرعت طوقه در نقطه ی C برابر 8 ft/s باشد.



$$\frac{ft}{s^2}, g = 32.2 \times 12 \frac{in}{s^2} (g=32.2 \text{ و } W=2 \text{ lb}, K=3 \text{ lb/in})$$

حل:

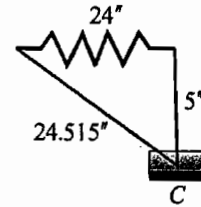
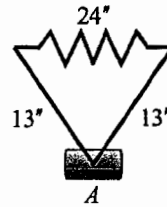
$$\begin{cases} L_1 = 26 + 24 = 50 \Rightarrow x_1 = 50 - L \\ L_2 = 53.5 \Rightarrow x_2 = 53.5 - L \end{cases} \Rightarrow x_2 - x_1 = 3.5 \quad ①$$

$$E_A = E_C \Rightarrow T_A + V_A = T_C + V_C \quad \text{طول اولیه}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{2}{g} \right) (144 \times 12) + 1.5 x_1^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{g} \right) (64 \times 12) + 1.5 x_2^2 \quad ②$$

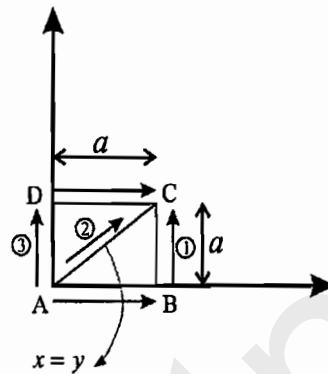
$$x_1 = 1.08(\text{in}) , F_1 = 3.24(\text{lb})$$

$$\frac{1.08}{12} = 0.09'$$



مثال : اگر $\vec{F} = x^2 y \vec{i} + xy^2 \vec{j}$ روی ذره P در صفحه x-y اثر کند، ثابت کنید

که نیروی $\vec{F}$ نیروی غیر محافظه کار است و همچنین کار نیروی $\vec{F}$ روی ذره P را که از نقطه A به نقطه C حرکت می کند را حساب کنید.



حل:

$$\begin{cases} \frac{\partial F_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} = -\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

$$\vec{F} = -\text{grad } V$$

$$\vec{F}_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = x^2 y$$

$$\vec{F}_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = y^2 x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial F_x}{\partial y} = x^2 \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} = y^2 \end{cases}, x^2 \neq y^2$$

پس نیروی $\vec{F}$ نیروی غیر محافظه کار است.

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} = \dots$$

$$U_{A \rightarrow C} = \int_A^C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^C F_x dx + F_y dy = \int_0^a F_x dx + \int_0^a F_y dy = \frac{a^4}{4} + \frac{a^4}{4} = \frac{a^4}{2}$$

روش دیگر :

$$U_{A \rightarrow C} = U_{A \rightarrow B} + U_{B \rightarrow C}$$

$$U_{A \rightarrow B} = \int_0^a F_x dx + \int_0^0 F_y dy = 0$$

$$U_{B \rightarrow C} = \int_0^a F_x dx + \int_0^a F_y dy = a \left(\frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^a = \frac{a^4}{3}$$

با فرض اینکه پایستار باشد مسیر حرکت تفاوتی ندارد :

$$U_{A \rightarrow C} = U_{A \rightarrow B} + U_{B \rightarrow C} \Rightarrow \frac{a^4}{2} = 0 + \frac{a^4}{3} \Rightarrow \text{غرضی}$$

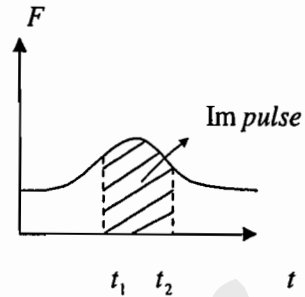
پس نیروی ما ناپایستار است.

اصل نیروی محرک و ممنتوم و حرکت (Impulse & Momentum) خطی:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{F} dt = m d\vec{v} \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = m \int_{v_1}^{v_2} d\vec{v} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$

$$m\vec{v}_2 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt + m\vec{v}_1$$

$$\vec{I}_{imp_{1 \rightarrow 2}} = \left(\int_{t_1}^{t_2} F_x dt \right) \vec{i} + \left(\int_{t_1}^{t_2} F_y dt \right) \vec{j} + \left(\int_{t_1}^{t_2} F_z dt \right) \vec{k}$$



اصل ایمپالس و ممنتوم

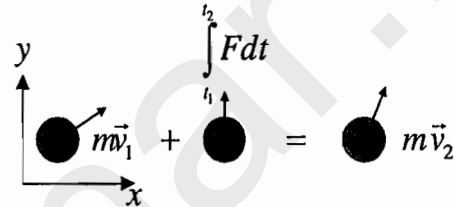
$$\vec{L}_2 = \vec{I}_{imp_{1 \rightarrow 2}} + \vec{L}_1$$

واحد ایمپالس:

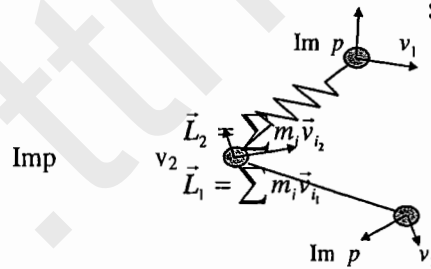
lb.s : (FPS)

N.s : (SI)

$$\begin{cases} mv_{2x} = \int_{t_1}^{t_2} F_x dt + mv_{1x} & \rightarrow \\ mv_{2y} = \int_{t_1}^{t_2} F_y dt + mv_{1y} & \uparrow \end{cases}$$



چندین جرم :



$$Imp_{1 \rightarrow 2} = \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_i dt$$

$$\Rightarrow \sum m_i \vec{v}_{i1} + \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_i dt = \sum m_i \vec{v}_{i2}$$

$$\sum_i \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_i dt = 0 \Rightarrow \sum m_i \vec{v}_{i1} = \sum m_i \vec{v}_{i2}$$

حفظ ممنتوم سیستم:

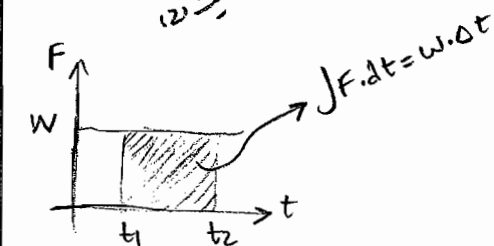
$$\vec{L}_1 + \vec{I}_{imp_{1 \rightarrow 2}} = \vec{L}_2$$

$$Imp_{1 \rightarrow 2} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$$

واحدهای این دو واحد ممنتوم

(N.s)

(lb.s)



روش سوم در حل مسائل دینامیک

روش اول: قانون دوم نیوتن

روش دوم: کار و انرژی

انواع مسائل برخورد

۱- مسائل ضربه ای ($\Delta t \approx 0.01s$)

در مسائل ضربه ای از اثر وزن اصطکاک و نیروی فنر صرفه نظر می گردد:

$$t = dt \approx 0 \Rightarrow \int w dt \approx 0, \quad \int F_e dt \approx 0, \quad \int F_\mu dt \approx 0$$

ایمپالس

ایمپالس وزن

ایمپالس فنر

اصطکاک

۲- مسائل غیر ضربه ای

در مسائل غیر ضربه ای :

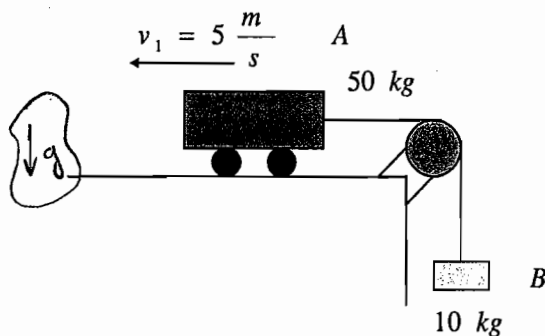
$$\Delta t > 0 \Rightarrow \int w dt \neq 0, \quad \int F_e dt \neq 0, \quad \int F_\mu dt \neq 0$$

مثال: اگر از اصطکاک صرف نظر شده باشد، مطلوب است مدت زمانی که به سرعت :

الف: صفر می رسد ؟

ب: $5m/s$ به طرف راست می رسد ؟
(از اصطکاک صرف نظر شده است.)

(زمانی که سرعت جسم صفر می شود $\rightarrow 5m/s$ می شود)



حل:

الف: اصل ایمپالس برای جرم A :

$$\begin{aligned} & \vec{m_1 \vec{v}_1} = -5 \times 5 = -250 \\ & \vec{m_2 \vec{v}_2} = 5 \times 0 = 0 \\ & \vec{m_1 \vec{v}_1} + \vec{m_2 \vec{v}_2} = \vec{m_1 \vec{v}_1} + \vec{m_2 \vec{v}_2} \\ & -250 + 0 = -250 + 0 \end{aligned}$$

اصل ایمپالس برای جرم B :

$$\begin{aligned} & \vec{m_1 \vec{v}_1} = -5 \times 5 = -250 \\ & \vec{m_2 \vec{v}_2} = 5 \times 0 = 0 \\ & \vec{m_1 \vec{v}_1} + \vec{m_2 \vec{v}_2} = \vec{m_1 \vec{v}_1} + \vec{m_2 \vec{v}_2} \\ & -250 + 0 = -250 + 0 \end{aligned}$$

ب: اصل ایمپالس برای جرم A :

$$\begin{aligned} & \vec{m_1 \vec{v}_1} = -5 \times 5 = -250 \\ & \vec{m_2 \vec{v}_2} = 5 \times 5 = 250 \\ & \vec{m_1 \vec{v}_1} + \vec{m_2 \vec{v}_2} = \vec{m_1 \vec{v}_1} + \vec{m_2 \vec{v}_2} \\ & -250 + 250 = 0 \end{aligned}$$

اصل ایمپالس برای جرم B :

$$\begin{aligned} & \vec{m_1 \vec{v}_1} = -5 \times 5 = -250 \\ & \vec{m_2 \vec{v}_2} = 5 \times 5 = 250 \\ & \vec{m_1 \vec{v}_1} + \vec{m_2 \vec{v}_2} = \vec{m_1 \vec{v}_1} + \vec{m_2 \vec{v}_2} \\ & -250 + 250 = 0 \end{aligned}$$

برای جرم B نیز داریم :

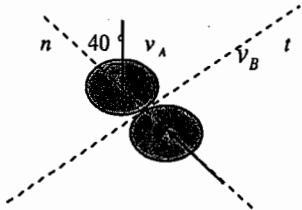
اصل ایمپالس و ممنتوم برای کل سیستم :

$$m_A(v_A)_n \pm m_B(v_B)_n = m_A(v_A)_n \pm m_B(v_B)_n$$

$$e[(v_A)_n - (v_B)_n] = (v_B)_n - (v_A)_n$$

مثال : سرعت های نهایی دو جسم را بعد از برخورد بیابید ؟ (e=0.75)

$$(m_A = 2.5 \text{ kg}, m_B = 1.5 \text{ kg}, v_A = 8 \frac{m}{s}, v_B = 6 \frac{m}{s})$$



حل :

$$m_A v_A + \int F dt = m_A v_A'$$

$$m_B v_B + \int F dt = m_B v_B'$$

$$(v_A')_t = (v_A)_t = 8 \sin(40^\circ) = 5.15 \frac{m}{s}$$

$$(v_B')_t = (v_B)_t = 0$$

$$+n: m_A(v_A')_n - m_B(v_B')_n = -m_A(v_A)_n + m_B(v_B)_n \Rightarrow 2.5(v_A')_n - 1.5(v_B')_n = -6.325$$

$$e = \frac{(v_B')_n + (v_A')_n}{-(v_A)_n + (v_B)_n} \Rightarrow (v_B')_n + (v_A')_n = 9.1$$

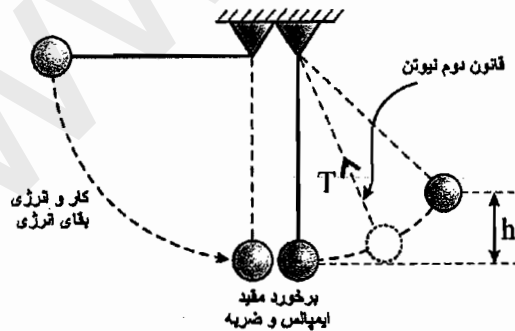
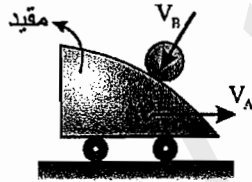
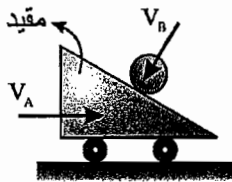
$$(v_A')_n = 1.83 \left(\frac{m}{s}\right), v_A'^2 = (v_A')_n^2 + (v_A')_t^2 \Rightarrow v_A' = 5.46 \left(\frac{m}{s}\right), \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{(v_A')_t}{(v_A')_n}\right) = 20.4^\circ$$

$$v_B' = (v_B')_n = 7.27 \left(\frac{m}{s}\right) \nearrow 40^\circ$$

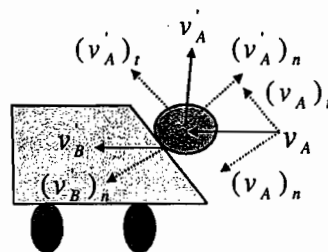
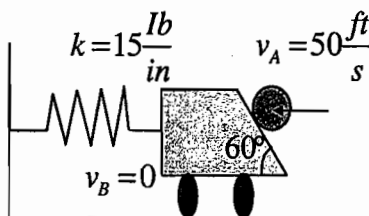
برخورد مقید

راستای حرکت پس از برخورد مشخص می باشد.

همان روابط قبل صحیح است اما به جای اصل ایمپالس و ممنتوم در جهت n، در جهت عمود به ایمپالس با مقدار نامعلوم (مثلاً عکس العمل زمین) رابطه را می نویسیم.



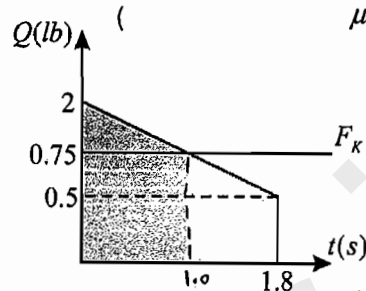
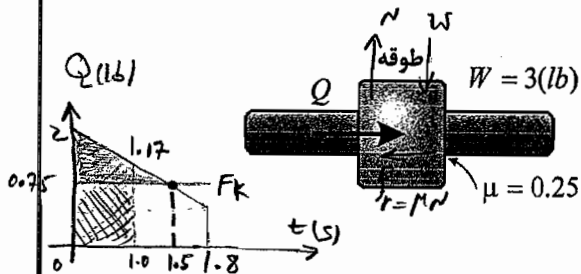
مثال : مطلوبست حداکثر تغییر طول فنر وقتی جسم A به B برخورد کند ؟ (e=0.75, k=15 lb/in)



$$\left. \begin{array}{l} 1. -250 + T\Delta t = 250 \\ 2. 50 + (T - 98.1)\Delta t = -50 \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta t = \frac{60}{g}$$

$$\Delta t = 6.025$$

مثال : مطلوبست سرعت طوقه اگر از حال سکون رها شده باشد در: الف) $t=1s$ ب) $t=2s$ ج) حداکثر سرعت طوقه
 $\mu = 0.25$ $W = 3 \text{ lb}$



حل:

شرح حرکت از حال سکون

$$\vec{L}_2 = \vec{L}_{mp1 \rightarrow 2} + \vec{L}_1, \quad \vec{L}_1 = m\vec{v}_1 = 0, \quad \sum I_{mp} = \int_0^1 Q dt - \int_0^1 F_k dt$$

$$(\vec{L}_{mp1 \rightarrow 2})_Q - (\vec{L}_{mp1 \rightarrow 2})_{F_k}$$

الف: $t=1$

$$0 + I_{mp1 \rightarrow 2} = \frac{3}{g} v, \quad \int_0^1 Q dt = \frac{1}{2} (2 + 1.167) = 1.58 \text{ (lb} \cdot \text{s)}, \quad \int_0^1 F_k dt = 0.75(1) = 0.75 \text{ (lb} \cdot \text{s)}$$

$$\Rightarrow v = 8.91 \text{ (ft/s)}$$

ب: $t=2$

$$0 + I_{mp1 \rightarrow 2} = \frac{3}{g} v, \quad \int_0^2 Q dt = \frac{1}{2} (2 + 0.5)(1.8) = 2.25 \text{ (lb} \cdot \text{s)}, \quad \int_0^2 F_k dt = 0.75(2) = 1.5 \text{ (lb} \cdot \text{s)}$$

$$\Rightarrow v = 8.05 \text{ (ft/s)}$$

برای وقتی که $v=0$ است، $t=?$

$$2.25 - 0.75t = 0, \quad t = 3(s)$$

در ثانیه سوم متحرک از حرکت باز می ایستد و زمانی سرعت ماکزیمم می شود که $\int_0^t Q dt$ و $\int_0^t F_k dt$ بیشترین اختلاف را داشته باشند، یعنی در محل تلاقی دو نمودار با هم در $t=1.5s$.

$$v_{\max} = \frac{1}{2} (2 - 0.75)(1.5) / \left(\frac{3}{32.2} \right) = 10.06 \frac{\text{ft}}{\text{s}}$$

$$\vec{L}_{mp1 \rightarrow 2} = \vec{0}$$

$$2.25 - 0.75t = 0 \rightarrow t = 3(s)$$

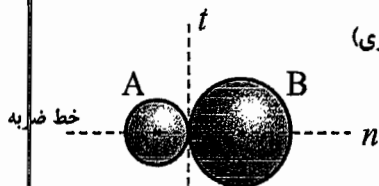
$$\textcircled{a} t=1.5 \rightarrow v = 8.94 \text{ m/s}$$

$$\textcircled{a} t=2.5 \rightarrow v = 8.05 \text{ m/s}$$

برخورد (ضربه) Impact

۱. مرکزی (مراکز جرم روی خط ضربه قرار دارند.)

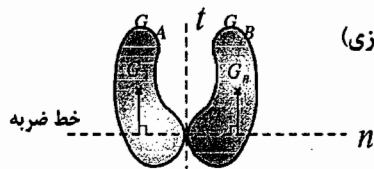
(مرکزی)



تصادف

جسم صلب

ضربه

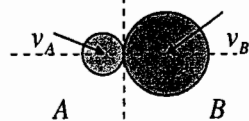


۲. غیر مرکزی (مراکز جرم روی خط (غیر مرکزی) قرار ندارند.)

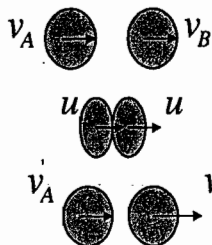
برخورد مرکزی

۱. مستقیم (سرعت روی خط ضربه می افتند.)
۲. مایل (حداقل یکی از سرعت ها روی خط نیفتد.)

(غیر مستقیم)



* ایماles درجهت مساوی سطح وزن که صرف نظر می شود.
← تنها ایماles درجهت n مد نظر است.



پیش از برخورد

تغییر شکل

بازگشت

برخورد مستقیم مرکزی (Direct Central Impact)
اصل ایماles و ممنتوم
مرحله تغییر شکل (Deformation)

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B$$

مرحله بازگشت (Restitution)
از رابطه سرعت نسبی

A
+
+
A

$$\left. \begin{aligned} m_A v_A - m_A u &= \int P dt \\ m_A u - m_A v'_A &= \int R dt \end{aligned} \right\} \Rightarrow e = \frac{\int R dt}{\int P dt} = \frac{u - v'_A}{v_A - u}$$

$$m_A v_A + m_B v_B + 0 = m_A v'_A + m_B v'_B$$

و

ضریب بازگشت $0 \leq e \leq 1$

برای جسم B نیز به همین ترتیب

$$e = \frac{v'_B - u}{u - v_B}$$

با حذف u از این دو رابطه ، رابطه سرعت های نسبی بدست می آید $e(v_A - v'_B) = (v'_B - u) - (u - v_B)$

ضریب بازگشت (استرداد) :

با جنس جسم و نحوه برخورد
بستگی دارد.

$$e = \frac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B} = \frac{\int R dt}{\int P dt} \quad (\text{Coefficient of Restitution})$$

$$m_A v_A + m_B v_B + \int P dt = m_A v'_A + m_B v'_B$$

اصل ایماles و ممنتوم برای کل جرم ها

$$v'_B - v'_A = e(v_A - v_B)$$

سرعت نسبی قبل از برخورد
سرعت نسبی پس از برخورد

حالات خاص

(۱) ضربه از نوع کاملاً ارتجاعی (الاستیک) : $(e=1)$

$$\begin{cases} v_A - v_B = v'_B - v'_A \\ m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B \end{cases}$$

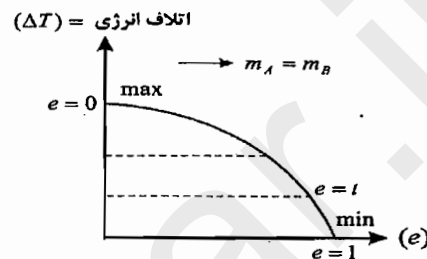
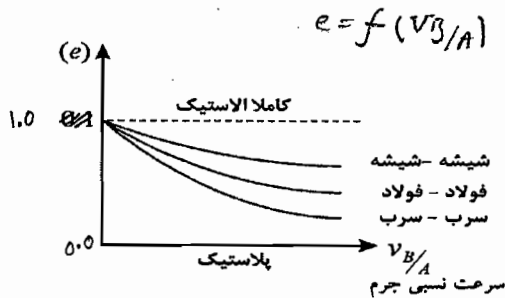
انرژی تلف شده $\Delta T = 0$: حفظ انرژی $T_1 = T_2$

$$\frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 = \frac{1}{2} m_A v_A'^2 + \frac{1}{2} m_B v_B'^2$$

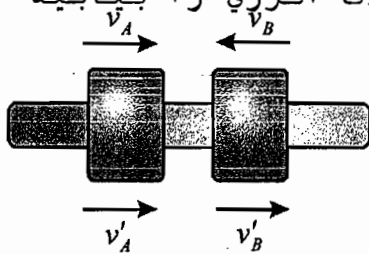
(۲) ضربه از نوع کاملاً خمیری و پلاستیک (مومسان) : $(e=0)$

Plastic Impact حداکثر اتلاف انرژی $e=0 \Rightarrow v'_B - v'_A = 0 \Rightarrow v'_A = v'_B = v'$

حالت کلی : $0 < e < 1$ در سرعت های نسبی متفاوت ، این ضربه فرق دارد .



مثال : دو جسم A و B به هم برخورد می کنند اتلاف انرژی را بیابید ؟



$v_A = 6 \frac{ft}{s}$, $v_B = 4 \frac{ft}{s}$, $e = 0.8$, $W_A = 5lb$, $W_B = 3lb$,

حل :

جهت فرضی

اصل ایمپالس و ممنتوم برای کل جرم ها :

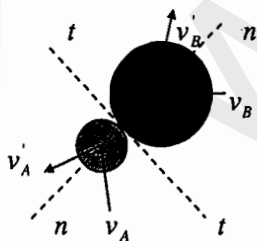
رابطه سرعت های نسبی $m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B \Rightarrow (5/g)(6) - (3/g)(4) = (5/g)v'_A + (3/g)v'_B$

$e = \frac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B} \Rightarrow (0.8)(6 - (-4)) = (v'_B - v'_A)$

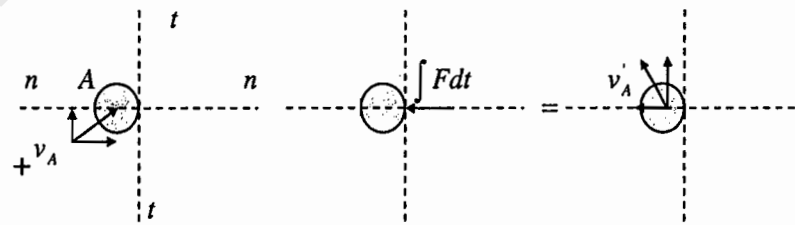
$\Delta T = T - T' = 3.54 - 2.49 = 1.05 (ft \cdot lb)$
اتلاف انرژی

برخورد مرکزی مایل (Oblique Central Impact)

$$\begin{cases} 5v'_A + 3v'_B = 18 \\ -v'_A + v'_B = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v'_A = 0.75 \left(\frac{ft}{s} \right) \leftarrow \\ v'_B = 7.25 \left(\frac{ft}{s} \right) \rightarrow \end{cases}$$



اصل ایمپالس و ممنتوم برای جرم A :



$+t \quad m_A (v_A)_t + 0 = m_A (v'_A)_t$

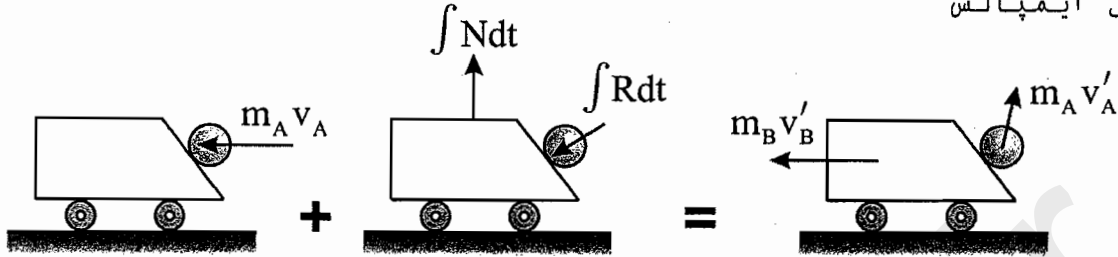
سرعت در راستای عمود بر ضربه ثابت است (حفظ ممنتوم A در جهت t)
 $(v_A)_t = (v'_A)_t$

$$v_A = 50 \frac{ft}{s}, W_A = 1.5(lb), W_B = 4(lb)$$

نخاطر برخورد از این سنخ صرف نظری شود.

$$e = \frac{(v_B')_n - (v_A')_n}{(v_A)_n - (v_B)_n} \Rightarrow 0.866 v_B' + (v_A')_n = 32.476$$

اصل ایمپالس



$$(v_A')_t = (v_A)_t = 25 \left(\frac{ft}{s} \right) \quad I$$

$$\left. \begin{aligned} +x : m_A v_A + 0 &= -m_A (v_A')_x + m_B v_B' \\ (v_A')_x &= (v_A)_n \cos(30^\circ) - (v_A)_t \cos(60^\circ) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{75}{g} = \frac{4}{g} v_B' - \frac{1.5}{g} [(v_A)_n \cos(30^\circ) - 12.5] \quad II$$

$$I, II \Rightarrow v_B' = 19.222 \left(\frac{ft}{s} \right)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_B v_B'^2, \quad U_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{2} k x_{max}^2, \quad T_1 = 0$$

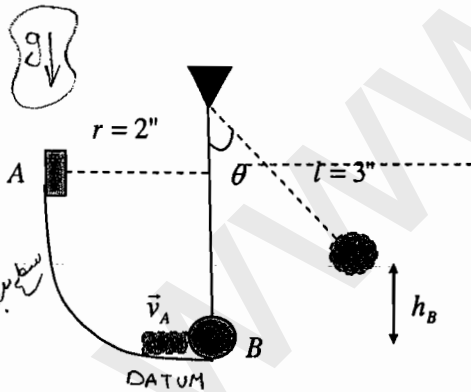
$$\frac{1}{2} m_B (v_B')^2 = \frac{1}{2} k x_{max}^2 \Rightarrow x_{max} = .505(ft) = 6.06(in)$$

$k = 15 \frac{lb}{in} = 180 \frac{lb}{ft}, \quad g = 32.2 \frac{ft}{s^2}$

اصل کار و انرژی :
 $T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2$

اصل حقیقت انرژی : $T_1 + U_1 = T_2 + U_2$

مثال : در شکل مقابل اگر بسته A رها شود، مطلوبست حداکثر مقدار θ و حداکثر کشش طناب ؟
(اگر $e = 0.9, W_A = 2.5 lb, W_B = 4 lb$)



$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2$$

$$\Rightarrow v_A = 11.35 \left(\frac{ft}{s} \right) \rightarrow$$

حل :

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \Rightarrow 0 + 2W_A = \frac{1}{2} m_A v_A'^2 + \frac{1}{2} m_B v_B'^2$$

$$\left\{ \begin{aligned} m_A v_A + 0 &= m_A v_A' + m_B v_B' \\ e &= \frac{v_B' - v_A'}{v_A - v_B} \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_B' = 8.3 \left(\frac{ft}{s} \right), v_A' = -1.9 \left(\frac{ft}{s} \right)$$

اصل پایستگی انرژی بعد از برخورد

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2$$

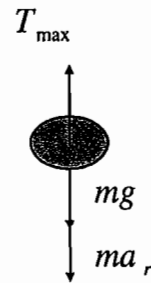
$$E_1 = E_2$$

$$\frac{1}{2}m(v_B')^2 = m_B g h_{\max} \Rightarrow h_{\max} = \frac{(v_B')^2}{2g} = 1.1 (ft)$$

$$\cos \theta_{\max} = \frac{3-1.1}{3} \Rightarrow \theta_{\max} = \arccos \frac{1.9}{3} = 50.70^\circ$$

$$T_{\max} = m_B g + m_B \frac{(v_B')^2}{r} \quad \uparrow \sum F_y = m a_y$$

$$T_{\max} = 6.85 (lb)$$



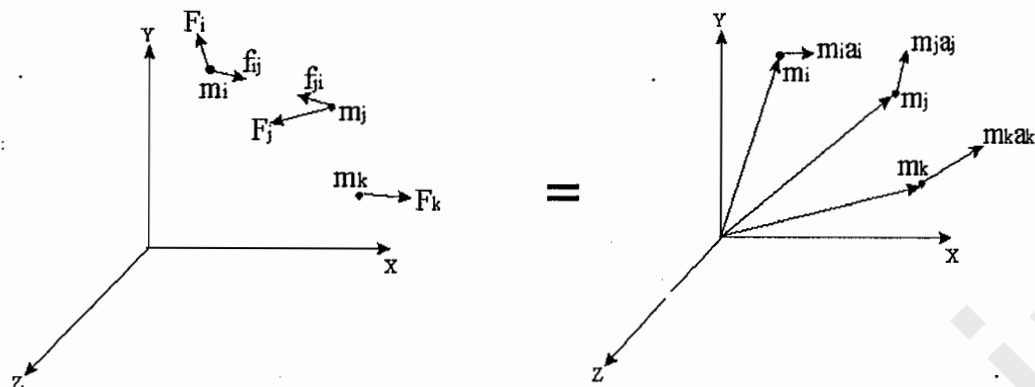
www.ttnar.ir

فصل چهارم :

سیستم نقاط مادی

$F_i =$ نیروی خارجی که به جرم m_i اثر می کند.

$f_{ji} =$ نیروی داخلی از i به j و $f_{ij} = -f_{ji}$



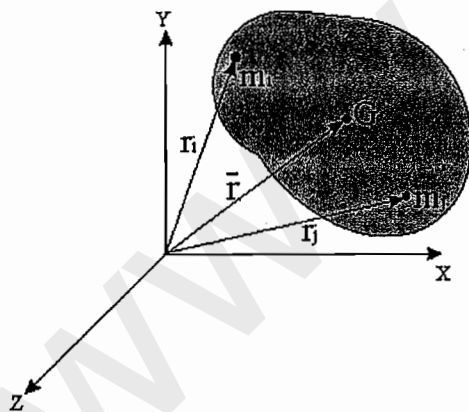
$$\begin{cases} \vec{F}_i + \sum \vec{f}_{ij} = m_i \vec{a}_i \\ \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum \vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} = \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i \end{cases}$$

اصل دوم نیوتن برای جرم i

برای سیستم نقاط مادی: $i:1 \rightarrow n$

$$\begin{cases} \sum_i \vec{F}_i + \sum_i \sum_j \vec{f}_{ij} = \sum_i m_i \vec{a}_i, \quad \sum_i \sum_j \vec{f}_{ij} = 0 \\ \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_i (\vec{r}_i \times \sum_j \vec{f}_{ij}) = \sum_i (\vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i), \quad \sum_i (\vec{r}_i \times \sum_j \vec{f}_{ij}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum \vec{F}_i = \sum m_i \vec{a}_i \\ \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i \end{cases}$$

مادی



حرکت مرکز جرم سیستم نقاط

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}_G \\ \vec{r} &= \bar{x}\vec{i} + \bar{y}\vec{j} + \bar{z}\vec{k} \\ m\vec{r} &= \sum m_i \vec{r}_i \\ m &= \sum m_i \end{aligned}$$

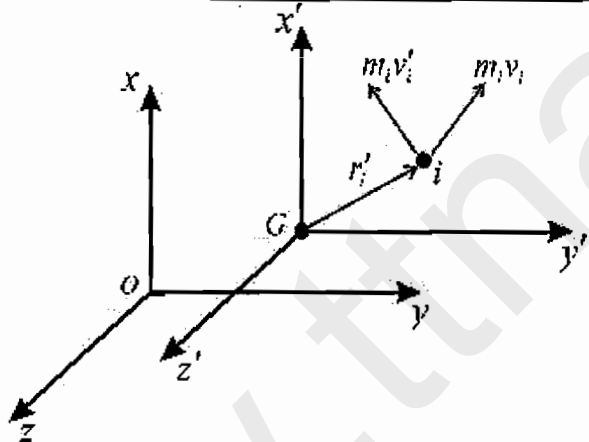
موقعیت مرکز جرم : $\bar{x} = \frac{1}{m} (\sum m_i x_i), \bar{y} = \dots, \bar{z} = \dots$

$$\rightarrow m\vec{v} = \sum m_i \vec{v}_i \Rightarrow \vec{v} = \bar{v}_x \vec{i} + \bar{v}_y \vec{j} + \bar{v}_z \vec{k} \quad \text{سرعت جرم } i: \bar{v}_i = i$$

$$\rightarrow m\vec{a} = \sum m_i \vec{a}_i \Rightarrow \vec{a} = \bar{a}_x \vec{i} + \bar{a}_y \vec{j} + \bar{a}_z \vec{k} \quad \text{شتاب جرم } i: \bar{a}_i = i$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{L} = m\vec{v} = \sum m_i \vec{v}_i \Rightarrow \vec{v} = \bar{v}_x \vec{i} + \bar{v}_y \vec{j} + \bar{v}_z \vec{k} \\ \vec{L} = m\vec{a} \\ \sum \vec{F} = \vec{L} \end{array} \right\} \rightarrow \sum \vec{F} = M\vec{a} = \vec{L}$$

ممنتوم زاویه ای سیستم نقاط مادی :



دستگاه ثابت: \$Oxyz\$

دستگاه متحرک: \$Gx'y'z'\$

$$\text{سرعت } G\vec{v}_i' =$$

سرعت نسبی نقطه \$i\$ نسبت به نقطه

$$\vec{v}_i = \text{سرعت مطلق نقطه } i = \vec{v} + \vec{v}_i'$$

مرکز جرم

$$\vec{v}_i = \vec{v} + \vec{v}_i'$$

ممنتوم زاویه ای سیستم نقاط مادی نسبت به نقطه \$G\$ (در دستگاه متحرک)

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{H}_G' = \sum (\vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i') \rightarrow \dot{\vec{H}}_G' = \frac{d}{dt} (\vec{H}_G') = \frac{d}{dt} (\sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i') \rightarrow \dot{\vec{H}}_G' = \sum (\dot{\vec{r}}_i' \times m_i \vec{v}_i') + \sum \vec{r}_i' \times m_i \dot{\vec{v}}_i' \\ \sum (\dot{\vec{r}}_i' \times m_i \vec{v}_i') = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \dot{\vec{H}}_G' = \sum \vec{r}_i' \times m_i \dot{\vec{v}}_i'$$

$$i \text{ شتاب مطلق نقطه } = \vec{a}_i = \vec{a}_i' + \vec{a}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\vec{H}}'_G = \sum \vec{r}'_i \times m_i (\vec{a}_i - \vec{a}) \Rightarrow \dot{\vec{H}}'_G = \sum \vec{r}'_i \times m_i \vec{a}_i - (\sum m_i \vec{r}'_i) \times \vec{a} \\ (\sum m_i \vec{r}'_i) \times \vec{a} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \dot{\vec{H}}'_G = \sum \vec{r}'_i \times m_i \vec{a}_i$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\vec{H}}'_G = \sum \vec{r}'_i \times m_i \vec{a}_i \\ \sum \vec{F}_i + \sum \vec{f}_{ij} = m_i \vec{a}_i \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{\vec{H}}'_G = \sum \vec{r}'_i \times \vec{F}_i + \sum \vec{r}'_i \times \sum \vec{f}_{ij} \\ \sum \vec{r}'_i \times \sum \vec{f}_{ij} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \dot{\vec{H}}'_G = \sum \vec{r}'_i \times \vec{F}_i = \sum \vec{M}_G \quad (1)$$

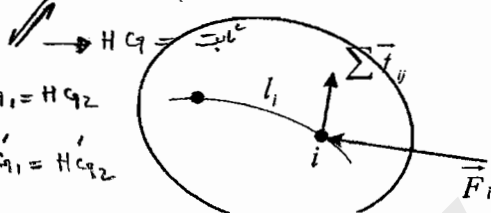
ممنتوم زاویه ای سیستم نسبت به نقطه ی G (در دستگاه ثابت) $\vec{H}_G =$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{H}_G = \sum \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}_i \\ \vec{v}_i = \vec{v}'_i + \vec{v} \end{array} \right\} \rightarrow \vec{H}_G = \sum \vec{r}'_i \times m_i (\vec{v}'_i + \vec{v}) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{H}_G = \sum \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i + (\sum m_i \vec{r}'_i) \times \vec{v} \\ (\sum m_i \vec{r}'_i) \times \vec{v} = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \vec{H}_G = \sum \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i = \vec{H}'_G \xrightarrow{(1)} \vec{H}'_G = \sum \vec{M}_G = \dot{\vec{H}}_G$$

حالت خاص $\sum M_{C_1} = 0$

$$\dot{H}_{C_1} = \dot{H}'_{C_1} = 0$$



در واقع ممنتوم زاویه ای در دستگاه مرکز ثقل ثابت برابر است با مجموع تدریج

کار نیرو :

برای جرم i کار نیروها

$$(U_{1 \rightarrow 2})_i = \int_{l_i} (\vec{F}_i + \sum \vec{f}_{ij}) \cdot d\vec{r}_i$$

برای سیستم نقاط کل کارنیروها را بدست می آوریم

$$U_{1 \rightarrow 2} = \sum_{i=1}^n (U_{1 \rightarrow 2})_i \rightarrow U_{1 \rightarrow 2} = \int_{l_i} \sum_i \left(\vec{F}_i + \sum_j \vec{f}_{ij} \right) \cdot d\vec{r}_i = \int_{l_i} \sum_i (\vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i) + \int_{l_i} \sum_i \sum_j (\vec{f}_{ij} \cdot d\vec{r}_i)$$

کار کل = کارنیروی داخلی (internal) + کارنیروی خارجی (external)

$$\Rightarrow u_{1 \rightarrow 2} = (u_{1 \rightarrow 2})_{int} + (u_{1 \rightarrow 2})_{ext}$$

توجه : در مسائلی که اتصال بین دو جرم غیر ارتجاعی باشد :
 $(u_{1 \rightarrow 2})_{int} = 0$

$T =$ حرکت دورانی (نسبت به مرکز جرم)

انرژی جنبشی

$$\left\{ \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 \quad (\vec{v}_i = \vec{v}'_i + \vec{v}) \rightarrow T = \frac{1}{2} \sum m_i (\vec{v}'_i + \vec{v}) \cdot (\vec{v}'_i + \vec{v}) = \frac{1}{2} \sum m_i v_i'^2 + \frac{1}{2} (\sum m_i) \vec{v}^2 + (\sum m_i \vec{v}'_i) \cdot \vec{v} \\ (\sum m_i \vec{v}'_i) &= 0, \quad m = \sum m_i \\ \Rightarrow T &= \frac{1}{2} \sum m_i v_i'^2 + \frac{1}{2} m \vec{v}^2 \end{aligned} \right.$$

$\bar{T}$ (نسبت به حرکت مرکز جرم)

$$T = T' + \bar{T}$$

انرژی جنبشی انتقالی +

انرژی جنبشی حرکت دورانی = انرژی جنبشی سیستم

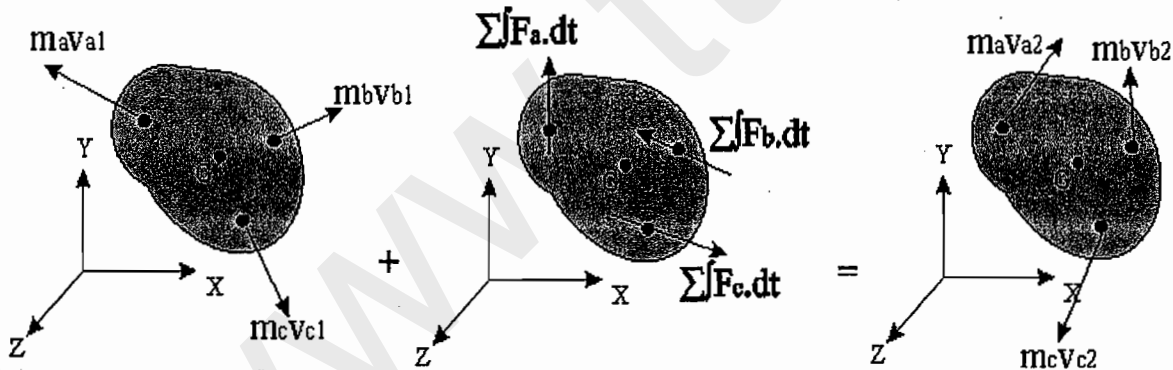
اصل کار و انرژی :

$$T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2$$

اصل حفظ انرژی :

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

اصل ایمپالس و ممنتوم :



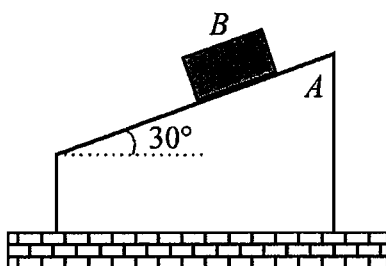
$$\begin{cases} \vec{L}_1 + \vec{IMP} = \vec{L}_2 & (I) \\ (\vec{H}_o)_1 + \sum \int \vec{M}_o dt = (\vec{H}_o)_2 & (II) \\ (\vec{H}_o)_1 = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_{i1} \end{cases}$$

اصل ایمپالس و :
 (I) ممنتوم خطی

(II) اصل ایمپالس و ممنتوم
 زاویه ای :

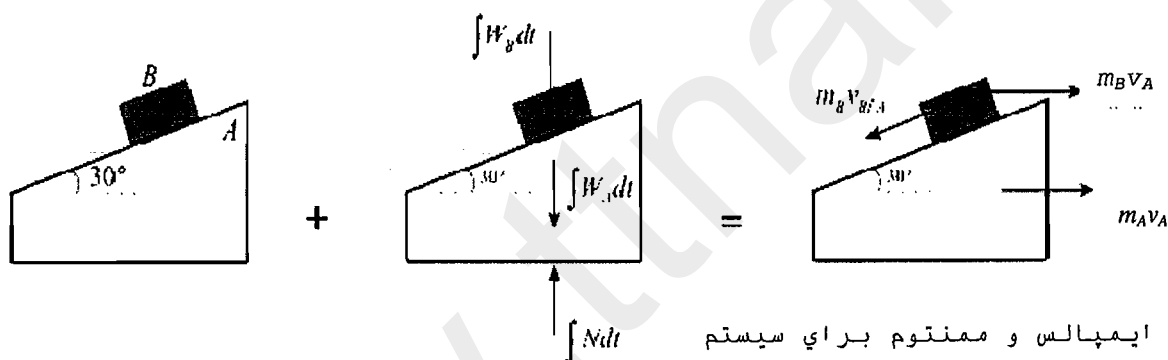
(*) اگر به مرکز جرم منتقل کنیم یا مرکز جرم مشخص بود:

$$G + \left(\sum \int F_i dt \right) + \left(\sum \int M_i dt \right) = G + mv_2$$



مثال: در شکل مقابل پس از اینکه بلوک B، ۳ فوت روی بلوک A حرکت کرد، مطلوبست سرعت B نسبت به A.
 $W_A = 25 \text{ lb}$, $W_B = 15 \text{ lb}$, $v_B = 0$

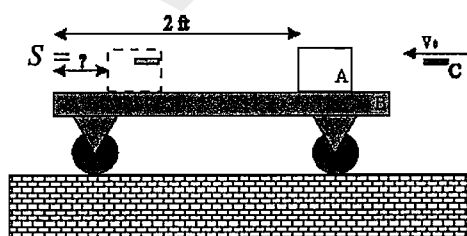
حل:



$$\rightarrow 0 + 0 = -m_B v_{B/A} \cos 30^\circ + m_B v_A + m_A v_A \Rightarrow v_A = 0.32 v_{B/A}$$

$$\begin{cases} T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \\ T_1 = 0, V_1 = 0 \\ T_2 = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 \\ V_2 = -W_B 3 \sin 30 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B (v_A^2 + v_{B/A}^2 - 2v_A v_{B/A} \cos 30^\circ) - \frac{1}{2} W_B \times 3 = 0$$

$$\Rightarrow v_A = 3.71 \text{ ft/s} \rightarrow, v_{B/A} = 11.59 \text{ ft/s} \swarrow$$

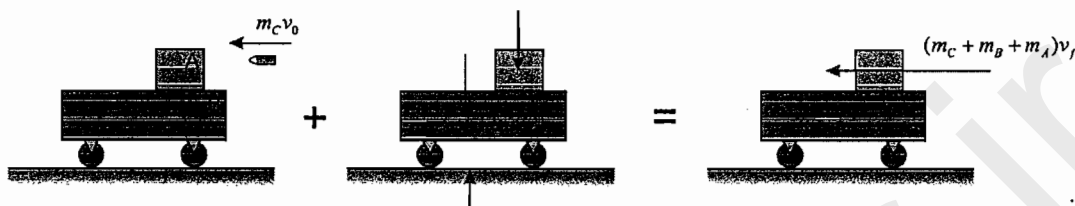


مثال: گلوله C با سرعت v_0 به سمت جسم A شلیک می گردد و در آن فرو می رود و باعث حرکت جسم A روی گاری B و حرکت گاری می گردد.
 مطلوبست:

الف- سرعت نهایی کل سیستم. ب- موقعیت نهایی A نسبت به B.

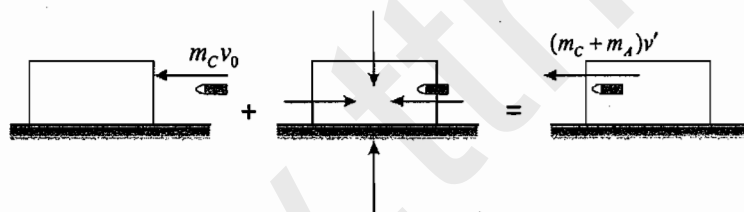
$$W_A = 10 \text{ lb} , \quad W_B = 8 \text{ lb} , \quad W_C = \frac{1}{16} \text{ lb} = 1 \text{ اونس} , \quad v_0 = 1600 \text{ ft/s} , \quad \mu_k = 0.5$$

حل: با فرض اینکه جرم A به همراه C روی B باقی بماند و در نهایت سرعت همگی یکسان باشد، از اصل ایملاس و ممنتوم برای سیستم استفاده کرده و سرعت نهایی را محاسبه می‌کنیم:



$$\Rightarrow m_C v_0 = (m_C + m_A + m_B) v_f \Rightarrow v_{final} = \frac{\frac{1}{16}(1600)}{\frac{1}{16} + 10 + 8} \Rightarrow v_f = 5.54 \text{ ft/s}$$

سرعت گلوله و بلوک A (v') را پس از فرو رفتن گلوله در A، حساب می‌کنیم:



$$m_C v_0 + 0 = (m_C + m_A) v' \Rightarrow v' = \frac{\frac{1}{16}(1600)}{\frac{1}{16} + 10} = 9.94 \text{ ft/s}$$

برای بدست آوردن کار نیروی اصطکاک، اصل کار و انرژی را از زمانی که گلوله در A نشست تا زمانی که بلوک A نسبت به B متوقف شد، می‌نویسیم:

$$T_1 = \frac{1}{2}(m_C + m_A)v'^2 = 15.43 \text{ ft.lb} , \quad T_2 = \frac{1}{2}(m_C + m_A + m_B)v_f^2 = 8.6 \text{ ft.lb}$$

$$U_{1 \rightarrow 2} = (U_{1 \rightarrow 2})_{friction} = -0.5 \left(\frac{1}{16} + 10 \right) (\Delta x)$$

$$T_2 - T_1 = U_{1 \rightarrow 2}$$

$$\Rightarrow 8.6 - 15.43 = -0.5 \left(\frac{1}{16} + 10 \right) (\Delta x) \rightarrow \Delta x = 1.36 \text{ ft}$$

مسافتی که A روی B می‌پیماید: Δx

$$S = 2 - 1.36 = 0.64 \text{ ft}$$

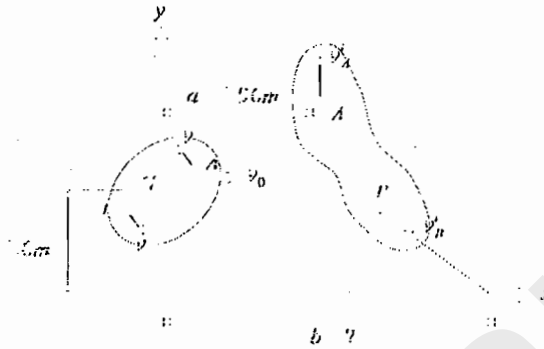
با توجه به موقعیت نهایی A که روی B باقی می‌ماند، پیش فرض اولیه صحیح و نتایج درست می‌باشند.

مثال: در صفحه بدون اصطکاک مقابل، $m_A = 2\text{ kg}$ و $m_B = 1\text{ kg}$. در لحظه اولیه داریم:

$$\vec{H}_G = 3 \text{ kg.m}^2/\text{s} \quad \text{ع}$$

$$\vec{v}_0 = 1.5\vec{i} + 1.2\vec{j} \text{ m/s}$$

$$T' = 18.75 \text{ J}$$



که T' در آن انرژی جنبشی سیستم نسبت به مرکز جرم (دوران) است. اگر در لحظه بعدی جرم A دارای سرعت v'_A (که موازی محور Y ها است) گردد، مطلوب است: v'_A, v'_B, b .

حل

$$\vec{L}_1 = \vec{L}_2$$

$$\vec{L}_1 = m\vec{v}_1 = (1+2)(1.5\vec{i} + 1.2\vec{j})$$

حفظ ممونوم سیستم

$$\vec{L}_2 = (2)(v'_A\vec{j}) + (v'_{Bx}\vec{i} - v'_{By}\vec{j}) \quad (1)$$

$$4.5\vec{i} + 3.6\vec{j} = v'_{Bx}\vec{i} + (2v'_A - v'_{By})\vec{j}$$

$$v'_{Bx} = 4.5 \text{ m/s} \xrightarrow{(1)} T_2 \vec{v}'_A + \vec{v}'_{By} = 3.6 \text{ m/s} \quad (2) \text{ و نیز}$$

حفظ انرژی جنبشی $T_1 = T_2$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} T_1 = \frac{1}{2} m \vec{v}_0^2 + T' = \frac{1}{2} (3) ((1.5)^2 + (1.2)^2) + 18.75 = 24.28 \text{ J} \\ T_2 = \frac{1}{2} m_A v'^2_A + \frac{1}{2} m_B (v'^2_{Bx} + v'^2_{By}) \end{array} \right\} \Rightarrow v'^2_A + \frac{1}{2} (v'^2_{Bx} + v'^2_{By}) = 24.28 \quad (3)$$

$$(1), (2), (3) \rightarrow \begin{cases} v'_A = 3.2 \text{ m/s} \uparrow \\ v'_{Bx} = 4.5 \text{ m/s} \rightarrow \\ v'_{By} = 2.8 \text{ m/s} \downarrow \end{cases}$$

حفظ ممونوم زاویه ای سیستم نسبت به O :

$$(\vec{H}_O)_1 = (\vec{H}_O)_2$$

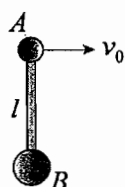
$$(\vec{H}_O)_1 = \vec{H}_G + \vec{r} \times m\vec{v}_0 \Rightarrow (\vec{H}_O)_1 = 3\vec{k} + (1.6\vec{j}) \times (3)(1.5\vec{i} + 1.2\vec{j}) = 3\vec{k} - 3(1.5)(1.6)\vec{k} = -4.2\vec{k}$$

$$(\vec{H}_O)_2 = (2)av'_A\vec{k} - b(v'_{By})(1)\vec{k}$$

$$\Rightarrow -4.2 = (2)av'_A - bv'_{By} \Rightarrow b = 5.98 \text{ m}$$

مثال : در صفحه افقی بدون اصطکاک اگر به A سرعت $\vec{v}_0$ بدهیم
مطلوبست سرعت جرم ها پس از $90^\circ, 180^\circ$ دوران میله.

$$m_A = m, m_B = 2m$$

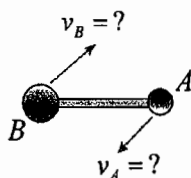


حل :

$$m\bar{Y} = \sum m_i y_i \rightarrow \bar{Y} = \frac{m(l) + 2m(0)}{m + 2m} = \frac{l}{3}$$

$$m\vec{v} = m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B \Rightarrow 3m\vec{v} = m\vec{v}_A + 2m\vec{v}_B \Rightarrow 3m\vec{v} = m\vec{v}_0 + 0 \Rightarrow \vec{v} = \frac{\vec{v}_0}{3}$$

در حالت دوران 90° داریم :



$$\vec{L}_1 = \vec{L}_2 \rightarrow \begin{cases} \vec{L}_1 = m_A \vec{v}_0 = (mv_0)\vec{i} \\ \vec{L}_2 = m_A(-v_{AX}\vec{i} - v_{AY}\vec{j}) + m_B(v_{BX}\vec{i} + v_{BY}\vec{j}) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_0 = -v_{AX} + 2v_{BX} & (1) \\ 0 = -v_{AY} + 2v_{BY} & (2) \end{cases}$$

$$T_1 = T_2 \rightarrow \begin{cases} T_1 = \frac{1}{2}mv_0^2 \\ T_2 = \frac{1}{2}m(v_{AX}^2 + v_{AY}^2) + \frac{1}{2}(2m)(v_{BX}^2 + v_{BY}^2) \end{cases} \rightarrow v_0^2 = v_{AX}^2 + v_{AY}^2 + 2v_{BX}^2 + 2v_{BY}^2 \quad (3)$$

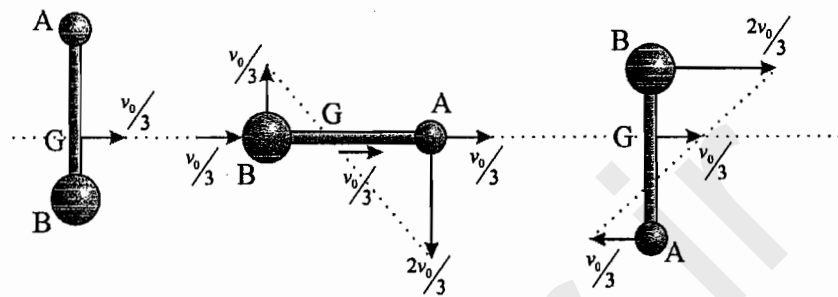
$$(H_G)_1 = (H_G)_2 \rightarrow \begin{cases} (H_G)_1 = \frac{2}{3}lm(v_0) \\ (H_G)_2 = \frac{2}{3}lm(v_{AY}) + \frac{1}{3}l(2m)(v_{BY}) \end{cases} \rightarrow v_0 = v_{AY} + v_{BY} \quad (4)$$

$$(1), (2), (3), (4) \rightarrow \begin{cases} v_{AX} = \frac{v_0}{3} \rightarrow & v_{BX} = \frac{v_0}{3} \rightarrow \\ v_{AY} = \frac{2v_0}{3} \downarrow & v_{BY} = \frac{v_0}{3} \uparrow \end{cases}$$

در حالت 180° نیز داریم :

180° دوران

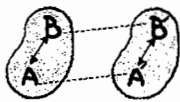
90° دوران



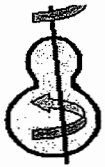
فصل پنجم :
سینماتیک اجسام
صلب

حرکت اجسام صلب (KINEMATICS OF RIGID BODIES)

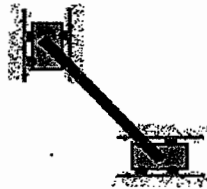
(۱) حرکت انتقالی :



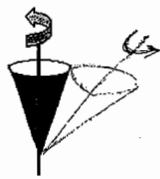
(۲) حرکت دورانی حول محور ثابت :



(۳) حرکت عمومی در صفحه : ترکیب حرکت انتقالی و دورانی



(۴) حرکت دورانی حول نقطه :



(۵) حرکت کلی : غیر از حالات خاص قبل

(۱) حرکت انتقالی
TRANSLATIONAL

$$\vec{r}_B = \vec{r}_{A/B} + \vec{r}_A$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_B) = \frac{d}{dt}(\vec{r}_{A/B}) + \frac{d}{dt}(\vec{r}_A)$$

برای حرکت انتقالی چون طول ثابت و جهت نیز ثابت است : $\frac{d}{dt}(\vec{r}_{A/B}) = 0$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{r}_B) - \frac{d}{dt}(\vec{r}_A) = 0 \Rightarrow \vec{v}_B - \vec{v}_A = 0 \Rightarrow \vec{v}_B = \vec{v}_A$$

بنابراین همانند یک نقطه مادی فرض می شود ، یعنی سرعت $\vec{v}_B = \vec{v}_A$ است. همه نقاط یکسان است.

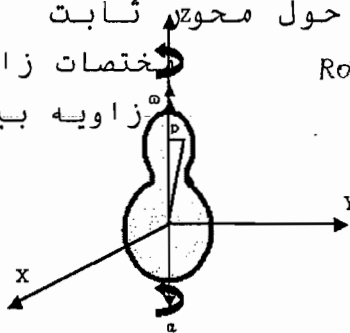
(۲) حرکت دورانی حول محور ثابت

ROTATION ABOUT FIXED AXIS

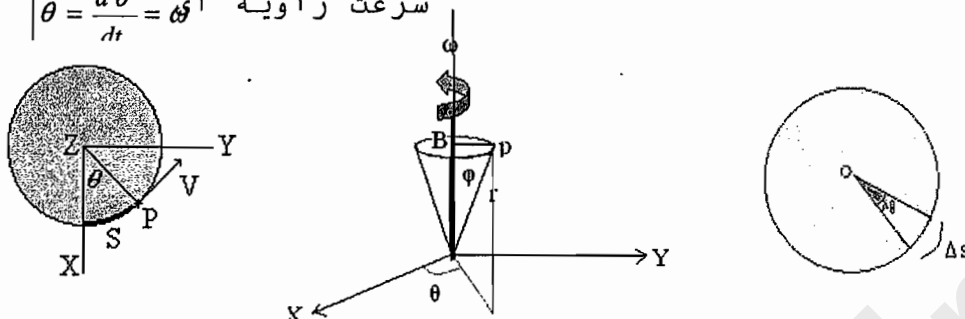
θ : مختصات زاویه ای نسبت به صفحه xz

ϕ : زاویه بین بردار موقعیت و محور z

$\vec{r}$: بردار موقعیت نقطه P



$$V = \frac{\Delta s}{\Delta t}, \begin{cases} \Delta s = (BP) \Delta \theta \\ BP = (OP) \sin \varphi = r \sin \varphi \Rightarrow V = BP \left(\frac{\Delta \theta}{\Delta t} \right) \Rightarrow V = (r \sin \varphi) (\dot{\theta}) = \vec{\omega} \times \vec{r} \\ \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \omega \text{ سرعت زاویه} \end{cases}$$

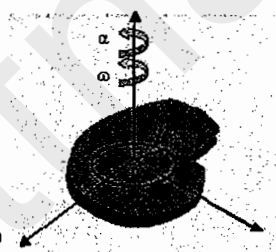


$$\begin{cases} \vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) \Rightarrow \vec{a} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega}) \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d}{dt}(\vec{r}) \\ \ddot{\theta} = \dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = \alpha \Rightarrow \vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \Rightarrow \begin{cases} a_n = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{v} \\ a_t = \vec{\alpha} \times \vec{r} \end{cases} \text{ شتاب} \\ \frac{d}{dt}(\vec{r}) = \vec{v} = (\vec{\omega} \times \vec{r}) \end{cases}$$

حالت خاص (حرکت دورانی یک صفحه نازک حول محور عمود بر صفحه)

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r} \Rightarrow V = r\omega$$

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \Rightarrow \begin{cases} a_t = r\alpha \\ a_n = r\omega^2 \end{cases}$$



معادلات دوران محور ثابت

x	θ
$V = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$	$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$
$a = \frac{dV}{dt} = \dot{V} = \ddot{x}$	$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$
$a = V \left(\frac{dV}{dx} \right)$	$\alpha = \omega \frac{d\omega}{d\theta}$
$\omega =$	$\theta = \omega t + \theta_0$
$\alpha =$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$

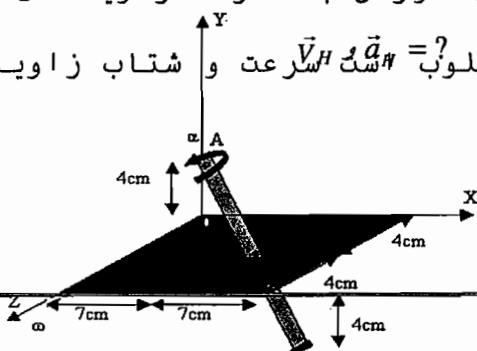
حالت‌های خاص :
حرکت دورانی با سرعت زاویه ای ثابت : $\alpha = 0$
و $\theta = \theta_0 + \omega_0 t$
حرکت دورانی با شتاب زاویه ای ثابت : $\alpha = \text{cte}$
و $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$

مثال : صفحه حول محور AC در حال دوران با سرعت زاویه ای $18 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

و شتاب زاویه ای $\alpha = 45 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$ است. مطلوب است $\vec{a}_H$ و $\vec{v}_H$ سرعت و شتاب زاویه ای

نقطه H $(\vec{r}_{H/C} = 4\vec{j})$.

حل :



$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad , \quad \vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

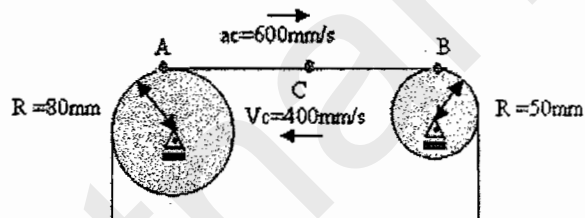
$$\vec{r} = \vec{r}_{H/B} = 7\vec{i} + 4\vec{k}$$

$$\begin{cases} \omega = 18 \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right) \\ \vec{\omega} = \omega \vec{\lambda}_{AC} \\ \lambda_{AC} = \frac{14\vec{i} - 8\vec{j} + 8\vec{k}}{\sqrt{14^2 + 8^2 + 8^2}} = \frac{1}{18} (14\vec{i} - 8\vec{j} + 8\vec{k}) \\ \vec{\alpha} = \alpha \vec{\lambda}_{AC} \Rightarrow \vec{\alpha} = \frac{18-45}{18} (14\vec{i} - 8\vec{j} + 8\vec{k}) \end{cases} \Rightarrow \vec{\omega} = 14\vec{i} - 8\vec{j} + 8\vec{k} \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)$$

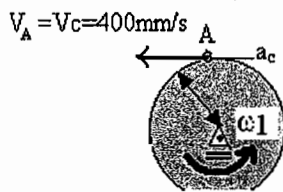
$$\vec{V}_H = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 14 & -8 & 8 \\ 7 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -32\vec{i} + 56\vec{k} \left(\frac{\text{cm}}{\text{s}} \right) \quad \vec{a}_H = \frac{-45}{18} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 14 & -8 & 8 \\ 7 & 0 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 14 & -8 & 8 \\ -32 & 0 & 56 \end{vmatrix}$$

مثال : با توجه به حرکت داده شده در شکل، سرعت و شتاب مرکز جرم B را در لحظه t=0.5s محاسبه کنید. (3 نمره)
است :

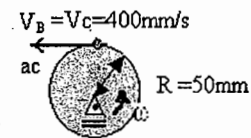
$$\begin{aligned} \alpha_1 &= ? & \alpha_2 &= ? \\ a_A &= ? & a_B &= ? \end{aligned}$$



حل :



$$\begin{aligned} V_A &= r_A \omega_1 \Rightarrow 400 = 80 \omega_1 \Rightarrow \omega_1 = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\ V_B &= r_B \omega_2 \Rightarrow 400 = 50 \omega_2 \Rightarrow \omega_2 = 8 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \end{aligned}$$

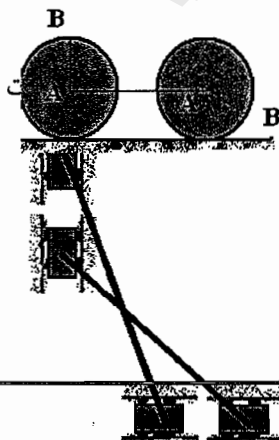


$$\begin{aligned} (a_A)_t &= 600 & (a_A)_t &= r_A \alpha_1 \Rightarrow 600 = 80 \alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = 7.5 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \\ (a_B)_t &= 600 & (a_B)_t &= r_B \alpha_2 \Rightarrow 600 = 50 \alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = 12 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

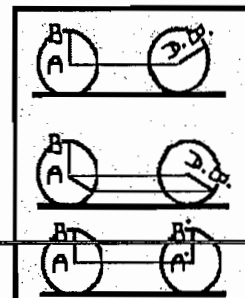
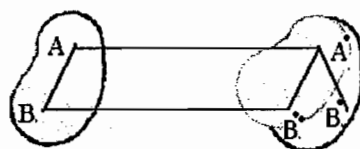
$$\begin{aligned} (a_A)_n &= r_A \omega_1^2 = 80(5)^2 = 2000 \frac{\text{mm}}{\text{s}^2} \\ (a_B)_n &= r_B \omega_2^2 = 50(8)^2 = 3200 \frac{\text{mm}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a_A &= \sqrt{(600)^2 + (2000)^2} = 2088 \frac{\text{mm}}{\text{s}^2} \quad 73.3^\circ \\ \Rightarrow a_B &= \sqrt{(600)^2 + (3200)^2} = 3256 \frac{\text{mm}}{\text{s}^2} \quad 79.4^\circ \end{aligned}$$

(3) حرکت کلی در صفحه (حرکت عمودی در صفحه)



از ترکیب حرکت انتقالی و حرکت دورانی حول آید.



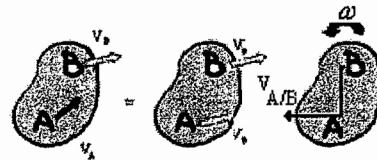
حرکت انتقالی در صفحه + حرکت دورانی در صفحه = حرکت کلی در صفحه
سرعت نسبی و مطلق در حرکت صفحه ای

انتقال $\vec{V}_B \rightarrow A$

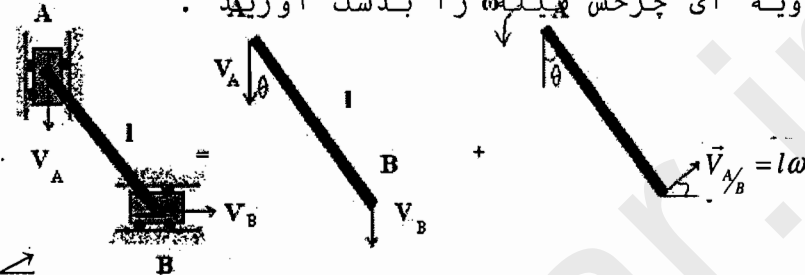
بوسیله سرعت B

$\vec{V}_{A/B} \rightarrow$ B حول نقطه A $\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{A/B}$

$$\vec{V}_{A/B} = l\omega$$



مثال : جسم A با سرعت V_A در حال حرکت به سمت پائین می باشد ،
سرعت زاویه ای چرخش میل را بدست آورید .



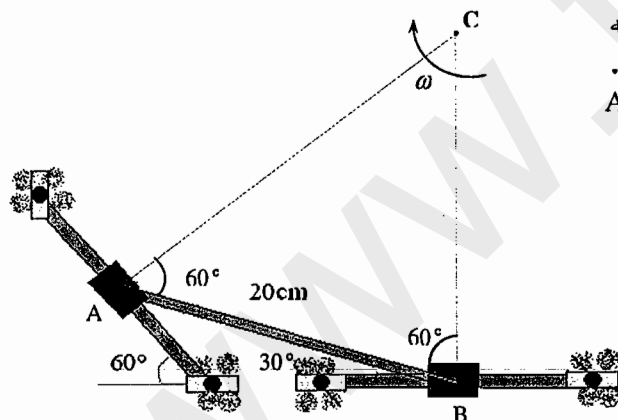
$$[\vec{V}_B \rightarrow] = [V_A \downarrow] + [l\omega \nearrow]$$

$$V_A = V_B \tan \theta$$

$$\omega = \frac{V_A}{l \sin \theta}$$

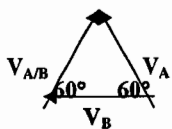


مثال : طوقه B سرعت 25 cm/s به سمت چپ در حال حرکت است .
با توجه به شکل سرعت طوقه A را بدست آورید ؟

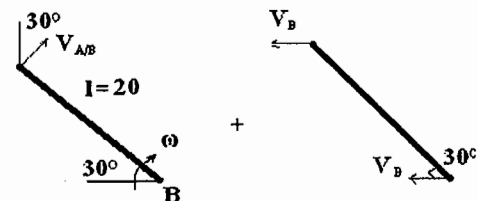


حل : حرکت مقید

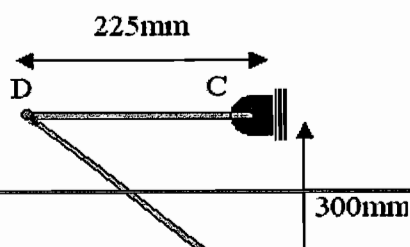
$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{A/B} \Rightarrow [V_A \uparrow 60^\circ] = [V_B \leftarrow] + [20\omega \nearrow 30^\circ]$$



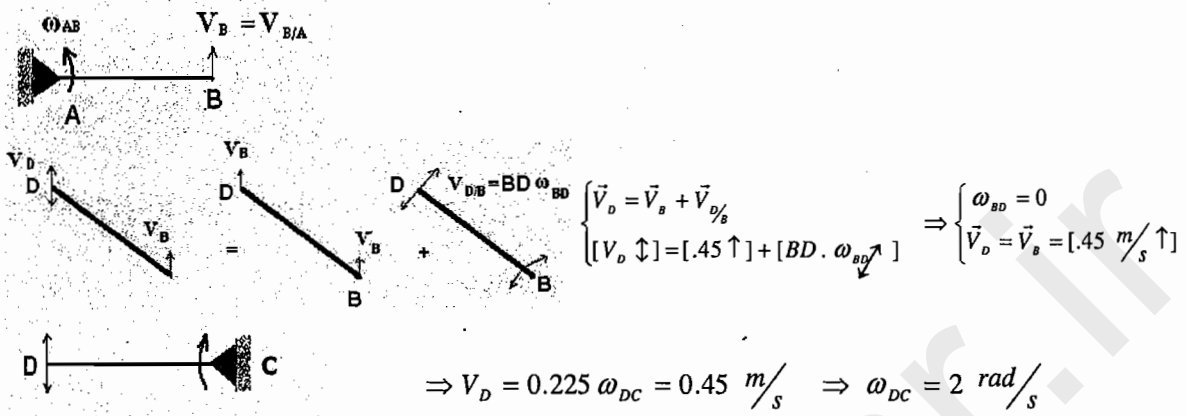
$$\Rightarrow \vec{V}_A = \vec{V}_B = 25 (\text{cm/s})$$

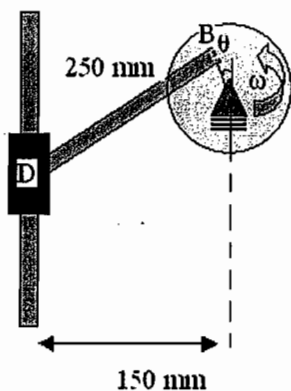


مثال : اگر در حالت نشان داده شده سرعت زاویه ای برابر 3 rad/s باشد، مطلوب است : $\omega_{BD}, \omega_{DC} = ?$



حل :





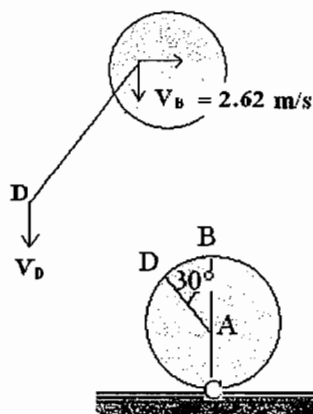
مثال : اگر یک دیسک با سرعت زاویه ای ثابت $\omega = 500 \text{ rpm}$ در حال دوران باشد، مطلوب است : سرعت طوقه D در حالت $\theta = 0^\circ$ ، $\theta = 90^\circ$ (فاصله نقطه B تا مرکز دیسک 50 mm می باشد)

حل : در حالت $\theta = 0^\circ$

$$V_B = r\omega = 0.05 \times 52.36 = 2.62 \text{ m/s} \leftarrow$$

$$\vec{V}_D \downarrow = \vec{V}_B + \vec{V}_{D/B} = [2.62 \leftarrow] + [0.25\omega_{BD} \uparrow]$$

$$\Rightarrow V_D = 1.96 \text{ m/s} \downarrow, \quad \omega_{BD} = 13.1 \text{ rad/s}$$



در حالت $\theta = 90^\circ$:

$$V_D \parallel V_B \Rightarrow V_D = V_B = 2.62 \text{ (m/s)} \downarrow, \quad \omega_{BD} = 0$$

مثال : اتومبیلی با سرعت ثابت 50 km/h در حال حرکت در جهت راست می باشد. اگر قطر چرخهای اتومبیلی 610 mm باشد، مطلوب است، سرعت نقاط D, C, B, A ؟

حل : روش اول :

$$V_A = 50 \text{ km/h} = 13.9 \text{ m/s}$$

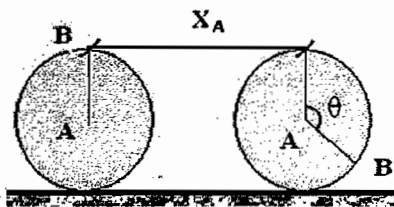
$$\vec{V}_C = \vec{V}_A + \vec{V}_{C/A}, \quad V_C = 0$$

$$\Rightarrow V_{C/A} = V_A = r\omega \Rightarrow 13.9 = r\omega \Rightarrow \omega = \frac{13.9}{0.61}$$

$$\vec{V}_B = \vec{V}_C + \vec{V}_{B/C} \Rightarrow \vec{V}_B = 0 + [d\omega \rightarrow] = [2 \times 13.9 \rightarrow] = [27.8 \text{ m/s} \rightarrow]$$

$$\vec{V}_D = \vec{V}_A + \vec{V}_{D/A} \Rightarrow \vec{V}_D = [13.9 \rightarrow] + [13.9 \nearrow 30^\circ] \Rightarrow \vec{V}_D = 2 \times 13.9 \cos 15^\circ = [26.8 \text{ m/s} \nearrow 15^\circ]$$

روش دوم: به شرطی که لغزش در کار نباشد

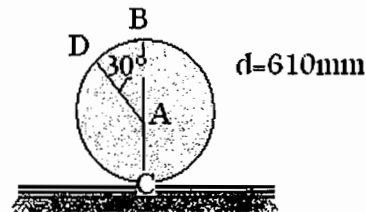


$$\begin{aligned} X_A &= r\theta \\ \Rightarrow V_A &= r\dot{\theta} = r\omega \\ a_A &= r\alpha \end{aligned}$$

$$\omega = \frac{V_A}{r} = \frac{V_A}{d/2} = 44.84 \text{ rad/s}$$

$$V_B = (BC)\omega = 2V_A = 27.8 \text{ m/s}$$

$$V_D = (DC)\omega = (CA + AD)\omega = .59 \times 44.84 = 26.5 \text{ m/s}$$



مرکز آ

C (نقطه با سرعت صفر) مرکز آنی دوران است که لزوماً روی جسم نیست.

تکیه گاه در تمام لحظات مرکز آنی دوران می باشد.



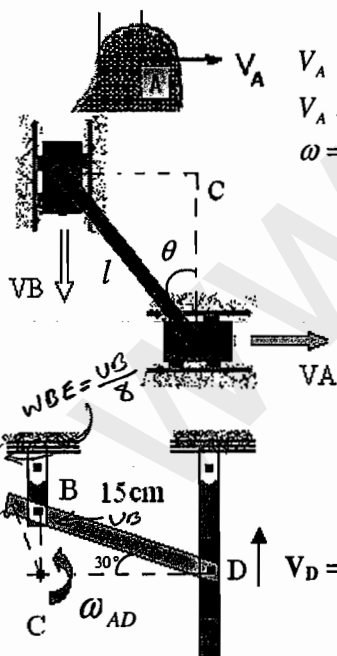
$$\begin{cases} V_C = 0 \\ \vec{V}_A = \vec{V}_C + \vec{V}_{A/C} = \vec{V}_{A/C} = (\vec{\omega} \times \vec{r}_{A/C}) \Rightarrow \vec{V}_A \perp \vec{r}_{A/C} \end{cases}$$

$$\vec{V}_A = (\vec{\omega} \times \vec{r}_{A/C}) = (\vec{\omega} \times \vec{C}_A)$$

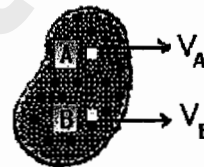
$$\begin{aligned} V_A &\parallel V_B \\ V_A &\perp AB \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} V_A &\parallel V_B \\ V_A &\perp AB \\ V_A &\neq V_B \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} V_A &\parallel V_B \\ V_A &\perp AB \\ \omega &= 0 \text{ بر حسب } V_A \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} V_A &\perp AB \\ V_A &\parallel V_B \\ V_A &= V_B \end{aligned}$$

مثال: در شکل زحل: $\omega = 0$

$$V_A = (AC)\omega = (l \cos \theta)\omega$$

$$\omega = \frac{V_A}{l \cos \theta}, \quad V_B = V_A \tan \theta$$

مثال: طوقه D با سرعت 20 cm/s به سمت

بالا در حال حرکت می باشد. طول BD

برابر 15 cm و طول AB برابر 10 cm است. مطلوب است: $\omega_{AD}=?$, $V_B=?$, $V_A=?$

حل: برای میله BE نقطه E مرکز دوران است

$$V_D = (DC)\omega_{AD} \Rightarrow \omega_{AD} = \frac{V_D}{DC} = \frac{20}{15 \cos 30^\circ} = 1.54 \text{ rad/s}$$

$$V_B = (BC)\omega_{AD} = (15 \sin 30^\circ)(1.54) \Rightarrow V_B = 11.55 \text{ cm/s}$$

$$AC = \sqrt{(25 \sin 30^\circ)^2 + (10 \cos 30^\circ)^2} \Rightarrow AC = 15.21 \text{ cm}$$

$$V_A = (AC) \omega_{AD} = (15.21)(1.54) \Rightarrow V_A = 23.4 \text{ cm/s} \quad 34.7^\circ \nearrow$$

شتاب مطلق و نسبی در حرکت صفحه ای

میشه رو خطی حرکت داریم (مركز)

مثال:

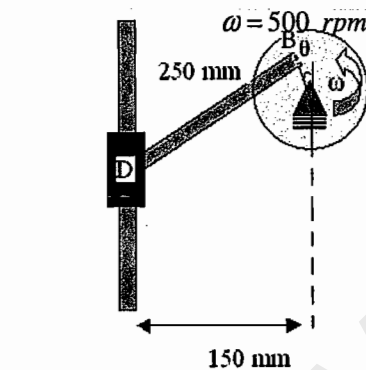
در حال دوران باشد، مطلوب است شتاب طوقه D در حالت $\theta = 90^\circ$ ، $\theta = 180^\circ$ (فاصله نقطه B تا مرکز دیسک 50 mm می باشد).

حل:

در حالت $\theta = 90^\circ$

$$a_B = 0.05(52.36)^2 = 137.1 \text{ m/s}^2$$

در حالت $\theta = 180^\circ$

$$a_B = 137.1 \text{ m/s}^2$$


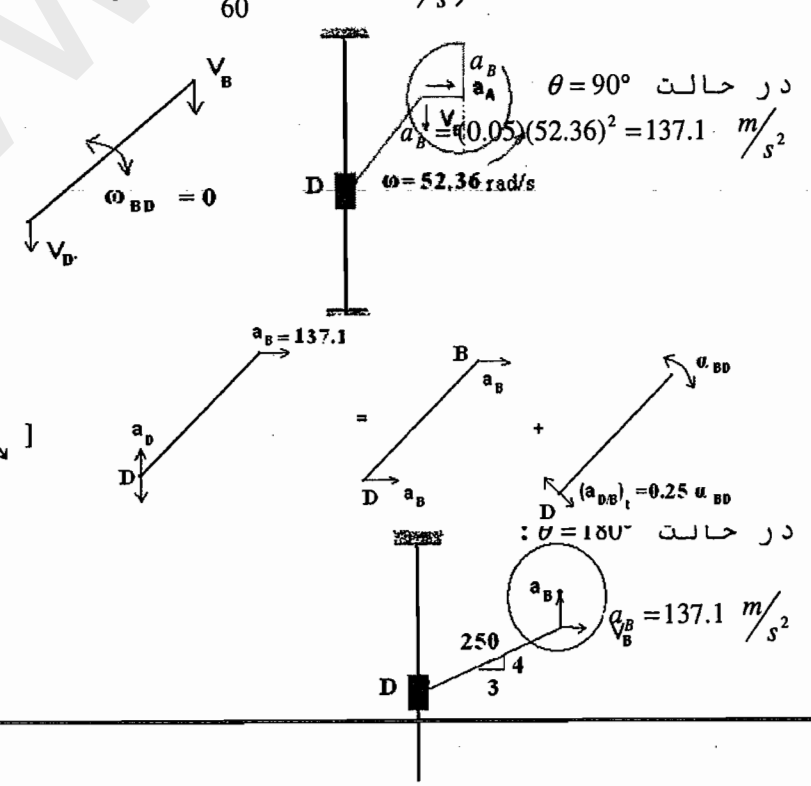
$$V_B = (0.05)(52.96) = 2.62 \text{ m/s}$$

$$(a_{D/B})_t = 0.25 \times \alpha_{BD}$$

$$\vec{a}_D = \vec{a}_B + \vec{a}_{D/B}$$

$$[a_D \uparrow] = [137.1 \rightarrow] + [0.25 \alpha_{BD} \quad 23.6^\circ \nearrow]$$

$$\Rightarrow a_D = 59.8 \text{ m/s}^2 \uparrow$$



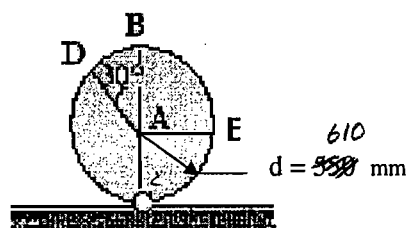
$$\Rightarrow 0.2\omega_{BD} = 2.62 \Rightarrow \omega_{BD} = 13.1 \text{ rad/s} \quad V_B = BC(\omega_{BD}) = 2.62$$

$$\vec{a}_D = \vec{a}_B + \vec{a}_{D/B}$$

$$\vec{a}_D = \vec{a}_B + (\vec{a}_{D/B})_n + (\vec{a}_{D/B})_t$$

$$[a_D \uparrow] = [137.1 \uparrow] + [42.8 \rightarrow] + [0.025\alpha_{BD} \rightarrow]$$

$$\Rightarrow a_D = 190.65 \text{ m/s}^2 \uparrow$$



$$V_A = 50 \text{ km/h} \rightarrow V_A = 13.89 \text{ m/s} \rightarrow$$

$$V_A = \frac{d}{2}\omega \Rightarrow 25 = \frac{0.55}{2}\omega \Rightarrow \omega = 90.9 \text{ rad/s} \Rightarrow \alpha = 0$$

مثال: سرعت اتومبیل 50 km/h می باشد

$$a_C = ?, a_D = ?, a_B = ?, a_E = ?$$

$$V_C = 0 \quad V_A = V_C + V_{A/C} \rightarrow V_{A/C} = 13.89 \rightarrow$$

$$\omega = \frac{13.89}{r}$$

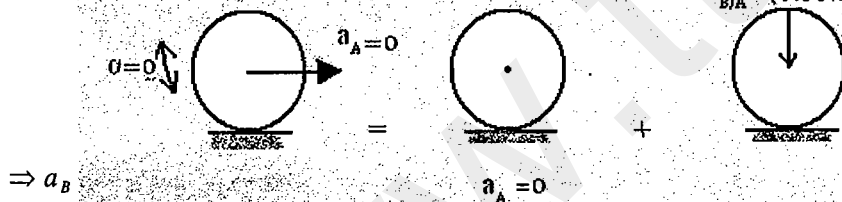
حل:

$$V_B = V_C + V_{B/C} = 0 + (d\omega \rightarrow) = 27.78 \text{ m/s}$$

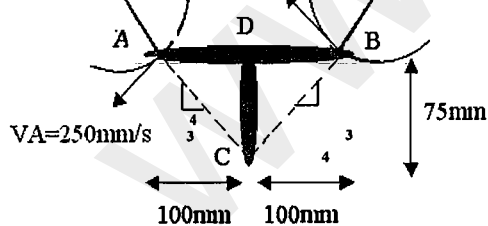
$$V_D = V_C + V_{D/C} = 0 + [0.5\omega] = 26.8 \angle 15^\circ$$

$$V_E = V_C + V_{E/C} = 0 + [r\omega/2] = 13.89 \angle 45^\circ$$

$$a_{B/A} = (0.55/2)(90.9)^2 = 2273$$



مثال: میله زیر از نقاط A و B به تکیه گاه های E و F مقید است. مطلوب است: $a_C = ?$ و $\alpha = ?$

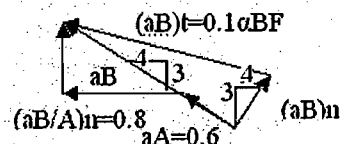
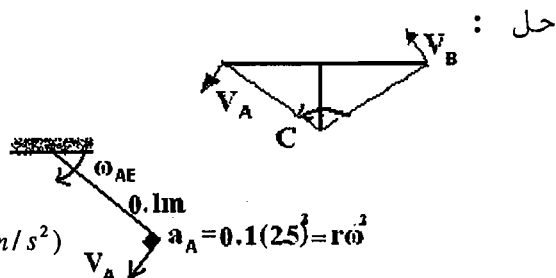
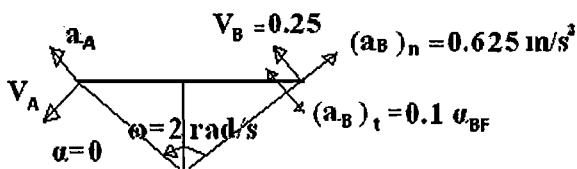


$$BF = AE = 100 \text{ mm}, V_A = 250 \text{ mm/s}, \frac{dV_A}{dt} = 0$$

$$V_A = (AC)\omega \Rightarrow \omega = \frac{0.25}{0.125} = 2 \text{ rad/s}$$

$$V_A = (AE)\omega_{AE} \Rightarrow \omega_{AE} = \omega_{BF} = \frac{0.25}{0.1} = 2.5 \text{ rad/s}$$

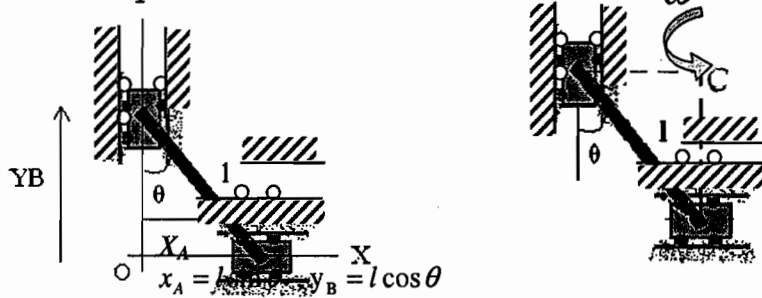
$$a_A = (a_A)_n = r\omega_{AE}^2 = 0.1(2.5)^2 = 0.625 \text{ m/s}^2$$



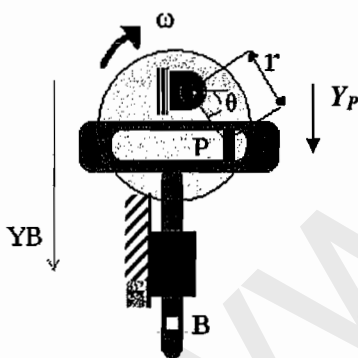
$$\begin{cases} (\vec{a}_B)_n + (\vec{a}_B)_t = \vec{a}_A + (\vec{a}_{B/A})_n + (\vec{a}_{B/A})_t \\ (a_B)_n = 0.625 \text{ m/s}^2, (a_B)_t = 0.1\alpha_{BF} \Rightarrow [0.625 \nearrow] + [0.1\alpha_{BF} \nwarrow] = [0.625 \nwarrow] + [0.8 \leftarrow] + [0.2\alpha \uparrow] \\ (a_{B/A})_n = 0.2\omega^2 = 0.8 \text{ m/s}^2, (a_{B/A})_t = 0.2\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha = 12 \text{ (rad/s)}$$

حرکت صفحه $\vec{a}_C = \vec{a}_A + (\vec{a}_{C/A})_n + (\vec{a}_{C/A})_t = [0.625 \nwarrow] + [1.125 \times 2^2 \nwarrow] + [1.125 \times 12 \nearrow] = 1.875 \text{ (m/s}^2 \text{)} \nearrow$



$$\begin{aligned} V_A &= \frac{dx_A}{dt} = \frac{d}{dt}(l \sin \theta) = l \dot{\theta} \cos \theta = l \omega \cos \theta \\ V_B &= \frac{dy_B}{dt} = \frac{d}{dt}(l \cos \theta) = -l \dot{\theta} \sin \theta = -l \omega \sin \theta \\ a_A &= \frac{dV_A}{dt} = \frac{d}{dt}(l \omega \cos \theta) = l \dot{\omega} \cos \theta - l \omega^2 \sin \theta = l \alpha \cos \theta - l \omega^2 \sin \theta \\ a_B &= \frac{dV_B}{dt} = \frac{d}{dt}(-l \omega \sin \theta) = -l \dot{\omega} \sin \theta - l \omega^2 \cos \theta = -l \alpha \sin \theta - l \omega^2 \cos \theta \end{aligned}$$



مثال : میله T شکل توسط یک پین به دیسکی که با سرعت زاویه ای ω و شتاب زاویه ای α در حال حرکت است. فاصله پین تا مرکز دیسک برابر r می باشد.

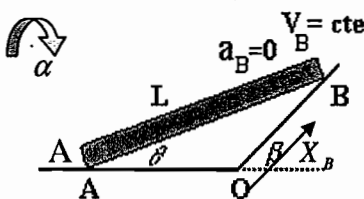
مطلوب است: $V_B = ?$, $a_B = ?$

حل :

$$\begin{cases} y_B = y_P + C \\ y_P = r \sin \theta \Rightarrow y_B = r \sin \theta + C \Rightarrow V_B = \frac{dy_B}{dt} = r \omega \cos \theta \Rightarrow a_B = \frac{dV_B}{dt} = r \alpha \cos \theta - r \omega^2 \sin \theta \end{cases}$$

مثال : میله AB با سرعت زاویه ای ω و شتاب زاویه ای α در حال حرکت است.

مطلوب است : $\vec{V}_E = ?$, $a_E = ?$

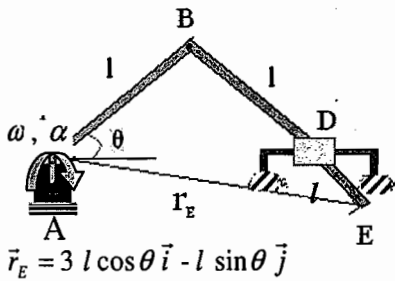


حل :

$$\frac{X_B}{\sin \theta} = \frac{L}{\sin \beta} \Rightarrow V_B = \frac{dX_B}{dt} = \frac{L \omega \cos \theta}{\sin \beta} \Rightarrow \omega_{AB} = \frac{V_B \sin \beta}{L \cos \theta}$$

$$\Rightarrow \alpha_{AB} = \dot{\omega}_{AB} = \frac{V_B \sin \beta}{L} \times \frac{\omega_{AB} \sin \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{V_B^2 \sin^2 \beta}{L^2 \cos^3 \theta} \sin \theta$$

مثال : میله AB با سرعت زاویه ای ω و شتاب زاویه ای α در حال حرکت است .
مطلوب است : $\vec{V}_E = ?$, $\vec{a}_E = ?$



حل :

$$\vec{V}_E = \frac{d}{dt} \vec{r}_E, \quad \vec{a}_E = \frac{d\vec{V}_E}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_E = -3l\omega \sin \theta \vec{i} - l\omega \cos \theta \vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_E = -3l(\dot{\omega} \sin \theta + \omega^2 \cos \theta) \vec{i} - l(\dot{\omega} \cos \theta - \omega^2 \sin \theta) \vec{j} = -3l(\alpha \sin \theta + \omega^2 \cos \theta) \vec{i} - l(\alpha \cos \theta - \omega^2 \sin \theta) \vec{j}$$

مشتق بردار متحرک Y

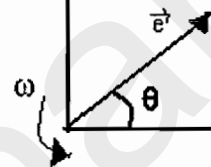
بردار واحد متحرک $\vec{e}$ با سرعت زاویه ای ω در حال دوران می باشد
 $\vec{e} =$

$$\vec{e} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$$

$$\frac{d\vec{e}}{dt} = \frac{d}{dt} (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) = -\sin \theta (\dot{\theta}) \vec{i} + \cos \theta (\dot{\theta}) \vec{j}$$

$$\Rightarrow |\dot{\vec{e}}| = \omega \quad \frac{d\vec{e}}{dt} = \dot{\vec{e}} = -\omega \sin \theta \vec{i} + \omega \cos \theta \vec{j}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{e}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{e}$$

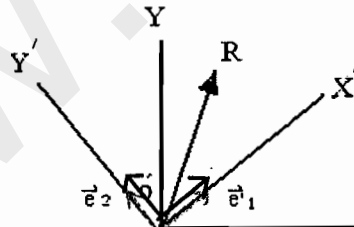


بنابراین :

بردار در دستگاه مختصات مرجع متحرک

$$\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} = R_1 \vec{e}_1 + R_2 \vec{e}_2$$

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d}{dt} (R_1 \vec{e}_1 + R_2 \vec{e}_2) = \dot{R}_1 \vec{e}_1 + R_1 \dot{\vec{e}}_1 + \dot{R}_2 \vec{e}_2 + R_2 \dot{\vec{e}}_2$$



که در این روابط دستگاه ثابت و $O'X'Y'$ دستگاه متحرک و $\vec{i}, \vec{j}$ بردارهای یکه در دستگاه ثابت و $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ در دستگاه متحرک است. پس داریم :

$$\vec{R} = (\dot{R}_1 \vec{e}_1 + \dot{R}_2 \vec{e}_2) + R_1 \dot{\vec{e}}_1 + R_2 \dot{\vec{e}}_2 \Rightarrow \vec{R} = \vec{R}' + \vec{\omega} \times (R_1 \vec{e}_1 + R_2 \vec{e}_2) \Rightarrow \vec{R} = \vec{R}' + R_1 (\vec{\omega} \times \vec{e}_1) + R_2 (\vec{\omega} \times \vec{e}_2)$$

$$\Rightarrow \vec{R} = \vec{R}' + \vec{\omega} \times \vec{R}$$

تئوری امگا

که دستگاه مطلق $\vec{R}$ و دستگاه متحرک $\vec{R}'$ سرعت یک نقطه مادی :

دستگاه ثابت : OXY

$\vec{S}$: بردار موقعیت نقطه P است.

$\vec{R}$: بردار موقعیت نقطه O' (مطلق) و $\vec{r}$: بردار موقعیت نقطه P (نسبی)

