

بسمه تعالی



نام جزوه: دینامیک 1

نام استاد: دکتر اوحدی

دانشگاه: صنعتی امیرکبیر

Subject:

Year. Month. Date. ()

۱
فصل اول - سینماتیک - ذرات مادی

سینماتیک (Kinematic): علم از نگاشته است که با حرکت ذرات و اجسام صلب ارتباط

دارد بدون اینکه عوامل ایجاد حرکت مورد توجه قرار گیرد. در واقع سینماتیک بخشی از حرکت است

ولی علم دینامیک ارتباط بین عوامل حرکت و ضرر حرکت است

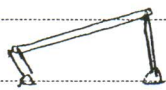
ذره منفرد (individual particle)

سیستم ذرات (مثل یک سیال)

جسم صلب (مثل یک میله صلب)

سیستم اجسام صلب (مثل یک ماشین)

مکانیسمی تغییر فرم پذیر



سینماتیک جسم صلب را مستقل از سینماتیک آن بررسی می کنیم
ولی در غیر صلب نمی توان بررسی کرد

سوال: چگونه می توان یک جسم فیزیکی را از روی نظر گرفت؟

اگر شکل و اندازه های جسم در بحث حرکتی مطرح نباشد فقط جسم آن مطرح باشد، آنگاه فرض زره بودن

اشکالی ندارد

مثلاً در کامیونی که در روی یک تپه حرکت می کند، اگر اصطکاک در چرخ ها را با مقاومت ایرودینامیکی کامیون
همان باشد، نمی توان آن را از روی نظر گرفت. در نتیجه اگر فقط شتاب کامیون را فرض کنیم،
می توان آن را از روی نظر گرفت.

KING

Subject:

Year. Month. Date. ()

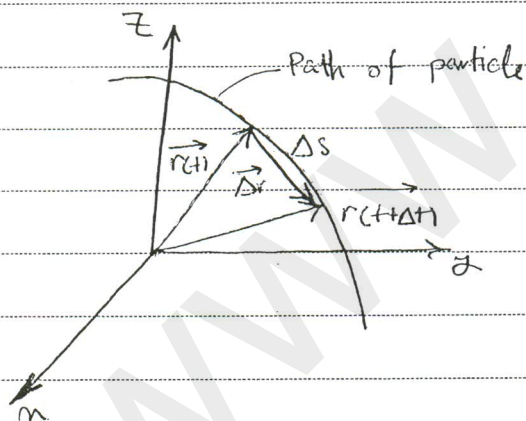
جرم کل جسم در مرکز جرم آن قرار داده می شود.
نقطه های برآیند کل اجزای جسم در نقطه مرکز جرم اعمال می شود.

1- مشتق گیری از بردار نسبت به زمان:
Differentiation of a Vector with Respect to Time

① Scalar $f(t) \rightarrow \frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$

② Vector $\vec{F}(t) \rightarrow \frac{d\vec{F}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(t+\Delta t) - \vec{F}(t)}{\Delta t}$

اگر فاصله زمانی Δt ، تحت بردار عوض نشود تعریف دوم، فایده اولی است ولی



اگر عوض نشود

③ chair rule
 $\frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \right)$
④

$|\Delta \vec{r}| = \Delta s$
اگر Δt به سمت صفر میل کند
 $\Delta \vec{r}$ به سمت مماس می شود

Subject:

Year. Month. Date. ()

۲

$$\Rightarrow \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = \frac{\Delta s \hat{e}_t}{\Delta s} = \hat{e}_t \rightarrow \text{همواره واحد}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\vec{r}}{ds} = \hat{e}_t \right) \quad (5)$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \hat{e}_t \Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad (6)$$

Rectangular Components

معمولی و متعامد - مؤلفه‌های مستطین

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k} \quad (7)$$

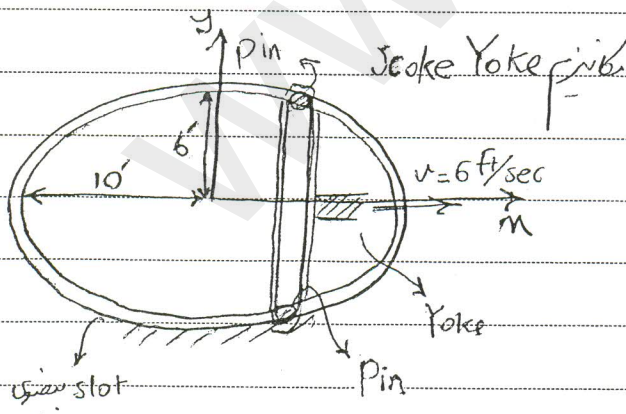
برای موقعیت

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}(t) = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k} = \dot{x}(t)\hat{i} + \dot{y}(t)\hat{j} + \dot{z}(t)\hat{k} \quad (8)$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{x}(t)\hat{i} + \ddot{y}(t)\hat{j} + \ddot{z}(t)\hat{k}$$

$$v_x(t) = \int \ddot{x}(t) dt + C_1 \rightarrow x(t) = \int \left[\int \ddot{x}(t) dt \right] dt + C_1 t + C_2$$

C_1 و C_2 ثابت‌های انتگرال گیری نه از شرایط اولیه حاصل می‌شود.



مسئله:
را در هر دو جهت‌های مختلف استاتیکی
در دو شیب

Subject:

Year. Month. Date. ()

1a سرعت نزدیک شدن بین ها یکدیگر در موقعیت $x = 5 \text{ ft}$

1b نرخ تغییر سرعت نزدیک شدن بین ها

$$\frac{x^2}{10^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x \cdot \dot{x}}{10^2} + \frac{y \cdot \dot{y}}{6^2} = 0$$

$\dot{x} = 6 \text{ ft/sec}$ به دلیل صلب بودن اجزا

$x = 5$

$y = 5.20 \text{ ft}$ از معادله $\frac{x^2}{10^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1$ در $x = 5$ بدست می آید

$\Rightarrow \dot{y} = 0.08 \text{ ft/sec}$

اگر بین ماشین را نقطه بین $y = 5.20 \text{ ft}$ در شیب $\dot{y} = 2.08 \text{ ft/sec}$ می شود

سرعت نزدیک شدن بین ها یکدیگر $= 2.08 + 2.08 \text{ ft/sec}$

$$\frac{x \dot{x} + x^2}{10^2} + \frac{y \dot{y} + y^2}{6^2} = 0$$

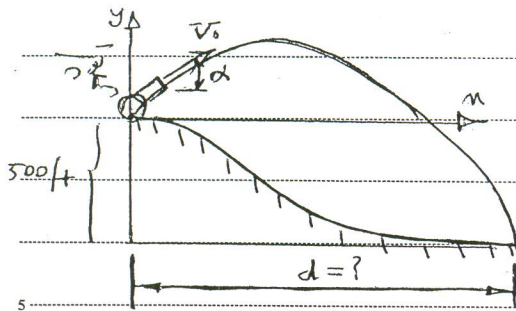
$\ddot{x} = 0$ چون حرکت Yoke است

$\Rightarrow \ddot{y} = -3.32 \text{ ft/sec}^2$ $\Rightarrow$ شتاب نزدیک شدن بین ها $= 6.64 \text{ ft/sec}^2$

KING

Subject:

Year. Month. Date. ()



$$\alpha = 15^\circ$$

$$V_0 = 3000 \text{ ft/sec}$$

$$a) d = ?$$

$$b) \text{ ما هو ارتفاعه في لحظة معينة } ?$$

$$c) y = f(x) = ?$$

$$10) \begin{cases} \ddot{y} = \frac{dv_y}{dt} = -32.2 \frac{\text{ft}}{\text{sec}^2} \Rightarrow v_y(t) = -32.2t + C_1 \\ \ddot{x} = \frac{dv_x}{dt} = 0 \Rightarrow v_x(t) = C_2 \end{cases}$$

$$v_{y(0)} = V_0 \sin \alpha = 3000 \sin 15^\circ$$

$$15) v_{x(0)} = V_0 \cos \alpha = 3000 \cos 15^\circ$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = 776 \frac{\text{ft}}{\text{sec}} \\ C_2 = 2900 \frac{\text{ft}}{\text{sec}} \end{cases}$$

$$20) \begin{cases} y(t) = -16.1t^2 + 776t + C_3 \\ x(t) = 2900t + C_4 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} x(0)=0 \\ y(0)=500 \end{matrix}} \begin{cases} C_3 = 500 \\ C_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(t) = -16.1t^2 + 776t + 500 \\ x(t) = 2900t \end{cases} \xrightarrow{y=500} -500 = -16.1t^2 + 776t \Rightarrow t = 48.8 \text{ sec}$$

$$\Rightarrow x(t) = d = 141,500 \text{ ft}$$

KING

1

Subject:

Year. Month. Date. ()

b) $v_y = 0$ (در حداکثر ارتفاع می باشد) $\Rightarrow t = 24.1 \text{ sec} \Rightarrow y_{\text{max}} = 9350 \text{ ft}$

c) برای این نسبت t را از معادله نسبت a و v می بینیم n نسبت آید

(Path Variables)

سرعت و مسافت بر حسب تغییرات مسیر

با این روش می بینیم
سرعت

نرخ تغییر سرعت در مسیر

$$V = \left(\frac{ds}{dt} \right) (\hat{e}_t) \quad (10)$$

بردار $\hat{e}_t$ همان بردار مماس به مسیر است

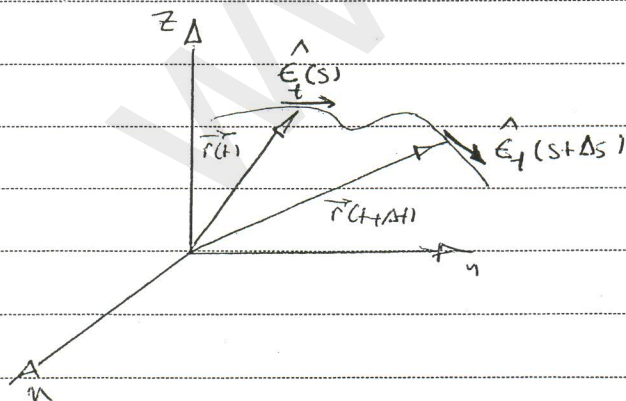
در این $\hat{e}_t$ از $\hat{e}_t$ استفاده می کنیم

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{d^2s}{dt^2} \right) \hat{e}_t + \frac{ds}{dt} \left(\frac{d\hat{e}_t}{dt} \right) \quad (11)$$

از این $\hat{e}_t$ جهت تغییر است

$$\vec{a} = \left(\frac{d^2s}{dt^2} \right) \hat{e}_t + \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \left(\frac{d\hat{e}_t}{ds} \right) \quad (12)$$

(نسبت $\frac{d\hat{e}_t}{ds}$ نرخ تغییر جهت در هر لحظه)



* اگر ds به اندازه کافی کوچک باشد

بردار $\hat{e}_t(s)$ ، $\hat{e}_t(s+ds)$ ، $\hat{e}_t(s)$

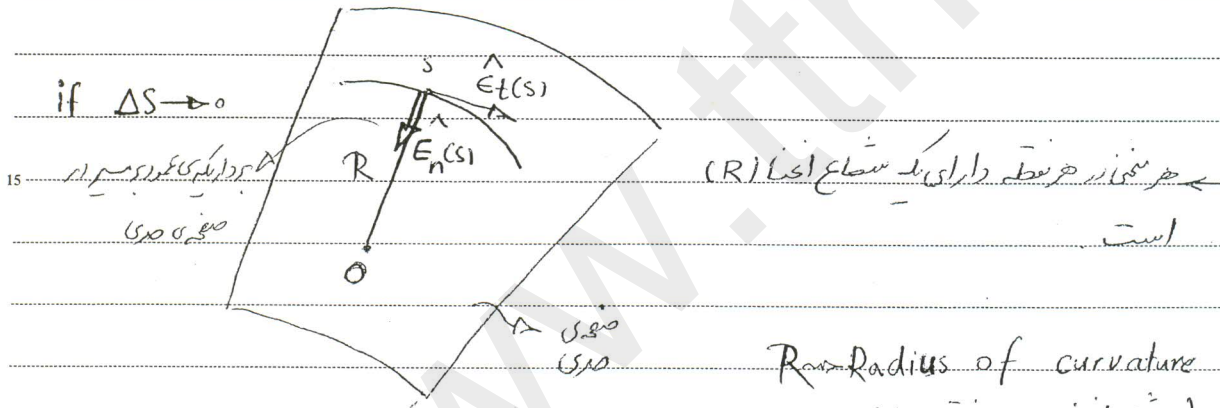
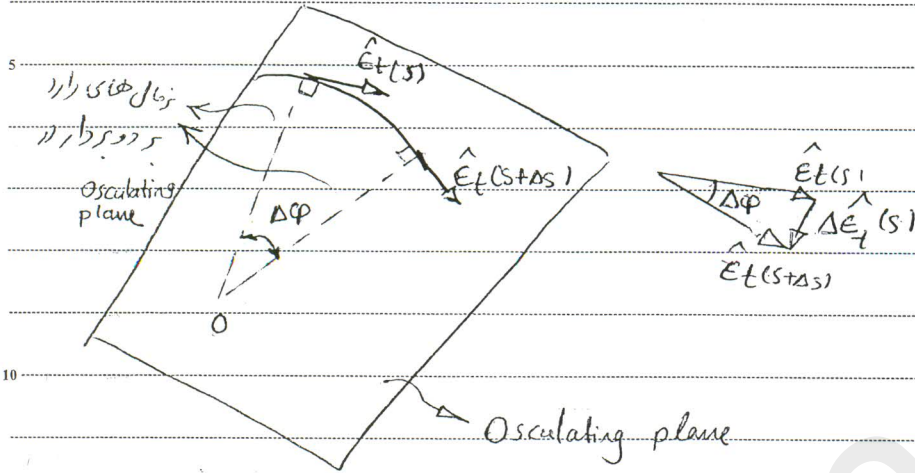
مسافت در نظر گرفته

Subject:

Year. Month. Date. ()

این بردارها نشان دهنده صفحه مماس limiting plane (برسای)

$$\frac{d\hat{e}_t}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\hat{e}_t(s+\Delta s) - \hat{e}_t(s)}{\Delta s} \quad (13) \quad \text{Osculating plane}$$



همینطور فرجه دارای شعاع ای (R) است

$R \rightarrow$ Radius of curvature
(شعاع ای منحنی)

$O \rightarrow$ Center of Curvature
(مرکز ای منحنی)

$$|\Delta \hat{e}_t| \approx |\hat{e}_t| \Delta\phi \quad (14)$$

$$\Delta\phi = \frac{\Delta s}{R} \approx \frac{\Delta s}{R} \Rightarrow |\Delta \hat{e}_t| \approx \frac{\Delta s}{R} \quad (15) \Rightarrow |\Delta \hat{e}_t| \approx \frac{\Delta s}{R} \quad (16)$$

$$\Rightarrow \Delta \hat{e}_t = \frac{\Delta s}{R} \hat{e}_n \quad (17)$$

KING

Subject:

Year. Month. Date. ()

$$(113), (171) \rightarrow \frac{d\hat{e}_t}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \hat{e}_t}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta s}{R} \right) \hat{e}_n = \frac{\hat{e}_n}{R} \quad (18)$$

معنی رابطی 18 اشتقاق بردار این است که اگر از یک بردار به سمت دیگر حرکت کنیم

گیریم مقدار آن را در جهت آن $\hat{e}_n$ یعنی عمود بر بردار که می‌آوریم خواهیم بود

$$(18), (12) \rightarrow \vec{a} = \left(\frac{d^2 s}{dt^2} \right) \hat{e}_t + \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \frac{\hat{e}_n}{R} \rightarrow \frac{v^2}{R} \quad (19)$$

جهت عمود بر حرکت
نسبت مرکز انحنای مسیر
نسبت تغییر جهت
پس اگر در راستای یک خط راست
حرکت کنیم، هر R در سمت راست باشد
(شماره - جانب مرکز)
تغییر اندازه سرعت
در جهت حرکت (شماره -
یعنی اگر در جهت سرعت باشد
حرکت کنیم این شماره در دو دینار
جهت در راستای
نسبت این شماره

تا این طبعی در حالت کلی یعنی در فضای 3D

برای حالت (plane curve)
از هندسه می‌توان نوشت

$$R = \frac{\sqrt{(1+y'^2)^{3/2}}}{|y''|} \quad y' = \frac{dy}{dx} \quad (20-a)$$

$$R = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}{|\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}|} = \frac{|\vec{v}|^3}{|\vec{v} \times \vec{a}|} \quad (20-b)$$

(این رابطه را ثابت کنید)

یا $\frac{1}{R}$ این (curvature) می‌باشد

Subject:

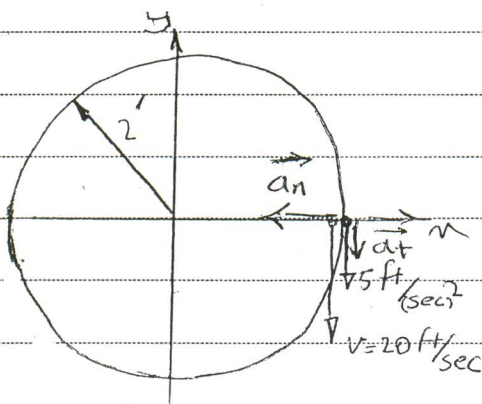
Year. Month. Date. ()

6

هزینه: برای یک مینی 3 جوی شعاع اینجا با اینجا را چگونه می توان درست آورد؟

5

مسئله: شتاب زاویه در شکل زیر صفر راست



$$\vec{a} = 5\hat{e}_t + \frac{20^2}{2}\hat{e}_n = -5\hat{a} - 200\hat{i} \text{ ft/sec}^2$$

15

در سیر حرکت: $v = r\dot{\theta} = r\omega$

$$a_t = r\ddot{\theta} = r\alpha$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = r\omega^2 = r\dot{\theta}^2$$

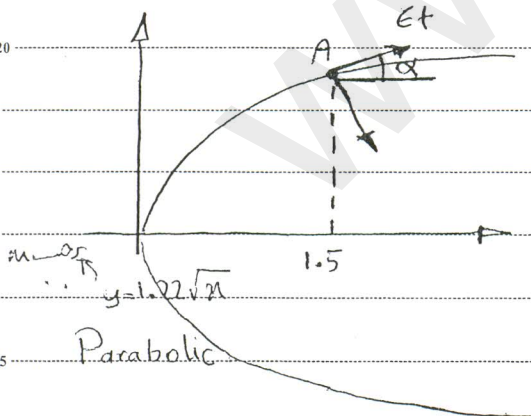
$R = r$

مسئله: سرعت زاویه در نقطه A: 3 m/s در سیر حرکت

شتاب زاویه در نقطه A: 3 m/s^2 در سیر حرکت

در سیر حرکت

$a = ?$



$y = 1.22\sqrt{x}$

Parabolic

KING

Subject:

Year. Month. Date. ()

$$\hat{e}_t = \cos \alpha \hat{i} + \sin \alpha \hat{j}$$

$$\left(\tan \alpha = \frac{dy}{dn} = \frac{0.61}{\sqrt{n}} \Rightarrow \tan \alpha \Big|_{n_A} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 26.5^\circ \right) \checkmark$$

$$\Rightarrow \hat{e}_t = 0.895 \hat{i} + 0.446 \hat{j}$$

$$\Rightarrow \hat{e}_n = \sin \alpha \hat{i} - \cos \alpha \hat{j} = 0.446 \hat{i} - 0.895 \hat{j}$$

$$\frac{dy}{dn} = \frac{0.61}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{d^2y}{dn^2} = -0.305 n^{-3/2} \Rightarrow$$

$$R = \frac{[1 + (0.61 n^{-0.5})^2]^{3/2}}{0.305 n^{-3/2}} \Big|_{n_A} = 8.4 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{a} &= \underbrace{\frac{d^2y}{dn^2}}_{\hat{e}_t} (0.895 \hat{i} + 0.446 \hat{j}) + \underbrace{\left(\frac{9}{8.4} \right)}_{v^2/R} (0.446 \hat{i} - 0.895 \hat{j}) \\ &= 3.16 \hat{i} + 0.379 \hat{j} \end{aligned}$$

KING

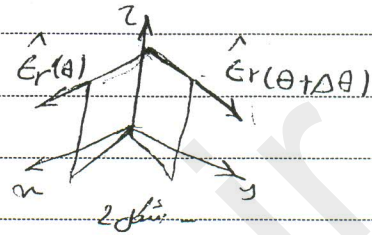
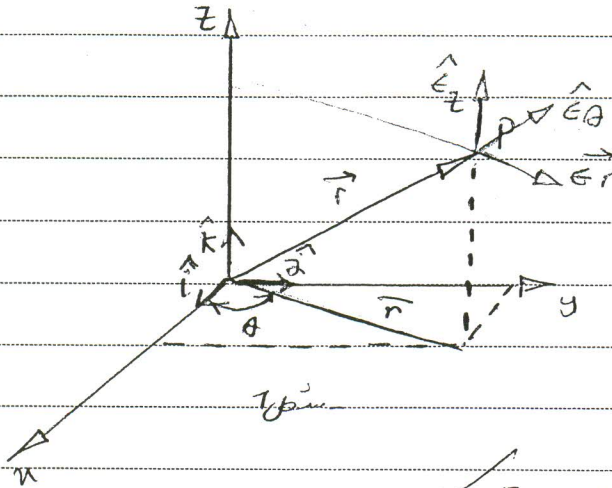
Subject:

Year. Month. Date. ()

4

4-1 مختصات استوانه‌ای

(θ, r, z)



* اگر این زوایا را در نظر بگیریم، $\hat{e}_r$ و $\hat{e}_\theta$ تغییر می‌کنند.
ولی $\hat{e}_z$ همواره به سمت بالا است و تغییر نمی‌کند.

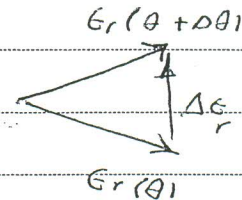
در این‌جا می‌خواهیم از بردارهای پایه (دارای مختصات استوانه‌ای استوار) کنیم.

$$\vec{r}_p = r \hat{e}_r + z \hat{e}_z \quad (22)$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\hat{e}}_r + \dot{z} \hat{e}_z + z \dot{\hat{e}}_z \quad (23)$$

مقدار جهت ثابت است، شتاب صفر است.

$$\dot{\hat{e}}_r = \frac{d\hat{e}_r}{dt} = \frac{d\hat{e}_r}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\hat{e}_r}{d\theta} \dot{\theta} \quad (24)$$



* $\hat{e}_r$ فقط در صورتی تغییر می‌کند که θ تغییر کند (در این‌جا θ تغییر می‌کند).

Year. Month. Date. ()

↓
Δθ

if $\Delta\theta \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta\hat{\epsilon}_r \approx \Delta\theta \cdot \hat{\epsilon}_\theta$ (26)

$$\frac{d\hat{\epsilon}_I}{d\theta} = \hat{\epsilon}_\theta$$

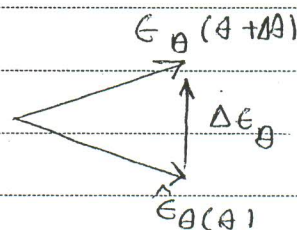
$$(24), (27) \Rightarrow \frac{d\hat{e}_r}{dt} = \frac{d\hat{e}_r}{d\lambda} \dot{\lambda} - \dot{\lambda} \hat{e}_\theta$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta + \dot{z}\hat{e}_z \quad (28)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r} \hat{e}_r + \dot{r} \underbrace{\dot{\hat{e}}_r}_{\dot{\theta} \hat{e}_\theta} + \dot{r} \dot{\theta} \hat{e}_\theta + r \ddot{\theta} \hat{e}_\theta \quad (29)$$

$$+ r \dot{\theta} \hat{e}_\theta + \dot{z} \hat{e}_z + \dot{r} \hat{e}_r$$

$$\dot{\hat{e}}_\theta = \frac{d\hat{e}_\theta}{dt} = \frac{d\hat{e}_\theta}{d\theta} \cdot \dot{\theta} \approx \frac{\Delta \hat{e}_\theta}{\Delta \theta} \dot{\theta} \quad (30)$$



if $\Delta\theta \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta \hat{e}_r = -\Delta\theta \hat{e}_\theta \Rightarrow \dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta} \hat{e}_r$ (31)

$$\vec{a} = \underbrace{\ddot{r}}_{a_r} \hat{e}_r + \underbrace{(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})}_{a_\theta} \hat{e}_\theta + \underbrace{\ddot{z}}_{a_z} \hat{e}_z \quad (32)$$

سہ ماہی لکھنا
روند سن لکھنا

ست - لاش از مضمین
ذره (ست - مکرر)

راستی از دست خردی زده
در راستای عمودی

استاد محترم

میتا - ناس از تغیرات ه (است زاروای)

1. سہولت

Subject:

Year. Month. Date. ()

✓

برای حرکت دایره در صفحه و یا دایره در صفحه

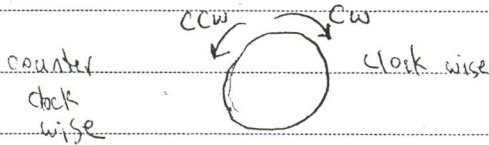
$$\vec{v} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta$$

برای این حالت: $\dot{r} = 0, \dot{\theta} = \omega$

$$\vec{a} = -r \omega^2 \hat{e}_r + r \ddot{\theta} \hat{e}_\theta \quad (33.1)$$

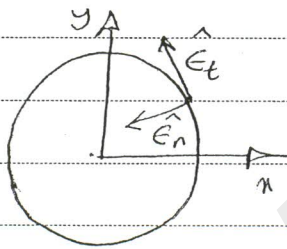
تغییر اندازه سرعت

برای حرکت دایره در صفحه و یا دایره در صفحه



counter
clock
wise

clock wise



$$\text{cw} \begin{cases} \hat{e}_r = \hat{e}_n \\ \hat{e}_\theta = -\hat{e}_t \end{cases}$$

برای cw

$$\text{ccw} \begin{cases} \hat{e}_r = -\hat{e}_n \\ \hat{e}_\theta = \hat{e}_t \end{cases}$$

برای ccw

$$|\vec{r} \ddot{\theta}| = \left| \frac{d^2 s}{dt^2} \right| \quad \text{نسبت به مرکز (rad)}$$

$$|\vec{r} \omega^2| = \left| \frac{v^2}{R} \right| \quad \text{نسبت به مرکز (cm}^2\text{)}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2 s}{dt^2} \hat{e}_t + \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \frac{\hat{e}_n}{R}$$

جهان حرکت در مختصات کارتزین را ششم

شماره اول: 4, 8, 12, 17, 26, 28, 30, 43, 48, 49

تقریباً سری اول

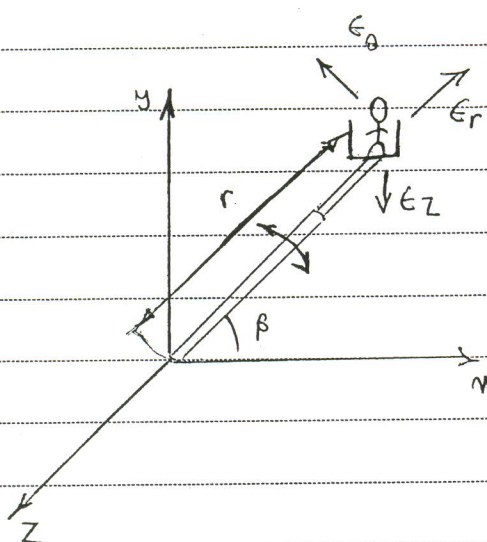
کودک، دانشمند: 1386, 7, 16

KING

A

Subject:

Year. Month. Date. ()



$$0.6 \text{ m/s}, 0.3 \text{ m/s}^2$$

$$(0.6 \text{ m/s}, 0.3 \text{ m/s}^2)$$

$$r = 10 \text{ m}$$

$$\beta = 30^\circ$$

$$\dot{\beta} = ? \leftarrow v_y = 3.3 \text{ m/s}$$

$$\ddot{\beta} = ? \leftarrow a_y = 1.7 \text{ m/s}^2$$

$$\text{I) } \vec{v} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta + \dot{z} \hat{e}_z$$

$$= 0.6 \hat{e}_r + 10 \dot{\beta} \hat{e}_\theta + 0$$

$$\vec{v} \cdot \hat{j} = 3.3 \text{ m/s} \quad (\hat{j} \text{ is the unit vector in the } y \text{ direction})$$

$$\Rightarrow 0.6 (\hat{e}_r \cdot \hat{j}) + 10 \dot{\beta} (\hat{e}_\theta \cdot \hat{j}) = 3.3 \Rightarrow \dot{\beta} = 0.346 \text{ Rad/s}$$

$$\text{II) } a = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \hat{e}_r + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \hat{e}_\theta + \ddot{z} \hat{e}_z \Rightarrow$$

$$(0.3 - 10 \times 0.346^2) \hat{e}_r + (10 \ddot{\beta} + 2 \times 0.6 \times 0.346) \hat{e}_\theta$$

$$= -0.9 \hat{e}_r + (10 \ddot{\beta} + 0.416) \hat{e}_\theta$$

$$\vec{a} \cdot \hat{j} = 1.7 \text{ m/s}^2 \Rightarrow 1.7 = -0.9 (\hat{e}_r \cdot \hat{j}) + (10 \ddot{\beta} + 0.416) (\hat{e}_\theta \cdot \hat{j})$$

$$\Rightarrow \ddot{\beta} = 0.207 \text{ Rad/s}^2$$

KING

Subject:

Year. Month. Date. ()

(Spherical co.) 5. مختصات کروی

$$\begin{cases} R \\ \theta \\ \phi \end{cases} \quad \hat{e}_R, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi$$

$$\vec{v} = v_R \hat{e}_R + v_\theta \hat{e}_\theta + v_\phi \hat{e}_\phi \quad (36)$$

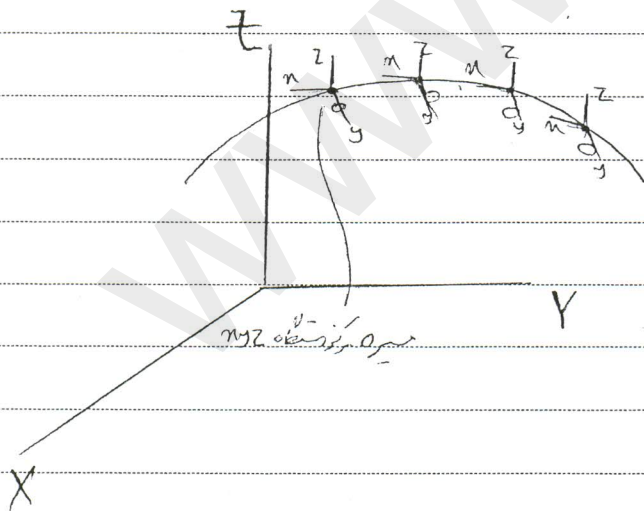
$\downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow$
 $\dot{R} \quad R\dot{\theta} \cos \phi \quad R\dot{\phi} \sin \phi$

$$\vec{a} = a_R \hat{e}_R + a_\theta \hat{e}_\theta + a_\phi \hat{e}_\phi \quad (37)$$

$\downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow$
 $\ddot{R} - R\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \quad R\ddot{\theta} \cos \phi - 2R\dot{\theta}\dot{\phi} \sin \phi \quad \frac{1}{R} \frac{d(R^2 \dot{\phi})}{dt} + R\dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta$

تقریباً ویدیو شماره 1، آپلود نشده (1.386.71.16)
 لینک ارتباطی

1. حرکت نسبی (Relative Motion)



* دستگاه مختصات باریک حرکت
 ذره ها نسبت به هم حرکت می کنند

* حرکت ذره (جذب استاتیسی) مستقیم است
 (Translation Motion)

Subject:

Year. Month. Date. ()

بردار $\vec{A}$ را در این دستگاه مختصات بنویسید

$$\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{XYZ} = ? \quad \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{xyz} = ?$$

سوال:
ابطال بین روش در جهت انتخابی می باشد؟

$$\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{XYZ} = \frac{d}{dt} (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \Big|_{XYZ} \quad (38)$$

$$= \left(\frac{dA_x}{dt} \right)_{XYZ} \hat{i} + \left(\frac{dA_y}{dt} \right)_{XYZ} \hat{j} + \left(\frac{dA_z}{dt} \right)_{XYZ} \hat{k} \quad (39)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{XYZ} = \left(\frac{dA_x}{dt} \right)_{xyz} \hat{i} + \left(\frac{dA_y}{dt} \right)_{xyz} \hat{j} + \left(\frac{dA_z}{dt} \right)_{xyz} \hat{k} \quad (40)$$

چون $\frac{dA_x}{dt}$ یک اسکالر است پس در این دو سیستم انتخابی یکسان است.

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{xyz} &= \left(\frac{dA_x}{dt} \right)_{xyz} \hat{i} + A_x \left(\frac{d\hat{i}}{dt} \right)_{xyz} + \left(\frac{dA_y}{dt} \right)_{xyz} \hat{j} + A_y \left(\frac{d\hat{j}}{dt} \right)_{xyz} \\ &+ \left(\frac{dA_z}{dt} \right)_{xyz} \hat{k} + A_z \left(\frac{d\hat{k}}{dt} \right)_{xyz} \quad (41) \end{aligned}$$

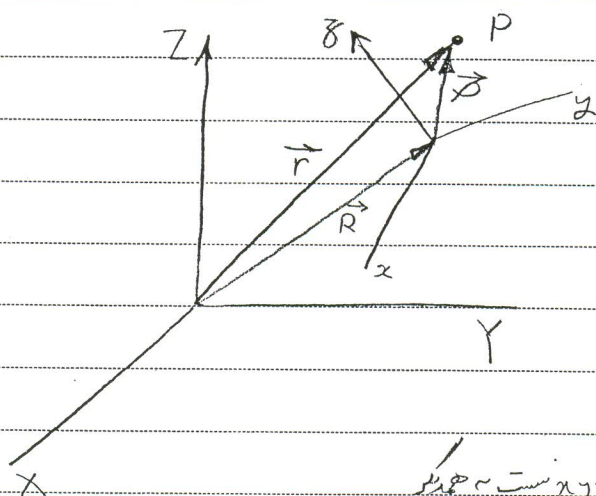
$$(40), (41) \Rightarrow \left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{xyz} \quad (42)$$

$$\left(\frac{d}{dt} \right)_{XYZ} = \left(\frac{d}{dt} \right)_{xyz}$$

Subject:

Year. Month. Date. ()

7-1 حرکت درجه نسبت به یک جهت مرجعی استاتیکی



* دستگاه های XYZ، درجه نسبت به هم حرکت نسبی استاتیکی دارند

$$(\vec{V})_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{XYZ} \quad (43)$$

$$(\vec{V})_{xyz} = \left(\frac{d\rho}{dt} \right)_{xyz} \quad (44)$$

$$\left(\frac{d\vec{R}}{dt} \right)_{XYZ}$$

حرکت مرکز دستگاه xyz از دستگاه XYZ
مبنای بررسی دستگاه XYZ

$$\vec{r} = \vec{\rho} + \vec{R} \quad (45)$$

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{R}}{dt} \right)_{XYZ} + \left(\frac{d\vec{\rho}}{dt} \right)_{xyz}$$

$$\Rightarrow (\vec{V})_{XYZ} = \vec{R} + \vec{V}_{xyz} \quad (46)$$

↓
P سرعت مرکز دستگاه xyz
P سرعت مرکز دستگاه xyz
↓
Vxyz سرعت مرکز دستگاه xyz
↓
Vxyz سرعت مرکز دستگاه xyz

Subject:

Year. Month. Date. ()

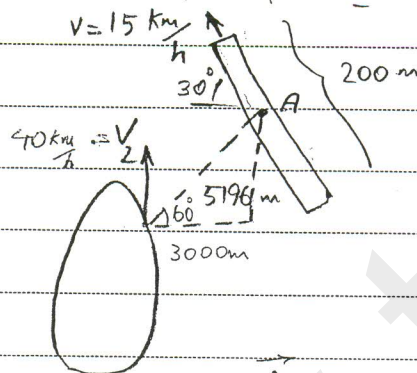
$$\vec{a}_{XYZ} = \vec{R} + \vec{a}_{xyz} \quad (47)$$

به طور شتاب :

مثال: یک کشتی با سرعت $V_1 = 15 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ در حال حرکت می باشد. طول کشتی 200m است.

یک زیر دریایی در نقطه ای نشان داده قرار دارد. زیر دریایی به کشتی شلیک می کند.

سرعت شلیک زیر دریایی $40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ است. آیا از دره کشتی برخورد خواهد کرد یا خیر.



دستگاه xyz متصل به کشتی
دستگاه XYZ متصل به آب

$$\vec{R} = -15 \cos 30^\circ \hat{i} + 15 \sin 30^\circ \hat{j} \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

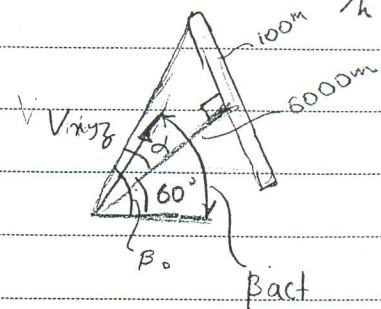
$$\text{سرعت از دره کشتی به آب} = 40 \hat{j} \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_{XYZ} = \vec{V}_{xyz} + \vec{R} \Rightarrow \vec{V}_{xyz} = 12.99 \hat{i} + 32.5 \hat{j} \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$\beta_0 = \alpha + 60^\circ = \tan^{-1} \frac{100}{6000} + 60^\circ = 60.95^\circ$$

$$\beta_{act} = \tan^{-1} \frac{(V_{xyz})_y}{(V_{xyz})_x} = \tan^{-1} \frac{32.5}{12.99} = 68.21^\circ$$

سرعت شلیک



چون $\beta_{act} > \beta_0$ است لذا از دره فرعی می دهد.

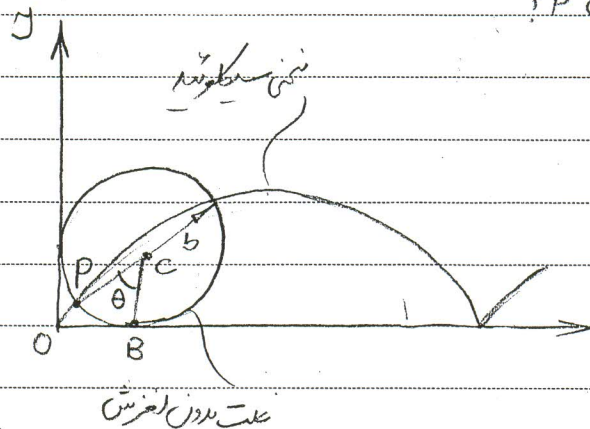
KING

Subject:

Year. Month. Date. ()

۱۶

مسئله: سرعت و شتاب نقطه P؟



$$\begin{cases} x_p = b\theta - b\sin\theta \\ y_p = b - b\cos\theta \end{cases}$$

معادلات پارامتری سکونید:

$$\vec{V}_p = b\dot{\theta}(1 - \cos\theta)\hat{i} + b\dot{\theta}\sin\theta\hat{j}$$

$$\vec{a}_p = [b\ddot{\theta}(1 - \cos\theta) + b\dot{\theta}^2\sin\theta]\hat{i} + (b\ddot{\theta}\sin\theta + b\dot{\theta}^2\cos\theta)\hat{j}$$

* در نقطه‌های که P دور α را قطع می‌کند مستقل از θ سرعت برابر صفر است.
چون در غیری سرعت لغزش داشتیم

* همچنین در این نقاط شتاب P برابر است با $b\dot{\theta}^2$ مستقل از θ می‌باشد.

کلاس های هنر اماره : 5 شنبه 86/7/26

" 86/8/10

" 86/8/24

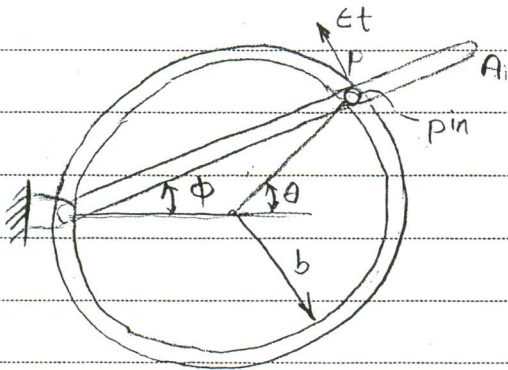
" 86/9/8

ساعت 8 الی 11

KING

Subject:

Year. Month. Date. ()



مسئله
اگر $\dot{\phi}$ ثابت باشد،
 $\vec{a}_P$ ، $\vec{v}_P$

$$\vec{v}_P = r\dot{\theta}\hat{e}_t = 2b\dot{\phi}\hat{e}_t$$

$$\vec{a}_P = r\dot{\theta}^2\hat{e}_n + r\ddot{\theta}\hat{e}_t = 4b\dot{\phi}^2\hat{e}_n$$

$$\theta = 2\phi \rightarrow \dot{\theta} = 2\dot{\phi} \quad \ddot{\phi} = \ddot{\theta} = 0$$

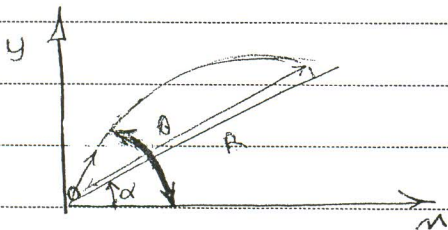
Subject:

Year. Month. Date. ()

فیزیک (مکانیک) - حرکت دایره‌ای - (تجرباتی)

17

مسئله: اگر یک جسم در یک سطح شیبدار با زاویه θ حرکت کند، برای چه زاویه α حرکت آن در یک مسیر عمودی باشد؟



max. R

$$a_x = 0 \Rightarrow v_x = \int_0^t a_x dt \Rightarrow v_x = v_0 = v_0 \cos \theta$$

$$a_y = -g \Rightarrow v_y = \int_0^t a_y dt \Rightarrow v_y = -gt + v_0 \sin \theta$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \theta t$$

$$x = v_0 \cos \theta t$$

در لحظه برخورد

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2} \frac{g x^2}{v_0^2} (1 + \tan^2 \theta) + x \tan \theta$$

$$\begin{cases} x = R \cos \alpha \\ y = R \sin \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow R \sin \alpha = -\frac{g}{2} \frac{R^2 \cos^2 \alpha}{v_0^2} (1 + \tan^2 \theta) + R \tan \alpha \cos \alpha$$

$$R = f(\theta)$$

$$R'(\theta) = 0$$

$$R = \left(\frac{\cos \alpha \tan \theta - \sin \alpha}{1 + \tan^2 \theta} \right) \frac{v_0^2}{g \cos^2 \alpha}$$

$$(\cos \alpha \sin \theta \cos \theta - \sin \alpha \cos^2 \theta)' = 0$$

$$\cos \alpha \cos 2\theta + \sin \alpha \sin 2\theta = 0 \Rightarrow \cos(2\theta - \alpha) = 0$$

$$\Rightarrow 2\theta - \alpha = 90^\circ \Rightarrow \theta = \frac{90^\circ + \alpha}{2}$$

KING

Subject:

Year. Month. Date. ()

$$g_x = g \sin \alpha$$

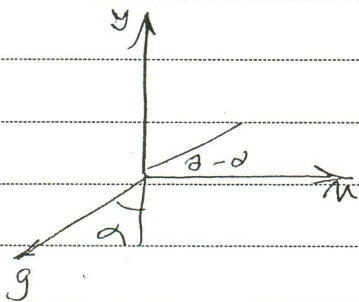
$$g_y = g \cos \alpha$$

$$a_x = -g \sin \alpha$$

$$a_y = -g \cos \alpha$$

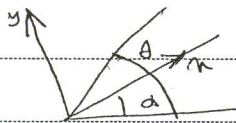
$$\int_{v_0 \cos(\theta-\alpha)}^v dv_x = \int_0^t a_x dt$$

$$\begin{cases} x = \frac{-g \sin \alpha}{2} t^2 + v_0 \cos(\theta-\alpha) t \\ y = \frac{-g \cos \alpha}{2} t^2 + v_0 \sin(\theta-\alpha) t \end{cases}$$



$$t = \frac{2v_0 \sin(\theta-\alpha)}{g \cos \alpha} = t_R$$

$$R = \frac{-2v_0^2}{g \cos^2 \alpha} \left(-\sin \alpha \sin^2(\theta-\alpha) + \frac{\cos \alpha \sin 2(\theta-\alpha)}{2} \right)$$



$$-\sin \alpha \times 2 \sin(\theta-\alpha) \cos(\theta-\alpha) + \cos \alpha \cos 2(\theta-\alpha) = 0$$

$$-\sin \alpha \sin 2(\theta-\alpha) + \cos \alpha \cos 2(\theta-\alpha) = 0$$

$$\cos(2(\theta-\alpha) + \alpha) = 0 \Rightarrow 2\theta - \alpha = 90 \Rightarrow \theta = \frac{90 + \alpha}{2}$$

$$v_x = 50 - 16t$$

$$a_x = -16$$

$$y = 100 - 4t^2$$

$$x = -8t^2 + 50t + 0$$

$$1) \vec{a}, \vec{v} \quad ?$$

$$v_y = -8t$$

$$2) \text{ find } \vec{a} \text{ at } y=0 \quad ?$$

$$a_y = -8$$

$$100 - 4t^2 = 0 \Rightarrow t = \pm 5 \sim t = 5$$

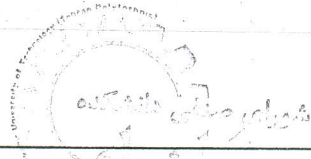
$$\begin{cases} v_x = -30 \text{ m/s} \\ a_x = -16 \text{ m/s}^2 \\ v_y = -40 \text{ m/s} \\ a_y = -8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -8t^2 + 50t \\ y = 100 - 4t^2 \end{cases}$$

KING

Subject:

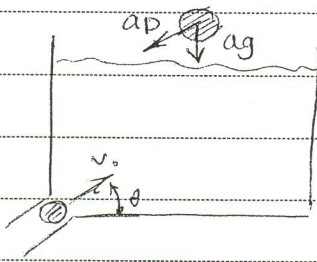
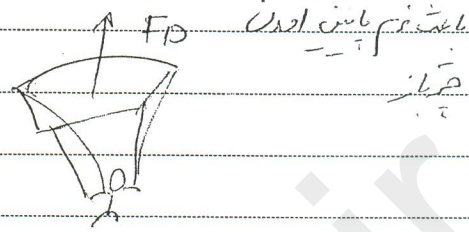
Year. Month. Date. ()



۱۲

مثال: اشتداد سیال در اثر گشتن مسدود شدن سیال در یک دریچه Drag

$$a_D = -k V_{\infty}^2$$



رقت ذره در سیال است

$$\vec{a}_D = -k \vec{v}$$

$$a_x = -k v_x$$

$$a_y = -k v_y - g$$

$$\frac{dv_x}{dt} = -k v_x \rightarrow \frac{dv_x}{v_x} = -k dt$$

$$\int_{v_{0x} \cos \theta}^{v_x} \frac{dv_x}{v_x} = \int_0^t -k dt \Rightarrow \ln v_x \Big|_{v_{0x} \cos \theta}^{v_x} = -kt \Big|_0^t$$

$$\ln v_x - \ln v_{0x} \cos \theta = -kt \Rightarrow \ln \frac{v_x}{v_{0x} \cos \theta} = -kt$$

$$\frac{v_x}{v_{0x} \cos \theta} = e^{-kt} \Rightarrow v_x = v_{0x} \cos \theta e^{-kt}$$

$$\frac{dv_x}{dt} = -(v_{0x} \cos \theta) e^{-kt} \Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t (v_{0x} \cos \theta) e^{-kt} dt$$

$$x = v_{0x} \cos \theta \left[-\frac{1}{k} e^{-kt} \right]_0^t \Rightarrow x = v_{0x} \cos \theta \times \frac{1}{k} (1 - e^{-kt})$$

KING

۱۲

Subject:

Year. Month. Date. ()

$$a_y = -kv_y - g \quad \frac{dv_y}{dt} = -kv_y - g$$

$$\rightarrow \int \frac{-k dv_y}{-kv_y - g} = \int k dt \Rightarrow \ln(-kv_y - g) \Big|_{v_0 \sin \theta}^{v_y} = -kt$$

$$\ln \frac{-kv_y - g}{-kv_0 \sin \theta - g} = -kt \Rightarrow v_y = \left(\frac{-kv_0 \sin \theta - g}{-k} \right) e^{-kt} - \frac{g}{k}$$

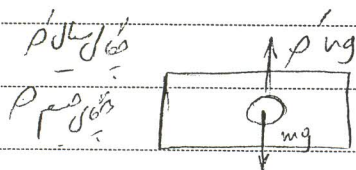
$$\left(\frac{-kv_y - g}{-kv_0 \sin \theta - g} = e^{-kt} \right)$$

$$y = \frac{(v_0 \sin \theta + g/k)}{k} (1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k} t$$

$$x = \frac{v_0 \cos \theta}{k} (1 - e^{-kt})$$

$g = ?$

* سرعت افشانی 9.81 $\frac{m}{s^2}$ با نای غریز



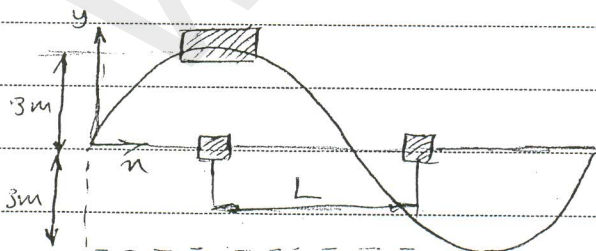
$$F = \rho' v g - \rho m g$$

$$\Rightarrow F = \rho v g \left(1 - \frac{\rho'}{\rho} \right)$$

سپ g ، $\left(1 - \frac{\rho'}{\rho} \right)$ برابر می شود

مقدار ρ' آنست که ناشی می شود از این معادله و در صورتی که ρ' را در معادله قرار دهیم

20 $a_n = 0.7g$ داریم. اگر با سرعت $80 \frac{km}{h}$ به سمت راست حرکت کند، L را به نظر می آوریم



KING

Subject:

Year. Month. Date. ()

۱۳

محل را در هر لحظه از زمان به یک تابع سینوسی

$$\begin{cases} x \rightarrow 2L \\ \theta \rightarrow 2\pi \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{L} x$$

$$y = 3 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$P_{avg} = \left[1 + \left[\frac{dy}{dx} \right]^2 \right]^{3/2} \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3\pi \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{L}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{3\pi^2}{L^2} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$y = 3$$

$$x = \frac{L}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{-3 \times (3.14)^2}{L^2}$$

$$\Rightarrow \frac{L^2}{3(3.14)^2} = \frac{(22.22)^2}{6.867}$$

(0.7xg)

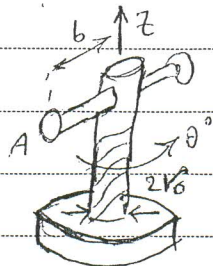
(an = v^2/p)

$$\Rightarrow L = 4$$

$$\rho = \frac{|\vec{V} \times \vec{a}|}{|\vec{V}|^3}$$

محل را به یک معادله از حالت سکون یا سرعت و شروع حرکت می کنند که با زمان با رابطه $A = kt$

افزایش می یابد که ثابت است. حجم به برابر L است. معادله $\vec{a}$ و $\vec{v}$ را برای نقطه A



برای یک در هر لحظه می یابید

KING

Year. Month. Date. ()

original work.

$$r=b \Rightarrow \dot{r}=0$$

$$\dot{\theta} = k t \Rightarrow \theta = \frac{k}{2} t^2 = 2\pi \Rightarrow t = 2\sqrt{\frac{\pi}{k}}$$

$$\dot{\theta} = k t \Big|_{t^*} \rightarrow \dot{\theta} = 2k \sqrt{\frac{\pi}{k}} = 2\sqrt{k\pi}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{L}{z} = \frac{2\pi}{\theta} \quad , \quad z = \frac{\theta L}{2\pi} \quad \theta = \frac{1}{2} t^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{z} = \frac{K}{4\pi} L t^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{z} = \frac{K}{2\pi} L t \Big|_0^t = L \sqrt{\frac{K}{\pi}}$$

$$v = \hat{e}_r + 2b\sqrt{K\eta} \hat{e}_\theta + L\sqrt{\frac{K}{\eta}} \hat{k}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -6 \times 4\pi = -46\pi \text{ k}$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} - 2\dot{r}\dot{\theta} = 10 \text{ k}$$

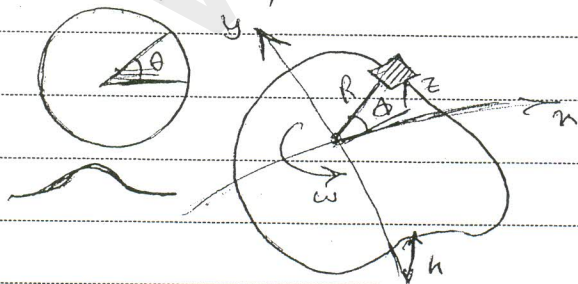
$$a_z = \ddot{z} = \frac{KL}{2m}$$

مثال ماشین‌های ترکیبی به طول R متصل شود که این ماشین‌ها به روشی دوری به هم وصلند

ما سرعت داشتیم و این کار عمرانی تولا شده این وقت می رود. ماشین ها طبق اطمینان

$$T = (h_f)(1 - \cos 2\theta)$$

بالا و سانی روند. عبارتی برای ترفه های R ، θ ، ϕ سرعت در لحظه $\theta = \frac{\pi}{4}$ است آورد.



Subject:

Year. Month. Date. ()

16

$$v_R = \dot{R}$$

$$R = ct \Rightarrow \dot{R} = c \Rightarrow v_R = c$$

نقطه ثابت کردی

$$v_\theta = R\dot{\theta} \cos \phi$$

$$\sin \phi = \frac{z}{R} \quad (\theta = \pi/4) \Rightarrow \sin \phi = \frac{h}{2R}$$

$$v_\phi = R\dot{\phi}$$

$$\Rightarrow \cos \phi = \sqrt{1 - \frac{h^2}{4R^2}}$$

$$\Rightarrow v_\theta = R\omega \sqrt{1 - \frac{h^2}{4R^2}}$$

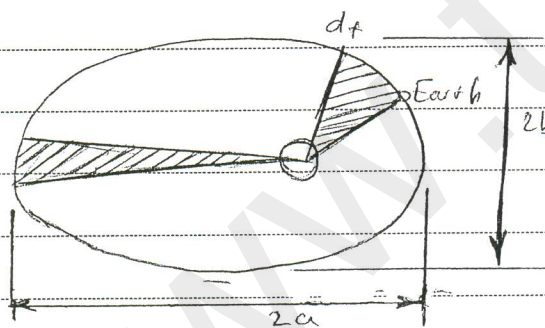
$$\sin \phi = \frac{z}{R} \Rightarrow$$

$$z = (h/2)(1 - \cos 2\theta) \Rightarrow \dot{\phi} \cos \phi = \frac{\dot{z}}{R} \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{\dot{z}}{R \cos \phi}$$

$$\dot{z} = \frac{h}{2} (2\omega \sin 2\theta) \quad \theta = \pi/4 \Rightarrow \dot{z} = h\omega$$

$$\Rightarrow \dot{\phi} = \frac{h\omega}{R \sqrt{1 - \frac{h^2}{4R^2}}}$$

$$\Rightarrow v_\phi = \frac{h\omega}{\sqrt{1 - \frac{h^2}{4R^2}}}$$



نقطه ثابت کردی
نقطه ثابت کردی

$$\frac{dA}{dt} = ct$$

KING

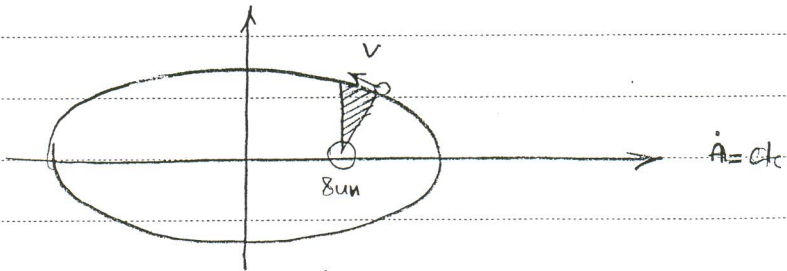
W

Subject:

Year. Month. Date. ()

۱۵

* حرکت سیارات ثابت است چون حرکت اتماس در فضا در یک پایداری دارد.



$$a_{\theta} = 0, \quad a_{\theta} = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 \Rightarrow r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} = 0$$

$$\frac{r^2\ddot{\theta}}{u} + \frac{2r\dot{r}\dot{\theta}}{v} = \frac{d(uv)}{dt}$$

$$\frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{r^2\dot{\theta} = c = h}$$

$$dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta \quad \left. \begin{array}{l} 2\pi R^2/2 \\ \theta \rightarrow ? \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} 2\pi \rightarrow \pi R^2 \\ \theta \rightarrow ? \end{array}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{1}{2}h \quad c =$$

* تبدیل مختصات به یکدیگر:

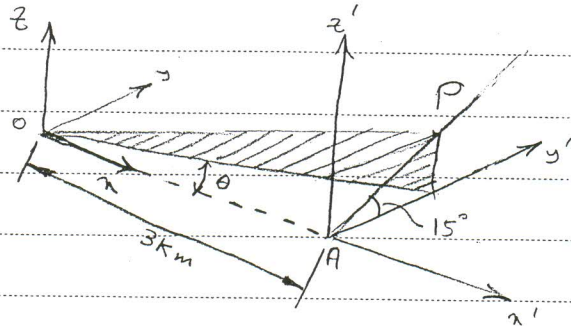
مثال: هواپیمای P در نقطه A با سرعت $v_0 = 250 \text{ km/h}$ از زمین جدا شده. (منبعی غرضی θ' و θ ثابت دارد)

ثابت 15° و شتاب 0.8 m/s^2 اوج می گیرد. حرکت هواپیمای تسلسلاراداری در نقطه 0 مکتوب می شود. سرعت

P را 60s پس از شروع حرکت بر اساس مختصات استوانه ای بیاید. همچنین θ' و θ را بیست آردید.

Subject:

Year. Month. Date. ()



$$\begin{cases} a_{y'} = a \cos 15^\circ \\ a_{z'} = a \sin 15^\circ \\ a_{x'} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{x'} = 0 \\ v_{y'} = a \cos 15^\circ t + v_0 \cos 15^\circ \\ v_{z'} = a \sin 15^\circ t + v_0 \sin 15^\circ \end{cases}$$

$$v_{x'} = 0$$

$$y' = \frac{a \cos 15^\circ}{2} t^2 + v_0 \cos 15^\circ t$$

$$z' = \frac{a \sin 15^\circ}{2} t^2 + v_0 \sin 15^\circ t$$

$$t = 6.0, \quad v_{x'} = 0, \quad v_{y'} = 113.4, \quad v_{z'} = 30.4$$

$$v_{x'} = 0, \quad y' = 541.6 \text{ m}, \quad z' = 1451 \text{ m}, \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{y'}{z'} \right) = 61^\circ$$

$$\begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{x'} \\ v_{y'} \\ v_{z'} \end{bmatrix}$$

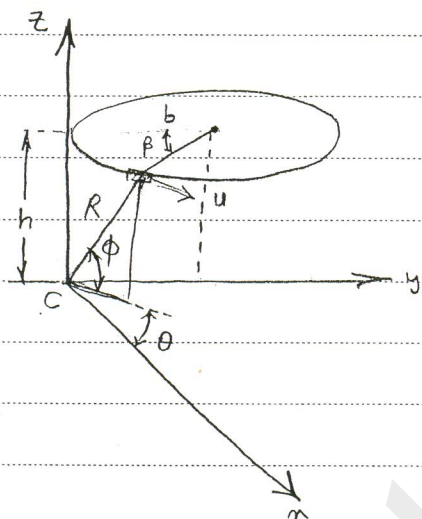
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 61^\circ & \sin 61^\circ & 0 \\ -\sin 61^\circ & \cos 61^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 113.4 \\ 30.4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_r = 99.2 \text{ m/s} = \dot{r} \\ v_\theta = 55 \text{ m/s} = r\dot{\theta} = \dot{\theta}r \\ v_z = 30.4 \text{ m/s} = \dot{z} \end{cases}$$



Subject: _____
 Year: _____ Month: _____ Date: () _____

۱۹

مثال: هواپیمای با سرعت ثابت u در ارتفاع h مسیر دایره‌ای به شعاع R دارد. یک منحنی افقی بی‌انحنایی را در نظر بگیرید که موازی با مسیر پرواز هواپیما است. آن را در دایره‌ای بی‌انحنایی برای زلزله‌های سرعت در محاسبات بررسی کنید.



بسیار

روش اول:



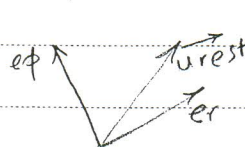
$$\theta = \beta/2, \quad r = 2b \sin \beta/2$$

$$u \perp b$$

$$\hat{e}_\theta \perp \hat{r}$$

در این روش، $\hat{e}_\theta$ و $\hat{e}_r$ را می‌توانیم از روش دیگر به دست آوریم.

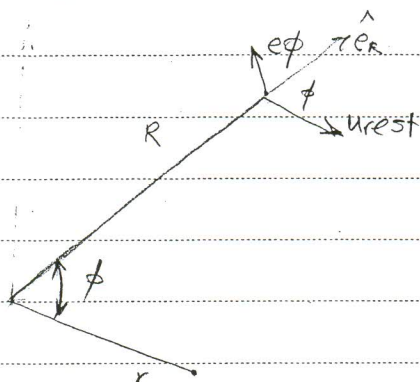
$$v_\theta = u \sin \theta = u \sin \beta/2$$



$$u_{rest} = u \cos \beta/2 = \vec{v}_\phi + \vec{v}_r$$

Subject:

Year. Month. Date. ()

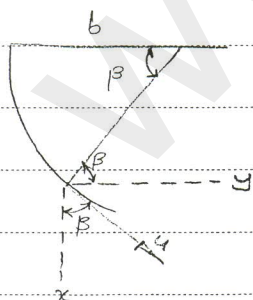


$$\begin{cases} v_R = u_{rest} \cos \phi \\ v_\phi = u_{rest} \sin \phi (-1) \end{cases}$$

$$\sin \phi = \frac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}}, \quad \cos \phi = \frac{r}{\sqrt{r^2 + h^2}} = \frac{2b \sin \beta/2}{\sqrt{4b^2 \sin^2 \beta/2 + h^2}}$$

$$\begin{cases} v_R = (u \cos \beta/2) \times \left(\frac{2b \sin \beta/2}{\sqrt{4b^2 \sin^2 \beta/2 + h^2}} \right) = \frac{ub \sin \beta}{\sqrt{4b^2 \sin^2 \beta/2 + h^2}} \\ v_\phi = \frac{-uh \cos \beta/2}{\sqrt{4b^2 \sin^2 \beta/2 + h^2}} \\ v_\theta = u \sin \beta/2 \end{cases}$$

For angular (transverse) :



$$\begin{cases} v_x = u \cos \beta \\ v_y = u \sin \beta \\ v_z = \dots \end{cases}$$

Subject:

Year. Month. Date. ()

14

$$\begin{bmatrix} V_R \\ V_\theta \\ V_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi \cos\theta & \cos\phi \sin\theta & \sin\phi \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\sin\phi \cos\theta & -\sin\phi \sin\theta & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix}$$

$$\theta = \beta/2, \cos\phi, \sin\phi \text{ are given}$$

$\Rightarrow$

$$V_R = u \cos\beta \cos\phi \cos\theta + u \sin\beta \cos\phi \sin\theta$$

$$V_\theta = -u \cos\beta \sin\theta + u \sin\beta \cos\theta$$

$$V_\phi = -u \cos\beta \sin\phi \cos\theta - u \sin\beta \sin\phi \sin\theta$$

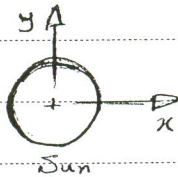
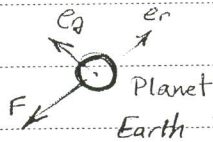
$$\Rightarrow \begin{cases} V_R = \frac{bu \sin\beta}{\sqrt{4b^2 \sin^2 \beta/2 + h^2}} \\ V_\theta = u \sin\beta/2 \\ V_\phi = \frac{-hu \cos\beta/2}{\sqrt{4b^2 \sin^2 \beta/2 + h^2}} \end{cases}$$

Subject:

Year. Month. Date. ()

17

Orbital motion



$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

$$F_r = m a_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

$$F_\theta = m a_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \Rightarrow r^2\dot{\theta} = h = \text{const}$$

$$r = \frac{1}{u} \Rightarrow \dot{r} = -\frac{\dot{u}}{u^2} = -\frac{h u}{\theta} \Rightarrow \ddot{r} = -h^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} \right)$$

$$-Gm_1u^2 = -h^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} - \frac{1}{2} h^2 u^4 \Rightarrow \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{Gm_1}{h^2} \Rightarrow u = \frac{1}{r} = C \cos \theta + \frac{Gm_1}{h^2}$$

$$\left(e = \frac{h^2}{Gm_1}, C = \frac{1}{d} \right) \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{d} \cos \theta + \frac{1}{ed}$$

$e < 1$: elliptical
 $e = 1$: parabolic
 $e > 1$: hyperbolic

$e = 0$: circle

$e < 1$: ellipse

$e = 1$: parabola

$e > 1$: hyperbola

Subject:

Year. Month. Date. ()

19

فصل دوم - سینماتیک اجسام صلب - حرکت نسبی

Translation & Rotation of Rigid Bodies

1-2 انتقال و دوران اجسام صلب

جسم صلب: جسمی که ذرات آن نسبت به هم جای ثابتی داشته باشند.

دو نوع حرکت ساده برای صلب:

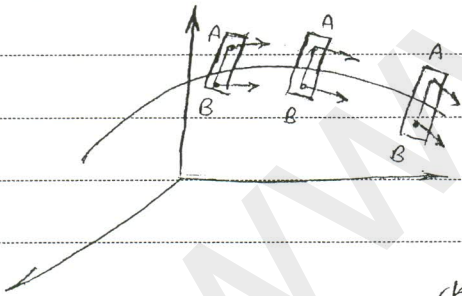
1- حرکت انتقالی: اگر جسم گونه ای حرکت نماید که تمام ذرات آن در زمان t سرعت مشابهی داشته باشند.

(Translation)

2- حرکت چرخشی: اگر جسم گونه ای حرکت نماید که تمام ذرات آن در زمان t دور از یک مرکز داشته باشند.

* بررسی نماید که جسم بر روی خط مستقیم حرکت کند و بررسی نماید که سرعت ثابت حرکت کند.

حرکت انتقالی } حرکت مستقیم الخط
حرکت انتقالی } حرکت منحنی الخط



در حقیقت یک خط فرضی روی جسم، دوران
و تغییر زاویه ندارد.

* اگر دستگاه مرجع دوران کند و جسم نیز با همان شکل
دوران کند، نسبت به این دستگاه حرکت انتقالی دارد.

2- حرکت دورانی: اگر جسم صلب همان حرکت کند که بر روی یک خط مستقیم تمام ذرات با ادایابی هم
دارای سرعت همفرست باشند. مبداء مختصات باشد. آنگاه آن جسم
نسبت به آن مبداء حرکت دورانی داشته و آن خط مستقیم شامل ذرات ثابت
محور دوران است.

Subject:

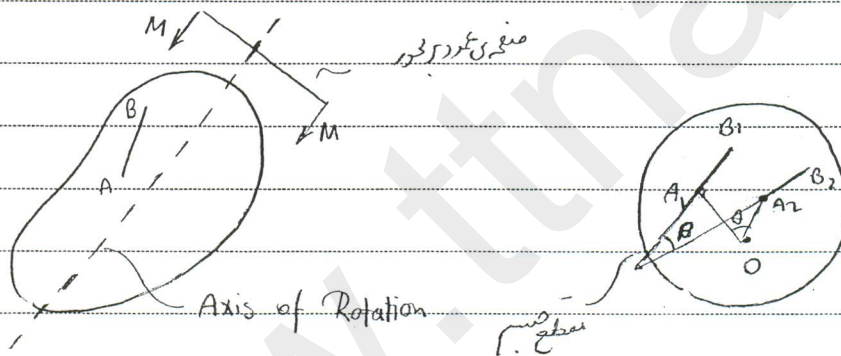
Year. Month. Date. ()

* فاصله‌ی ذرات جسم تا محور دوران همواره ثابت است و ذرات مسیر دایره‌ای را طی می‌کنند.

* اگر در حرکت جسم صلب فاصله‌ی ذرات از یک نقطه‌ی مخصوص تغییر نکند، حرکت دوران حول نقطه بوده که مسیر ذرات روی کره به شعاع فاصله‌ی ذره تا نقطه‌ی ثابت (مرکز دوران) قرار دارد.

دوران کامل

پیش از یک نقطه ممکن اول و دوم فرض می‌کنیم ω داشته باشیم و دوران کامل می‌گردند.



* تعریف زاویه‌ی دوران زاویه‌ی ϕ است یعنی زاویه‌ی بین راستای دو خط دکاری به محور دوران. زاویه‌ی ϕ را زاویه‌ی θ می‌گویند.

$\phi = \text{Partial Rotation}$ (دوران جزئی)

آیا دوران یک بردار است؟

خیر چون از خاصیت جمع برداری تبعیت نمی‌کند (مثلاً پادین را در دو راستای مشخص دوران نکنند)

* ولی اگر دوران کوچک باشد، خاصیت برداری دارد.

مثلاً $\frac{d\phi}{dt}$ یک بردار است چون $d\phi$ دوران کوچکی است.

Subject:

Year. Month. Date. ()

۲۰

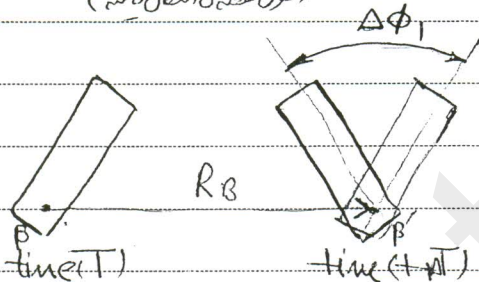
* دوران حول محور در حالت کلی یک بردار است. چرا که علی‌رغم داشتن جهت و اندازه ثابت

تغییر پذیری جمع برداری ندارد. دوران‌های بسیار کوچک $(d\phi)$ یک بردار هستند. و لذا

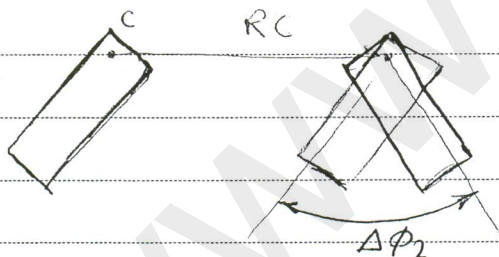
سرعت زاویه‌ای $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\phi}}{dt}$ یک بردار است.

2-2. تئوری شال: (Chasle's Theorem)

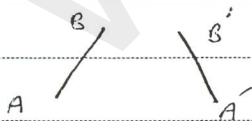
: حرکت عمومی جسم صلب را می‌توان ترکیب دو حرکت انتقالی در دورانی (در نظر گرفت)
(هر نقطه انتقال یافته)



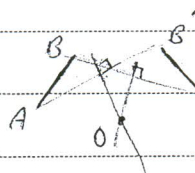
این حرکت یک حرکت انتقالی محض نیست
چون نقطه آن تغییر جهت در زاویه‌ای دهد.



$$\Delta\phi_1 = \Delta\phi_2, R_B \neq R_C$$



آیا می‌توان دو قطار را یک دوران در نظر گرفت؟



بله؟ دلیل:

25. AB و $A'B'$ هم‌راستا نیستند

KING

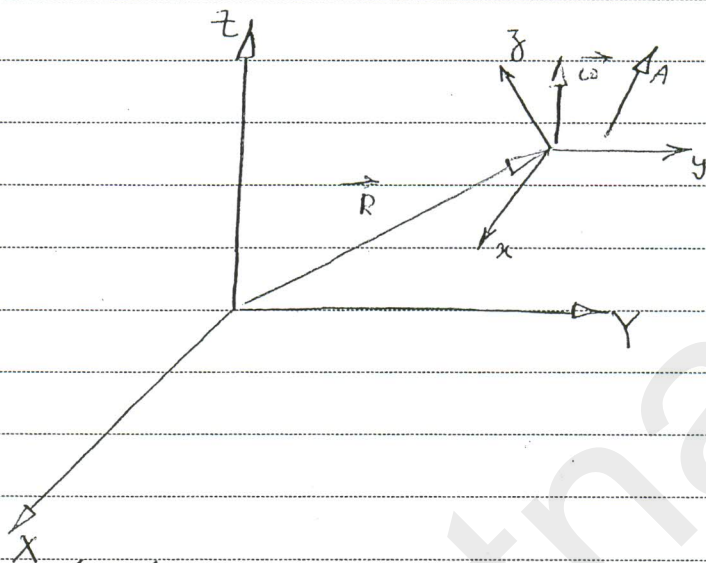
۲۲

Subject:

Year. Month. Date. ()

* حرکت انتقالی محض یک حرکت دورانی است که مرکز دوران در بنیاد است

3-2 مشتق بردار ثابت در دستگاه متحرک:



* طبق قضیه شال حرکت دستگاه xyz از دستگاه XYZ مانند یک حرکت انتقالی یک $(\vec{R})$

حرکت دورانی می نامیم
(شال)

$\vec{A}$ برداری با طول و جهت ثابت در دستگاه xyz

$$\Rightarrow \left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{xyz} = 0, \quad \left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{XYZ} \neq 0 \quad (1)$$

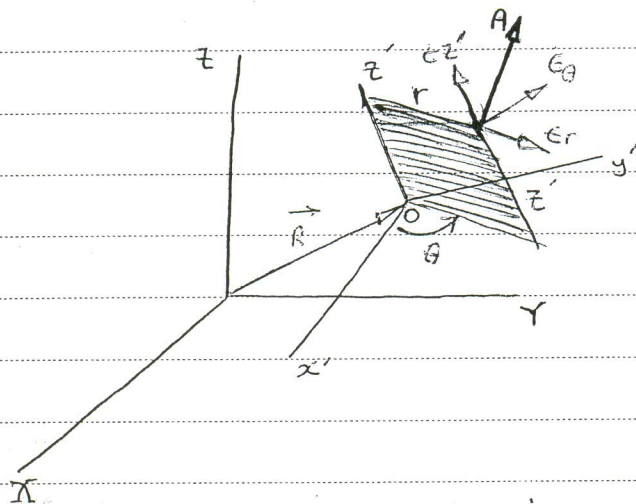
قضیه شال: حرکت دستگاه xyz $\left. \begin{array}{l} 1- \text{حرکت انتقالی } \vec{R} \leftarrow \text{تأخیر در } \left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{XYZ} \text{ ندارد (جهت بردار ثابت)} \\ + \\ 2- \text{حرکت دورانی} \end{array} \right\}$

حال صرفاً حرکت دورانی را زیر نظر گرفته می شود.

Subject:

Year. Month. Date. ()

۲۱



در دستگاه $x'y'z'$ بردار $\vec{A}$ را می‌توان به سه مؤلفه A_r, A_θ, A_z تجزیه کرد.

برای بردار $\vec{A}$ در این لحظه می‌توان نوشت:

$$\vec{A} = A_r \hat{e}_r + A_\theta \hat{e}_\theta + A_z \hat{e}_z \quad (2)$$

اگر $\vec{A}$ در حال حرکت در این لحظه باشد، بردارهای اسکالر A_r, A_θ, A_z در $x'y'z'$ می‌توانند تغییر کنند.

تغییراتی که در بردارهای اسکالر A_r, A_θ, A_z در $x'y'z'$ می‌تواند رخ دهد، به صورت زیر می‌تواند بیان شود:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = A_r \left(\frac{d\hat{e}_r}{dt} \right) + A_\theta \left(\frac{d\hat{e}_\theta}{dt} \right) + A_z \left(\frac{d\hat{e}_z}{dt} \right)$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = A_r \omega \hat{e}_\theta - A_\theta \omega \hat{e}_r \quad (*) \quad (3)$$

$$\vec{\omega} \times \vec{A} = \omega \hat{e}_z \times (A_r \hat{e}_r + A_\theta \hat{e}_\theta + A_z \hat{e}_z)$$

$$= \omega A_r \hat{e}_\theta - \omega A_\theta \hat{e}_r \quad (***) \quad (4)$$

Subject:

Year:

Month:

Date:

$$(*) \Rightarrow \left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{x'y'z'} = \vec{\omega} \times \vec{A}$$

از آن جا که $x'y'z'$ نسبت به XYZ ثابت است.

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{x'y'z'} = \vec{\omega} \times \vec{A} \quad (5)$$

$$\left(\frac{d^2\vec{A}}{dt^2} \right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \right)_{XYZ} \times \vec{A} + \vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{XYZ}$$

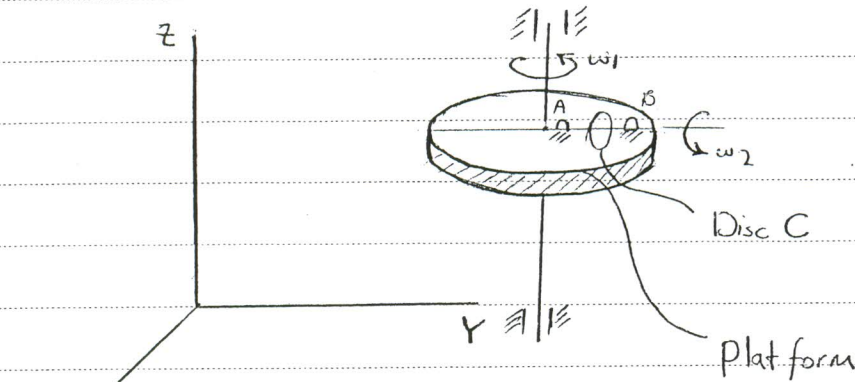
$$\Rightarrow \left(\frac{d^2\vec{A}}{dt^2} \right)_{XYZ} = \vec{\omega} \times \vec{A} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{A}) \quad (6)$$

Subject:

Year. Month. Date. ()

۲۲

شماره:



* رسیدن C روی محور AB قرار گرفته است و با محور با سرعت زاویه‌ای

نسبت $\omega_2 = 10 \text{ rad/s}$ نسبت به Platform حرکت می‌کند. Platform با سرعت $\omega_1 = 5 \text{ rad/s}$ نسبت به زمین

۱) $\vec{\omega} = ?$

۲) $\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{XYZ} = ?$

۳) $\left(\frac{d^2\vec{\omega}}{dt^2}\right)_{XYZ}$

۱) $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = 5\hat{k} + 10\hat{j}$

سرعت دوران مطلق دسک C

نسبت به زمین

۲) $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$
 صفر (حالت و هم‌راستایی)

شعاع بردار ثابت $\vec{\omega}_2$ نسبت به زمین
 که نسبت به دستگاه ثابت با سرعت
 زاویه‌ای $\vec{\omega}_1$ دوران می‌کند

$\Rightarrow \vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2 = 5\hat{k} \times 10\hat{j} = -50\hat{i} \text{ rad/s}$

Subject:

Year. Month. Date. ()

$$\Rightarrow \vec{\omega} = \vec{\omega}_2 = -50\hat{j}$$

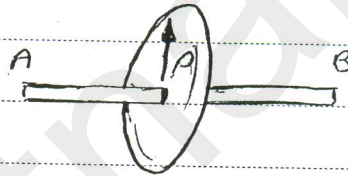
$$3) \vec{\omega} = \vec{\omega}_2 = \underbrace{\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2}_{\text{صفر}} + \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2)$$

$$\left[-\left(\frac{d^2 \vec{A}}{dt^2} \right)_{XYZ} = \vec{\omega} \times \vec{A} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{A}) \right] \text{ همان فرمول}$$

$$= +5\hat{k} \times (5\hat{k} \times 10\hat{j}) = -250\hat{j} \text{ rad/sec}^2$$

Disc C را به یک میله AB از جنس فولاد با طول 100 cm و شعاع 10 cm و مرکز ثقل در نقطه G قرار دهیم.

$$1) \left(\frac{d\rho}{dt} \right)_{XYZ} = ?$$



$$2) \left(\frac{d^2 \rho}{dt^2} \right)_{XYZ} = ?$$

$$1) \vec{\dot{\rho}} = \vec{\omega} \times \vec{\rho} = (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{\rho} = (5\hat{k} + 10\hat{j}) \times 100\hat{k} = 1000\hat{j} \text{ mm/s}$$

$$2) \vec{\ddot{\rho}} = \underbrace{(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2)}_{\text{صفر}} \times \vec{\rho} + \underbrace{(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2)}_{\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2} \times \underbrace{\vec{\rho}}_{(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{\rho}}$$

$$\Rightarrow \vec{\ddot{\rho}} = (5\hat{k} \times 10\hat{j}) \times 100\hat{k} + (5\hat{k} + 10\hat{j}) \times 1000\hat{j}$$

$$\Rightarrow \vec{\ddot{\rho}} = 10\hat{j} - 10\hat{k} \text{ m/s}^2$$

Subject:

Year. Month. Date. ()

برای اسک C $\omega_2 = 6 \text{ rad/s}$ ، $\omega_2 = 2 \text{ rad/s}$ (نسبت) ، $\omega_1 = 2 \text{ rad/s}$ (Platform) در این لحظه

شکل زیر برای اسک نسبت به زمین $\omega_1 = 3 \text{ rad/s}$ ،
 $\omega = ?$

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 \Rightarrow \vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$$

$$* \vec{\omega}_1 = \frac{d}{dt} (\omega_1 \hat{k})_{xyz} = \omega_1 \hat{k} = 3\hat{k}$$

چون طول بردار ω_2 ثابت می باشد نمی توان نوشت: $\vec{\omega}_2 = \omega_2 \hat{k}$
 برای این مشکل بردار $\hat{j}'$ را با اندازه ی واحد platform مقایسه کنیم
 (در جهت محور AB)

$$\Rightarrow \vec{\omega}_2 = \omega_2 \hat{j}'$$

$$\Rightarrow ** \vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_2 \hat{j}' + \dot{\vec{\omega}}_2 \hat{j}' = \omega_2 \hat{j}' + \omega_2 (\vec{\omega}_1 \times \hat{j}')$$

← (بردار ثابت $\hat{j}'$ با سرعت زاویه ای آن در این لحظه)

$$(***) \vec{\omega} = \vec{\omega}_1 \hat{k} + \vec{\omega}_2 \hat{j}' + \omega_2 (\vec{\omega}_1 \times \hat{j}')$$

$$\Rightarrow \vec{\omega} = 3\hat{k} + 2\hat{j}' + 6(2\hat{k} \times \hat{j}') = -12\hat{i} + 2\hat{j}' + 3\hat{k} \text{ rad/s}$$

(در این لحظه $\hat{j}' = \hat{j}$)

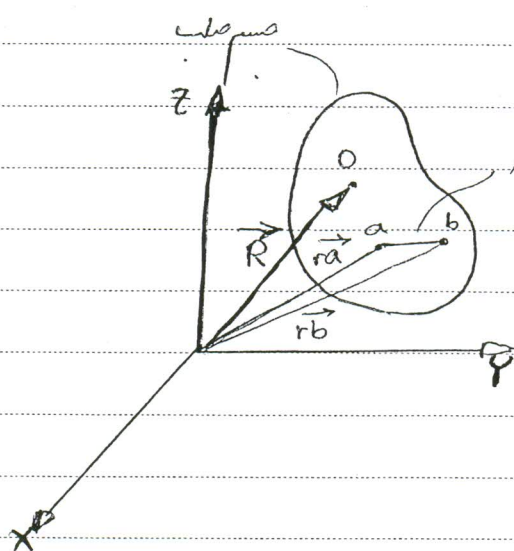
$$\left(\text{می توانیم به } (\vec{\omega}_2)_{xyz} = (\vec{\omega}_2)_{xyz} + \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2 \quad \checkmark \right)$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$2\hat{j} \quad 2\hat{k} \times 6\hat{j}$$

Subject:

Year. Month. Date. ()



2.4: ρ_{ab} (های) نسبت به هم در راست است.

$$\vec{\rho}_{ab} = \vec{\rho}_{ba}$$

a, b دو نقطه ی فرضی از جسم صلب

$$\vec{r}_b = \vec{r}_a + \vec{\rho}_{ab} \quad (7)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\vec{r}_b}{dt} \right)_{xyz} = \left(\frac{d\vec{r}_a}{dt} \right)_{xyz} + \left(\frac{d\vec{\rho}_{ab}}{dt} \right)_{xyz}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_b = \vec{V}_a + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_{ab} \quad (8)$$

* سرعت یک نقطه از جسم صلب را بر سرعت نقطه دیگری از جسم صلب: علاوه بر سرعت زائری از جسم صلب در برداری از نقطه دیگری نقطه دیگری است

$$\Rightarrow \vec{a}_b = \vec{a}_a + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \right)_{xyz} \times \vec{\rho}_{ab} + \vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{\rho}_{ab}}{dt} \right)_{xyz} \quad (9)$$

$$= \vec{a}_a + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_{ab} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_{ab})$$

$$\Rightarrow \vec{a}_b = \vec{a}_a + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_{ab} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_{ab}) \quad (10)$$

نسبت به هم در نقطه از جسم صلب نیز نقطه ای از جسم صلب است چون در نقطه نسبت به هم انتقال ندارند

Subject:

Year. Month. Date. ()

۲۷

تقریباً سری دوم:

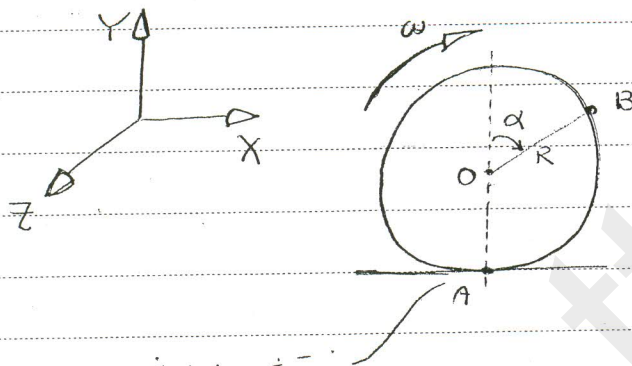
تحوّل

فصل ۱۱ کتاب: 52, 54, 56, 62, 68

سبب: 15, 18, 86

78, 82, 86, 92

امتحان میان ترم I (دو سبب: 14, 18, 86, ساعت ۱۱ تا ۱)
(۱۱, ۱۵: فصول)



مثال: $v_B = ?$

علتش بدون لغزش

— روش اول

$$* \vec{v}_B = \vec{v}_O + \vec{v}_{B/O}$$

$$** \vec{v}_O = \vec{v}_A + \vec{v}_{O/A} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{O/A} = -\omega \hat{k} \times (R \hat{j}) = \omega R \hat{i}$$

معادست چون عکس تاب داریم

$$*** \vec{v}_{B/O} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/O} = -\omega \hat{k} \times (R \sin \alpha \hat{i} + R \cos \alpha \hat{j}) = \omega R \sin \alpha \hat{j} - \omega R \cos \alpha \hat{i}$$

$$*, **, *** \Rightarrow \vec{v}_B = (R\omega + R\omega \cos \alpha) \hat{i} - R\omega \sin \alpha \hat{j}$$

Subject:

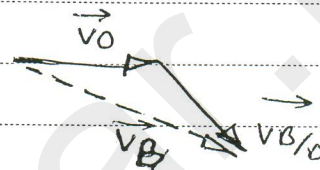
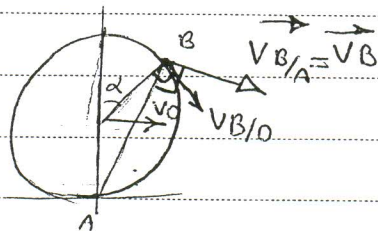
Year. Month. Date. ()

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A}$$

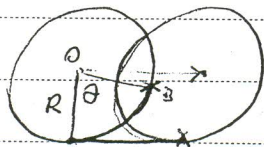
پس از آنکه

$$\vec{V}_{B/A} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_{B/A} = -\omega \hat{k} \times (R \hat{j} + R \cos \alpha \hat{j} + R \sin \alpha \hat{i})$$

$$= (R\omega + R\omega \cos \alpha) \hat{i} - R\omega \sin \alpha \hat{j}$$



پس از آنکه



$$S = R\theta$$

$$\frac{dS}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} = R\dot{\theta} = R\omega$$

$$\downarrow$$

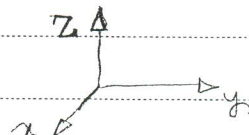
$$V_O = R\omega \Rightarrow a_O = R\dot{\omega} = R\alpha$$

$$a_A = ?$$

$$a_A = a_O + a_{A/O}$$

$$= R\alpha + \omega \times \vec{\rho}_{A/O} + \omega \times (\omega \times \vec{\rho}_{A/O})$$

$$P = A \text{ شتاب نقطه } A$$



$$a_A = a_O + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_{A/O} + \omega \times (\omega \times \vec{\rho}_{A/O}) = R\alpha \hat{j} + -\omega \hat{i} \times -r \hat{k} + -\omega \hat{i} \times (-\omega \hat{i} \times -r \hat{k})$$

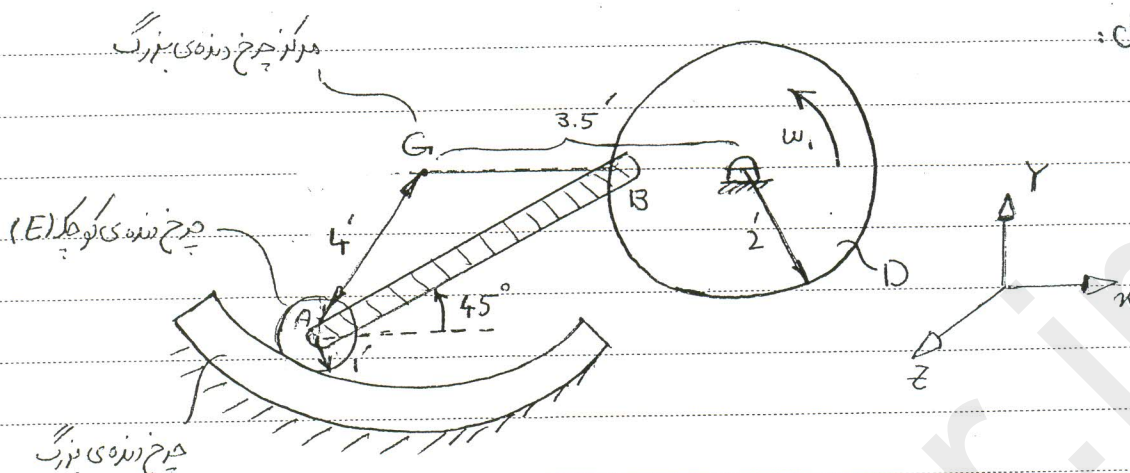
$$= R\alpha \hat{j} + r\omega^2 \hat{k}$$

Subject:

Year. Month. Date. ()

۲۵

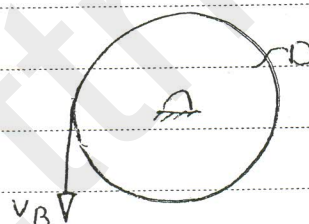
مثال:



$$\omega_1 = 2 \text{ rad/s ccw}$$

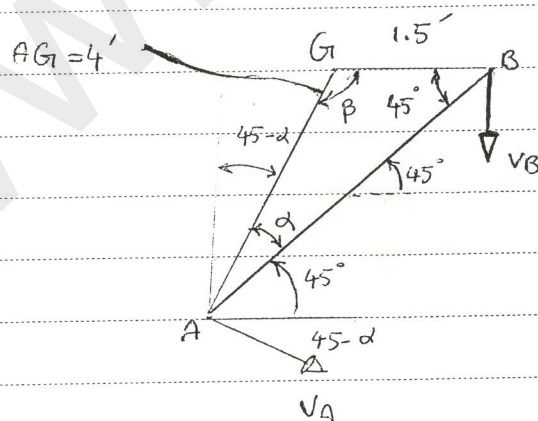
$$\omega_E = ?$$

$$v_B = R\omega = 4 \text{ ft/s}$$



$$\frac{1.5}{\sin \alpha} = \frac{4}{\sin 45^\circ}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 15.37^\circ \\ \beta = 119.6^\circ \\ AB = 4.92' \end{array} \right.$$



$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B} \Rightarrow$$

$$v_A [\cos(45-\alpha)\hat{i} + \sin(45-\alpha)\hat{j}] = -4\hat{j} + \omega_{AB}\hat{k} \times 4.92 [-\cos 45^\circ\hat{i} - \sin 45^\circ\hat{j}]$$

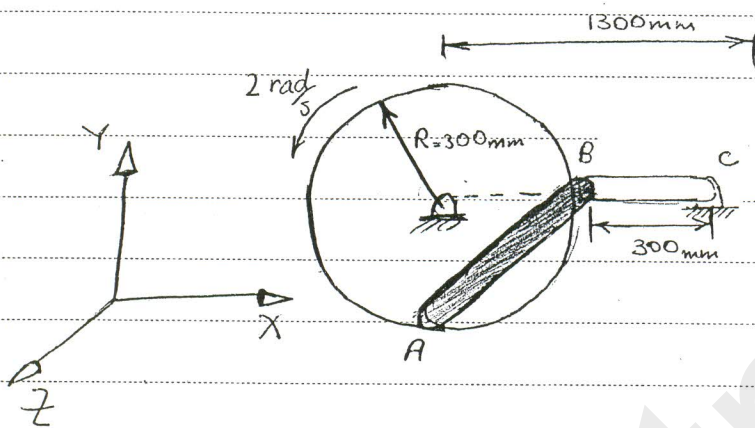
$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_A = -10.66 \text{ ft/s} \\ \omega_{AB} = -2.66 \text{ rad/s} \end{array} \right. \Rightarrow \text{محاسبه جهت و مقدار سرعت}$$

Subject:

Year. Month. Date. ()

$$\omega_E = \frac{V_A}{R_E} = \frac{10.66}{1} \Rightarrow \omega_E = 10.66 \text{ ccw}$$

* مرکز دوران بدنه AB، محل برخورد عمود V_A و V_B یعنی نقطه G است.
خطای



$$\omega_{AB} = ? \quad \text{و}$$

$$\omega_{BC} = ?$$

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A}$$

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \omega_{AB} \times \vec{\rho}_{B/A}$$

$$V_A = 2 \times 0.3 \hat{i} = 0.6 \hat{i}$$

$$\vec{V}_B = \omega_{BC} \hat{k} \times (-0.3 \hat{i}) + \vec{V}_C$$

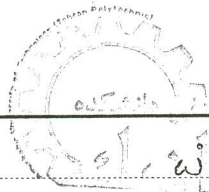
$$\vec{\rho}_{BC} = \vec{\rho}_{B/C} \quad \left(\frac{1300 - 300}{1000} \right)$$

$$\Rightarrow \underbrace{-0.3\omega_{BC}\hat{j}}_{\vec{V}_B} = \underbrace{0.6\hat{i}}_{\vec{V}_A} + \underbrace{\omega_{AB}\hat{k} \times (\hat{i} + 0.3\hat{j})}_{\omega_{AB} \times \vec{\rho}_{B/A}}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{دو نقطه برخورد} \\ \text{انفرد و عمود} \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega_{AB} = 2 \text{ rad/s ccw} \\ \omega_{BC} = -6.67 \text{ rad/s cw} \end{array} \right.$$

Subject:

Year. Month. Date. ()



۲۴

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$$

مثال: مثال قبل $\omega_{AB} = ?$

$\omega_{BC} = ?$

$$\vec{a}_A = r\omega^2 \hat{j} = 0.3 \times 2^2 \hat{j} = 1.2 \hat{j} \text{ m/s}^2 \quad (\text{اگر با شیب } rd \text{ جهت مثبت باشد})$$

$$\vec{a}_B = \vec{\omega}_{BC} \times \vec{\rho}_{B/C} + \vec{\omega}_{BC} \times (\vec{\omega}_{BC} \times \vec{\rho}_{B/C})$$

$$= -0.3 \omega_{BC} \hat{j} + 0.3 (0.67)^2 \hat{i} = \underbrace{-0.3 \omega_{BC} \hat{j}}_{rd} + \underbrace{13.33 \hat{i}}_{r\omega^2}$$

$$\vec{a}_{B/A} = \vec{\omega}_{AB} \times \vec{\rho}_{B/A} + \vec{\omega}_{AB} \times (\vec{\omega}_{AB} \times \vec{\rho}_{B/A})$$

$$= \omega_{AB} \hat{k} \times (\hat{i} + 0.3 \hat{j}) + 2 \hat{k} \times (2 \hat{k} \times (\hat{i} + 0.3 \hat{j}))$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \omega_{AB} = -57 \text{ rad/s}^2 \text{ CCW} \\ \omega_{BC} = 192.6 \text{ rad/s}^2 \text{ CCW} \end{cases}$$

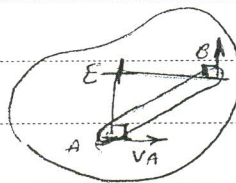
AB: در محاسبه در محمول
BC:

مثال: محور دوران: نقطه ای مابین A و B است؟

مقاطع محور دوران با امتداد فرضی صم AB، نقطه E در نظریه بریم

$$\vec{v}_E = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{AB} \times \vec{\rho}_{A/E}$$

(نقطه صم صم) ω_{AE}



در محاسبه در محمول: نقطه E حاصل می شود

۲۱

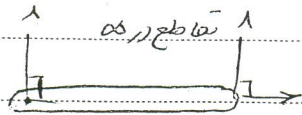
راه بدست آوردن مرکز دوران:

از محاسبه معلوم می شود $\vec{v}_A$ بر $\vec{\omega}_{AB} \times \vec{\rho}_{A/B}$ عمود است و همین طور در مورد $\vec{v}_B$ پس $\vec{P}_{BE}$ و $\vec{P}_{AE}$

ترتیب بر $\vec{v}_A$ و $\vec{v}_B$ عمود پس محل برخورد $\vec{v}_A$ و عمود بر $\vec{v}_B$ مرکز دوران می شود

Subject:

Year. Month. Date. ()



این عمل انتقال محض را در دو مرکز دوران به خواص

برسد. (انتقال محض دورانی با شتاب مساوی است)

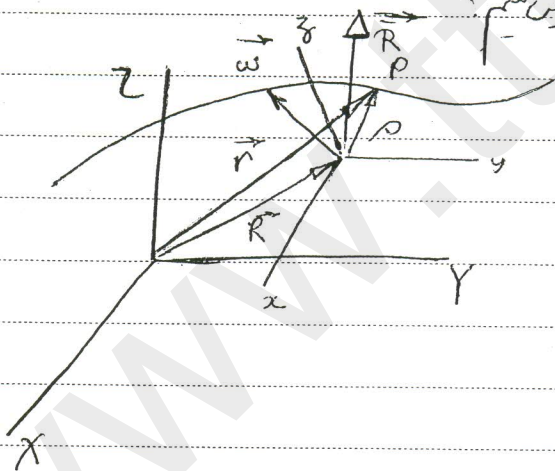
5.2- رابطه عمومی بین مشتق برداری یک بردار برای مبدأهای مختلف:

$\vec{A}$ در دستگاه متحرک xyz یک بردار ثابت باشد.

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{xyz} = 0$$

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{XYZ} = \vec{\omega} \times \vec{A}$$

طول بردار $\vec{A}$ را غیر ثابت فرض کنیم.



P نقطه متحرک

قضیه شل: حرکت دستگاه $xyz \leftarrow$ حرکت انتقالی $\vec{R}$ + حرکت دورانی $\vec{\omega}$

$$\vec{\rho} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad (11)$$

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ بردارهای یکای xyz باشد.

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{xyz} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k} \quad (12)$$

$$\downarrow$$

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{xyz}$$

Subject:

Year. Month. Date. ()

27

$$\left(\frac{d\vec{\rho}}{dt}\right)_{XYZ} = (\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}) + (\omega\hat{i} + \omega\hat{j} + \omega\hat{k}) \quad (13)$$

$$\vec{\omega} \times \hat{i} \quad \vec{\omega} \times \hat{j} \quad \vec{\omega} \times \hat{k} \quad (14)$$

$$\dot{x} = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{xyz} \quad (15) \quad \text{به دلیل کار بودن } \vec{x}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\vec{\rho}}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{\rho}}{dt}\right)_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{\rho} \quad (16)$$

افزایش طول برابر
از دید ناظر که در میانه
است xyz

اگر $\vec{\rho}$ در آن نباشد باشد
خلاف می شود
 ω در رابطه
است xyz

2-6- رابطه بین سرعت در دو دستگاه مختصات

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{\rho} \quad (17)$$

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_{XYZ} + \left(\frac{d\vec{\rho}}{dt}\right)_{XYZ} \quad (18)$$

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{XYZ} = \vec{R} + \left(\frac{d\vec{\rho}}{dt}\right)_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{\rho} \quad (20)$$

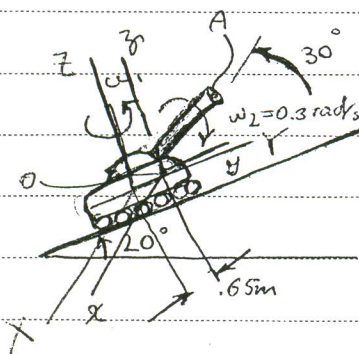
سرعت انتقال دستگاه xyz
نسبت به XYZ
سرعت نقطه P
نسبت به XYZ
سرعت نقطه P
نسبت به xyz
سرعت در دستگاه xyz

$$\vec{v}_b = \vec{v}_a + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_{ba} \quad (\text{رابطه سرعت 2 نقطه})$$

P4PCO

Subject:

Year. Month. Date. ()



مثال: یک تانک روی سطح شیب دار با سرعت 10 km/h حرکت میکند.

برگشتاند با سرعت زاویه ای $\omega_1 = 2 \text{ rad/s}$ نسبت به تانک در حال دوران است.

لوله ای تانک نسبت به برگشت با سرعت زاویه ای $\omega_2 = 0.3 \text{ rad/s}$ می چرخد.

باین در حال حرکت است. اگر طول لوله ای تانک 3 m باشد.

سرعت نقطه A از لوله ای تانک چقدر است؟

انتخاب دستگاه های مختصات، سیار هم است.

XYZ متصل به تانک (در هرگز ثابت).

$$(\vec{V}_A)_{XYZ} = (\vec{V}_A)_{xyz} + \vec{R} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$$

xyz متصل به برگشت.

$$(\vec{V}_A)_{xyz} = \vec{\omega}_2 \times \vec{\rho} = -0.3 \hat{i} \times (3 \cos 30^\circ \hat{j} + 3 \sin 30^\circ \hat{k})$$

$$= -0.78 \hat{k} + 0.45 \hat{j} \text{ m/s}$$

$$\vec{R} = \vec{\omega}_1 \times 0.65 \hat{j} = 2 \hat{k} \times 0.65 \hat{j} = -1.3 \hat{i} \text{ m/s}$$

$$\vec{\omega} \times \vec{\rho} = \vec{\omega}_1 \times (3 \cos 30^\circ \hat{j} + 3 \sin 30^\circ \hat{k}) = -3\sqrt{3} \hat{i}$$

برای xyz نسبت به XYZ .

Subject:

Year. Month. Date. ()

۲۸

$$\Rightarrow \vec{V}_{xyz} = \vec{V}_{xyz} + \vec{R} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_{xyz} = -6.5\hat{i} + 0.45\hat{j} - 0.78\hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_{Ground} = \vec{V}_{xyz} + \left(10 \times \frac{1000}{3600}\right)\hat{j} = -6.5\hat{i} + 3.23\hat{j} - 0.78\hat{k}$$

b.

$$(\vec{V}_A)_{Ground} = (\vec{V}_O)_{Ground} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_{OA}$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$\left(10 \times \frac{1000}{3600}\right)\hat{j} + \vec{\omega}_1 \times 0.65 \quad (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{OA}$$

برای دایره

که

۱۵ درجه بر ثانیه

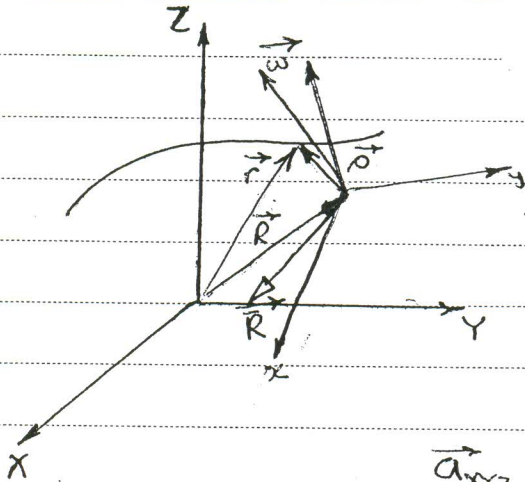
۱۶	۱۰	۵۶	۳۰	۵ : ۳۶ : ۸
۲۴	۱۲	۶۴	۲۸	
	۱۴	۶۸	۴۶	

Subject:

Year. Month. Date. ()

11-821

2.7 حساب دیر، در مختصات متغیر:



$$\vec{a}_{xyz} = \left(\frac{d\vec{v}_{xyz}}{dt} \right)_{xyz} = \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right)_{xyz} \quad (21)$$

$$\vec{a}_{xyz} = \left(\frac{d\vec{v}_{xyz}}{dt} \right)_{xyz} = \left(\frac{d^2\vec{\rho}}{dt^2} \right)_{xyz}$$

از رابطه (20) مشتق گرفته می شود:

$$\left(\frac{d\vec{v}_{xyz}}{dt} \right)_{xyz} = \vec{a}_{xyz} = \left(\frac{d\vec{v}_{xyz}}{dt} \right)_{xyz} + \vec{R} + \left[\frac{d}{dt} \vec{\omega} \times \vec{\rho} \right]_{xyz} \quad (22)$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{xyz} = \left(\frac{d\vec{v}_{xyz}}{dt} \right)_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{xyz} + \vec{R} + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \right)_{xyz} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{\rho}}{dt} \right)_{xyz}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{xyz} = \vec{a}_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{xyz} + \vec{R} + \vec{\omega} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \left[\left(\frac{d\vec{\rho}}{dt} \right)_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{\rho} \right] \quad (23)$$

(توجه داشته باشید!)

$$\Rightarrow \vec{a}_{xyz} = \vec{a}_{xyz} + \vec{R} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) \quad (24)$$

$\vec{a}_{xyz}$ - شتاب مرکز جرم
 $\vec{\omega} \times \vec{v}_{xyz}$ - شتاب کوریولیس
 $\vec{\omega} \times \vec{\rho}$ - شتاب دایره ای
 $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})$ - شتاب از تغییر جهت

Subject:

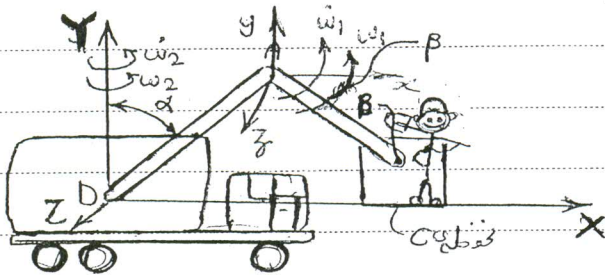
Year. Month. Date. ()

۲۹

* شتاب هرکس در اثر سرعت زره در دستگاه xyz و دوران دستگاه xyz اجباری شود

تعدادی $\vec{a}_{xyz}$ و $2\vec{\omega} \times \vec{r}_{xyz}$ دلیل تغییر $\vec{a}$ است.

$\vec{a}_{xyz}$ را از طریق حرکت زره در دستگاه استوانه‌ای بررسی، دگارتی را کامپیو می‌کنیم.



مثال:

$$\begin{cases} \alpha = 45^\circ \\ \beta = 30^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} AD = 13 \text{ m} \\ AB = 3 \text{ m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_2 = 0.1 \text{ rad/s} \\ \dot{\omega}_2 = 0.2 \text{ rad/s}^2 \end{cases} \quad (\text{نسبت به کامیون})$$

$$\begin{cases} \omega_1 = 0.2 \text{ rad/s} \\ \dot{\omega}_1 = 0.8 \text{ rad/s}^2 \end{cases} \quad (\text{نسبت به AD})$$

* شرایط فراهم است که محضری C هوا را قائم باقی بماند.

سرعت رشتاب worker نسبت به زمین؟

XYZ متصل به کامیون
کافی است که سرعت رشتاب نقطه‌ای B را تعیین کنیم.
AD متصل به محله‌ای
چون محضری C هوا را عمودی است.
در وقت کنیم که به هم دارند به یک‌های هندا

الف) حرکت نقطه‌ای B نسبت به xyz : $\vec{a} = 3(\cos \beta \hat{i} - \sin \beta \hat{j}) =$

$$2.6 \hat{i} - 1.5 \hat{j} \text{ m}$$

(رابطه جسم صلب AB) $\vec{v}_{xyz} = \vec{\omega}_1 \times \vec{r} = 0.2 \hat{k} \times (\vec{r})$

Subject:

Year. Month. Date. ()

$$\Rightarrow \vec{V}_{xyz} = 0.52 \hat{j} + 0.31 \hat{i} \text{ m/s}$$

$$a_{xyz} = \vec{\omega}_1 \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_1 \times \vec{V}_{xyz} \quad (\text{A.B. قسم صلب})$$

$$= 0.8 \hat{k} \times \hat{\rho} + 0.2 \hat{k} \times \vec{V}_{xyz} = 1.09 \hat{i} + 2.14 \hat{j}$$

ب - $\vec{\omega}_2$ نسبت XYZ :

$$\begin{cases} \vec{R} = 13(\sin 45^\circ \hat{i} + \cos 45^\circ \hat{j}) = 9.19 \hat{i} + 9.19 \hat{j} \text{ m} \\ \vec{R} = \vec{\omega}_2 \times \vec{R} = -0.919 \hat{k} \text{ m/s} \\ \vec{R} = \vec{\omega}_2 \times \vec{R} + \vec{\omega}_2 \times \vec{R} = -1.838 \hat{k} - 0.0919 \hat{i} \end{cases}$$

$$\vec{V}_{XYZ} = \vec{V}_{xyz} + \vec{R} + \vec{\omega} \times \vec{\rho} = 0.31 \hat{i} + 0.520 \hat{j} - 1.719 \hat{k}$$

$$\vec{a}_{XYZ} = \vec{a}_{xyz} + \vec{R} + 2 \vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})$$

تقریباً 7

74 83 104 14.2

77 86 110 14.6 15.4

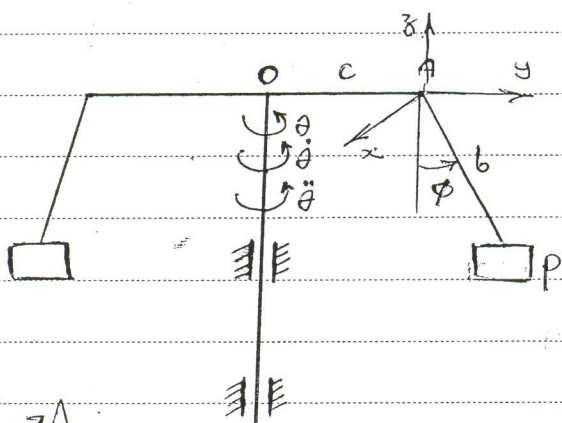
82 102 117

1386 18, 14 : $\vec{\omega}_2$

Subject:

Year. Month. Date. ()

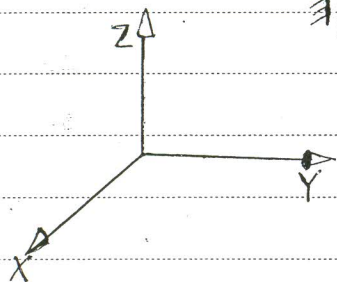
۳۴



$a_p = ?$

مثال:

if $\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow a_p = ?$



اولش اول:

رابطه چرخش در نقطه A، سببی OA متصلی گردد
به طوری که محور چرخش موازی محور Z باشد

$$(\vec{a}_p)_{xyz} = (\vec{a}_p)_{xyz} + \vec{R} + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{\rho}$$

$$\vec{\ddot{\theta}} \times \vec{\rho} + \vec{\dot{\theta}} \times (\vec{\dot{\theta}} \times \vec{\rho})$$

$$(\vec{a}_p)_{xyz} = b\ddot{\theta} \sin \phi \hat{k} + b\dot{\theta}^2 \cos \phi \hat{k} + b\ddot{\theta} \cos \phi \hat{j} - b\dot{\theta}^2 \sin \phi \hat{j}$$

$$\vec{R} = \ddot{\theta} \hat{k} \times c \hat{j} + \dot{\theta} \hat{k} \times (\dot{\theta} \hat{k} \times c \hat{j}) = -\ddot{\theta} c \hat{i} - c \dot{\theta}^2 \hat{j}$$

$$2\vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz} = 2\dot{\theta} \hat{k} \times (b\dot{\theta} \sin \phi \hat{k} + b\dot{\theta} \cos \phi \hat{j})$$

$$\vec{\omega} \times \vec{\rho} = \dot{\theta} \hat{k} \times (b \sin \phi \hat{j} - b \cos \phi \hat{k})$$

$$\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \dot{\theta} \hat{k} \times (\dot{\theta} \hat{k} \times (b \sin \phi \hat{j} - b \cos \phi \hat{k}))$$

Subject :

Year .

Month .

Date .

$$\begin{aligned}\vec{a}_P &= (-c\ddot{\theta} - b\ddot{\theta}\sin\phi - 2b\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\phi)\hat{i} \\ &+ (-c\dot{\theta}^2 + b\ddot{\phi}\cos\phi - b\dot{\phi}^2\sin\phi - b\dot{\theta}^2\sin\phi)\hat{j} \\ &+ (b\ddot{\phi}\sin\phi + b\dot{\phi}^2\cos\phi)\hat{k}\end{aligned}$$

$$\text{if } \ddot{\theta}=0 \Rightarrow \dot{\phi}=\ddot{\phi}=0 \Rightarrow |\vec{a}_P| = \dot{\theta}^2(c+b\sin\phi)$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_A + \vec{a}_{P/A}$$

سرعت و شتاب

$$\vec{a}_A = \vec{R} \cdot \vec{\omega} \times \vec{\omega} = \ddot{\theta}\hat{k} \times c\hat{j} + \dot{\theta}\hat{k} \times (\dot{\theta}\hat{k} \times c\hat{j}) = -c\dot{\theta}^2\hat{j} - c\ddot{\theta}\hat{i}$$

$$\vec{a}_{P/A} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{AP} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}_{AP}$$

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{k} + \dot{\phi}\hat{i}$$

سرعت در این قسم طلب می آید

$$\vec{\omega} = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{XYZ} = \ddot{\theta}\hat{k} + \ddot{\phi}\hat{i} + \dot{\phi}\left(\frac{d\hat{i}}{dt}\right)_{XYZ}$$

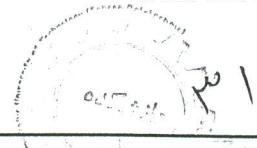
$$= \ddot{\theta}\hat{k} + \ddot{\phi}\hat{i} + \dot{\phi}(\dot{\theta}\hat{k} \times \hat{i}) = \ddot{\theta}\hat{k} + \ddot{\phi}\hat{i} + \dot{\phi}\dot{\theta}\hat{j}$$

$$\vec{\omega} = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{xyz} + \vec{\omega}_{xyz} \times \vec{\omega} \quad : \vec{\omega} \text{ در این قسم طلب می آید}$$

$$= (\ddot{\phi}\hat{k} + \ddot{\theta}\hat{k}) + \dot{\theta}\hat{k} \times (\dot{\theta}\hat{k} + \dot{\phi}\hat{k}) = \ddot{\phi}\hat{i} + \ddot{\theta}\hat{k} + \dot{\theta}\dot{\phi}\hat{j}$$

Subject:

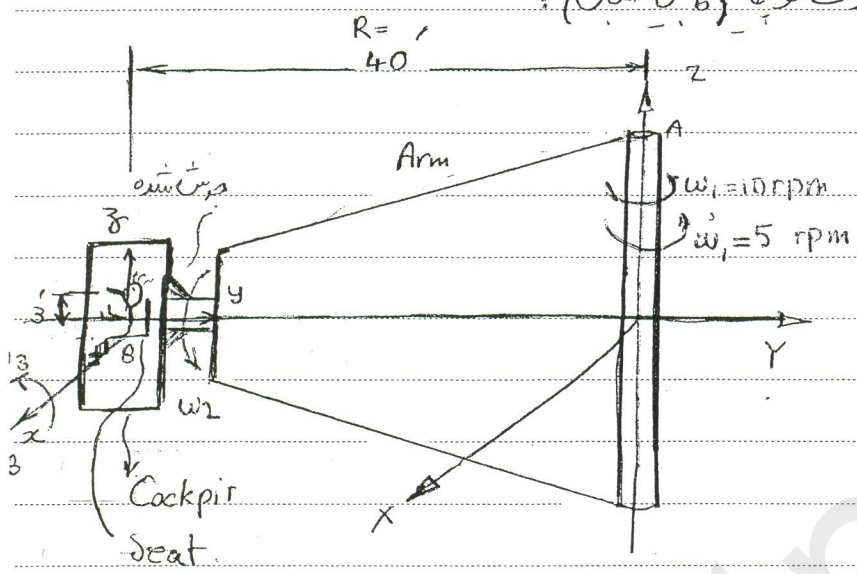
Year. Month. Date. ()



مثال ۱

دستگاه شبیه ساز حرکت هواپیما (کابین خلبان):

شتاب وارده بر سرنشین؟



$$\omega_1 = 10 \text{ rpm}$$

$$\omega_3 = 5 \text{ rpm}$$

$$\omega_1 = 5 \text{ rpm}$$

$$\omega_2 = 10 \text{ rpm}$$

$$\Rightarrow \omega_1 = \omega_2 = 10 \text{ rpm} = 1.048 \text{ rad/s}$$

$$\omega_1 = 0.00873 \text{ rad/s}^2$$

$$\omega_3 = 0.52 \text{ rad/s}$$

ω_1 نسبت به زمین

ω_2 نسبت به بازو

ω_3 نسبت به محورها A

راه حل اول: $\{XYZ\}$ متحرک زمین

$\{xyz\}$ متحرک بازو و محل سرنشین

الف) حرکت زاویه نسبت به $\{xyz\}$

$$\rho = 3 \text{ k}$$

$$\vec{v}_{xyz} = (\vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3) \times \rho$$

$$a_{XYZ} = a_{xyz} + \vec{R} + \vec{\omega} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{xyz}$$

Subject:

Year. Month. Date. ()

$$\vec{a}_{xyz} = \left(\frac{dV_{xyz}}{dt} \right)_{xyz} = \frac{d}{dt} (\vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3) \times \vec{\rho} + (\vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3) \left(\frac{d\vec{\rho}}{dt} \right)_{xyz}$$

$$= \left(\frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \right)_{xyz} \times \vec{\rho} + \left(\frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \right)_{xyz} \times \vec{\rho} + (\vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3) \times \vec{V}_{xyz}$$

(ω₂ × ω₃)

در این رابطه، $\vec{V}_{xyz}$ سرعت نسبی است.

اصولاً $\vec{\omega}_2$ و $\vec{\omega}_3$

در جهت XYZ و xyz می‌باشد.

$$\vec{R} = \vec{\omega}_1 \times \vec{R}$$

$$\vec{R} = \vec{\omega}_1 \times \vec{R} + \vec{\omega}_2 \times \vec{R}$$

(ω₁ × R)

$$\vec{\omega} \times \vec{\rho} = \vec{\omega}_1 \times \vec{\rho} \quad \text{و} \quad \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{\rho})$$

3K

$$2\vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz} = 2\vec{\omega}_1 \times \vec{V}_{xyz} \Rightarrow \vec{a}_{XYZ}$$

در جهت XYZ است.

اصولاً XYZ و xyz در جهت XYZ و xyz می‌باشد.

$$\vec{V}_{xyz} = \vec{\omega}_3 \times \vec{\rho}$$

الف) در جهت xyz می‌باشد.
(این رابطه نیز برای $\vec{\omega}_2$ و $\vec{\omega}_1$ می‌باشد)

$$\vec{a}_{xyz} = \left(\frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \right)_{xyz} \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_3 \times \vec{V}_{xyz}$$

صفر چون $\vec{\omega}_3$ همراه با محورها

در جهت xyz می‌باشد.

تایید دارد.

Subject _____

Date _____

۳۲

ب - حرکت XYZ

$$\dot{\vec{R}} = \vec{\omega}_1 \times \vec{R}$$

نسبت به XYZ:

$$\ddot{\vec{R}} = \dot{\vec{\omega}}_1 \times \vec{R} + \vec{\omega}_1 \times \dot{\vec{R}}$$

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{\omega}} = \dot{\vec{\omega}}_1 + \dot{\vec{\omega}}_2 = \dot{\vec{\omega}}_1 + \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2$$

$$\vec{\omega} \times \vec{\rho} = [\vec{\omega}_1 + (\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2)] \times \vec{\rho}$$

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) = (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{\rho}$$

$$2 \vec{\omega} \times \vec{V}_{xyz} = 2 (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{V}_{xyz}$$

راه حل سوم: { XYZ متصل به زمین
xyz متصل به میله

الف - حرکت زره نسبت به جزیخ:

$$\vec{V}_{xyz} = 0$$

$$\vec{a}_{xyz} = 0$$

ب - حرکت جزیخ نسبت به XYZ:

$$\vec{R}_1, \vec{R}, \ddot{\vec{R}} \quad \text{مشابه قبل}$$

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3$$

$$\dot{\vec{\omega}} = \dot{\vec{\omega}}_1 + \dot{\vec{\omega}}_2 + \dot{\vec{\omega}}_3 = \dot{\vec{\omega}}_1 + \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2 + (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{\omega}_3$$

* شتاب اگر در بیسی در سه حالت متفاوت شد (در روش سوم) ۱۰ چون به دستگاه بستگی دارد

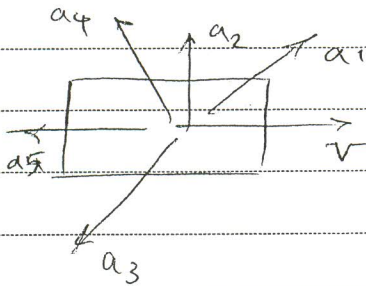
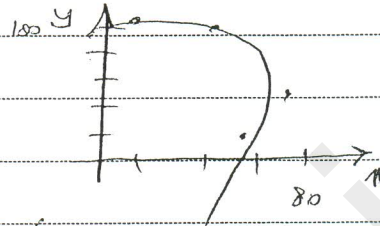
Subject:

Year. Month. Date. ()

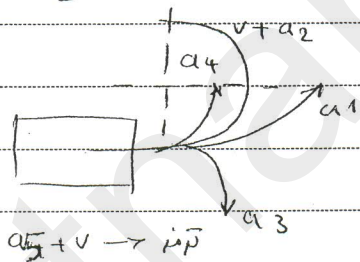
موضوع: دینامیک و حرکت نسبی

برای حرکت ذره از نقطه کناری:

t	0	1	2	3	4	5
x	0	42	68	78	72	50
y	100	96	84	64	36	0



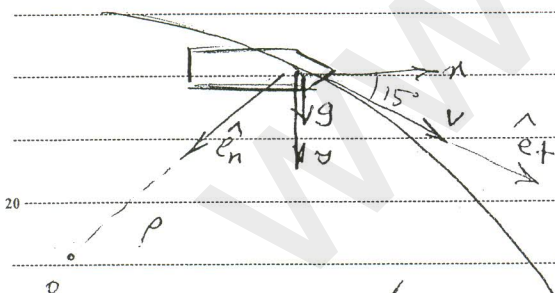
مثال ۱: دو جسمی که از بالا آن را می ریزند



مثال ۲: یک راکت در حال حرکت به سمت راست با سرعتی برابر با ۲۰ ft/sec

۱۵: یک گلوله شتاب رو به پایین ناشی از گرانش را ۳۰ ft/sec² در آن لحظه حرکت راکت را این

زاویه ۱۵° به سمت درونی انداخته شد ۱۲۰۰۰ است

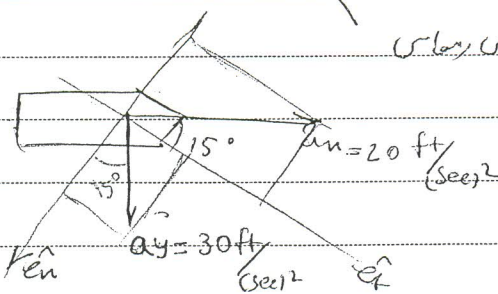


الف) شعاع حرکت نسبی

ب) نرخ افزایش سرعت

ج) نرخ دوران نقطه شتاب مرکز دوران

د) شتاب کلی جسم و مختصات عکس ریاضی



KING

Subject:

Year. Month. Date. ()

$$a_t = 30 \sin 15^\circ + 20 \cos 15^\circ = 27.1 \text{ ft/sec}^2$$

$$a_n = 30 \cos 15^\circ - 20 \sin 15^\circ = 23.8 \text{ ft/sec}^2 \quad (1)$$

$$V = 12,000 \frac{\text{mi}}{\text{hr}} \times 5280 \frac{\text{ft}}{\text{mi}} \times \frac{1}{3600} \frac{\text{hr}}{\text{sec}}$$

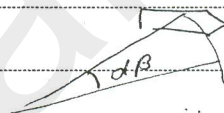
$$\Rightarrow V = 17600 \frac{\text{ft}}{\text{sec}}$$

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{V^2}{a_n} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \rho = 13.07 \times 10^6 \text{ ft}$$

$$\dot{\theta}_f = a_t = 27.1 \frac{\text{ft}}{\text{sec}}$$

نقطه ای که در آن سرعت



در آن نقطه

$$d\theta = \frac{ds}{R} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{ds}{dt R}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \frac{V}{R} = \frac{V}{\rho}$$

$$\dot{\theta} = \frac{V}{\rho} = \frac{17600}{13.07 \times 10^6} = 1.35 \times 10^{-3} \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

نرخ دوران

Subject:

Year. Month. Date. ()

۳۶

فصل سوم - دینامیک (سینتیک) ذره

3-1. قانون نیوتون - مختصات کارتزین

$$\begin{cases} F_x = ma_x = m \frac{dv_x}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2} \\ F_y = ma_y = m \frac{dv_y}{dt} = m \frac{d^2y}{dt^2} \\ F_z = ma_z = m \frac{dv_z}{dt} = m \frac{d^2z}{dt^2} \end{cases} \quad (1)$$

3-2. حرکت انتهای مستقیم الخط:

$\vec{F}$ می تواند ثابت، تابع زمان، تابع سرعت، تابع موقعیت، یا ترکیب موارد فوق باشد.

- نیرو ثابت یا تابع زمان:

$$F = m \frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F(t)}{m} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = v = \int \frac{F(t)}{m} dt + C_1 \quad (3)$$

$$\Rightarrow x(t) = \int \left[\int \frac{F(t)}{m} dt \right] dt + C_1 t + C_2 \quad (4)$$

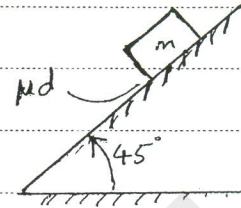
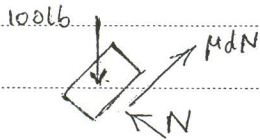
$$t=0 \Rightarrow \begin{cases} x=x_0 \\ v=v_0 \end{cases} \Rightarrow C_1, C_2 \checkmark$$

Subject:

Year: Month: Date: ()

$\mu_d = 0.5$, $W = 100 \text{ lb}$

@ $v = 40 \text{ ft/sec}$, $s = ?$



$100 \cos 45^\circ = N \Rightarrow N = 70.7 \text{ lb}$

$\frac{100}{g} \frac{d^2 s}{dt^2} = 100 \sin 45^\circ - \mu_d N \Rightarrow \frac{d^2 s}{dt^2} = 11.38$

$\Rightarrow \frac{ds}{dt} = 11.38t + C_1$

$s = \frac{11.38}{2} t^2 + C_1 t + C_2$

$t=0 \Rightarrow s = \frac{ds}{dt} = 0$

$\Rightarrow C_1 = C_2 = 0$

$\Rightarrow v = 11.38t \Rightarrow 40 = 11.38t \Rightarrow t = 3.51 \text{ s}$

$\Rightarrow s = \frac{11.38}{2} (3.51)^2 = 70.4 \text{ ft}$

$F(v) = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{F(v)} = \frac{dt}{m}$

$\Rightarrow \int \frac{dv}{F(v)} = \int \frac{dt}{m}$

$\Rightarrow \int \frac{dv}{F(v)} = \frac{t}{m} + C_1 \quad (6)$

$\Rightarrow v = H(t) C_1 \Rightarrow x = \int H(t) C_1 dt + C_2 \quad (7)$

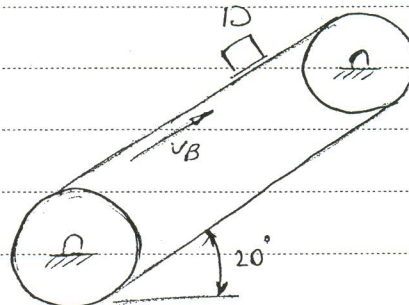
Subject:

Year. Month. Date. ()

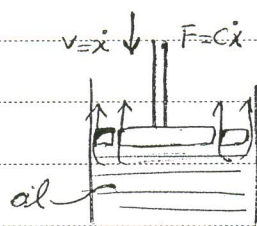
۳۵

$$W_D = (5 \text{ lb})$$

نیروی اصطکاک ۰.۱ lb. در واحد سرعت نسبی
بین D و سیم



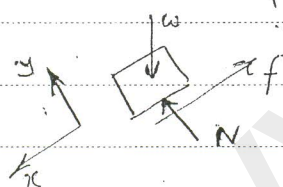
مثال



Cx : damper: نیروی تابع سرعت
 Cx^2 : Aero-drag: نیروی تابع سرعت

الف- D نسبت به زمین حرکت نکند. $v_B = ?$

ب- زمانی که هم از سرعت ۲ ft/s و ۱ ft/s



$$\vec{v}_D = \vec{v}_B + \vec{v}_{D/B} \Rightarrow \vec{v}_{D/B} = (\vec{v}_D + \vec{v}_B) \cdot \hat{T}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$v_{Di} \quad -v_{Bi} \quad ?$$

$$\frac{5}{9} \frac{dv_D}{dt} = -0.1(v_B + v_D) + 5 \sin 20^\circ$$

$$\Rightarrow v_D = \frac{dv_D}{dt} = 0 \Rightarrow -0.1(v_B + v_D) + 5 \sin 20^\circ = 0$$

$$\Rightarrow 0.1(v_B + 0) = 5 \sin 20^\circ \Rightarrow v_B = 17.1 \text{ ft/sec}$$

$$\frac{5}{9} \left(\frac{dv_D}{dt} \right) = -0.1(v_D + 17.1) + 5 \sin 20^\circ \Rightarrow \ln v_D = \frac{-3.22}{5} t + C_1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t=0 \\ v_D=2 \end{array} \right. \Rightarrow C_1 = \ln 2 \Rightarrow \ln \left(\frac{v_D}{2} \right) = -0.644 t$$

next page

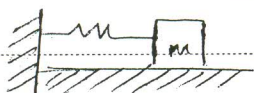
Subject :

Year . Month . Date . ()

$$\Rightarrow v_p = 2e^{-0.644t} \Rightarrow v_D = -1.288e^{-0.644t} \xrightarrow{v_D=1} t = 1.076 \text{ s}$$

پس به طور کلی v_D در $t=0$ منفی شد و در $t=1.076$ نصف می شود
(در این رابطه علامت درون اصطکاک به سرعت)

نیوتن دوم مکان (موقعیت)



$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F(x) \Rightarrow m \frac{dv}{dt} = F(x)$$

$$\Rightarrow m \frac{dv}{dx} \times \frac{dx}{dt} = F(x) \Rightarrow m \frac{dv}{dx} \times v = F(x)$$

$$\Rightarrow m v dv = F(x) dx \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = \int F(x) dx + C_1$$

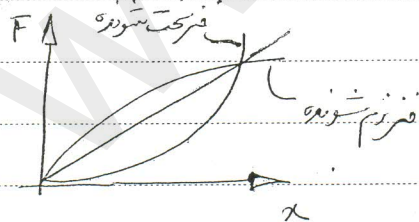
$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \left[\frac{2}{m} \int F(x) dx + C_1 \right]^{1/2} \Rightarrow t = \int \frac{dx}{\left[\frac{2}{m} \int F(x) dx + C_1 \right]^{1/2}} + C_2$$

نیروی فنر

$$F(x) = kx$$

↓
spring constant

↓
linear Restoring force (نیروی بازگشت خطی)



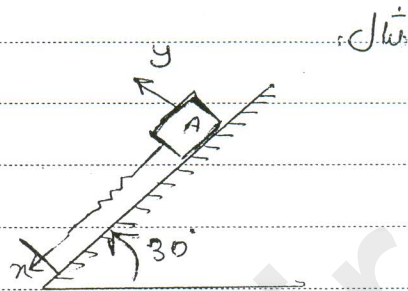
Subject:

Year. Month. Date. ()

۳۹

$$m = 2.00 \text{ kg}$$

$$k = 50 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$



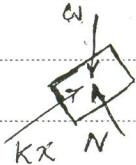
$$200 \times 9.81$$

الف) اگر جسم A به سمت بالا حرکت کند، آیا از طریق مسافتی به تعادل می‌رسد؟

$$\delta = \frac{F}{k} = \frac{W \sin 30^\circ}{k}$$

$$\Rightarrow \delta = 19.62 \text{ mm}$$

ب) اگر A ناگهانی رها شود، سرعت آن وقتی به نقطه تعادل در قسمت الف می‌رسد چقدر است؟



$$100 \ddot{x} = 200 \times 9.81 \times \sin 30^\circ - 50 \times 100x \quad (x \text{ به سمت بالا})$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = 4.905 - 250x$$

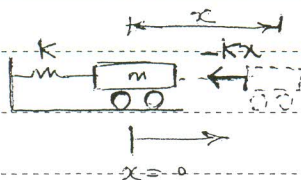
$$\Rightarrow v \frac{dv}{dx} = 4.905 - 250x$$

$$\Rightarrow \frac{v^2}{2} = 4.9x - 125x^2 + C_1 \quad \left. \begin{array}{l} x=0 \\ v=0 \end{array} \right\} \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\Rightarrow @ x = 0.01962 \text{ m} \Rightarrow v = 0.31 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Subject:

Year. Month. Date. ()



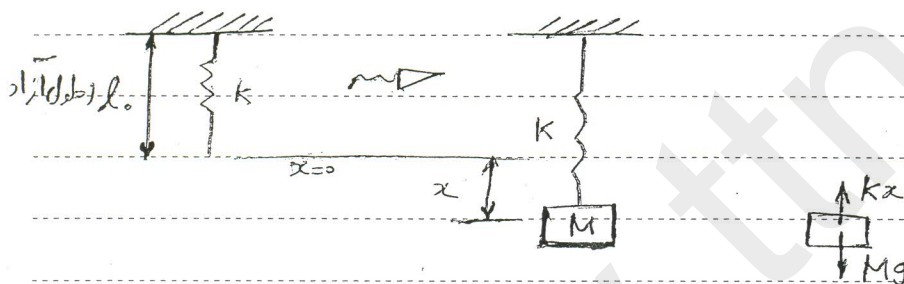
$$\sum F_x = m\ddot{x}$$

$$-kx = m\ddot{x}$$

$$\boxed{m\ddot{x} + kx = 0} \rightarrow x(t) \begin{cases} C_1 & x(0) = x_0 \\ C_2 & \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$$

معمولاً در حالت اول به یک تغییر طول یا سرعت اولیه داشته باشیم، مثلاً نوسان داریم.

مثال 2:



$$1) \text{مثال: } x(t) = A_1 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + A_2 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right)$$

شرایط اولیه

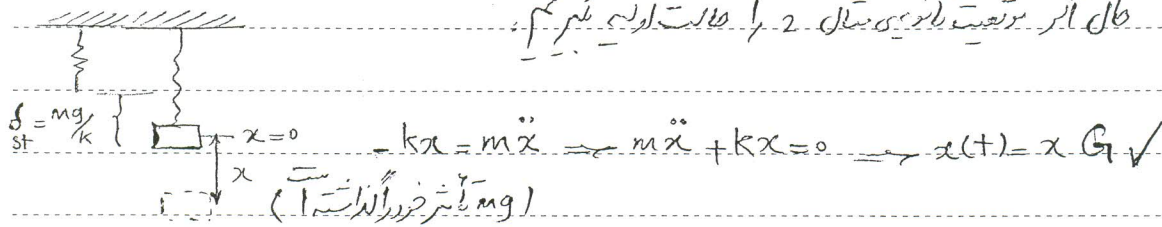
$$2) \text{مثال: } m\ddot{x} = Mg - kx$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + kx = Mg$$

$$\Rightarrow x(t) = x_G + \frac{Mg}{k}$$

(مغز عصبی)

حال اگر بر تعین ثانویه مثال 2 را حالت اولی بگیریم.



Subject:

Year. Month. Date. ()

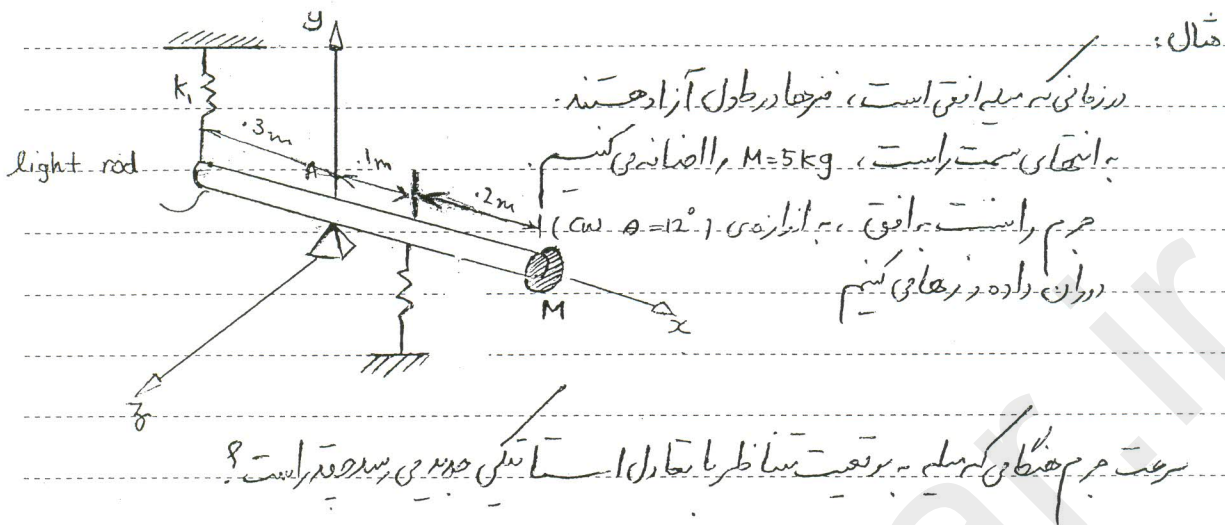
در نتیجه $w=mg$ در پاسخ ارتعاش سیستم تغییراتی ندارد نمی‌کند و فقط یک ۱.۵ طایه جایی.

به صورتی آورده که اندازه‌های آن $\frac{mg}{k}$ است.

Subject:

Year. Month. Date. ()

۳۸



$$k_1 = 1000 \text{ N/m}$$

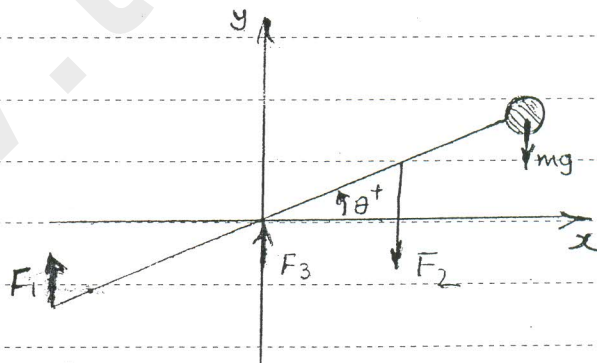
$$k_2 = 1200 \text{ N/m}$$

$$\theta_0 = 12^\circ \text{ cw}$$

(مقدار غیر خطی) $\sin \theta$

$$F_1 = k_1(-0.3\theta) = -300\theta \text{ (N)}$$

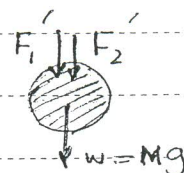
$$F_2 = -k_2(-0.1\theta) = -120\theta \text{ (N)}$$



میله بدون جسم است و میله را می‌خواهیم به سمت راست یا چپ حرکت دهیم. میله را می‌خواهیم به سمت راست یا چپ حرکت دهیم.

$$F_1' = -F_1 \times \frac{0.3}{0.3} = -300\theta \text{ (N)}$$

$$F_2' = F_2 \times \frac{0.1}{0.3} = -40\theta \text{ (N)}$$



Subject:

Year. Month. Date. ()

$$\sum F_y = M\ddot{y}$$

$$\Rightarrow 5\ddot{y} = -300\theta - 40\theta - 5g$$

$$y = .3\theta$$

$$\Rightarrow 5\ddot{\theta} + \frac{340}{.3}\theta = -5g, \quad \frac{d\dot{y}}{dt} = \frac{dy}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \dot{y} \frac{d\dot{y}}{d\theta}$$

$$\Rightarrow \dot{y} d\dot{y} = (-227\theta - g) d\theta \Rightarrow \frac{\dot{y}^2}{2} = -227 \frac{\theta^2}{2} - g\theta + C_1$$

$$\begin{cases} \theta = -12^\circ \Rightarrow \theta = -0.2094 \text{ Rad} \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_1 = -0.1683$$

$$\Rightarrow \dot{y}^2 = 2 \left[-227 \frac{\theta^2}{2} - g\theta - .1683 \right]$$

مقادیر را در معادله قرار می دهیم:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -Mg \times .3 - F_1 \times .3 - F_2 \times .1 = 0$$

$$\Rightarrow \theta_{eq} = -0.1443 \text{ rad} = -8.3^\circ$$

$$y_{eq} = 0.3 \times (-.1443) = -.04328 \text{ m}$$

if $y = y_{eq}$

$$\Rightarrow \dot{y} = +.968 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

در حالت تعادل در جهت cw است. پس در جهت 12 درجه cw می آید.
 می خواهیم نیروی کشنده را بدانی. پس در هنگام کشش M از برقیقت
 تعادل استفاده می کردیم. سرعت مثبت است.

Subject:

Year. Month. Date. ()

3-3 قانون نیوتون برای مختصات استوانه‌ای

حرکت با نیروی مرکزی:

(Central Force Motion)

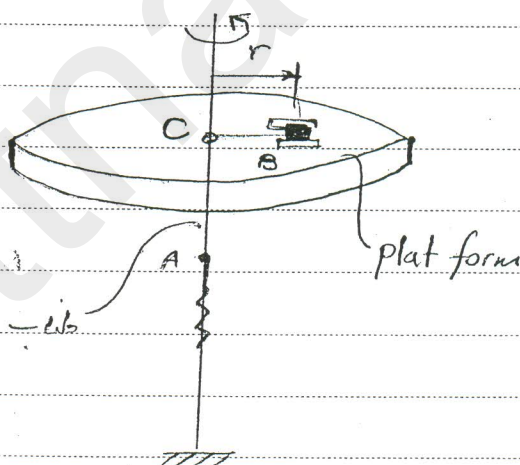
$$\begin{cases} F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \\ F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \\ F_z = m\ddot{z} \end{cases}$$

$k = 20 \frac{N}{mm}$

مثال:

$\omega_{platform} = \omega = 5 \text{ rad/s}$ - شیار بدون اصطکاک

$m_B = 2 \text{ kg}$ - دایره غایب از جاذبه



اگر در طول آزاد، بلوک در سرعت C، بلوک را

در سرعت $r = 200 \text{ mm}$ قرار داده در حال کشش، سرعت در

بلوک در سرعت مطلوب است در $r = 400 \text{ mm}$

در سرعت بلوک B نسبت به plat form چه قدر است و در این

لحظه نیروی عرضی وارد شده به بلوک B چه قدر است؟

الف)

$$\underbrace{-20r}_{F_r} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = 2(\ddot{r} - 25r)$$

$$\Rightarrow \ddot{r} = \frac{dv_r}{dt} = \frac{dv_r}{dr} \times \frac{dr}{dt} = v_r \frac{dv_r}{dr} = 15r$$

Subject:

Year. Month. Date. ()

۴۹

$$\Rightarrow V_r dV_r = 15r dr \Rightarrow \frac{V_r^2}{2} = \frac{15r^2}{2} + C_1$$

$$\begin{cases} r = 200 \text{ mm} = 0.2 \text{ m} \\ V_r = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = -0.3$$

$$\Rightarrow \text{for } r = 0.4 : V_r = 1.342 \text{ m/s}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } F_\theta &= m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \\ &= 2(0.4 \times 0 + 2 \times 1.342 \times 5) \\ &= 26.84 \text{ N} \end{aligned}$$

3-4 حرکت نیروی مرکزی

(نمونه‌های 12-8، 12-7، 12-8)

در خصوص نیروهای بین‌سیارات (مهم، سوال امتحانی)

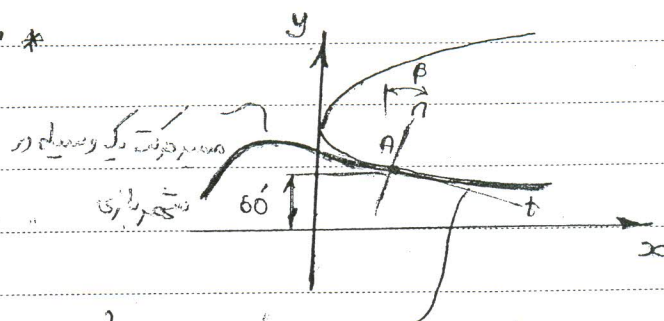
3-5 قانون دوم نیوتون برای منحرف‌های مسیر

$$\begin{cases} F_t = m \frac{d^2 s}{dt^2} \\ F_n = m \frac{(ds/dt)^2}{R} \end{cases}$$

* نیروی وارد بر جاذبه در این لحظه؟
(در راستای شعاعی)

$$V|_{@A} = 40 \text{ ft/s}$$

$$W = 200 \text{ lb}$$



$$(y-10.0)^2 = 100x \text{ : para bola (منحرفه‌ای)}$$

Subject:

Year. Month. Date. ()

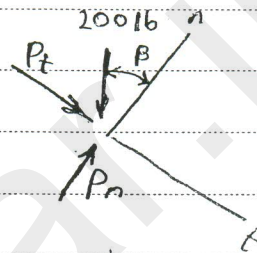
$$\begin{cases} a_n = \frac{(ds/dt)^2}{R} = \frac{40^2}{R} \\ R = \frac{[1 + (y')^2]^{3/2}}{|y''|} \Rightarrow R = 105 \text{ ft} \end{cases}$$

$$\Rightarrow F_n = \frac{W}{g} a_n = \frac{200}{g} \times \frac{1600}{105} = 94.6 \text{ lb}$$

$$\begin{cases} -200 \cos \beta + P_n = 94.6 \end{cases}$$

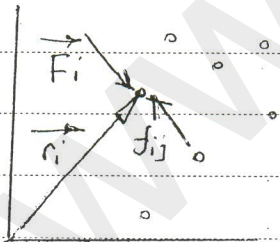
$$\beta = \tan^{-1} \left(\frac{dy}{dx} \right) \Big|_{y=60} = 51.3^\circ$$

$$\Rightarrow P_n = 220 \text{ lb}$$



6-3 - سیستم ذرات - حرکت عمومی:

سیستم ذره دارای n ذره می باشد.



$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i + \sum_{j=1}^n \vec{f}_{ij} \quad (\text{ذره } i \text{ نیروی اعمال شده بر ذره } i \text{ نام از طرف ذره } j \text{ را می برد})$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{f}_{ij} \quad (\text{چون } \vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji} \Rightarrow \sum \sum \vec{f}_{ij} = 0)$$

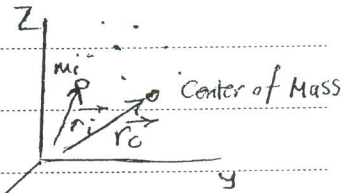
Subject:

Year. Month. Date. ()

۴۱

$$\Rightarrow \vec{F} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i$$

$$\sum m_i \vec{r}_i = \vec{r}_c \sum m_i \\ = \vec{r}_c M$$



$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = \frac{d^2}{dt^2} (M \vec{r}_c) = M \frac{d^2 \vec{r}_c}{dt^2}}$$

پس اگر نیروهای یک سیستم ذرات را درشتور، برآیند نیروها برابر جرم کل ذرات در شتاب

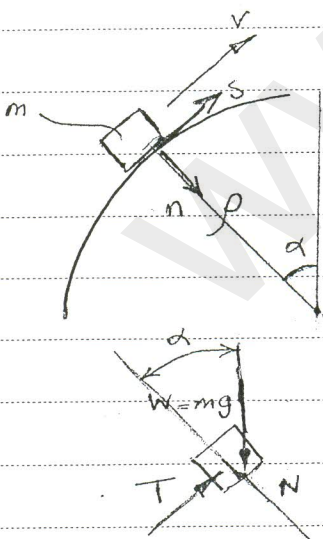
مرکز جرم ذرات است.

مثلاً اگر شخص داخل اتاق داخل آب بدرد، با اندازه‌ی مساوی که در دیواره جا بمانی شود. چون

نیروی خارجی به سیستم شخص وارد نمی‌شود و در نتیجه مرکز جرم این سیستم ثابت است.

مثال

نیروی وارد بر زردی خارجی در نقطه‌ی مشخص شده؟



$$v = cte$$

$$\begin{cases} \sum F_t = m\ddot{s} = m \frac{dv}{dt} \\ \sum F_n = m \frac{\dot{s}^2}{\rho} = m \frac{v^2}{\rho} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T - mg \sin \alpha = 0 \\ mg \cos \alpha - N = m \frac{v^2}{\rho} \end{cases}$$

Subject:

Year. Month. Date. ()

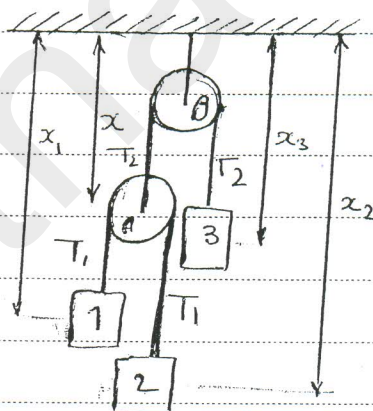
$$\Rightarrow \begin{cases} T = mgs \sin \alpha \quad \text{نیروی } T \text{ بسبب حرکت با سرعت ثابت در جهت مخالف می شود} \\ N = mgs \cos \alpha - m \frac{v^2}{\rho} \end{cases}$$

$$\text{if } mgs \cos \alpha - m \frac{v^2}{\rho} < 0 \Rightarrow N < 0$$

$$\text{if } v = \sqrt{\rho g \cos \alpha} \Rightarrow \text{آسانی برای}$$

مثال:

در نه حال از حال سکون رهای شوند، با فرض این که سطحی صاف و
دقیقه و بدون اصطکاک باشد،
نیروی کشش طناب ها در ضمن حرکت چقدر است؟



$$T_2 = 2T_1 \quad (\text{چون هر دو پولی صاف است})$$

در هر ترانه A، کشش ها برابرند چون اصطکاک نداریم

$$x + x_3 = \text{cte} \quad (\text{از رابطه سینمایی}) \Rightarrow \ddot{x} = -\ddot{x}_3 \Rightarrow a + a_3 = 0$$

$$x_1 + x + x_2 - x = \text{cte} \quad \Rightarrow \ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2 + 2\ddot{x} \Rightarrow a_1 + a_2 - 2a = 0$$

$$\text{if } m_1 = 1 \text{ kg}, m_2 = 2 \text{ kg}, m_3 = 3 \text{ kg}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 - T_2 = \frac{3}{9.81} a_3 \\ 2 - T_1 = \frac{2}{9.81} a_2 \\ 1 - T_1 = \frac{1}{9.81} a_1 \end{cases}$$

(T_2, T_1 بر حسب kg است)

Subject

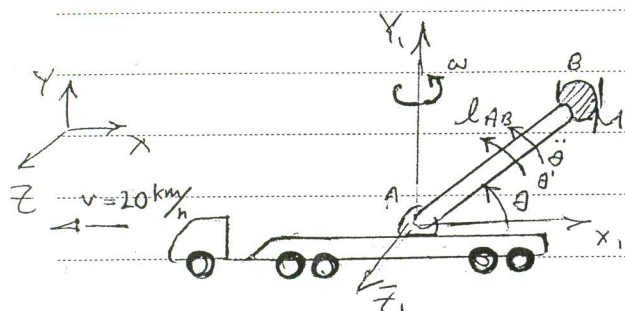
Date

۴۲

از گویه‌ی معادلات نتیجه‌ی شود:

$$\begin{cases} T_1 = 64 \text{ kgf} \\ T_2 = 1.28 \text{ kgf} \end{cases}$$

مثال



$$\begin{aligned} \theta &= 45^\circ \\ \dot{\theta} &= 1 \text{ rad/s} \\ \ddot{\theta} &= 0.2 \text{ rad/s}^2 \\ \omega &= 1 \text{ rad/s} \\ l_{AB} &= 10 \text{ m} \\ M &= 100 \text{ kg} \end{aligned}$$

نقطه XYZ ثابت
 x_1, y_1, z_1 راسته‌ی مفصل A از مفصل
 نسبت به آن با سرعت زاویه‌ای ω
 حرکت می‌کند

الف) حرکت جسم m نسبت به x_1, y_1, z_1

$$\vec{\rho} = 7.07 \hat{i} + 7.07 \hat{j}$$

$$\vec{v}_{x_1 y_1 z_1} = \vec{\omega}_2 \times \vec{\rho} = \dot{\theta} \hat{k} \times \vec{\rho} = -7.07 \hat{i} + 7.07 \hat{j}$$

$$\vec{a}_{x_1 y_1 z_1} = \vec{\omega}_2 \times \vec{v} + \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{\rho}) = -8.47 \hat{i} - 5.67 \hat{j}$$

ب) حرکت x, y, z نسبت به x_1, y_1, z_1

$$\vec{R} = -v \hat{i} = -20 \times \frac{1000}{3600} \hat{i} = -5.56 \hat{i} \text{ m/s}$$

Subject _____

Date _____

$$(\vec{a}_B)_{xyz} = (\vec{a}_B)_{x_1y_1z_1} + \vec{R} + 2 \times \vec{\omega} \times \vec{v}_{x_1y_1z_1} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$$

$$\Rightarrow (\vec{a}_B)_{xyz} = -15.53 \hat{i} - 5.67 \hat{j} + 14.13 \hat{k}$$

$$\vec{F}_{AB} = M(\vec{a}_B)_{xyz} \quad \text{سلب جسم دارد کند}$$

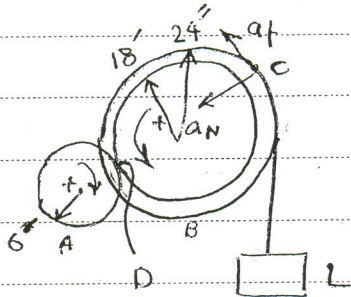
$\Rightarrow$ نیرو در عضو به سمت راست است $\rightarrow$ پس این نیرو به سلب دارد شود

Subject:

Year. Month. Date. ()

موضوع: دینامیک (۱) : فصل رانشید (در حرکت نسبی)

مثال: چرخ دنده‌ی A چرخ دنده‌ی B را بر روی یک سطح افقی می‌کشد. بار L از طاق سکون شروع به حرکت می‌کند. در لحظه‌ی نشان داده شده دارای سرعت 3 ft/s است. قطعه‌ی A دارای شتاب ثابت است. شتاب قطعه‌ی C در سرعت شتاب در لحظه‌ی چرخ دنده‌ی A را بیابید.



$$\vec{a}_C = a_t \hat{e}_t + a_n \hat{e}_n$$

$$a_t = a_L = \frac{v^2}{2x} = \frac{9}{8} = a_t$$

$$a_n = \omega^2 R_c \Rightarrow \omega = v_c / R_c \Rightarrow a_n = \frac{v^2}{R_c} = \frac{9}{(24/12)}$$

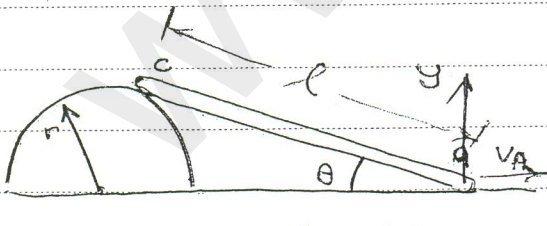
$$a_n = 4.5 \text{ ft/s}^2 \Rightarrow a_c = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{1.125^2 + 4.5^2} = 4.64 \text{ ft/s}^2$$

$$v_{D/B} = v_{D/A} \Rightarrow 18 \times \frac{v_c}{R_c} = 6 \times \omega_A \Rightarrow \omega_A = 4.5 \text{ rad/s}$$

$$\omega_B \times R_B = \omega_A \times R_A$$

$$\alpha_B \times R_B = \alpha_A \times R_A = \frac{a_t}{(24/12)} \times 18 = \alpha_A \times 6$$

$$\Rightarrow 1.688 \text{ rad/s}^2$$



$$\omega_{AC} = ? \text{ (بر حسب } x \text{)}$$

مثال:

$$\checkmark \checkmark \checkmark \checkmark$$

$$v_C = v_A + \omega \times r_{AC}$$

احتیاط: جهت اندازه

Subject:

Year. Month. Date. ()

$$\vec{V}_C = V_C (\cos \theta \hat{i} - \sin \theta \hat{j})$$

$$\vec{V}_A = V \hat{i}$$

$$\vec{\omega} \times \vec{\rho}_{AC} = \omega l (-\sin \theta \hat{i} - \cos \theta \hat{j})$$

$$\begin{cases} V_C \cos \theta = V - \omega l \sin \theta \\ -V_C \sin \theta = -\omega l \cos \theta \end{cases}$$

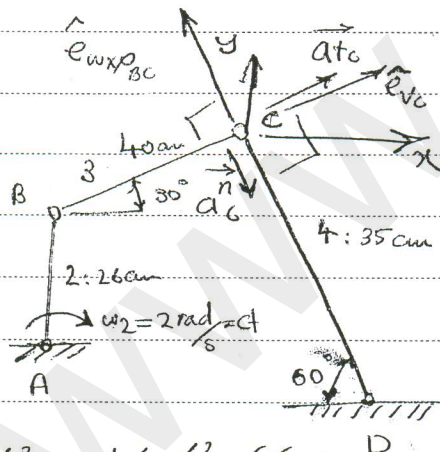
$$\omega l = V \sin \theta$$

$$l = \sqrt{x^2 - r^2}, \sin \theta = r/x \Rightarrow \omega = \frac{rV}{x\sqrt{x^2 - r^2}}$$

Using:

$$\sin \theta = r/x \Rightarrow \frac{d}{dt} \sin \theta = -\frac{r}{x^2} \dot{x}$$

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \frac{\sqrt{x^2 - r^2}}{x} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{-rV}{x\sqrt{x^2 - r^2}}$$



$$\omega_4 = ?$$

$$\vec{V}_C = V_C (\cos 30^\circ \hat{i} + \sin 30^\circ \hat{j})$$

$$\vec{V}_B = \vec{\omega}_2 \times \vec{\rho}_{AB} = (2 \times 2.26) \hat{j}$$

$$\vec{\omega}_3 \times \vec{\rho}_{BC} = \omega_3 \times 40 (-\cos 60^\circ \hat{i} + \sin 60^\circ \hat{j})$$

$$\vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{\omega}_3 \times \vec{\rho}_{BC}$$

$$\begin{cases} V_C \cos 30^\circ = 5.2 - 40 \omega_3 \cos 60^\circ \\ V_C \sin 30^\circ = 40 \omega_3 \sin 60^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_3 = 0.64 \text{ rad/s} \\ V_C = 44.34 \text{ cm/s} \end{cases}$$

$$|\vec{V}_C| = |\vec{\omega}_4 \times \vec{\rho}_{DC}| \Rightarrow \omega_4 = \frac{V_C}{\rho_{DC}} = \frac{44.34}{35} = 1.26 \text{ rad/s}$$

Subject:

Year. Month. Date. ()

22

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \alpha_3 \times \vec{\rho}_{BC} + \vec{\omega}_3 \times \vec{\omega}_3 \times \vec{\rho}_{BC}$$

?? ✓✓ ✓? ✓✓ ✓✓

$$\vec{a}_C^{\text{tr}} + \vec{a}_C^{\text{rot}} = \vec{a}_B + \vec{a}_B^{\text{rot}} + \alpha_3 \times \vec{\rho}_{BC} + \vec{\omega}_3 \times \vec{\omega}_3 \times \vec{\rho}_{BC}$$

$$\vec{a}_C^{\text{tr}} = \vec{\omega}_4 \times \vec{\omega}_4 \times \vec{\rho}_{BC} = 1.26 \times 1.26 \times 35 (\cos 60^\circ \hat{i} + \sin 60^\circ \hat{j})$$

(rw²)

$$\vec{a}_C^{\text{rot}} = \vec{\omega}_4 \times \vec{\rho}_{BC} = -35 \alpha_4 (\cos 60^\circ \hat{i} + \sin 60^\circ \hat{j})$$

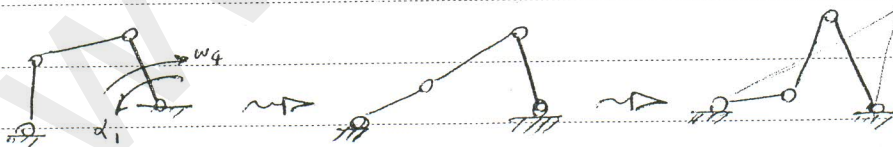
(rd)

$$\vec{a}_B^{\text{tr}} = \vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_2 \times \vec{\rho}_{AB} = 2 \times 2 \times 26 (-\hat{j})$$

$$\alpha_3 \times \vec{\rho}_{BC} = 40 \alpha_3 (\cos 30^\circ \hat{i} - \sin 30^\circ \hat{j})$$

$$\vec{\omega}_3 \times \vec{\omega}_3 \times \vec{\rho}_{BC} = 16.38 (-\cos 30^\circ \hat{i} - \sin 30^\circ \hat{j})$$

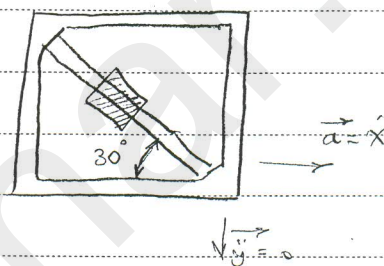
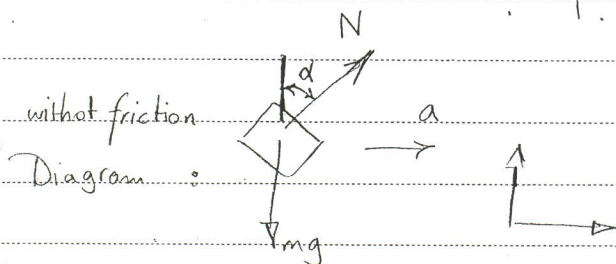
$$\begin{cases} -30.3 \alpha_4 + 20 \alpha_3 = -42 \\ -17.5 \alpha_4 - 34.6 \alpha_3 = -61.4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_4 = 1.45 \text{ rad/s}^2 \\ \alpha_3 = .86 \text{ rad/s}^2 \end{cases}$$



Subject:

Year. Month. Date. ()

در این مسئله، ما یک جسم را در یک سطح شیب دار قرار می‌دهیم. نیروهای وارد بر آن عبارتند از: نیروی گرانش (mg)، نیروی نرمال (N) و نیروی اصطکاک (f). ما می‌خواهیم حرکت آن را در دو حالت مختلف بررسی کنیم: بدون اصطکاک و با اصطکاک.

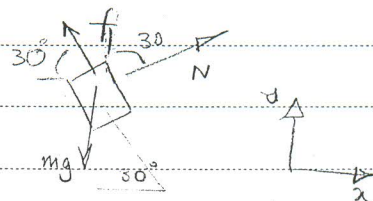


$$N \sin \alpha = m a_x$$

$$N \cos \alpha - mg = m a_y = 0 \Rightarrow N = \frac{mg}{\cos \alpha} \Rightarrow a = g \tan \alpha$$

with friction:

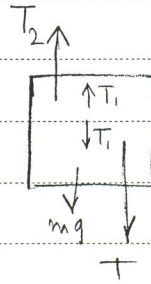
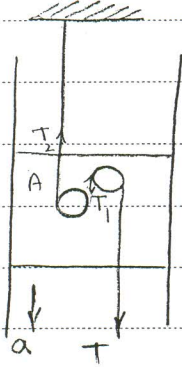
a_{min} :



$$\begin{cases} N \sin 30^\circ - f \cos 30^\circ = m a \\ mg = N \cos 30^\circ + f \sin 30^\circ \\ N = f / \mu \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{g} = \frac{N \sin 30^\circ - \mu N \cos 30^\circ}{N \cos 30^\circ + \mu N \sin 30^\circ}$$

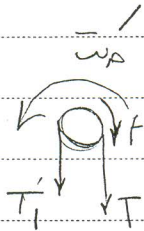
$$\Rightarrow a_{min} = \left(\frac{\sin 30^\circ - \mu \cos 30^\circ}{\cos 30^\circ + \mu \sin 30^\circ} \right) g$$

مثال: جهت حرکت چیست پایین است (آسانسور کارگر)



$$T_2 > T_1 > T$$

$$T_1 = T e^{\mu \theta} = T e^{\mu \pi} \quad \left\{ \begin{array}{l} T_2 = e^{2\mu \pi} T \\ T_2 = T_1 e^{\mu \pi} \end{array} \right.$$



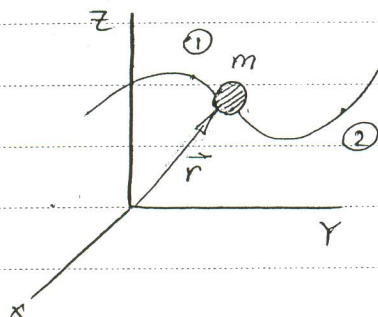
$$T + f = T_1' \Rightarrow T_1' > T$$

$$Mg + T - T_2 = ma$$

$$\Rightarrow Mg + T - e^{2\mu \pi} T = ma \Rightarrow T = \frac{ma - Mg}{1 - e^{2\mu \pi}}$$

فصل چهارم - روش‌های انرژی برای مهندسی ذرات:

۱-۴ - مقدمه:



$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\Rightarrow \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = m \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt$$

$$= m \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} \right) dt = \frac{m}{2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d(\vec{v} \cdot \vec{v})}{dt} dt$$

$$= \frac{m}{2} \int_{v_1}^{v_2} d(v^2)$$

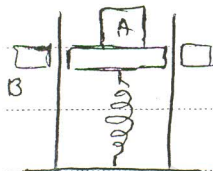
$\Rightarrow$

$$\int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2)$$

work (w_{1-2})

⚠ رابطه‌ی فوق را می‌توانیم برای مؤلفه‌های نیرو نیز بنویسیم:

$$\int_{x_1}^{x_2} \vec{F}_x \cdot d\vec{x} = \frac{1}{2} m ((v_x)_2^2 - (v_x)_1^2)$$



مثال: روشی را برای یافتن یک صفحه‌ی صلب B داریم که نیرو

(این نیرو در اثر وزن صفحه‌ی B به اندازه‌ی 10 mm)

فشرده شده است) را در می‌یابیم. در هم درها

می‌کنیم. اگر میله‌های دارای به اندازه‌ی 5 N انرژی

مقاوم اعمال کنند، حداکثر تغییراتی که در نیرو به سمت پایین

حرکت می‌کنند چقدر است؟

(تغییر قطعی است در رابطه‌ی آن به سمت

$F_s = 0.5 x^2$ N ، $w = 100$ N (است) mm

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) = 0$$

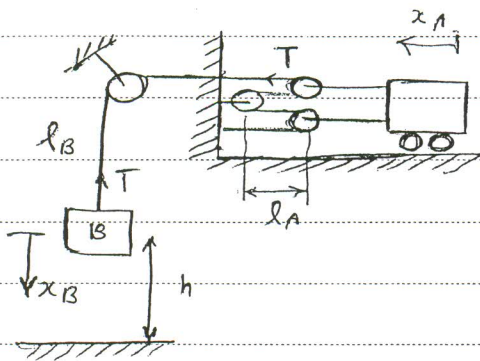
$$\Rightarrow \int_{10}^{10+\delta} (-W_A - f - 0.5x^2) dx = 0$$

$$\Rightarrow 95\delta - \frac{0.5}{3} [(10+\delta)^3 - 10^3] = 0$$

$$\Rightarrow \delta^3 + 30\delta^2 - 270\delta = 0$$

$$\Rightarrow \delta = 0, \delta = 7.25 \text{ (mm)}$$

Subject _____
Date _____



$$m_B = 100 \text{ kg}$$

$$m_A = 900 \text{ kg}$$

$$h = 3 \text{ m}$$

$$\begin{cases} v_B = ? \\ v_A = ? \end{cases}$$

محاسبه انرژی برای جسم B را می نویسیم (عدت ✓):

$$(100g - T)h = \frac{1}{2} m v_B^2 - 0$$

محاسبه انرژی برای جسم A را می نویسیم:

$$4T \Delta x_A = \frac{1}{2} 900 v_A^2 - 0$$

از رابطه سینماتیکی برای حل می گذاریم:

$$l_B + 4l_A = \text{cte}$$

$$\Rightarrow \dot{l}_B + 4\dot{l}_A = 0 \Rightarrow \dot{l}_B = -4\dot{l}_A \Rightarrow -4\dot{l}_A = -4(-v_A) \Rightarrow v_B = 4v_A$$

$$dl_B + 4dl_A = 0 \Rightarrow dx_B = 4dx_A \Rightarrow \Delta x_B(h) = 4\Delta x_A$$

رابطه سینماتیکی را در رابطه انرژی می گذاریم:

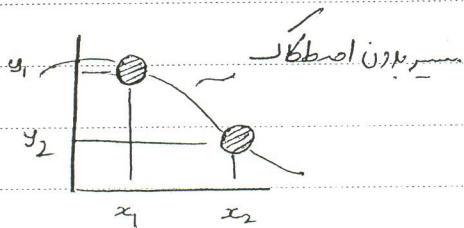
$$v_B = 6.14 \text{ m/s} \quad \downarrow \text{downward}$$

$$v_A = 1.339 \text{ m/s} \quad \leftarrow \text{left}$$

2-4. (Power):

$$\begin{aligned} \text{Power} &= \frac{dw}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i}{dt} \\ &= \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i \end{aligned}$$

3-4. میدان‌های نیروی گراشیته (Conservative Force Fields)



$$w_{1-2} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 (-w \cdot j) \cdot d\vec{r}$$

$$= -w \int_1^2 dy = w(y_1 - y_2)$$

کار انجام شده تابع مسافت در صراحت
تابع نقطه‌ای اولیه و ثانویه است.

□ میدان‌های نیروی گرانشی که مانند جاذبه مستقل از مسیر حرکت است، را میدان‌های نیروی گراشیته می‌نامند.

□ اگر $F(x, y, z)$ میدان نیروی گرانشی باشد، آنگاه:

$$w_{1-2} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = v_1(x, y, z) - v_2(x, y, z)$$

تابع $v(x, y, z)$ را تابع انرژی پتانسیل می‌نامیم (با P_E یا v نمایش می‌دهیم).

تغییر انرژی پتانسیل منفی کار انجام شده توسط نیروی گرانشی

$$\Rightarrow - \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = v_2(x, y, z) - v_1(x, y, z)$$

اگر ① و ② از نظر ریاضی یکسان باشند،
 $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ پس در این حالت کار
انجام شده است ولی کار منفی و مثبت
یکدیگر را فسخ کرده‌اند.

فرد انرژی پتانسیل به سبب افت در نظر
گرفته شده بستگی دارد ولی تغییرات آن صفر

Subject _____

Date _____

۱) تغییر انرژی پتانسیل میدان با بار = منفی کار انجام شده به روی حرکت ذره

سوال: ارتباط بین نیروی F و تابع پتانسیل آن چگونه است؟

$$F \cdot dr = -dV$$

$$\Rightarrow F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}}$$

میدان الکتریکی و مغناطیسی میدان است که در آن نیروی تابع پتانسیل است و به آن پتانسیل می‌گویند.

$$\vec{F} = -\nabla V = -\text{grad } V$$

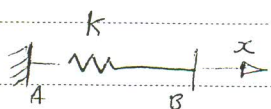
16	44	70	102	دفعه 12
24	58	76	104	تکرار شنبه 86, 9, 3
30	60	96		

میدان نیروی ثابت: اگر نیرو در همی ثابت باشد.

$$F = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$$

$$\Rightarrow V = -(ax + by + cz) \quad \text{ie: } -mg\hat{k} \Rightarrow P_E = -mgz$$

میدان نیروی متناسب با جابجایی x :



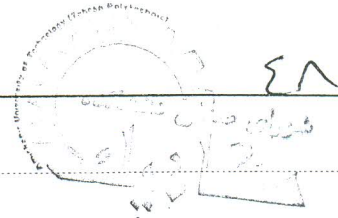
$$F = -kxi \Rightarrow P_E = \frac{kx^2}{2}$$

Restoring Force

۱) نیروی Dampers (براندن) با سرعت: $F = -cx$

Subject _____

Date _____



Gravitational Central Force Field:

$$\vec{F} = G \frac{mM}{r^2} \hat{r} \quad \text{(در مختصات استوانه‌ای: } \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \text{ در جهت شعاعی)}$$

$$\vec{F} = -\text{grad}(V) \quad \Rightarrow \quad P_E = V = -\frac{GMm}{r}$$

4-4 اصل بقای انرژی مکانیکی (Conservation of Mechanical Energy)

$$\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2)$$

اگر میدان نیروی یکنواخت باشد

$$\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = -(PE_2 - PE_1)$$

$$\Rightarrow \boxed{(PE)_1 + \frac{1}{2} m v_1^2 = PE_2 + \frac{1}{2} m v_2^2}$$

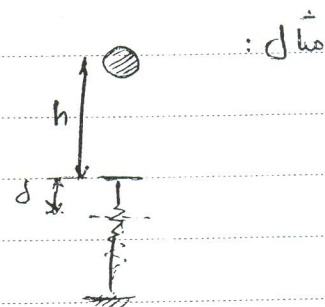
اصل بقای انرژی مکانیکی برای سیستم‌هایی که نیروی غیرایستوار در آن ندارد.

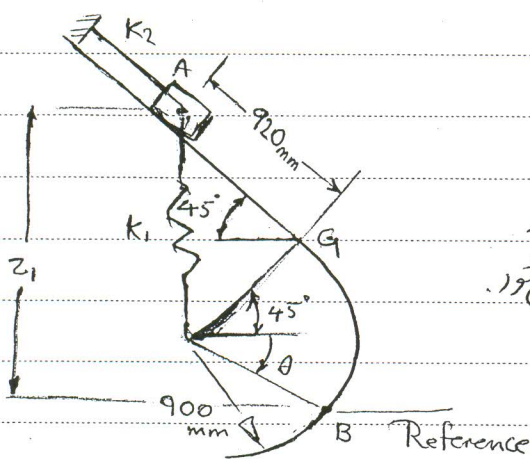
Δ مقدار آسانسور به سبب سنگ دارد و تغییرات آن سنگ ندارد.

$$\underbrace{mg(h+\delta)}_{(PE)_1} + \underbrace{0}_{\frac{1}{2}mv_1^2} + \underbrace{0}_{(PE)_2} = \underbrace{0}_{\frac{1}{2}mv_2^2} + \underbrace{\frac{1}{2}k\delta^2}_{(PE)_2}$$

$$\Rightarrow \delta^2 - \frac{2mg}{k}\delta - \frac{2mgh}{k} = 0$$

$$\Rightarrow \delta = \dots$$





مثال: سطح شیبدار اصطکاکی ندارد. در حالت نشان داده شده در شکل فنر 0.4m کشیده شده است. طاب کشانی جسم A متصل است. در موقعیت نشان داده شده در شکل طاب در طول از پیوند قرار دارد. جسم A را رها می کنیم در نقطه ای G پاره می شود. در چه زاویه ای جسم از سطح اصطکاکی جدا می شود؟

$$m_A = 0.2 \text{ kg}$$

$$k_1 = 25 \text{ N/m}$$

$$k_2 = 10.26 \text{ N/m}$$

موازن انرژی از A تا B:

$$mgz_1 + \frac{mv_1^2}{2} + \frac{1}{2} k_1 d_1^2 = mgz_2 + \frac{mv_2^2}{2} + \frac{1}{2} k_1 d_2^2 + \frac{1}{2} k_2 (AG)^2$$

نیزه فنر ① نیزه فنر ② که در میان پیوندهای می شود

$$0.2 \times 9.81 \left[0.92 \frac{\sqrt{2}}{2} + 0.9 \frac{\sqrt{2}}{2} + 0.9 \sin \theta \right] + 0 + \frac{1}{2} (25) (0.4)^2$$

$$= 0 + \frac{1}{2} \times 0.2 v_2^2 + \frac{1}{2} (25) (0.9 - 1.0) + \frac{1}{2} (10.26) \cdot 0.9^2$$

طول آزاد فنر

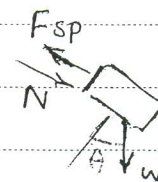
$$0 = (0.92 \frac{\sqrt{2}}{2} + 0.9 \frac{\sqrt{2}}{2}) - 0.4 \Rightarrow v_2 = 0.149 - 18.05 \sin \theta \quad \text{①}$$

$$N = 0$$

$$-F_{sp} + 0.2g \sin \theta = -0.2 v_2^2 / 9$$

$$\Rightarrow v_2^2 = 2.20 - 9.03 \sin \theta \quad \text{②}$$

$$\text{①, ②} \Rightarrow \theta = 4.34^\circ$$



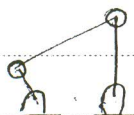
در سیستم ذرات چون در حالت کلی $\vec{dr}_i + \vec{dr}_j$ می باشد لذا $\vec{f}_{ij} \cdot \vec{dr}_j \neq \vec{f}_{ij} \cdot \vec{dr}_i$ می باشد و

همگی را فاشی نمی کنند.

- در مورد اجسام صلب، این دو ترم یکدیگر را فاشی می کنند (چرا؟)

الزک مجموعه ای اجسام صلب توسط اتصالانی نظیر لولا، هم متصل شوند در این اتصالات

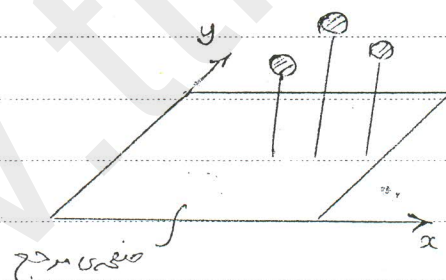
اصطکاک و جبرداشت باشد، باز هم این دو ترم حذف می شوند.



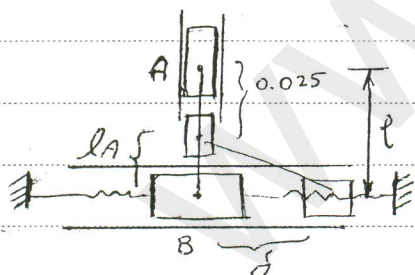
(چون در مکان اتصالات کار انجام شده صفر می شود)

$$PE = \sum_{i=1}^n m_i g z_i = W z_c$$

وزن کل / برآیند مرکز جرم



مثال: جسم A در جسم B در سطح بدون اصطکاک حرکت می کند.



این دو جسم توسط یک میله بسیار سبک هم متصل شده اند.

در برآیند نشان داده شده شکل نیز در طول آزاد حرکتی باشد. اگر جسم A در برآیند 25 mm

$$m_A = m_B = 75 \text{ kg}$$

$$l = 300 \text{ mm}$$

$$k = 900 \text{ N/m}$$

نسبت برآیند اولیه تراز می شود. سرعت جسم A در جسم B را بدست آورید.

الگزامین سیستم زرات استفاده کرد و کار انرژی میله هالانم نیست. این نیز داخلی است.

بر اساس قانون سوم نیوتن و با توجه به جهت لولاهای ایده آل کار آن ها صفر است.

$$\Delta(K.E + P.E) = W_{1-2} = 0$$

کار انرژی های غیر پایدار

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} m_A v_A^2 - 0 \right) + \left(\frac{1}{2} m_B v_B^2 - 0 \right) + \left[m_A g (0.3 - 0.025) - M_A g (0.3) \right]$$

$$+ \left[2 \times \frac{1}{2} \times 900 \delta^2 - 0 \right] = 0$$

$$l_A^2 + \delta^2 = 0.3^2 \quad (\delta \text{ به سمت راست})$$

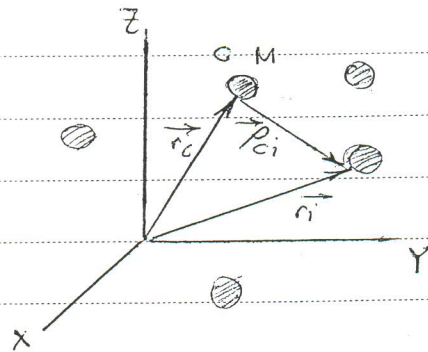
$$\Rightarrow l_A \dot{l}_A + \delta \dot{\delta} = 0 \Rightarrow l_A v_A + \delta v_B = 0 \quad (\text{در یک طرف - در جهت دیگر})$$

۴-۷ اثری جنبشی بر اساس مرکز جرم:

$$K.E = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

$$\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{\rho}_{Ci} \Rightarrow \vec{v}_i = \vec{v}_C + \dot{\vec{\rho}}_{Ci}$$

سرعت ذره ی اتم نسبت به مرکز جرم



$$K.E = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_C + \dot{\vec{\rho}}_{Ci})^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_C + \dot{\vec{\rho}}_{Ci}) \cdot (\vec{v}_C + \dot{\vec{\rho}}_{Ci})$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_C^2 + \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_C \cdot \dot{\vec{\rho}}_{Ci} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{\rho}}_{Ci}^2$$

Subject _____
Date _____

$$\Rightarrow KE = \frac{1}{2} M V_0^2 + \vec{V}_0 \cdot \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_{ci} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_{ci}^2$$

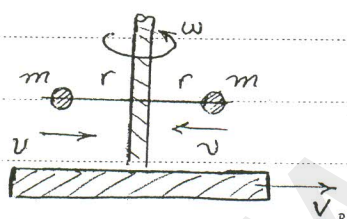
مان اول مجموعه ذرات نسبت به مرکز جرم = صفر
انرژی جنبشی تک ذرات نسبت به مرکز جرم انرژی جنبشی مرکز جرم

$$\Rightarrow KE = \frac{1}{2} M V_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_{ci}^2$$

یعنی انرژی جنبشی مجموعه ذرات برابر انرژی جنبشی ذرات با فرض جمع شدن ذرات در مرکز جرم

به علاوه انرژی جنبشی ذرات نسبت به مرکز جرم می شود

مثال: سمت های هاستر خورده وزن ندارند



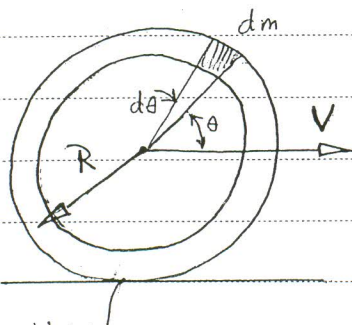
انرژی جنبشی مجموعه ذرات را بدست آورید

$$KE = \frac{1}{2} (2m) \times V_0^2 + 2 \times \frac{1}{2} m \left[\sqrt{(r\omega)^2 + v^2} \right]^2 = m \left[V_0^2 + v^2 + (r\omega)^2 \right]$$

درش را بدست آوردن سرعت مطلق ذرات و بدست آوردن مجموع انرژی جنبشی در زره است:

$$KE = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$= \frac{1}{2} m \left[(V_0 - v)^2 + (r\omega)^2 \right] + \frac{1}{2} m \left[(V_0 + v)^2 + (r\omega)^2 \right]$$



مثال: وزن طلقه W است. سرعت مرکز جرم آن v

است انرژی جنبشی طلقه؟ (شعاع متوسط طلقه R)

$$KE = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2$$

از آن جاییکه طلقه در آن انتقال دارد از فرمول

rolling without

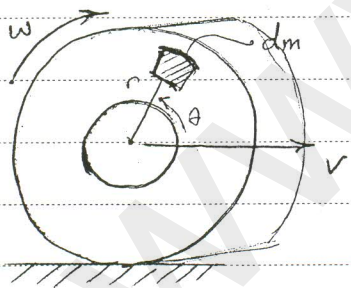
slipping

نمی توان استفاده کرد چون سرعت در آنی داریم

$$KE_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\rho}_{ci}^2 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \underbrace{\left(\frac{W}{g(2\pi R)} \right)}_{\text{جرم واحد طول (dl)}} \underbrace{(R d\theta)}_{dm} \times \underbrace{(R\omega)^2}_{\dot{\rho}_{ci}^2} = \frac{W}{2g} v^2$$

$$\Rightarrow KE = \frac{1}{2} \frac{W}{g} v^2 + \frac{W}{2g} v^2 = \frac{W}{g} v^2$$

نسبت، مرکز جرم روابط مرکز جرم

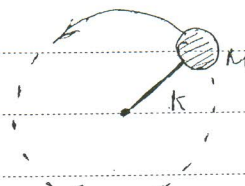


عرف توزیع جرم حول محوری عمود بر صفحه (در راستای محور استوانه)

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\rho}_{ci}^2 = \frac{1}{2} \int \int \int_M (dm)(r\omega)^2$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int \int \int r^2 dm \right) \omega^2$$

I_z



برای پستی استوانه ای

$$KE = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} I_{zz} \omega^2$$

$$\left[\begin{array}{l} I_{zz} = k^2 M \\ k: \text{شعاع تراسین} \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow KE = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} k^2 M \omega^2$$

4-8. رابطی کار- انرژی سینتیک بر اساس مرکز جرم.

$$\int \vec{F} = M \vec{v}_C$$

برای سیستم زرات داشتیم:

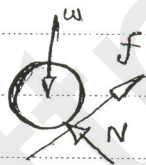
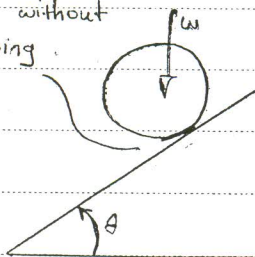
بر اندیزهای خارجی

به صورت مشابه با آنچه در بخش 1-4 ثابت شد.

$$\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}_C = \left(\frac{1}{2} M v_C^2 \right)_2 - \left(\frac{1}{2} M v_C^2 \right)_1$$

(به عبارتی نیروهای داخلی مطرح نمی شوند) تمام نیروهای خارجی به مرکز جرم منتقل شوند (اثبات شود)

rolling without slipping



مثال:

$$\left\{ \begin{array}{l} M = 25 \text{ kg} \\ d = 0.6 \text{ m} \quad \theta = 30^\circ \\ \delta = 1.6 \text{ m} \\ v_C = ? \end{array} \right.$$

شکل II) نیروی نرمال بر سطح کاری انجام نمی دهد چون عمود بر جابه جایی است.

اصطکاک داریم چون غلش داریم و نیروی f موجب «راکم شدن» است.

نیروی اصطکاک کار انجام نمی دهد چون سرعت نقطه تماس بر مورد صفر است (اگر لغزش داشتیم کار انجام می شد).

$$\left(\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int \vec{f} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int \vec{f} \cdot \vec{v} dt = \text{صفر} \right)$$

شکل III) می توانیم تمام نیروهای وارده بر جرم را به مرکز جرم منتقل کنیم. (رابطی سرعت نیروی اصطکاک کار انجام می دهد).

Subject:

Year. Month. Date. ()

۵۲

روش اول: کارهای غیر یکنواخت $\Delta(PE + KE) = W_{1-2}$

f (اصطکاک) نامی است

دری $W_f = 0 \Rightarrow$ $= \left[0 - 25 \times 9.81 \times 1.6 \sin 30^\circ \right]$

$+ \left[\frac{1}{2} (25) v_c^2 + \frac{1}{4} (25) (0.3)^2 \omega^2 - 0 \right] = 0$

به دست می آید v_c اگر سعی حرکت کرد انرژی جنبشی آن برابر خواهد بود با

$KE = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{4} M (R\omega)^2 \quad (I_{cm} = \frac{1}{2} MR^2)$

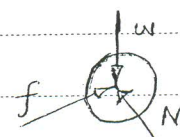
انرژی جنبشی زان نیست، هر دو جزء انرژی جنبشی مرکز جرم

روش دوم:

$\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \left(\frac{1}{2} M v_c^2 \right)_2 - \left(\frac{1}{2} M v_c^2 \right)_1 \Rightarrow f \times 1.6 + W (1.6 \sin 30^\circ)$

نکته: ثابت دراز است که بر روی آن است (معلوم چون $f = \mu N$) $\mu = 0.1$ است

$\int dr$ در طول مسیر



$= \frac{1}{2} M v_c^2 - 0 \Rightarrow v_c$ به دست می آید

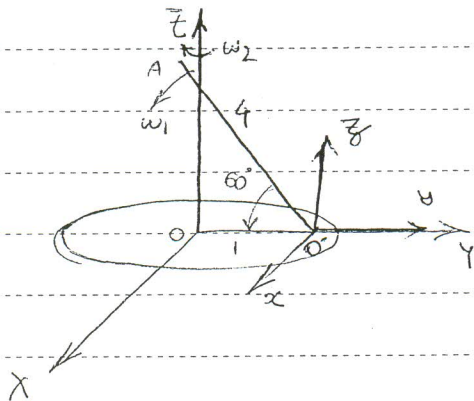
۱. فراموش از قانون دوم نیوتن

Subject:

Year. Month. Date. ()

۵۳ آزمون آشنایی - ۱۵۸۲ - ۱۳۹۱

(shames 15-82)

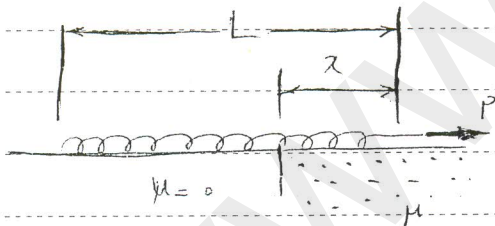


برای آشنایی با آزمون

مثال: زنجیری به جرم P در دامنه‌ای در امتداد سطحی افقی که قسمتی از آن صاف و قسمتی از آن زبر

است. با نیروی ثابت P کشیده می‌شود. در حالت $x=L$ سرعت زنجیر صاف x را بدست آوریم

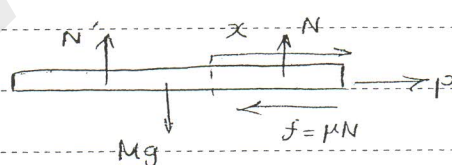
حالت P صاف باشد از زنجیر خارج شود



الف)

ابتدا نمودار جسم آزاد

$$\begin{cases} P - \mu N = ma \\ N = \rho x g \end{cases}$$



$$P - \mu \rho x g = ma = \rho L \frac{dv}{dt} \times \frac{dx}{dx}$$

$$(P - \mu \rho x g) dx = \rho L \left(\frac{dv}{dt} \right) dv \Rightarrow \int_{x=0}^{x=L} (P - \mu \rho x g) dx = \int_{v_0}^v \rho L v dv$$

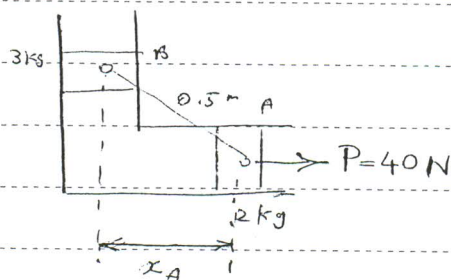
$$\Rightarrow P x - \mu \rho g \frac{x^2}{2} \Big|_0^L = \rho L \frac{v^2}{2} \Big|_0^v \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2P}{\rho} - \mu g L}$$

Subject:

Year. Month. Date. ()

$$\left. \begin{aligned} \int P - \mu N &= ma \\ N &= \rho x g \end{aligned} \right\} \Rightarrow \int P - \mu N_{max} = 0 \quad (-)$$

$$\Rightarrow P_{min} = \mu \rho L g$$



$a_A, a_B, T ?$

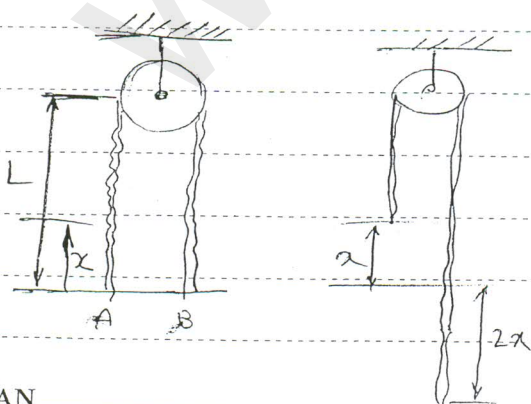
$$A: \sum F_x = m a_x \quad a_x, T$$

$$B: \sum F_y = m a_y \quad a_y, T$$

مثال: زنجیر به طول L و جرم ρ در افق طول به حال سقوط است. اگر به انتهای B یک

ب-جای کوچک باره شتر، آنرا به عدم حال باعث شتاب می شود تا بزرگ ب-جای

اگر بالای انتهای A، چنین حرکت A، وقتی $x = L$ به است آمد



$$\sum F_y = ma \Rightarrow 2x \rho g = ma$$

$$m = 2L \rho \Rightarrow a = \frac{x}{L} g$$

$$a = \frac{dv}{dz} \times \frac{dx}{dz} \Rightarrow a = \frac{v dv}{dx}$$

$$\int_0^v v dv = \int_0^L \frac{x}{L} g dx \Rightarrow v = \sqrt{g L}$$

$$\Rightarrow \frac{v^2}{2} = \frac{g}{2L} L^2$$

Subject:

Year. Month. Date. ()

۵۲

فصل پنجم: روش های مومنوم برای ذرات:

۱-۵. رابطه ی مومنوم. ضرب برای یک ذره

impulse

Momentum

الانزله حرکت

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\Rightarrow \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt = \int_{t_i}^{t_f} m \frac{d\vec{v}}{dt} dt = m\vec{v}_f - m\vec{v}_i$$

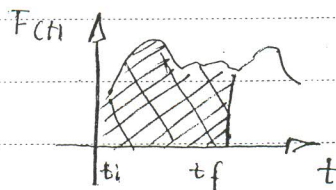
Impulse of the $\vec{F}$ during time interval $t_f - t_i$

linear Momentum Vector of the particle

منبره = تغییر مومنوم خطی (مومنوم زاویه ای بهر آن تعریف می شود)

تغییر مومنوم زده در آن فاصله ی زمانی = ایمپالس I در یک محدوده ی زمانی

سطح زیر منحنی $F-t$

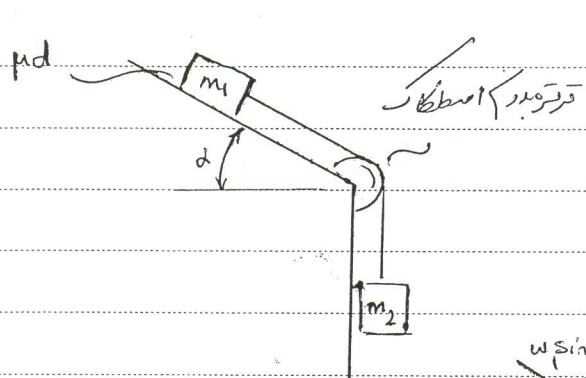


برخی برای $\vec{F}$ را نداریم ولی فرض می کنیم $\int F dt$ را داریم. همین با اصل بیان مومنوم را

داریم که کاربرد آن از $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ بیشتر است. این رابطه بر داری است (مطلوبه رابطه ی کار و انرژی)

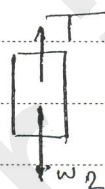
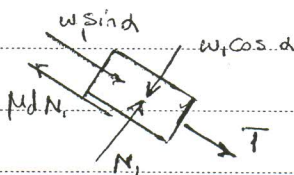
Subject :

Year . Month . Date . ()



مثال. سن گذشته را با t
سرعت v_1 و v_2 پیدا است؟

این مسئله از راه سینتیک به راحتی حل می شود.



$$f_1 = \mu d N_1 = \mu d w_1 \cos \alpha$$

برای m_1 : $\int_0^t (-\mu d w_1 \cos \alpha + w_1 \sin \alpha + T) dt = \frac{w_1}{g} (v - 0)$

برای m_2 : $(w_2 - T) t = \frac{w_2}{g} v$

از T حذف می کنیم : $v = \frac{g t}{w_1 + w_2} (\mu w_2 + w_1 \sin \alpha - \mu d w_1 \cos \alpha)$
در حالت برابری

2-5. مدارهای توصیف خطی برای سیستم ذرات

$$\vec{F} = \sum_{j=1}^n m_j \frac{d\vec{v}_j}{dt} \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \left(\sum_{j=1}^n m_j \vec{v}_j \right)_f - \left(\sum_{j=1}^n m_j \vec{v}_j \right)_i$$

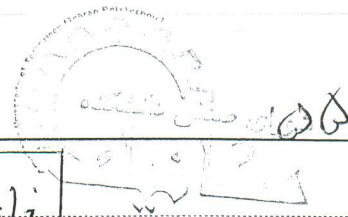
مجموع تغییرات انرژی
دارای سیستم ذرات در یک بازه زمانی

نسبت به t_1 : $M \vec{v}_C = \sum_{j=1}^n m_j \vec{v}_j$ (***1)

مختوم فضاوی ذرات = مختوم فضاوی با جرم کل M که
با سرعت مرکز جرم طایفه طایفه می شود

Subject:

Year. Month. Date. ()



(***) $\rightarrow \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt = M(v_c)_f - M(v_c)_i$

اگر سرعت مرکز جرم زرات را استیم این رابطه مفید خواهد بود.

* مثلاً در کامیونی که با سرعتی آن بوده، سرعت اولیه کامیون را داریم و کامیون ترمز می‌گیرد و بار از پشت کامیون

شروع به حرکت کند و به سرعت v برسد، سرعت کامیون چند است؟ ($t=3s$)

از رابطه $(***)$ استفاده می‌کنیم، سرعت و جرم بار در دو حالت اولیه و ثانویه و نیروی اصطکاک

و بازه زمانی را داریم ✓

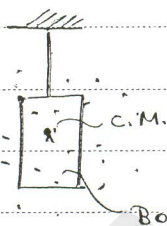
اگر بر آن نیروهای خارجی داریم زرات صفر باشد، آنگاه

$$M(v_c)_f = M(v_c)_i$$

اصل بقای مومنتوم خطی

Conservation of linear Momentum $\leftarrow$ Zero total Impulse

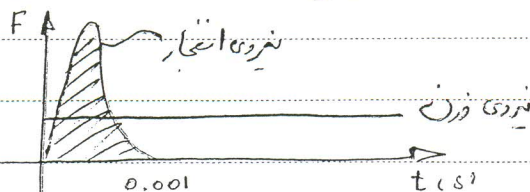
Impulsive Forces 3-5



ی فضا هم بینیم پس از انفجار Bomb رفتار ذره ها چگونه است؟

نیروهای سب انفجار و داخلی است پس مرکز جرم زرات سه از انفجار ثابت می‌ماند چون مدت انفجار کوتاه است، مرکز جرم زرات در آن مدت هنوز ثابت است (درست بعد از انفجار)

ولی بعد از گذشت زمان، زرات به سمت پایین سقوط می‌کند (نیروی وزن نیروی خارجی)



Subject :

Year . Month . Date . ()

* نیروهای که در زمان کوتاه اعمال می‌شوند ولی impulse آن‌ها قابل صرف نظر نیست را

نیروهای Impulsive می‌نامند.

اگر نیروی خارجی به یک سیستم اعمال شود، سرعت مرکز جرم تغییر می‌کند ولی مرتبته آن تغییری نکند
در زمان بسیار کوتاه

$$dx = v dt \text{ و در نتیجه به صفر میل می‌کند.}$$

* در مثال یک تینیسور در مدت زمان $0.005s$ ، نیروی محارل $600N$ به دست وارد می‌شود

(سرعت جدان توپ حدود $130 - 180$ ، جرم توپ را داریم و سرعت افقی اولیه $= 0$)

* مثلاً در توپ‌ها در گلوله و توپ قانون پای منقسم
و قرار است و میزان سرعت توپ به عقب آید
از سرعت گلوله به دست می‌آید پس از آن قانون بقای انرژی میزان جمع شدن گرانشی (هدر

شنبه ۱۷، ۱۹، ۱۳۸۶ ساعت ۱۱ الی ۱۳

۱۵۱۵ میان ترم دوم

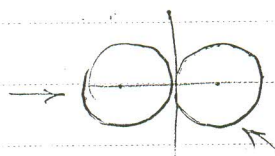
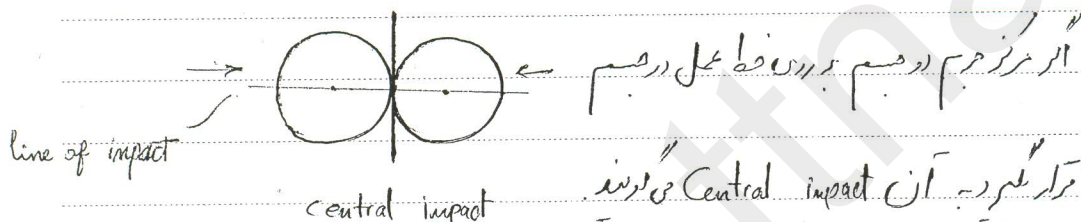
۴-۵ برخورد (Impact)

در بحث برخورد، زمانی برخورد کوتاه دلی نیروی برخورد بسیار زیاد است.

اگر دو جسم با هم برخورد نمایند، نیروی ضربه‌ای اصنام برخورد کننده ساری و مخالف یکدیگر هستند و لذا

ضربه‌ی کل صفر است. $(\int F dt = 0)$ بین اصل بقای درشتوم فطی برقرار است.

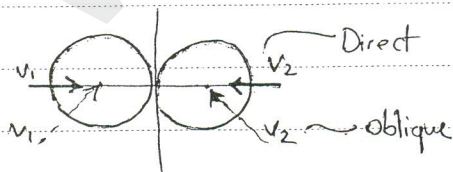
* استاندارد عددی برضفی برخورد را فطی عمل برخورد (line of impact) می‌نامند.



در این حالت نیز Central impact است.

در حالت اول سرعت‌ها در استاندارد فطی وصل کننده می‌مانند.

است به آن Direct central impact ضربه‌ی مستقیم و به دردی Oblique central impact ضربه‌ی مایل می‌گویند.



$$\text{اصل بقای درشتوم فطی} \quad (m_1 \vec{v}_1)_i + (m_2 \vec{v}_2)_i = (m_1 \vec{v}_1)_f + (m_2 \vec{v}_2)_f$$

فصل 1: برخورد نوع مرکزی مستقیم

چون بعد از قبل از برخورد سرعت‌ها در ابتدا خط را موازی می‌زنند. در این جا معادله بقای مومنتوم یک معادله در برخورد

ی رده. معادله دیگری از تغییر شکل اشیاء به دست می‌آید. (معادله بقای مومنتوم خطی است)

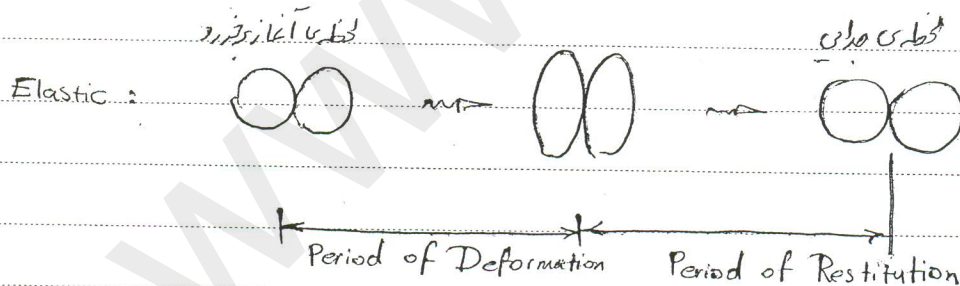
فصل 2: ضربی مرکزی مایل (در حالت کلی). در این جا 3 معادله بقای مومنتوم خطی در راستای x و y و

داریم که 6 مجهول ناشی از مؤلفه‌های سرعت در راستای x و y دارند. 3 معادله دیگر از اطلاعات

تغییر شکل ناشی می‌شود

حالت اول: ضربی مرکزی مستقیم

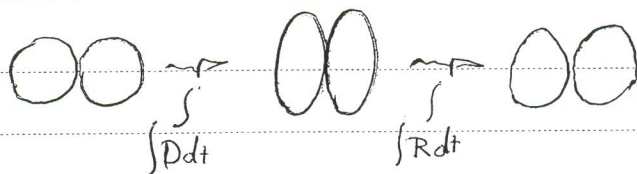
زمان برخورد = زمان تغییر شکل (از شروع برخورد تا جدا شدن) + زمان جدا شدن
Period of Restitution



① اشیاء کاملاً الاستیک (Perfectly Elastic) در تمام شکل اولیه خود را پس از برخورد در هنگام جدا شدن به دست می‌آورند.
(Perfectly elastic collision)

② اشیاء پلاستیک (Plastic) در تمام شکل اولیه خود را پس از برخورد در هنگام جدا شدن به دست نمی‌آورند.
(Inelastic collision)

Inelastic :



$$\epsilon = \text{Coefficient of Restitution} = \frac{\int R dt}{\int D dt} = \frac{\text{ایمالس هنگام بازگشت}}{\text{ایمالس هنگام تغییر فرم}}$$

ضرب بازگشت پذیری در ضربه

* ϵ معمولاً تابع مشخصات فیزیکی اجسام و سایر عوامل است و به صورت تجربی به دست می آید.

Mass 1 :

$$\int D dt = [(m_1 v_1)_D - (m_1 v_1)_i]$$

$$\int R dt = [(m_1 v_1)_f - (m_1 v_1)_D]$$

$$\epsilon = \frac{(v_1)_D - (v_1)_f}{(v_1)_i - (v_1)_D}$$

سرعت نهایی

سرعت اولیه

سرعت در Max Deformation

Mass 2 :

$$\epsilon = \frac{(v_2)_D - (v_2)_f}{(v_2)_i - (v_2)_D}$$

از طرفی در Max Deformation ، داریم : $(v_1)_D = (v_2)_D$

$$\epsilon = \frac{(v_2)_f - (v_1)_f}{(v_2)_i - (v_1)_i} = \frac{\text{سرعت نهایی جدا شده}}{\text{سرعت نهایی به هم رسیده}}$$

تمام سرعتها را به اشتراک

ابطالی فوق + ابطالی منقسم خطی ، مثالی با ابطالی کند

و چون اصرت یا فرج منفی می شوند ϵ مثبت است ، منفی باید در دراز باشد

برای الاستیک کامل: $\epsilon = 1$ $\int R dt = \int D dt$

برای ضربه غیر الاستیک: $\epsilon < 1$

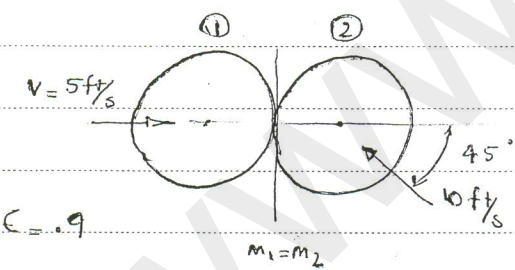
برای ضربه کاملاً الاستیک (بین از برخورد در جرم از جرم جدا نمی شوند) $\epsilon = 0$
و یا اینکه به جهت خود بعد از برخورد با هم می بمانند
 $(v_2)_f = (v_1)_f$

نقطه در حالتی که $\epsilon = 1$ است مانن جای اثری در قرار است چون در غیر این صورت قسمتی از انرژی

مصرف تغییر شکل در جرم می شود.

در سرد در جرم صلب ϵ تعریف نمی شود و مانن بجا می شوند و بجای اثری در قرار است.

حالت دوم - ضربه می مرکزی مایل:



مثال: دو توپ از جهت هم شایع هستند
ضربه می مرکزی مایل دارند

الف) سرعت توپ ها بعد از برخورد؟
ب) افت انرژی ضربه؟

الف) نیروی ضربه ای فقط در راستای line of impact خواهد بود پس نیروی در جهت قائم
نداریم و سرعت قائم در گوی در حالت نهایی و اولیه تغییری نمی کند.

سرعت ها $\oplus$ فرض می شوند

معادله اول: $m[(v_1)_x]_f + m[(v_2)_x]_f = m \times 5 = 7.07 \text{ m}$
مشتوم قبل از برخورد مشتوم بعد از برخورد

Subject

Date

۵۸

معادله درم

$$\epsilon = \frac{[(v_2)_x]_f - [(v_1)_x]_f}{-7.07 - 5}$$

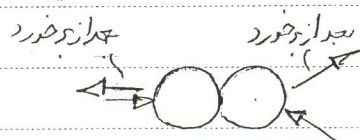
در معادله درم: $(v_1)_x)_f = -6.47 \text{ ft/s}$

$$(v_2)_x)_f = 4.40 \text{ ft/s}$$

$$[(\vec{v}_1)]_f = -6.47 \hat{i} \text{ ft/s}$$

$$[(\vec{v}_2)]_f = 4.40 \hat{i} + 7.07 \hat{j} \text{ ft/s}$$

سرعت قائم قبل از برخورد

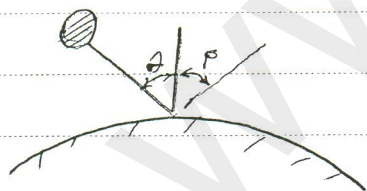


$$\Delta K_E = \frac{1}{2} m (5^2 + 10^2) - \frac{1}{2} m [6.47^2 + 4.40^2 + 7.07^2]$$

هون انرژی جنبشی اسکالر است.

در مورد برخورد یک جسم کوچک با جسم بسیار بزرگ، تغییر سرعت جسم بزرگ را تقریباً صفر نظری کنیم.

مثلاً در مورد زمین سرعت قبل و بعد از برخورد صفری داریم.



$$\hat{\theta} = \hat{\phi} ; \epsilon = 1 \text{ اگر}$$

$$\hat{\phi} > \hat{\theta} ; \epsilon < 1 \text{ اگر}$$

(چون v_2 کمتر شود)

اگر مثلاً در مورد برخورد توپ بزمین درگشت، گوییم می‌فهمیم و بقای انرژی جایی دهم

$$\begin{cases} \vec{F} = \dot{\vec{p}} \\ \vec{M} = \dot{\vec{H}} \end{cases}$$

اولی در بعضی سائل برای یکو نواحی و این در محاسبه
با هم محاسبات ریاضیاتی را حل می کنند مثل استاتیکی
که $\sum \vec{F} = 0$ و $\sum \vec{M} = 0$ حل کامل تری بود.

گشتاد و برآیندهای وارد بر ذره حول نقطه ی ثابت a (M_a) برابرست با نرخ تغییرات زمانی

گشتاد و مشتوق فعلی ذره حول نقطه ی a

$$\begin{cases} (M_a)_x = (\dot{H}_a)_x \\ (M_a)_y = (\dot{H}_a)_y \\ (M_a)_z = (\dot{H}_a)_z \end{cases}$$

7-5 - معادلات گشتاد و مشتوق برای مجموعه ی ذرات :

حالت اول - نقطه ی ثابت در دستگاه اینرسی :

برای ذره ی i ام :

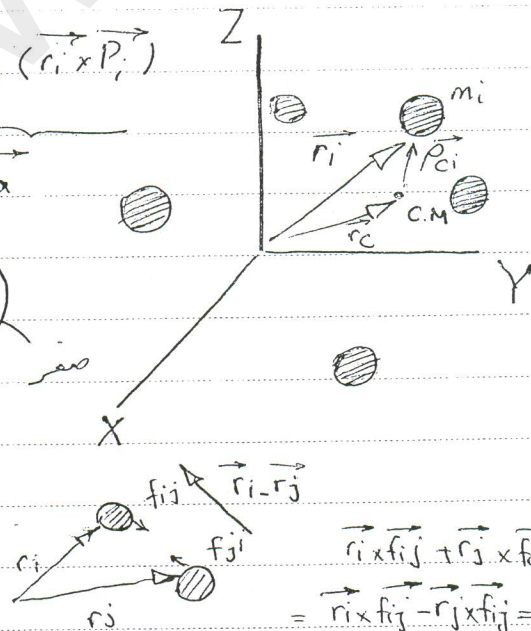
$$\underbrace{\vec{r}_i \times \vec{F}_i + \vec{r}_i \times \left(\sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij} \right)}_{\vec{M}_a} = \underbrace{\frac{d}{dt} (\vec{r}_i \times \vec{p}_i)}_{\vec{H}_a}$$

برای مجموعه ی ذرات :

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \underbrace{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{r}_i \times \vec{f}_{ij}}_{\text{صفر}}$$

$$= \frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) \right]$$

$(\dot{H}_a)_{\text{total}}$



$$\begin{aligned} & \vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{f}_{ji} \\ &= \vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} - \vec{r}_j \times \vec{f}_{ij} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{f}_{ij} = 0 \end{aligned}$$

Subject _____

Date _____

$$\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{M}_a \Rightarrow \vec{M}_a = \vec{H}_a$$

نرخ تغییرات زبانی کل $\vec{H}_a$ در
مرکز جرم خطی حول نقطه a

نسبت کل نیروهای خارجی وارده
سیستم زبات حول نقطه a ثابت است

$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{\rho}_{ci}$$

$$\vec{H}_a = \sum (\vec{r}_c + \vec{\rho}_{ci}) \times \vec{p}_i = \sum (\vec{r}_c + \vec{\rho}_{ci}) \times [m_i (\vec{r}_c + \vec{\rho}_{ci})]$$

$$\vec{H}_a = \vec{r}_c \times \vec{M} \vec{r}_c + \vec{r}_c \times \sum m_i \vec{\rho}_{ci} + \sum m_i \vec{\rho}_{ci} \times \vec{r}_c + \sum \rho_{ci} \times m_i \vec{\rho}_{ci}$$

$$\sum m_i \vec{\rho}_{ci} = \sum m_i \vec{\rho}_{ci} = 0$$

از طرفی
نسبت واصل جرم حول مرکز جرم

$$\vec{H}_a = \vec{r}_c \times \vec{M} \vec{r}_c + \sum \rho_{ci} \times m_i \vec{\rho}_{ci}$$

$$\Rightarrow \vec{H}_a = \vec{H}_c + \vec{r}_c \times \vec{M} \vec{r}_c$$

$$\vec{H}_a = \vec{H}_c + \vec{r}_{ca} \times \vec{M} \vec{r}_{ca}$$

نسبت واصل جرم a حول نقطه a
نسبت واصل جرم c حول مرکز جرم
نسبت واصل جرم a حول نقطه a

$$\vec{H}_a = \vec{H}_c + \vec{r}_{ac} \times \vec{M} \vec{V}_c \Rightarrow \vec{H}_a = \vec{H}_c + \vec{r}_{ac} \times \vec{M} \vec{V}_c + \vec{r}_{ac} \times \vec{M} \vec{V}_c$$

$$\Rightarrow \vec{M}_a = \vec{H}_c + \vec{r}_{ac} \times \vec{M} \vec{a}_c \quad \vec{M}_a = \vec{H}_a$$

حالت دوم - نقطه‌ی مبدا در مرکز جرم:

ثابت کنید اگر نقطه‌ی مبدا در مرکز جرم اختیار گردد:

$$\vec{M}_c = \vec{H}_c$$

توجه: در رابطه‌ی بالا اگرچه محاسبه‌ی گشتاور منقسم زاویه‌ی حول مرکز جرم انجام می‌شود ولی مشتق زمانی

ثابت است. XYZ باید گرفته شود.

حالت سوم: نقطه‌ای که ابتدا ثابت است به سمت مرکز جرم است.

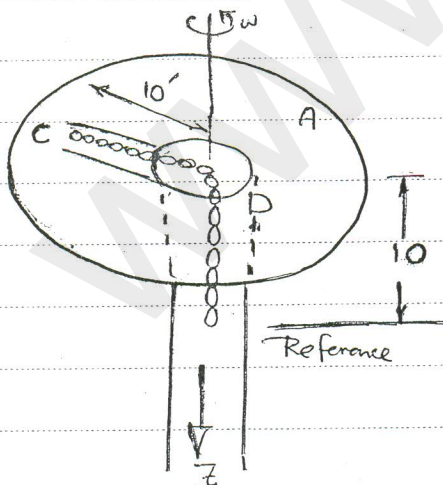
$$\vec{M}_b = \vec{H}_b$$

$$\begin{cases} \vec{M}_a = \vec{H}_a \\ \vec{M}_c = \vec{H}_c \\ \vec{M}_b = \vec{H}_b \end{cases}$$

a نقطه‌ی ثابت

c مرکز جرم

b نقطه‌ای که ثابت است آن از مرکز جرم می‌گذرد



$$\omega = 1 \text{ rad/s}$$

مثال

سرعت زنجیر پس از این که 5 به سمت پایین حرکت کرد، صاف راست است؟

$$\omega = 10 \text{ lb/ft}$$

Solution is Next page

Subject

Date

محاسبی بر ششتم حل خطی D

$$M_z = H_z, \quad M_z = 0 \Rightarrow H_z = 0 \Rightarrow H_z = cte \quad (\text{بقای ششتم زاویه ای})$$

(در سید زخم را با هم زخمی کنیم و نیروی خارجی نداریم)

(از ششتم زاویه ای سید حفظ می شود)

$$\Rightarrow (H_z)_1 = (H_z)_2$$

$$\Rightarrow \int_0^{10} r (r \omega_1) \left(\frac{w}{g} dr \right) = \int_0^5 r (r \omega_2) \left(\frac{w}{g} dr \right) \Rightarrow \omega_2 = 8 \text{ rad/s}$$

(ششتم خطی)
ششتم زاویه ای

$$(\text{بقای ششتم زاویه ای}) \quad \omega = \text{باقی بماند} \quad \text{انرژی زاویه ای شود} \quad (I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2 \quad \& \quad H = I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2)$$

ارتفاع وزن واحد طول

بقای انرژی برای حرکت مجرب

$$\begin{cases} (PE_1) = 10 w (10) + 10 w (5) = 1500 \text{ ft} \cdot \text{lb} \\ (DE_2) = 5 w (10) + 15 w (2.5) = 875 \text{ ft} \cdot \text{lb} \end{cases}$$

$$\begin{cases} KE_1 = \frac{1}{2} \int_0^{10} (r \omega_1)^2 \frac{w}{g} dr = 51.8 \text{ lb} \cdot \text{ft} \\ KE_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{5w}{g} \right) v^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{15w}{g} \right) v^2 + \frac{1}{2} \int_0^5 (r \omega_2)^2 \frac{w}{g} dr \end{cases}$$

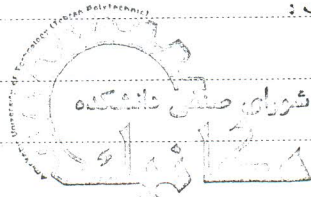
$$(PE_1) + (KE_1) = (PE_2) + (KE_2) \Rightarrow v = 9.19 \text{ ft/s}$$

در مسائل دینامیک از قانون دوم، قانون های ششتم خطی، قانون بقای ششتم زاویه ای

و قانون کار و انرژی می توانیم استفاده کنیم و با توجه به مورد استفاده از قانون

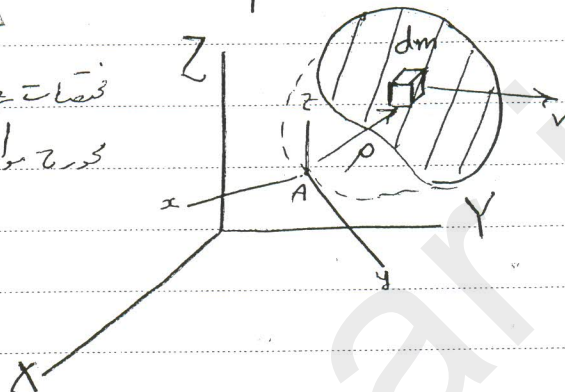
مورد نیاز استفاده می کنیم در آن مسئله از قانون بقای ششتم زاویه ای و کار و انرژی استفاده می کنیم

فصل ششم - سینماتیک حرکت صفحه‌ای جسم صلب:



1-b. معادلات گسترده مستقیم:

نقصات چرخه را در نقطه A متصل کردیم و محور موازی Z است پس حرکت صفحه‌ای داریم



Plane (XY) Motion = حرکت صفحه‌ای: هرگاه یک جسم برآزی یک صفحه‌ای می‌گردد، آن حرکت صفحه‌ای می‌گویند

نقطه A را بر روی جسم با امتداد فرض جسم امتداد می‌کنیم

$$d\vec{H}_A = \underbrace{\vec{r} \times (\underbrace{\vec{\omega} \times \vec{r}}_{\text{جسم} \times \text{سرعت خط}})}_{\text{المان} \times \text{سرعت مستقیم زادی ای}} dm$$

المان $\times$ سرعت خط
المان $\times$ نقطه از جسم صلب
نقطه نقطه‌ای دیگر از

$$(dH_A)_x \hat{i} + (dH_A)_y \hat{j} + (dH_A)_z \hat{k} = (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \times [\omega\hat{k} \times (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})] dm$$

$$\Rightarrow (dH_A)_x = -\omega x z dm \quad (\omega \text{ سرعت دورانی جسم نسبت به } XYZ)$$

$$(dH_A)_y = -\omega y z dm$$

$$(dH_A)_z = +\omega (x^2 + y^2) dm$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (H_A)_x = - \iiint_m \omega x z dm = - I_{xz} \omega \\ (H_A)_y = - \iiint_m \omega y z dm = - I_{yz} \omega \\ (H_A)_z = + \iiint_m (x^2 + y^2) dm = I_{zz} \omega \end{cases}$$

(این سه معادله را می توان به صورت ماتریس نوشت)

تعریف اینهاست: $I_{xx} = \int (y^2 + z^2) dm$, $I_{xy} = \int xy dm$ که فرض

$$\Rightarrow \begin{cases} (H_A)_x = - I_{xz} \omega \\ (H_A)_y = - I_{yz} \omega \\ (H_A)_z = + I_{zz} \omega \end{cases}$$

اگر محاسبات x و y تغییر کنند، I ها تغییر می کنند
و مقادیر H_A تغییر می کنند.

//
الر A

1- نقطه ای ثابت

2- مرکز جرم

3- نقطه ای با شتاب برابر مرکز جرم

باشد

$$\begin{aligned} \vec{M}_A &= \vec{H}_A \\ &= \left(\frac{d\vec{H}_A}{dt} \right)_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{H}_A \end{aligned}$$

$$\vec{M}_A = \frac{d}{dt} (-\omega I_{xz} \hat{i} - \omega I_{yz} \hat{j} + \omega I_{zz} \hat{k}) + \omega \hat{k} \times (-\omega I_{xz} \hat{i} - \omega I_{yz} \hat{j} + \omega I_{zz} \hat{k})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (M_A)_x = - I_{xz} \dot{\omega} + I_{yz} \omega^2 \\ (M_A)_y = - I_{yz} \dot{\omega} - I_{xz} \omega^2 \\ (M_A)_z = I_{zz} \dot{\omega} = I_{zz} \alpha \end{cases}$$

این تری رابطه ای است
معمولاً در دستگاه XYZ

معمولاً فرض می کنند که مرکز جرم ثابت است و در سیستم مبدأ $(M_A)_x$ و $(M_A)_y$ صفر می شوند
و فقط $(M_A)_z$ داریم.

2-6. در این مثال جسم دوار حول محور دوران می‌کند.



مثال:

Body of Revolution

اگر محور دوران باشد و جسم حول محور z دوران داشته باشد، آنگاه

$$I_{xy} = I_{xz} = 0$$

$$I_{yz} = I_{zx} = 0$$

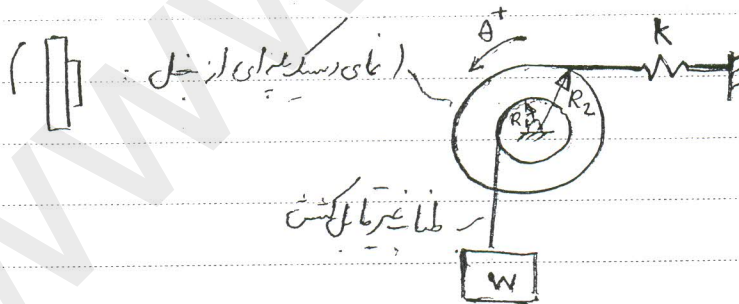
$\Rightarrow$

$$\begin{cases} M_z = I_{zz} \ddot{\theta} = I_{zz} \ddot{\theta} \\ M_x = M_y = 0 \end{cases}$$

$$\sum F_x = \sum F_y = \sum F_z = 0$$

چون $\sum F$ ها برابر باشند مرکز جرم در جرم جسم است
در دوران خالص حول محور z ، مرکز جرم ثابت
است و مشتاق ندارد (محور دوران از مرکز جرم می‌گذرد)

مثال:



$$R_1 = 0.3 \text{ m}$$

$$R_2 = 0.6 \text{ m}$$

$$W = (100 \text{ g}) \text{ N}$$

$$k = 2 \text{ N/mm}$$

$$m = 200 \text{ kg}$$

(جسم رسیک)

$$K = 0.4 \text{ m}$$

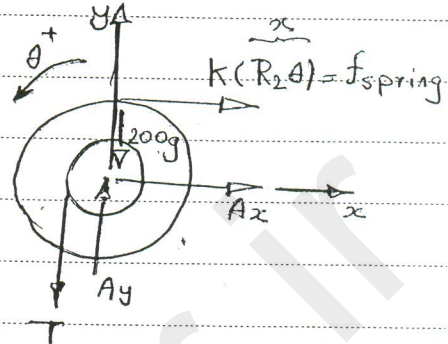
شعاع تریاسیون رسیک

رسیک که اگر کل جسم را در آن شعاع قرار دهیم

$$I_z = \int r^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm \text{ (شود)}$$

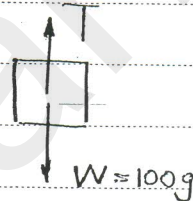
سین از 10° در آن، بیان کنید مقدار نیروهای تکیه گاه می باشد.

چون معادلات نیرو 3 مجهول (A_x, A_y, T) داریم
نیاز به معادلات مستقل داریم.
معم کلاً متعادل است:
چون جسم حول مرکز جرم خود در حال چرخش است



$$\Rightarrow \underbrace{TR_1 - (kR_2\theta)R_2}_{M_z} = \underbrace{(mK^2)}_{I_z} \ddot{\theta} \quad (1)$$

را چپ می کشد و به سمت راست می کشد



$$T - W = M\ddot{y} \quad (2)$$

$$R_1\ddot{\theta} = -\ddot{y} \quad (3)$$

①, ②, ③ if $\theta = 10^\circ \times \frac{2\pi}{360} = 0.1745 \text{ rad} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\theta} = 4.11 \text{ rad/s}^2 \\ T = 858 \text{ N} \end{cases}$

(T کمتر از W $\Rightarrow$ ته شست)

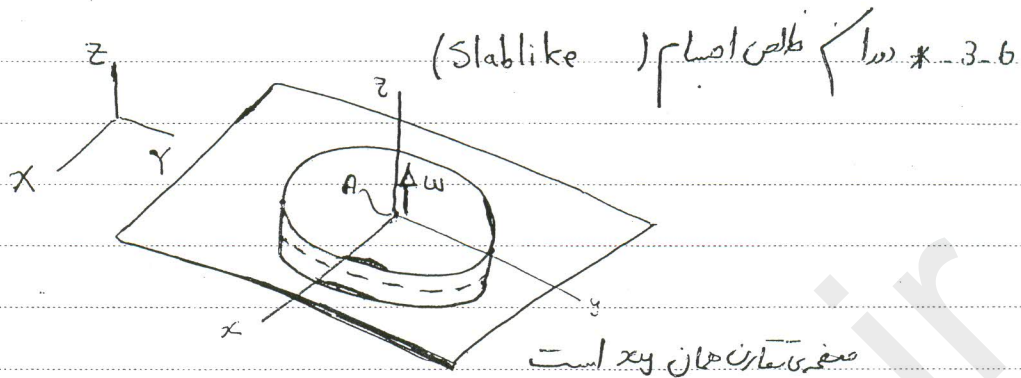
توجه: اگر جسم صفحه ای دارای در صفحه می تعادل باشد در محل محور قاطع در صفحه می تعادل باشد.

$$M_x = M_y = 0$$

$$M_z = I_{zz}\alpha$$

محورهای x و y در صفحه می تعادل است شده اند

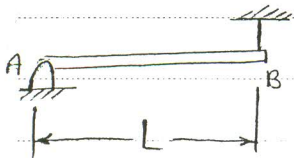
در اداه معادلات نیرو را بنویسید A_x, A_y را بدست می آوریم



$$M_x = M_y = 0$$

$$M_z = I_{zz} \alpha$$

نقطه‌ای ندارد A روی مرکز جرم باشد ولی باید روی به باشد در آنجا قرار شود. ولی اگر A روی مرکز جرم باشد، محادلات گشتاور به نسبت زوای فرقی نمی‌کند بلکه $\sum F = m a_c$ در زمانی که A روی مرکز جرم نباشد، a_c غیر صفر است و نیروی گشتاوی داریم در گره a_c صفر است.



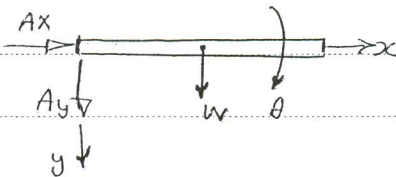
مثال: سله‌ای به وزن W در طول L در نقطه‌ای A لولاشده در نقطه‌ای B به سله‌ای یک سیم آویزان شده است.

الف - محض باره شدن سیم، نیرو در گره A چقدر است؟
ب - سیم از 45° در راستی نیرو در گره A چقدر است؟
الف -

$$\frac{WL}{2} = I_{zz} \ddot{\theta}$$

$$\frac{WL}{2} = \left(\frac{1}{3} mL^2 \right) \ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{3}{2} g/L$$

(در نقطه A)



$$\ddot{x}_{c.g.} = 0 \quad \ddot{y}_{c.g.} = L/2 \ddot{\theta} = \frac{3}{4} g$$

$$A_x = \frac{W}{g} \ddot{x} = 0$$

$$A_y = \frac{W}{g} \ddot{y} - W \Rightarrow A_y = -\frac{W}{4}$$

(به اندازه سیم از A_y $\frac{W}{4}$ به $\frac{W}{2}$ است)

Subject

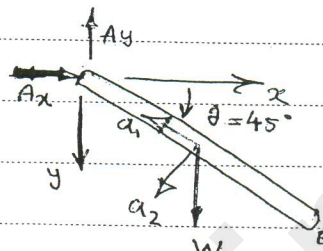
Date

چون نقطه A نقطه ای ثابت بر روی AB است،
معادله ی تار-مشتوم زاری ای برای نقطه A برقرار است:

$$W \frac{L}{2} \cos \theta = \frac{1}{3} \frac{W}{g} L^2 \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{3}{2} g L^{-1} \cos \theta$$

(معادله ی دینامیک رتبه ی دوم غیر خطی)



$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{3}{2} g L^{-1} \cos \theta \Rightarrow \frac{\dot{\theta}^2}{2} = \frac{3}{2} g L^{-1} \sin \theta + C$$

$$\left. \begin{array}{l} \theta = 0 \\ \dot{\theta} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{3g}{L} \sin \theta \quad \text{if } \theta = 45^\circ \Rightarrow \dot{\theta}^2 = 2.12 g/L$$

طال شتاب مرکز جرم سله در در راستای افقی شود:

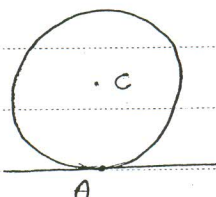
$$(a_1)_{\text{افقی}} = \frac{L}{2} (\dot{\theta})^2 = 1.06 g$$

$$(a_2)_{\text{افقی}} = \frac{L}{2} \ddot{\theta} = 0.53 g$$

$$\begin{cases} \sum F_x = m a_x \\ \sum F_y = m a_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_x = \frac{W}{g} (-a_2 \sin 45^\circ - a_1 \cos 45^\circ) \\ -A_y + W = \frac{W}{g} (-a_1 \sin 45^\circ + a_2 \cos 45^\circ) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_x = -1.124 W \\ A_y = 1.375 W \end{cases}$$

4-6. غلتش امیسا (Slablike)



رابطه $M = I \alpha$ برای b, a, c برقرار است

در مورد A I حول A در مورد C I حول C خواهد بود.

مثال:

$$D_B = 600 \text{ mm}$$

$$W_A = 100 \text{ N}$$

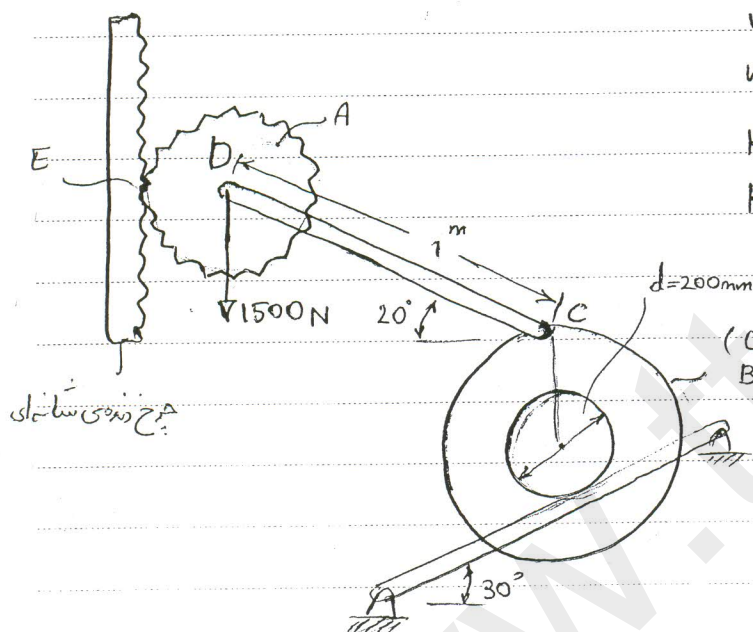
$$W_B = 1000 \text{ N}$$

$$K_B = 250 \text{ mm}$$

$$K_A = 120 \text{ mm}$$

$$D_A = 300 \text{ mm}$$

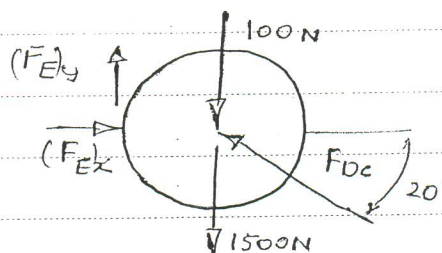
$$d = 200 \text{ mm}$$



چرخ زنده شانه ای

$$F_{CD}?$$

بکوره آزاد جسم A



چون DC عضو دینری است (بدون وزن بدون نیلای DC وین) F_{CD} در امتداد عضو DC است که عکس این نیرو عضو DC داردی شود

برای بدست آوردن محالات، حول نقطه ثابت E (غلتش) I را بدست می آوریم:

گشایر می شود حول نقطه:

تصویر انتقال شعاع براسین

$$-(100 + 1500) \times 0.15 + F_{DC} \times \sin 20^\circ \times 0.15 = \frac{100}{9.81} [0.12^2 + 0.15^2] \ddot{\theta}_A$$

$$I_E$$

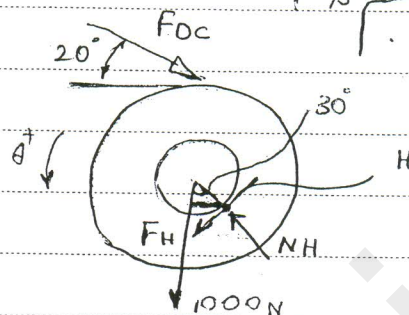
Subject _____
Date _____

برای نقطه H :

$$(F_{DC} \sin 20^\circ + 1000) \sin 30^\circ \times 0.1$$

$$- (F_{DC} \cos 20^\circ) (0.3 + 0.1 \cos 30^\circ)$$

$$= \frac{1000}{9.81} [0.25^2 + 0.1^2] \ddot{\theta}_B$$



محور $\ddot{\theta}_B, \ddot{\theta}_A, F_{DC}$ را هم
و $\ddot{\theta}_B, \ddot{\theta}_A$ را نسبت به هم مرتبط می کنیم

$$\vec{a}_C = \vec{a}_D + \vec{\omega}_{DC} \times \vec{\rho}_{DC} + \vec{\omega}_{DC} \times (\vec{\omega}_{DC} \times \vec{\rho}_{DC})$$

ابتدا $\vec{\omega}_{DC}$ را از جهت نقطه D به سمت C می آوریم

$$\ddot{\theta}_B \hat{k} \times [(0.3 + 0.1 \cos 30^\circ) \hat{j} - (0.1 \sin 30^\circ) \hat{i}] = \ddot{y}_D \hat{j} + \omega_{DC} \hat{k} \times (\cos 20^\circ \hat{i} - \sin 20^\circ \hat{j})$$

$$\ddot{y}_D = 0.15 \ddot{\theta}_B$$

✓ شانه ها
این بحث

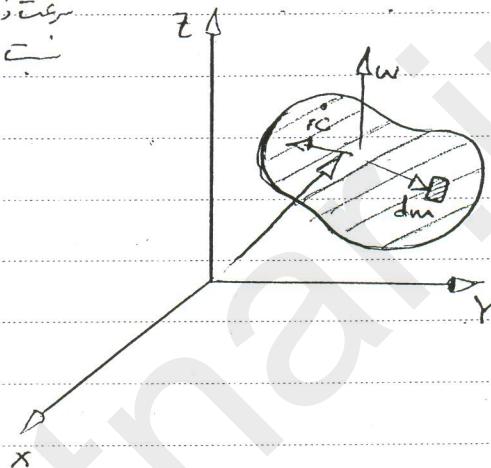
فصل هفتم - روش های انرژی و ایچالاس - روش سوم برای اجسام صلب

$$KE = \frac{1}{2} M \dot{\vec{r}}_c^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{\rho}}_i^2$$

7-1. انرژی جنبشی جسم صلب:

برای بدنه صلب: $\dot{\vec{\rho}}_i = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i$ (سرعت ذره را نام بست به مرکز جرم)

(ω سرعت زاویه ای مطلق صلب)



$$KE = \frac{1}{2} M V_c^2 + \frac{1}{2} \underbrace{\int \int \int_M |\vec{\omega} \times \vec{\rho}|^2 dm}_{\text{rotational KE}}$$

$$Q = \frac{1}{2} \int \int \int (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) dm$$

در نقطه x, y, z در مرکز جرم قرار داده می شود در این دستگاه $\vec{\rho}$ در این دستگاه نوشته می شود

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{2} \int \int \int [\omega_x \hat{i} + \omega_y \hat{j} + \omega_z \hat{k}] \cdot [x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}] \cdot [x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}]$$

$$= \frac{1}{2} \int \int \int |\omega \times \rho|^2 dm = \frac{1}{2} \{ I_{xx} \omega_x^2 - I_{xy} \omega_x \omega_y - I_{xz} \omega_x \omega_z$$

$$- I_{yx} \omega_x \omega_y + I_{yy} \omega_y^2 - I_{yz} \omega_y \omega_z - I_{zx} \omega_z \omega_x - I_{zy} \omega_z \omega_y$$

(I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} ها مستطقی نیستند)

$$+ I_{zz} \omega_z^2 \}$$

$$\Rightarrow KE = \frac{1}{2} M V_c^2 + \frac{1}{2} (I_{xx} \omega_x^2 + I_{yy} \omega_y^2 + I_{zz} \omega_z^2 + 2 I_{xy} \omega_x \omega_y + 2 I_{yz} \omega_y \omega_z + 2 I_{zx} \omega_z \omega_x)$$

که عبارت های داخل پرانتز

اگر محورها x, y, z محورها اصلی باشند (یعنی I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} : Max و بقیه I ها صفر)!

$$KE = \frac{1}{2} M V_C^2 + \frac{1}{2} (I_{xx} \omega_x^2 + I_{yy} \omega_y^2 + I_{zz} \omega_z^2)$$

(1) از سبب حرکت

(2) به سبب چرخش

(3) به سبب حرکت مرکز جرم

* اگر جسم در این فاصله حول محور عمود بر صفحه داشته باشد یا یک نقطه از جسم داشته باشد یا یک نقطه از صفحه داشته باشد:

$$KE = \frac{1}{2} M V_C^2 + \frac{1}{2} I_{zz} \omega^2$$

حرکت خطی

حرکت دورانی

محور چرخش در راستای محور دوران

بقیه $\omega_x = \omega_y = 0$ و $\omega_z = \omega$

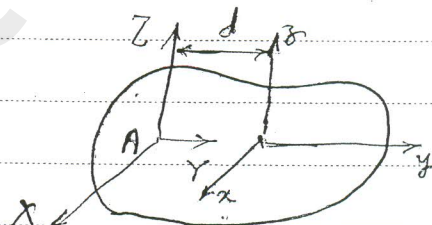
همه متغیران هم نیاز نیست

فاصله از مرکز جرم

$$V_C = \omega d$$

$$\Rightarrow KE = \frac{1}{2} M d^2 \omega^2 + \frac{1}{2} I_{zz} \omega^2$$

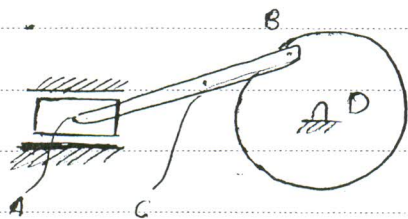
$$= \frac{1}{2} (I_z + M d^2) \omega^2 \xrightarrow{\text{تعبیر آنتال}} \frac{1}{2} I \omega^2$$



معمولاً حرکت دورانی حول یک نقطه * بعد از مرکز جرم * (حول محور دوران که از A می گذرد)

هر جا در حرکت خطی ω داریم در دورانی I و هر جا V داریم ω (مثلاً برای ذره $KE = \frac{1}{2} M V^2$)

مثال: مکانیزم لنگه لغزنده (سیستم اصطراق داخلی)



$$KE_{\text{کل سیستم}} = \underbrace{\frac{1}{2} m V_A^2}_{\text{آرپی}} + \underbrace{\frac{1}{2} I_D \omega_D^2}_{\text{دیسک}} + \underbrace{\frac{1}{2} M V_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega_{AB}^2}_{\text{میل}}$$

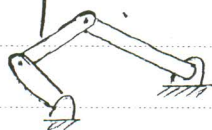
در این مسئله ω یک یا سرعت جسم A معلوم است.

7-2- رابطه کار و انرژی:

در این ثابت گردیده برای اجسام صلب، کار نیروهای داخلی صفر است.

اگر نیروهای داخلی یک جسم صلب کار انجام نمی دهند ولی نیروهای اجسام صلب یک سیستم

ممکن است کار انجام دهند اگر صریحاً قانون سوم نیوتن، این نیروها برابر و طواف مت هم هستند.



در جسم صلب نیز مانند مجسمه ذرات را داریم، نیروهای پایستار: $(PE_1) + (KE_1) = (PE_2) + (KE_2)$

نیروهای ناپایستار: $\Delta (PE + KE) = W_{1-2}$

