

بسمه تعالی



نام جزوه: دینامیک 2

نام استاد: دکتر اوحدی

دانشگاه: صنعتی امیرکبیر

امتحان میان آرم

نتیج منته

88/11/27 ساعت 11

Subject:

Year. Month. Date. (P)

دستبند 2

1- سینه‌بند جسم صلب در مضا (حرکت نمی‌نمایان باشد)

نزدیکی اولی

2- سینه‌بند جسم صلب در مضا

اندازه حرکت زائیدای جسم صلب در مضا

تسور محال (نمی‌شود)

معادلات حرکت جسم صلب برای حرکت نسبی

معادلات حرکت اولی

اصل ضرب و مقدار حرکت

انرژی جنبشی جسم صلب در حرکت نسبی

اصل کار و انرژی

حرکت جسم صلب حول نقطه ثابت

حرکت آزاد از استار یک جسم نامتناهی دوری

حرکت آزاد از استار یک جسم نامتناهی

حرکت فزونی

حرکت تیر و کوب

3- معادلات لاگرانژ (مقدارهای برداشت کلی)

Subject:

Year. Month. Date. ()

سرعت برداشتی I
سینتیک ذرات فادی

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \hat{e}_t$$

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

سرعت برداشتی - برداشتی مسافت
Rectangular
سرعت برداشتی - برداشتی مسافت
Path variable

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \hat{e}_t$$

$$\vec{a} = \frac{d^2s}{dt^2} \hat{e}_t + \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{R} \hat{e}_n$$

درجهت مرکز انحنای مسیر

سرعت برداشتی در مختصات استوانه‌ای

$$\vec{r} = r\hat{e}_r + z\hat{e}_z$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta + \dot{z}\hat{e}_z$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta + \ddot{z}\hat{e}_z$$

$$\hat{e}_r = \cos\theta\hat{e}_x + \sin\theta\hat{e}_y \quad \hat{e}_\theta = -\sin\theta\hat{e}_x + \cos\theta\hat{e}_y$$

سوال آخر انتخاب دینامیک I

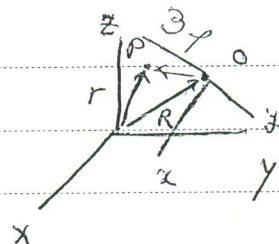
تعداد از آنکه انتخاب باید می شود چون r در حال تغییر است r داریم و r² نیز داریم
چون زاویه در حال تغییر است اما از آنکه این انتخاب چهار برابر می شود

سرعت برداشتی در مختصات کروی

Subject:

Year. Month. Date. (2)

از دستگاه یو جی سی به دستگاه بزرگ انتقالی داشته باشیم



$$\left(\frac{dA}{dt} \right)_{xyz} = \left(\frac{dA}{dt} \right)_{xy3}$$

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{\rho}$$

$$\vec{v}_{xyz} = \dot{\vec{R}} + \vec{v}_{xy3}$$

$$\vec{a}_{xyz} = \vec{a}_{xy3} + \ddot{\vec{R}}$$

سینای جسم صلب - حرکت نسبی

حرکت انتقالی
مستقیم الخط
مغزی الخط

حرکت دورانی (حول محور، حول نقطه)

حرکت عمومی = حرکت انتقالی + حرکت دورانی

نقشه مثال

مثق بردار ثابت A در دستگاه متحرک

$$\left(\frac{dA}{dt} \right)_{xyz} = \vec{\omega} \times A$$

$$\left(\frac{d^2 A}{dt^2} \right)_{xyz} = \vec{\omega} \times A + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times A$$

A می تواند بردار جسم صلب و $\vec{\omega}$ می تواند بردار چرخش و $\vec{\omega}$ می تواند بردار چرخش و $\vec{\omega}$ می تواند بردار چرخش

جسم صلب باشد

$$\vec{v}_b = \vec{v}_a + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{\rho}_{ab}}_{\vec{v}_{b/a}}$$

برای نقطه از یک جسم صلب

$$\vec{a}_b = \vec{a}_a + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{\rho}_{ab} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{\rho}_{ab}}_{\vec{a}_{b/a}}$$

Subject:

Year. Month. Date. ()

مشتق بردار غیر ثابت در دستگاه مختصات xyz

$$\left(\frac{dA}{dt}\right)_{xyz} = \left(\frac{dA}{dt}\right)_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{A}$$

نویسندگی در این دستگاه مختصات xyz

نویسندگی در دستگاه مختصات xyz

نویسندگی در دستگاه مختصات xyz

$$\vec{v}_{xyz} = \vec{v}_{xyz} + \vec{R} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

نویسندگی در دستگاه مختصات xyz

$$\vec{a}_{xyz} = \vec{a}_{xyz} + \vec{R} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}$$

دینامیک در مختصات کروی - مختصات قطبی

$$F_r = m a_r = m \frac{d^2 r}{dt^2}$$

$$F_\theta = m a_\theta = m \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

$$F_z = m a_z = m \frac{d^2 z}{dt^2}$$

قانون نیوتن - مختصات استوانه‌ای

$$F_r = m (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2)$$

$$F_\theta = m (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta})$$

$$F_z = m \ddot{z}$$

$$F_t = m \frac{d^2 s}{dt^2}, \quad F_n = m \frac{(ds/dt)^2}{R}$$

Subject:

Year: Month: Date: (3)

$$\vec{F}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \vec{f}_{ij} = m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2}$$

سیستم ذرات

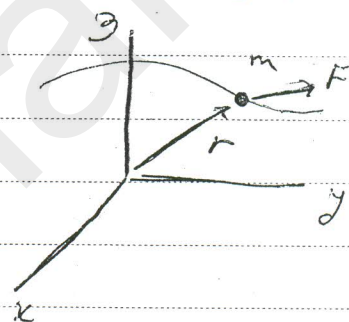
$\vec{f}_{ij}$ نیروی ناشی از ذره j بر ذره i

$$\vec{F} = M \frac{d^2 \vec{r}_c}{dt^2} \quad M \vec{r}_c = \sum m_i \vec{r}_i$$

$$\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} m (\vec{v}_2^2 - \vec{v}_1^2)$$

W_{1-2}

کار انرژی ذرات



میدان نیروی گزینشی (پایسته)

$$W_{1-2} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_1(x_1, y_1, z_1) - E_2(x_2, y_2, z_2)$$

$$\Delta E = - \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0, \quad \vec{F} = - \nabla E$$

اصل بقای انرژی

$$(PE)_1 + (KE)_1 = (PE)_2 + (KE)_2$$

سیستم گزینشی

$$\int_1^2 \vec{F}_{non\,Con} \cdot d\vec{r} = \Delta(KE)_{1,2} + \Delta(PE)_{1,2}$$

سیستم غیر گزینشی

$$\Delta(KE + PE) = W_{1-2}^{nc}$$

$$\int_1^2 \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i + \int_1^2 \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \vec{f}_{ij} \cdot d\vec{r}_i$$

کار داخلی کار بیرونی

برای سیستم ذرات

لکه کار بیرونی جاری

P4PCO

$$= \frac{1}{2} (m_i v_i^2)_2 - \frac{1}{2} (m_i v_i^2)_1$$

↑

Subject:

Year: Month: Date: ()

کاربردهای داخلی در سیستم ذرات صفر نیست

انرژی جنبشی برای مرکز جرم

$$KE = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_{ci}^2$$

$$\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}_c = \frac{1}{2} M [(v_c)_2^2 - (v_c)_1^2]$$

البرقهای نبردهای خارجی به مرکز جرم منتقل می شود می توان از فرمول بالا استفاده کرد

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F} \cdot dt = m \vec{v}_f - m \vec{v}_i$$

ایمانس نبرد در زمان معین

تغییر اندازه حرکت

موسوم ذرات

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F} \cdot dt = M (\vec{v}_c)_f - M (\vec{v}_c)_i$$

نبردهای ایمانسی Impulsive

در زمان کوچکی Impulse، با گذردی شود مانند انفجار

Impact برخورد

اصول بقا در سیستم جنبشی در قرار است

برخورد مرکزی، مرکز جرم دو جسم در روی خط برخورد $\rightarrow$ سیستم

$$e = \frac{\text{سرعت نسبی جدایش}}{\text{سرعت نسبی نزدیک شدن}} = \text{Coefficient of restitution}$$

$e = 0$ برخورد کاملاً ناکلیک

$e = 1 \rightarrow$ برخورد الاستیک

$$0 < e < 1$$

Subject:

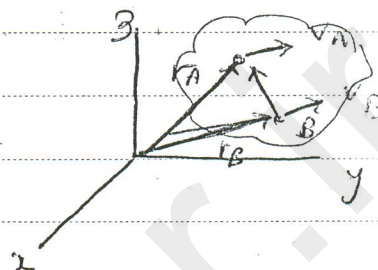
Year. Month. Date. 4

سینکس جسم صلب در فضا
از نوع حرکت خطی سینکس جسم صلب
حرکت انتقالی (Translation)

rect. Translat
Corrilinear Translat

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B$$



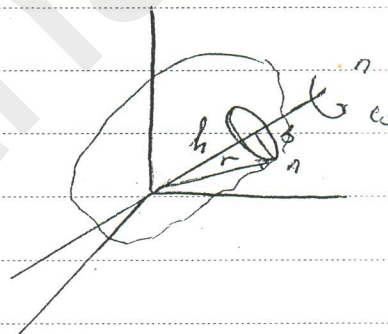
fixed Axis Rotation

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times (\vec{h} + \vec{b})$$

$$= \omega \times h + \vec{\omega} \times b = \vec{\omega} \times b$$

$$\vec{a}_A = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r} + \omega \times \omega \times \vec{r}$$

$$\begin{cases} a_t = b\alpha = b\dot{\omega} \\ a_n = b\omega^2 \end{cases}$$

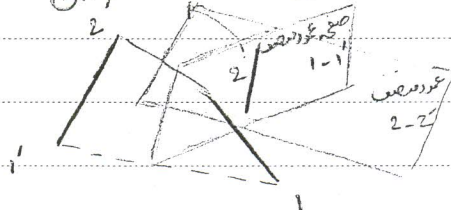


حرکت موازی صفحه Parallel-plane motion

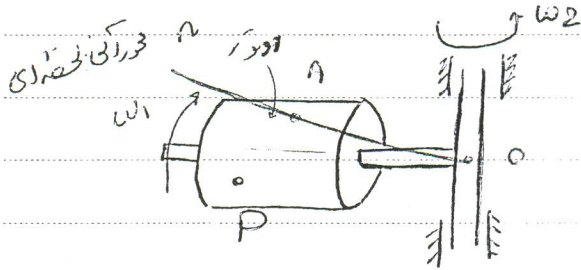
تمام نقاط هر جسم موازی صفحه حرکت می کنند
Plane of motion

در این حرکت سینکس در یک نقطه Rotation about a fixed point

جسم در یک نقطه در فضا می تواند تغییر کند



During a pure rotation of a rigid body about a fixed pivot there is one line all points of which suffer zero net displacement. In general the points on this line may have motion during the displacement but will return to their original position on the rotation axis $O-n$.
 Instantaneous Axis of Rotation

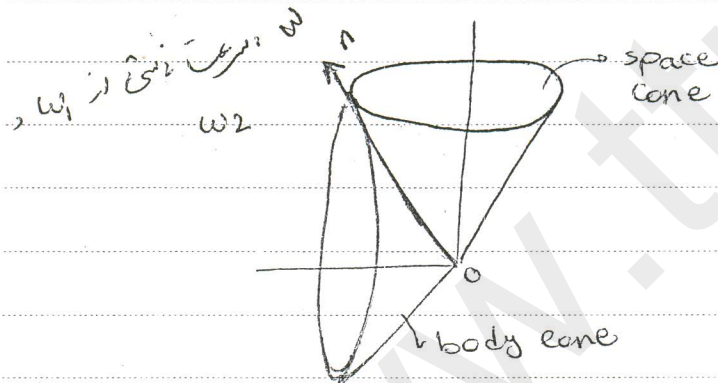


Rotor's spinning speed = ω_1
 حول محور خود

Rotation about fixed vertical axis = ω_2

سرعت نقطه A نسبت به زمین ω_2
 سرعت نقطه A نسبت به محور خود ω_1

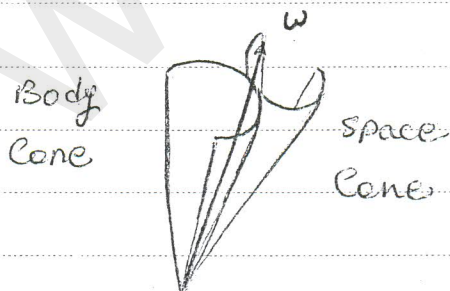
Body & space cones



مکان هندسی شاقه ON حول
 دوران ω_2

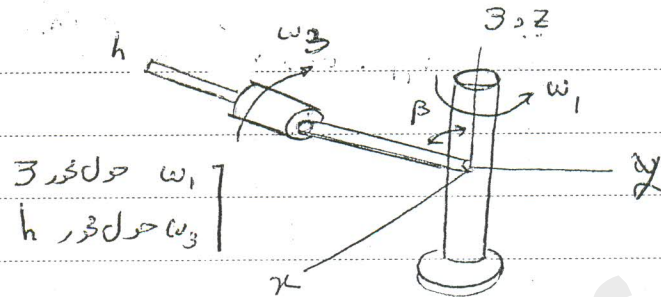
body cone = ?

اگر مقدار ω_1 و ω_2 نسبت به یکدیگر
 ثابت در محوطه را خواهیم داشت
 اما اگر مقدار این دو در درجه ثابت نباشد محوطه به شکل زیر خواهد بود



Subject:

Year. Month. Date. 5



$$\begin{aligned}\vec{\omega} &= \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3 \\ &= \omega_1 \hat{k} + \beta \dot{\beta} \hat{i} + \omega_3 \hat{h} \\ &= \omega_1 \hat{k} + \beta \dot{\beta} \hat{i} + \omega_3 (\cos \beta \hat{k} - \sin \beta \hat{j})\end{aligned}$$

Precession rate rotation rate spin rate

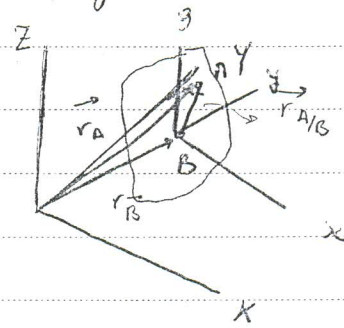
$$\begin{aligned}\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}} &= \dot{\vec{\omega}}_1 + \dot{\vec{\omega}}_2 + \dot{\vec{\omega}}_3 \\ &+ \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2 + (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{\omega}_3 \\ &= \dot{\vec{\omega}}_1 + \dot{\vec{\omega}}_2 + \dot{\vec{\omega}}_3 \\ &+ \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3) + \vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_3\end{aligned}$$

Gyroscopic effects

$$\hat{n} = \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}$$

General Motion

Translating Reference Axis



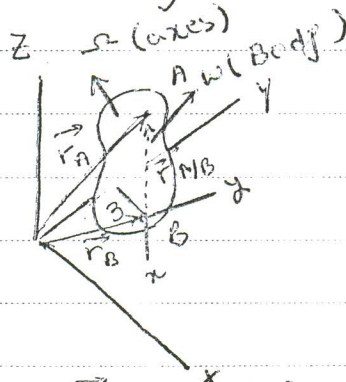
$$\begin{aligned}\vec{v}_A &= \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B} = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B} \\ \vec{a}_A &= \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B} \\ &= \vec{a}_B + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{A/B} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B}\end{aligned}$$

Subject:

Year: Month: Date: ()

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A} - \vec{r}_{A/B}$$

Rotating References



نحوه‌ای سب دورانی

دسته دورانی انتقالی متغیر را دارد

دلی حرکت دورانی با سرعت زاویه‌ای

را هم دارد که سرعت دورانی جسم

تغییرات است

$$\dot{\hat{i}} = \vec{\omega} \times \hat{i}$$

$$\dot{\hat{k}} = \vec{\omega} \times \hat{k}$$

$$\dot{\hat{j}} = \vec{\omega} \times \hat{j}$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B} + \vec{v}_{rel} = \vec{v}_B + \underbrace{\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}}_{\vec{v}_{rel}} + \underbrace{x\dot{\hat{i}} + y\dot{\hat{j}} + z\dot{\hat{k}}}_{-\vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B}}$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} + \vec{a}_{rel}$$

$$\vec{v}_{rel} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$$

$$\vec{a}_{rel} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}$$

سرعت نسبت به A نسبت به دورانی

از دید ناظر متغیر به دورانی

$$\vec{a}_{rel} = \vec{v}_{rel} = 0$$

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}$$

اگر دورانی متغیر به جسم نیست

سین حال، رابطه متغیر حاصل می شود

$$\vec{v}_{xyz} = \vec{v}_{xy\theta} + \vec{R} + \vec{\omega} \times \vec{p}$$

$$\vec{a}_{xyz} = \vec{a}_{xy\theta} + \vec{R} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{xy\theta} + \vec{\omega} \times \vec{p} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{p}$$

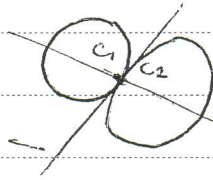
Subject:

Year. Month. Date. 6

Rolling

حرکت غلتشی
حرکت غلتشی یک حالت خاص از حرکت متشکک جسم صلب است
حرکت غلتشی یک جسم بر روی زمین
حرکت غلتشی یک جسم بر روی جسم دیگر

Plane of Contact



normal line

سرعت نسبی نقطه تماس در جهت عمود بر خط

مماس بر خط در جهت

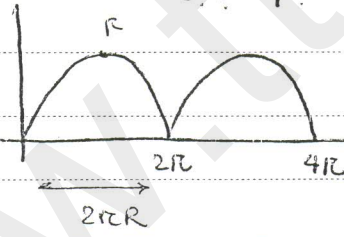
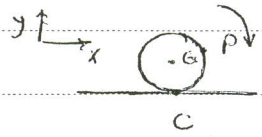
در حال غلتش (معمولاً صلب بودن)

$$\vec{v}_{C1} = \vec{v}_{C2}$$

← در غلتش ناب

$$\vec{v}_{A/B} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$$

نقطه تماس در جهت عمود بر خط



$$\vec{v}_P = \vec{v}_G + \vec{\omega} \times \vec{r}_{P/G} = \dot{x} \hat{i} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{P/G}$$

$$\vec{v}_C = 0 \Rightarrow \vec{v}_G = -(\omega \hat{k} \times (-R \hat{j})) = R\omega \hat{i} = R\dot{\theta} \hat{i}$$

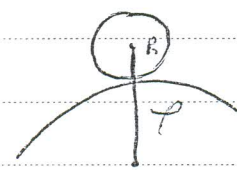
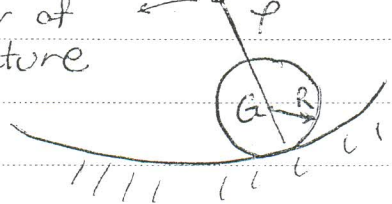
$$x = R\theta$$

$$\vec{a}_P = R\ddot{\alpha} \hat{i} + (-\ddot{\alpha} \hat{k} \times \vec{r}_{P/G}) - \omega^2 \vec{r}_{P/G}$$

if $P=C$

$$\vec{a}_C = R\omega^2 \hat{j}$$

center of curvature



Concave upward

Convex curve

Subject:

Year. Month. Date. ()

$$\vec{v}_G = R\omega \hat{e}_t$$

$$\vec{a}_G = R\alpha \hat{e}_t + R\frac{\omega^2}{\rho} \hat{e}_n$$

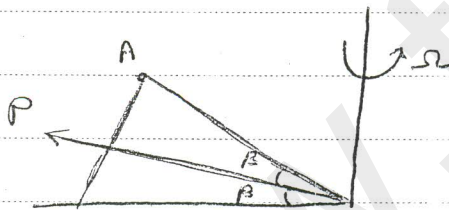
$$\vec{a}_C = R\omega^2(1 + R/\rho) \hat{e}_n$$

Concave

Convex curve

$$\vec{a}_C = R\omega^2(-1 + R/\rho) \hat{e}_n$$

فصل ١٠ - حركت دایره ای
در حالت $\rho < 0$ ، Concave است ، در حالت $\rho > 0$ ، Convex است



$$v_A = ?$$

$$a_A = ?$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_A &= ? \\ \vec{a}_A &= ? \end{aligned}$$

Subject:

Year. Month. Date. 7

Moment of Momentum

چند روش
برای محاسبه این

linear
Momentum

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{p}} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

$$\vec{r}_a \times \vec{F} = \vec{r}_a \times \dot{\vec{p}}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_a \times \vec{p}) = \dot{\vec{r}}_a \times \vec{p} + \vec{r}_a \times \dot{\vec{p}}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_a + \vec{r}_{a/c} \quad \vec{r} = \vec{r}_a$$

$$\dot{\vec{r}}_a \times \vec{p} = \dot{\vec{r}}_a \times m\vec{r} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{r}_a \times \vec{p}) = \vec{r}_a \times \dot{\vec{p}}$$

$$\Rightarrow \vec{r}_a \times \vec{F} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_a \times \vec{p}) = \dot{\vec{H}}_a$$

$$\vec{M}_a = \dot{\vec{H}}_a \quad H: \text{Angular Momentum vector}$$

$$(M_a)_x = (\dot{H}_a)_x \quad \text{اول شیبی نرم بعدی باندی}$$

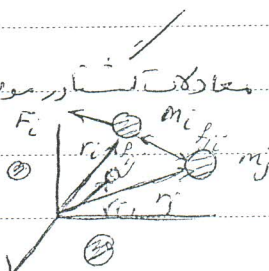
$$(M_a)_y = (\dot{H}_a)_y \quad \text{و در نظر می گیریم}$$

$$(M_a)_z = (\dot{H}_a)_z$$

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_i + \vec{r}_i \times \left(\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \vec{f}_{ij} \right) = \frac{d}{dt}(\vec{r}_i \times \vec{p}_i)$$

$$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_i \sum_j \vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} = \frac{d}{dt} \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{p}_i)$$

1



Subject:

Year: Month: Date: ()

$$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \frac{d}{dt} \left(\sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i \right)$$

$$\vec{M}_O = \vec{H}_O$$

اثبات می شود:

$$\vec{H}_O = \vec{r}_C \times M \vec{v}_C + \vec{H}_C$$

$$\hookrightarrow \sum \vec{r}_{Ci} \times m_i \vec{v}_{Ci}$$

به صورت مشابه

$$\vec{H}_A = \vec{H}_C + \vec{r}_{AC} \times M \vec{v}_{AC}$$

$\vec{r}_{AC}$ بردار از مرکز جرم به A
 $\vec{v}_{AC}$ سرعت مرکز جرم نسبت به نقطه A

$$\vec{H}_A = \vec{H}_C + \vec{r}_{AC} \times M \vec{v}_{AC}$$

$$\vec{M}_A = \vec{H}_C + \vec{r}_{AC} \times M \vec{v}_{AC}$$

اگر A نقطه ای ثابت باشد ✓

حالت دوم: نقطه ای متحرک در مرکز جرم

$$\vec{M}_C = \vec{H}_C$$

حالت سوم: نقطه ای که شتابش از مرکز جرم بلندتر
 6 اثبات می شود

$$\vec{M}_B = \vec{H}_B$$

Euler's Eq.

معادلات اویلر

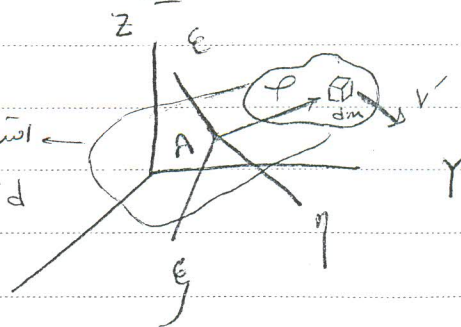
در سطح ۳ و ۴ نقطه حرکت انتقالی

دایره دوران می کند

سرعت انتقال در سطح چنان جهت

انتقالی مرکز جرم

Massless Rigid Body
 extension x



Subject :

Year . Month . Date . 8

XYZ نسبت به A در $\xi\eta\zeta$ = نسبت به A در $\xi\eta\zeta$ حرکت انتقالی دارد

$dm v' =$ نسبت به نقطه A

$$dH_A = \rho \times dm \vec{v}' = \vec{\rho} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) dm$$

$\vec{\omega} \times \vec{\rho}$ نسبت را درای درای جسم صلب

$$dH_A = \vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) dm$$

در سه مختصات xy و z در نقطه A قرار می دهیم نسبت به این R است

$$\vec{A} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$(dH_A)_x \hat{i} + (dH_A)_y \hat{j} + (dH_A)_z \hat{k} =$$

$$(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \wedge [(\vec{\omega}_x \hat{i} + \vec{\omega}_y \hat{j} + \vec{\omega}_z \hat{k}) \times (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})] dm$$

$$(dH_A)_x = \left(\frac{x^2}{y^2 + z^2} dm \right) \omega_x - (xy dm) \omega_y - (xz dm) \omega_z$$

$$(dH_A)_y = -(yx dm) \omega_x + (y^2 dm) \omega_y - (yz dm) \omega_z$$

$$(dH_A)_z = -(zx dm) \omega_x - (zy dm) \omega_y + (z^2 dm) \omega_z$$

$$\begin{cases} (H_A)_x = I_{xx} \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{xz} \omega_z \\ (H_A)_y = -I_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y - I_{yz} \omega_z \\ (H_A)_z = -I_{zx} \omega_x - I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z \end{cases}$$

R.P.C.C.

Subject:

Year. Month. Date. ()

$$\vec{H} = [I] \vec{\omega}$$

$$[I] = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

سرعت زاویه $\vec{\omega}$ در رابطه xyz در رابطه $\vec{H}_A$ ظاهر می شود (مولفه های H_A تابع R نیست)

نکته: هیچ تبدیلی در روی نقطه A صورت نگیرد
حال فرض می کنیم که نقطه A

از مرکز جرم
2. نقطه ثابت (یا مرکز سرعت ثابت)
3. نقطه ای که

$$\vec{H}_A = \left(\frac{dH_A}{dt} \right)_{xyz} = \left(\frac{dH_A}{dt} \right)_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{H}_A$$

اگر دستگاه xyz حرکت انتقالی داشته باشد $\vec{\omega} = 0$ است

در این حالت مشتقات I وارد می شود. انتخاب خوبی برای xyz می باشد

اگر دستگاه xyz $\vec{\omega} = \vec{\Omega}$ بچرخد I ثابت می ماند

$$M_A = \left(\frac{dH_A}{dt} \right)_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{H}_A$$

معادلات وینا

$$M_x = \dot{\omega}_x I_{xx} + \omega_y \omega_z (I_{zz} - I_{yy})$$

$$+ I_{xy} (\omega_z \omega_x - \dot{\omega}_y) - I_{xz} (\dot{\omega}_z + \omega_y \omega_x)$$

$$- I_{yz} (\omega_y^2 - \omega_z^2)$$

Subject:

Year. Month. Date. 9

به طریقی M_y و M_z را نسبت به هم

For Plane Motion

$\omega_3 = \omega \longrightarrow xy$ plane

$$(M_A)_x = -I_{xy} \dot{\omega} + I_{yz} \omega^2$$

$$(M_A)_y = -I_{yz} \dot{\omega} - I_{xy} \omega^2$$

$$(M_A)_z = I_{zz} \dot{\omega}$$

اگر xy مثل مبدا باشد و A همان محورها اصلی باشد
Principle Axes

$$I_{xy} = I_{yx} = I_{xz} = 0$$

معادلات

$$(M_A)_x = I_{xx} \dot{\omega}_x + \omega_y \omega_z (I_{zz} - I_{yy})$$

ادامه

$$(M_A)_y = I_{yy} \dot{\omega}_y + \omega_z \omega_x (I_{xx} - I_{zz})$$

$$(M_A)_z = I_{zz} \dot{\omega}_z + \omega_x \omega_y (I_{yy} - I_{xx})$$

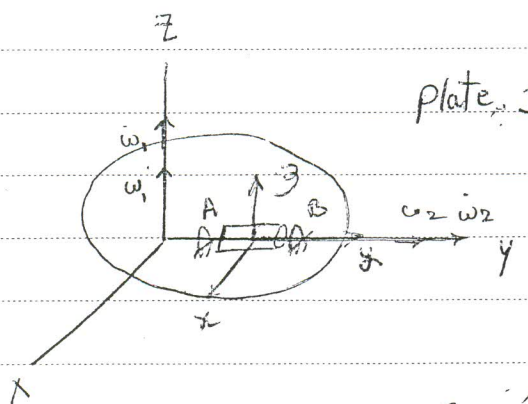
اگر در معادلات این حرکت صفر باشد

$$(M_A)_z = I_{zz} \dot{\omega}$$

اگر این مبدا مشخص باشد معادلات چرخش است
($\omega, \dot{\omega}$)

اگر همان معلوم باشد معادلات دینامیکی غیر خطی خواص دایره
و $\dot{\omega}$ یعنی مشتق ω که بعد درونی داشته و تصور کردیم

کامل شود



کاربرد معادلات اویلر
مثال ۲: یک پلاته دایره‌ای به شعاع R و چگالی ρ در صفحه xy قرار دارد.

گشتاورهای نیروهای سطحی
AB حول مرکز جرم بیاید.

روش اول: در مختصات x, y, z

در مختصات x, y, z

$$\vec{\omega} = \omega_1 \hat{i} + \omega_2 \hat{j}$$

$$\vec{\omega} = \omega_1 \hat{i} + \omega_2 \hat{j} + \omega_2 ((\omega_1 + \omega_2) \hat{j})$$

$$= \omega_1 \hat{i} + \omega_2 \hat{j} - \omega_1 \omega_2 \hat{i}$$

$$M_x = I_{xx}(-\omega_1 \omega_2) + \omega_1 \omega_2 (I_{yy} - I_{zz})$$

$$M_y = I_{yy} \omega_z$$

$$M_z = I_{zz} \omega_1$$

چون $I_{xx} = I_{zz}$

$$\vec{M} = -I_{yy} \omega_1 \omega_2 \hat{i} + I_{yy} \omega_2 \hat{j} + I_{zz} \omega_1 \hat{k}$$

البرق و ω_2 برابر شود
گشتاورهای دورانی x, y, z و گشتاورهای دورانی x, y, z داریم

$$M_A = \left(\frac{dH_A}{dt} \right)_{xyz} + \vec{r} \times \vec{H}_A$$

Body of Revolution AB

است پس کلیه یان‌های منی مغفند

از طرفی I_{xx} و I_{yy} و I_{zz} برای کلیه یان‌های منی مغفند و لذا داشتن اعداد



Subject:

Year: Month: Date: 13

($\frac{dH_A}{dt}$) نقطه A مرکز جرم

$$\left(\frac{dH_C}{dt} \right)_{xyz} = \frac{d}{dt} \left[(H_x \hat{i} + H_y \hat{j} + H_z \hat{k}) \right]_{xyz}$$

اتصال نقطه

$$= \frac{d}{dt} \left[(I_{xx} \omega_x \hat{i} + I_{yy} \omega_y \hat{j} + I_{zz} \omega_z \hat{k}) \right]_{xyz}$$

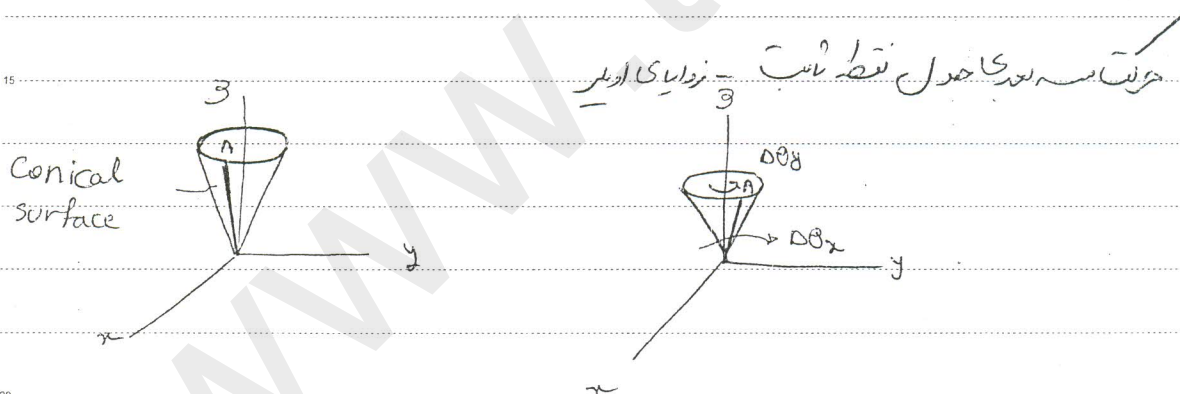
که ω ها مربوط به جسم است

$$\left(\frac{dH_C}{dt} \right)_{xyz} = I_{yy} \dot{\omega}_2 \hat{j} + I_{zz} \dot{\omega}_1 \hat{k}$$

که چون نسبت به xyz متغیر
تغییر می کند
مشتق می گیریم

$$M = I_{yy} \dot{\omega}_2 \hat{j} + I_{zz} \dot{\omega}_1 \hat{k} + \omega_1 \hat{k} \wedge (H_x \hat{i} + H_y \hat{j} + H_z \hat{k})$$

$$= -I_{yy} \omega_1 \omega_2 \hat{i} + I_{yy} \dot{\omega}_2 \hat{j} + I_{zz} \dot{\omega}_1 \hat{k}$$



Euler's angles:

- ψ : Angle of precession
- θ : Angle of nutation
- ϕ : Angle of spin

جهت مثبت این سه زاویه در این ccw حرکت در امتداد محور z و y و x به ترتیب 0، 90 و 180 درجه

Subject: _____

Year. _____ Month. _____ Date. _____ ()

$$d\varphi, d\theta, d\psi \leftarrow \text{مقادیر تفاضلی}$$

$$\dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi} \leftarrow \text{مقادیر مشتقات}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{\varphi} & \text{حول } Z \\ \dot{\theta} & \text{خط } \text{line of nodes} \\ \dot{\psi} & \text{حول محور 3} \end{array} \right.$$

$$\vec{\theta} \perp \text{plane I} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{\theta} \perp \vec{\varphi} \\ \vec{\theta} \perp \vec{\psi} \end{array} \right.$$

$$\vec{\psi} \perp \vec{\varphi} \text{ همیشه}$$

$$\vec{\varphi} + \vec{\theta} + \vec{\psi} \leftarrow \text{سرعت زاویه ای جسم}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{سرعت زاویه ای در } xy \text{ - این } \vec{\Omega} = \vec{\varphi} + \vec{\theta} \leftarrow \text{سرعت (زاویه ای) نسبت به } xy \\ \vec{\varphi} + \vec{\theta} + \vec{\psi} = 0 \end{array} \right.$$

معادلات حرکت با استفاده از روابط ادینر

Subject :

Year . Month . Date . (if)

شماره 8

حرکت جسم حول نقطه ثابت 0 بر روی 3 بر روی می شود
حالت این در نظر گرفته می شود

در 3 یز } precession
rotation
دارد می spin دارد

$$\vec{M}_0 = \vec{H}_0$$

$$\vec{M}_0 = \left(\frac{d\vec{H}_0}{dt} \right)_{xyz} + \vec{\Omega} \times \vec{H}_0$$

$$H_x = I' \omega_x, H_y = I' \omega_y, H_z = I \omega_z$$

$$\omega_y = 166 \quad H_0 = H_x \hat{i} + H_y \hat{j} + H_z \hat{k}$$

$$\omega_x = \dot{\theta} \quad \omega_y = \dot{\psi} \sin \theta \quad \omega_z = \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta$$

$$H_0 = I' \dot{\theta} \hat{i} + I' \dot{\psi} \sin \theta \hat{j} + I (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \hat{k}$$

$$\left(\frac{d\vec{H}_0}{dt} \right)_{xyz} = I' \ddot{\theta} \hat{i} + I' (\ddot{\psi} \sin \theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta) \hat{j} + I (\ddot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta) \hat{k}$$

$$\vec{\Omega} = \dot{\theta} \hat{i} + \dot{\psi} \sin \theta \hat{j} + \dot{\psi} \cos \theta \hat{k} \rightarrow \vec{\Omega} \times \vec{H}_0 =$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M_x = I' \ddot{\theta} + (I - I') (\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta) + I \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \theta \\ M_y = I' \ddot{\psi} \sin \theta + 2I' \dot{\theta} \dot{\psi} \cos \theta - I (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \dot{\theta} \\ M_z = +I (\ddot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta) \end{cases}$$

حالت خاص:

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \text{cte} \quad (\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0) \\ \dot{\phi} &= \text{cte} \\ \dot{\psi} &= \text{cte} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Steady} \\ \text{precession} \end{array}$$

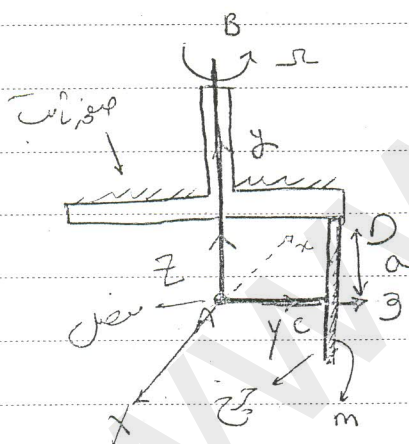
$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} M_x &= [I(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) - I' \dot{\psi} \cos \theta] \dot{\psi} \sin \theta \\ M_y &= 0 \\ M_z &= 0 \end{aligned} \right.$$

برای این حرکت لازم است که شتابی ثابت حول
line of Nodes وارد کنیم

$$\omega_z = \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta$$

راهد دیگر

$$M_x = (I \omega_z - I' \dot{\psi} \cos \theta) \dot{\psi} \sin \theta$$



مثال: یک گلوله از قطعه AB جرم CD بر روی یک

شروع به دوران می کند

محور کند حداقل سرعت زاویه ای برای اینکه جرم

با صفحه ثابت در تماس باقی بماند

$$a = 3a$$

$$AC = R = 15 \text{ cm} \quad mg = 15 \text{ kgf}$$

$\dot{\phi}$ سرعت زاویه ای جرم

$$\Omega = 4 \text{ سرعت حول } z$$

$$\dot{\theta} = 0 \text{ سرعت زاویه ای در امتداد خط } z \text{ (معمولاً)}$$

$$\dot{\psi} = 4 \text{ زاویه محور } z \text{ با محور ثابت با حفظ } \dot{\theta}$$

$$\begin{aligned} v_C &= a \dot{\phi} \\ v_C &= R \Omega \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{R}{a} \Omega \end{aligned}$$

Subject:

Year. Month. Date. 12

استاد از مطالب حاصل انبار

$$M_x = \frac{RI}{a} \Omega^2$$

$$M_y = 0$$

$$M_z = 0$$

$$M_x = (Mg + F) R$$

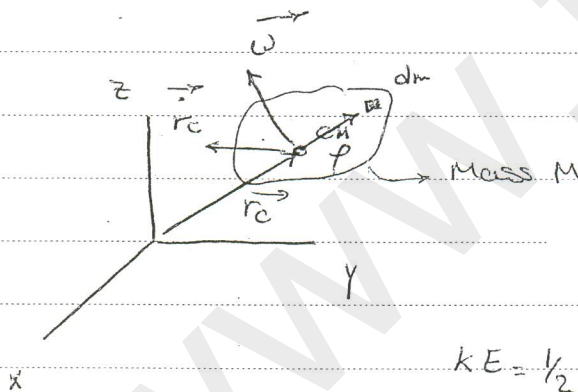
$$F = \text{درجه حرارت}$$

$$Mg R = \frac{RI}{a} \Omega^2$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{Mga}{I}}$$

نقل به

کار در انرژی اجسام صلب



انرژی جنبشی جسم صلب

$$KE = \frac{1}{2} M (\dot{r}_c)^2 + \frac{1}{2} \sum m_i |\dot{r}_i|^2$$

سرعت ذرات به مرکز جرم

for rigid bodies:

$$\vec{p}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

سرعت نسبی

$$KE = \frac{1}{2} M V_c^2 + \frac{1}{2} \iiint |\vec{\omega} \times \vec{r}|^2 dm$$

$$\iiint_M |\vec{\omega} \times \vec{r}|^2 dm = \iiint_M |\vec{\omega} \times \vec{r}| \cdot |\vec{\omega} \times \vec{r}| dm$$

اگر دو بردار هم‌جهت باشند:

$$= \iiint_M \{ [(\omega_x i + \omega_y j + \omega_z k) \times (x i + y j + z k)] \cdot [x i + y j + z k] \} dm$$

$$= I_{xx} \omega_x^2 - I_{xy} \omega_x \omega_y - I_{xz} \omega_x \omega_z + \dots$$

$$\Rightarrow KE = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} (I_{xx} \omega_x^2 - I_{xy} \omega_x \omega_y - I_{xz} \omega_x \omega_z$$

$$- I_{yx} \omega_y \omega_x + I_{yy} \omega_y^2 - I_{yz} \omega_y \omega_z$$

$$- I_{zx} \omega_z \omega_x - I_{zy} \omega_z \omega_y + I_{zz} \omega_z^2)$$

For principal axis

$$KE = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} (I_{xx} \omega_x^2 + I_{yy} \omega_y^2 + I_{zz} \omega_z^2)$$

For pure rotation

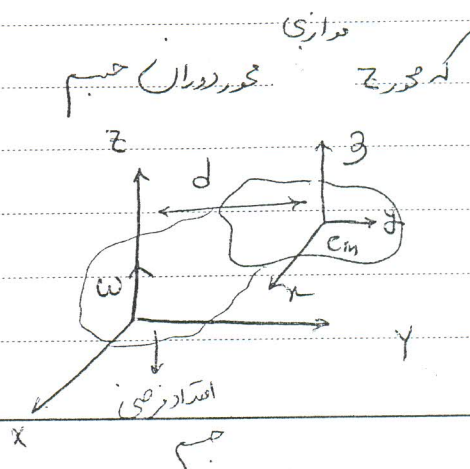
$$KE = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} I_{zz} \omega_z^2$$

$$v_c = \omega d$$

$$KE = \frac{1}{2} (I_{zz} + M d^2) \omega^2$$

$$KE = \frac{1}{2} I \omega^2$$

حاله گویشتان

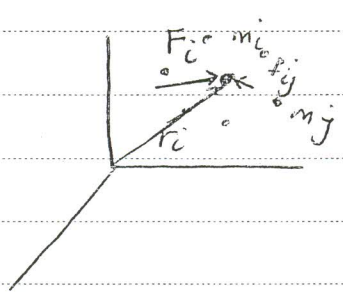


Subject:

Year: Month: Date: 13

روش کار و انرژی

در سیستم ذرات



$$\int_1^2 \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i + \int_1^2 \sum_{j=1}^n \vec{f}_{ij} \cdot d\vec{r}_i$$

$$= \frac{1}{2} (m_i v_i^2)_2 - \frac{1}{2} (m_i v_i^2)_1$$

↑ برای ذره m_i

$$f_{ij} = f_{ji} \rightarrow f_{ij} dr_i \neq f_{ji} dr_j$$

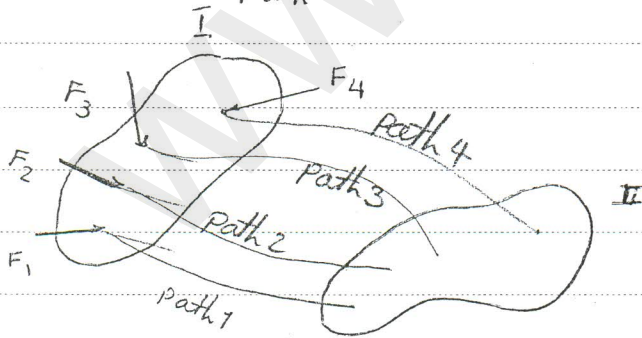
در یک سیستم تیردهانی داخلی طری انجام می دهند
 اما تیردهای داخلی سرخ اصنام صلب می تواند
 کار انجام دهند

درای سیستم ذرات $f_{ij} (dr_i - dr_j) = 0$

درای سیستم صلب $f_{ij} (dr_i - dr_j) = 0$

$$(work)_{I, II} = \int_I^II \vec{F}_1 \cdot d\vec{s}_1 + \int_I^II \vec{F}_2 \cdot d\vec{s}_2 + \dots + \int_I^II \vec{F}_n \cdot d\vec{s}_n$$

Path 1 Path 2 Path n



$$W_K \Big|_I^II = \Delta KE$$

$$\Delta KE + \Delta PE = 0$$

$$W_K^c \Big|_I^II = -\Delta PE$$

$$\Delta KE + \Delta PE = W_K^{nc} \Big|_I^II$$

سیستم غیر انزوای

Subject:

Year. Month. Date. ()

معادلات ایملس - موشوم

$\vec{F}$ کل نیروهای خارجی دارد جسم صلب

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot dt = I_{lin} = (M\vec{v}_C)_2 - (M\vec{v}_C)_1$$

linear Impulse تغییر موشوم خطی سیستم

$$\vec{F} = d/dt (m\vec{v})$$

درای سیستم دارای n جسم صلب

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot dt = \left[\sum_{i=1}^n M_i (\vec{v}_C)_i \right]_2 - \left[\sum_{i=1}^n M_i (\vec{v}_C)_i \right]_1$$

درای سیستم دارای n جسم صلب

$$\vec{M}_A = \vec{H}_A$$

درای نقطه A

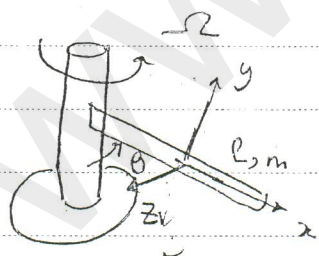
1- ثابت

2- مرکز جرم

3- شتاب آن از مرکز جرم عبور کند

$$\int_{t_1}^{t_2} M_A dt = I_{ang}$$

$$= (\vec{H}_A)_2 - (\vec{H}_A)_1$$



فصل: مطالعه بر مبنای قائم مختصات که می توان از آن برای

کند حرکت پیدا کردن انرژی جنبشی و انرژی

بیاضیل مطالعه را می سه کند

$$\vec{\omega} = -\Omega \cos \theta \vec{i} + \Omega \sin \theta \vec{j} + \dot{\theta} \vec{k}$$

$$I_{xx} = 0 \quad I_{yy} = I_{zz} = \frac{1}{12} m l^2$$

$$T = \frac{1}{2} m (v_C)^2 + \frac{1}{2} I_{xx} \omega_x^2 + \frac{1}{2} I_{yy} \omega_y^2 + \frac{1}{2} I_{zz} \omega_z^2$$

$$v_C = \vec{\omega} \times \vec{r} = (-\Omega \cos \theta \vec{i} + \Omega \sin \theta \vec{j} + \dot{\theta} \vec{k}) \times (\frac{l}{2} \vec{i})$$

Subject:

Year. Month. Date. 14

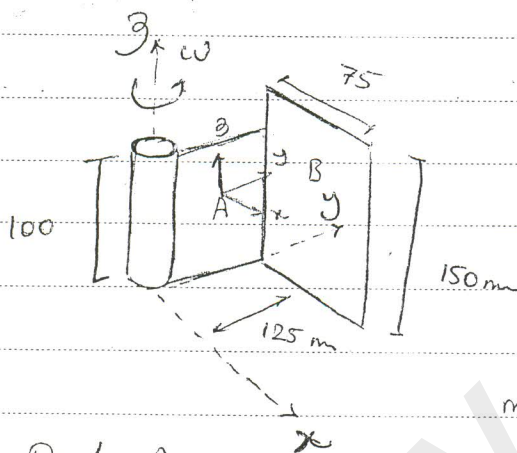
$$= -\dot{\theta} l/2 \sin \theta \hat{k} + \dot{\theta} l/2 \hat{j}$$

$$\frac{1}{2} m v_c^2 = \frac{1}{2} m \left((\dot{\theta} l/2)^2 + (-\dot{\theta} l/2 \sin \theta)^2 \right)$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{6} m l^2 (\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2)$$

$$V = -m g l/2 \cos \theta$$

تغیر B



سوال: اشیاء در یک صورت تقریبی

$$\rho = 70 \text{ kg/m}^2$$

$$\omega = 30$$

$$H_0 = ?$$

$$T = ?$$

Part A:

$$m_A = 0.1 \times 0.125 \times 70 = 0.875 \text{ kg}$$

$$m_B = 0.15 \times 0.075 \times 70 = 0.788 \text{ kg}$$

$$I_{cm} = \frac{1}{12} m_A [0.1^2 + 0.125^2] + m \times \left[\left(\frac{0.125}{2} \right)^2 + \left(\frac{0.1}{2} \right)^2 \right]$$

$$= 0.00747 \text{ kg m}^2$$

$$I_{yy} = \frac{1}{3} m_A (0.1)^2 = 0.00292 \text{ kg m}^2$$

$$I_{zz} = \frac{1}{3} m_A (0.125)^2 = 0.00456 \text{ kg m}^2$$

$$I_{xy} = I_{yx} = 0$$

$$I_{yz} = m_A \left(\frac{0.1}{2} \times \frac{0.125}{2} \right)$$

در صورت مشابه برای Part B

Subject:

Year: Month: Date: ()

$$I_{xx} = 0.0257 \text{ kg m}^2$$

$$I_{yy} = 0.0103 \text{ kg m}^2$$

$$I_{zz} = 0.018 \text{ kg m}^2$$

$$I_{xy} = 0.00369 \text{ kg m}^2$$

$$I_{xz} = 0.00228$$

$$I_{yz} = 0.0102$$

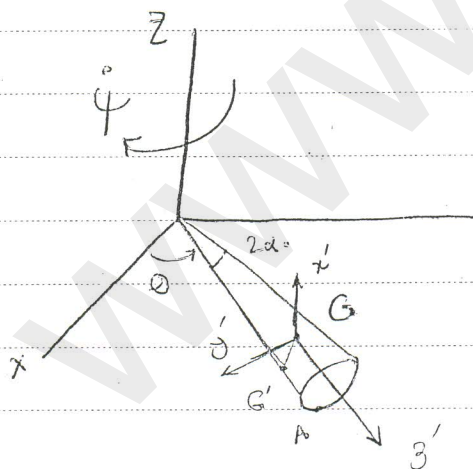
$$\text{الف) } H_0 = (I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z)\mathbf{i} + (I_{xy}\omega_x - I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z)\mathbf{j} + (I_{xz}\omega_x - I_{yz}\omega_y - I_{zz}\omega_z)\mathbf{k}$$

$$\omega_x = \omega_y = 0$$

$$\omega_z = 30$$

$$\Rightarrow H_0 = 30(-0.00228\mathbf{i} - 0.0102\mathbf{j} + 0.018\mathbf{k})$$

$$\text{ب) } T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{H}_0 = \frac{1}{2} (30\mathbf{k}) \cdot (-0.00456\mathbf{i} - 0.0204\mathbf{j} + 0.036\mathbf{k}) = 8.25 \text{ Joule}$$



مثال: فرض کنید به ارتفاع h در سطح قائم R

داریم انرژی جنبشی غزنی را برابر

آوردیم. غزنی را با سرعت ω

در حال می‌کنیم.

θ زاویه بین محور x و خط عمود

بر غزنی را محاسبه کنید.

G نقطه نقطه G در سطح xy

$$\vec{OG} = \vec{OG'} + \vec{GG'}$$

$$\vec{OG} = OG \cos \alpha \cos \theta \mathbf{i} + OG \cos \alpha \sin \theta \mathbf{j}$$

$$+ OG \sin \alpha \mathbf{k}$$

Subject:

Year. Month. Date. 15

XVZ Quesk, J, I

$$OG = \frac{3}{4}h$$

$$OG = \frac{3}{4}h \left[\cos\alpha \cos\theta \hat{I} + \cos\alpha \sin\theta \hat{J} + \sin\alpha \hat{K} \right]$$

$$\sin\alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2+h^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}$$

$$OG = \frac{3h}{4\sqrt{R^2+h^2}} \left[h\cos\theta \hat{I} + R\sin\theta \hat{J} + R\hat{K} \right]$$

ابتداءً می‌توانیم بردار سرعت زاویه‌ای را در نقطه O محاسبه کنیم و به عبارت دیگر:

$$\vec{\omega} = \dot{\phi} \tan\alpha (\cos\theta \hat{I} + \sin\theta \hat{J})$$

$$= \frac{\dot{\phi} h}{R} (\cos\theta \hat{I} + \sin\theta \hat{J})$$

$$\omega^2 = \frac{h^2}{R^2} \dot{\phi}^2$$

$$\vec{V}_G = \vec{\omega} \times \vec{OG} = \frac{3h^2}{4\sqrt{R^2+h^2}} \dot{\phi} (\sin\theta \hat{I} + \cos\theta \hat{J})$$

$$|\vec{V}_G| = \dot{v} \rightarrow \dot{v}^2 = \frac{9h^4}{16(R^2+h^2)} \dot{\phi}^2$$

$$I_{x'} = I_{y'} = \frac{3}{20} M \left(R^2 + \frac{h^2}{4} \right)$$

$$I_{z'} = \frac{3}{10} MR^2$$

$$\left. \begin{array}{l} \omega_{x'} = -\dot{\phi} \cos\alpha \\ \omega_{y'} = 0 \\ \omega_{z'} = \dot{\phi} \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} \end{array} \right\}$$

$$T = \frac{1}{2} M \dot{v}^2 + \frac{1}{2} [I_{x'} \omega_{x'}^2 + I_{y'} \omega_{y'}^2 + I_{z'} \omega_{z'}^2]$$

موضوع: مکانیک کلاسیک

مقدمه:

۱. اساس مکانیک نیوتنی تعادل و نیرو است. اساس مکانیک کلاسیک کار و انرژی (توان و انرژی) است.

۲. در مکانیک کلاسیک از کمیت‌های عمومی یا کمیت‌های تعمیم یافته (Generalized) استفاده می‌شود. کمیت مکانیک نیوتنی که کمیت مورد استفاده یعنی نیروی دارند.

۳. در مکانیک کلاسیک نیروهای قیدی که کار انجام نمی‌دهند در مسئله ظاهر نمی‌شوند. اما بعد از آن می‌توان این نیروها را بدست آورد. اما در مکانیک نیوتنی تمام نیروهای قیدی را باید مقرر کنیم.

کمیت‌های تعمیم یافته

سیستم دارای N ذره است. $3N$ درجه آزادی برای شش جهت سیستم لازم است. (حرکت ۳ درجه آزادی دارد چون ذرات در آن نمی‌کنند.)

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(x_i, y_i, z_i) = x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k} \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$x_1 = x_1(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad n = 3N$$

$$y_1 = y_1(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

$$z_1 = z_1(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

$$x_2 = x_2(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

$$\vdots$$

$$z_N = z_N(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

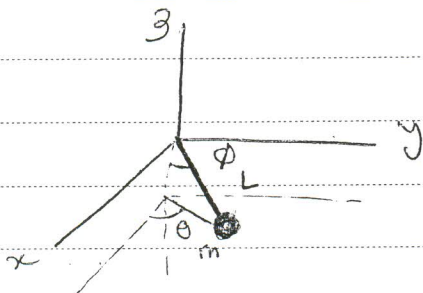
$$\left. \begin{array}{l} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ \vdots \\ x_N \\ y_N \\ z_N \end{array} \right\} \begin{array}{l} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_{3N} \end{array}$$

کمیت‌های تعمیم یافته کمیت‌های نیوتنی

Subject:

Year: Month: Date: 16

spherical Pendulum / گویچه کره‌ای



$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L \\ \theta \\ \phi \end{Bmatrix}$$

✓ ۹ ی برانده عرضی باشد

$$q_1 = L$$

$$q_2 = \theta$$

$$q_3 = \phi$$

$$\begin{cases} x = q_1 \cos q_2 \sin q_3 = L \cos \theta \sin \phi \\ y = q_1 \sin q_2 \sin q_3 = L \sin \theta \sin \phi \\ z = -q_1 \cos q_3 = -L \cos \phi \end{cases}$$

$$\text{if } L = \text{cte}$$

$$\text{معادله مقید} \quad x^2 + y^2 + z^2 = \text{cte} = L^2$$

معادله مقید: نشان دهنده‌ی این است که مختصات تعمیم‌یافته با هم ارتباط دارند پس تعداد مختصات مجزای برای تعیین سیستم نیاز است.

✓ اگر سیستمی با N درجه داشته باشیم و m محدودیت داشته باشیم

$$P = n - m = 3N - m$$

له درجی آزادی سیستم
یا تعداد مختصات مستقل

$$\text{مورد نیاز} \rightarrow q_k \quad k=1, 2, \dots, P$$

Constrained Generalized Co

سیستم مقید

Un Constrained

غیر مقید

له از ۹ که مستقل هستند استفاده می‌کنیم

Subject:

Year: Month: Date: ()

$q_k(t)$ Generalized co

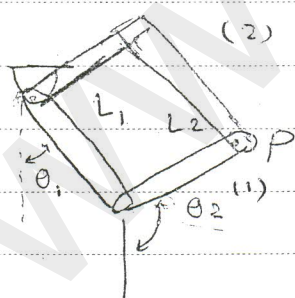
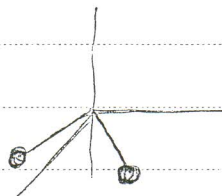
$\dot{q}_k(t)$ Generalized velocity

state space $\leftarrow$ فضای حالت $\leftarrow \begin{cases} q_i \\ \dot{q}_i \end{cases}$

q_1 $\dot{q}_1$
 q_2 $\dot{q}_2$
 q_3 $\dot{q}_3$
 $\vdots$ $\vdots$
 q_n $\dot{q}_n$

Ambiguous Gen. co.

اگر دو مسئله بازنمایی از یک مختصه x داشته باشیم و برای x مختصه
 را در ϕ مختصه دو مکان برای بازنمایی پیدا کنیم
 در حل باید از این نوع مختصات اجتناب کنیم



برای مختصه کردن مختصات باید در زاویه
 θ_1 و θ_2 را داشته باشیم.

اگر از مختصات θ_1 و θ_2 استفاده کنیم
 مسئله ما در جواب دارد یعنی برای رسیدن

به نقطه P دو نقطه داریم جواب می‌دهد
 در این مسئله مختصات x و y مختصات بیح لبه است

(دولت هم)

۱- مجموعه‌های تقییمیه (مستقل یا وابسته) یک set (مجموعه) واحد نیستند و انعطاف

پذیری زیادی وجود دارد.

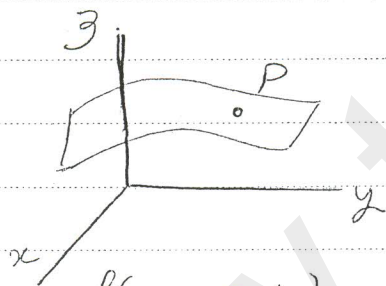
۲- اگر مجموعه‌های تقییمیه انتخاب می‌شود (خصوصاً از نوع مستقل) از

Ambiguity احتساب می‌شود.

قید Constraints

معادله قید به شرح کشته‌ها به سبب قید است

نیروی قید ← نیروهای تماس

نقطه P در صفحات
در جهات حرکت کندمعادله قید است در
حالت هم درضا

Configuration Constraint

در حالت کلی: $f(q_1, \dots, q_n, t) = 0$

$$dF = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0$$

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial f}{\partial q_3} \dot{q}_3 + \dots + \frac{\partial f}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0$$

Constraint relation in plaffian form

که معادله قید را به صورت زیر می‌نویسیم

Subject:

Date: _____

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

velocity Constraint Motion Const.

$$\rightarrow \begin{cases} a_{j1} \dot{q}_1 + a_{j2} \dot{q}_2 + \dots + a_{jn} \dot{q}_n + a_{j0} = 0 \\ \sum_{k=1}^n a_{jk} \dot{q}_k + a_{j0} = 0 \end{cases}$$

$$j = 1, 2, \dots, m$$

تعداد معادلات سرعتی

$a_{j0}, a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn}$ ضرایب ثابت هستند

مید هولونومیک Holonomic

مندی است که آن تغییر را هم می توان به صورت Configuration نوشت. هم به صورت velocity نوشت

مید غیر هولونومیک non holonomic - زمانی که نتوان آن تغییر را به صورت نوشت

در مورد هولونومیک ما از معادله velocity می توانیم اشتقاق بگیریم و f را به دست می آوریم اما غیر هولونومیک اشتقاق پذیری نیست یعنی مشتق وجود ندارد

مید هولونومیک

$$f(q_1, \dots, q_n) = 0$$

Subject: 18

Date:

تشریح: $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = l^2$ تابع زینا x, y, z تابع زینا
یعنی به صورت صریح *implicite* تابع زینا

اما تابع $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = l^2$ به صورت صریح *explicite* تابع زینا

البته بعد از آنکه به صورت صریح تابع زینا

$f_j(q_1, \dots, q_n) = 0$ scleronomic

و اگر به صورت صریح تابع t باشد
 $f_j(q_1, \dots, q_n, t) = 0$ Rheonomic

$f(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0$ scleronomic
 $\frac{\partial f}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial q_n} \dot{q}_n = 0$
 $f(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = 0$ Rheonomic
 $\frac{\partial f}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$
تفاوت: $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ scleronomic
 $\frac{\partial f}{\partial t} \neq 0$ Rheonomic

له این نوع می‌توان در این صورت نوع دوم

با ختم کلی می‌توان نوشت در صورتی که اول نوشته می‌شود

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} \dot{q}_k + a_{j0} = 0 \quad j=1, 2, \dots, m$$

تفاوت: $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$

$f(x, y, z) = 0$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \dot{z} = 0$$

$$\vec{r} = x(t) \hat{i} + y(t) \hat{j} + z(t) \hat{k}$$

X(3)

Subject:

Date:

$$\vec{V} = \dot{x}(t) \hat{i} + \dot{y}(t) \hat{j} + \dot{z}(t) \hat{k}$$

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k}$$

$$\vec{\nabla} f \cdot \vec{V} = \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \dot{z} = 0$$

$\Rightarrow \vec{\nabla} f \cdot \vec{V} \Rightarrow$ سرعت بر سطح قانس است / چون وقتی یک سطحی مسیر حرکت در سطح است سرعت آن نباید در سطح قانس باشد

✓ نیروی قندی وجود دارد و هم رابر روی سطح قندی دارد در واقع نیروی قندی عمود بر سطح قانس است / نه داشتن ذره بر روی سطح قندی ندارد

$$\vec{F}' = F \vec{n} \quad \text{برای هر سطح} \quad = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}$$

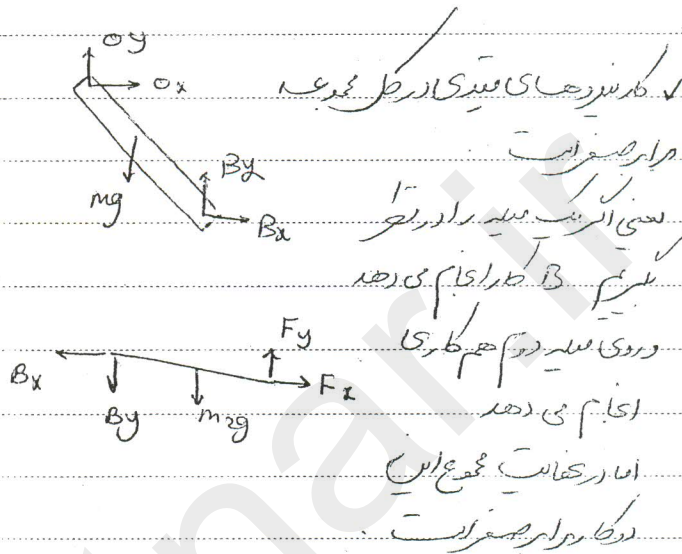
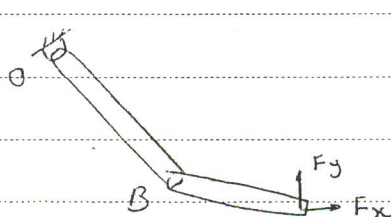
$$\vec{F}' \perp \vec{V} \quad , \quad \vec{\nabla} f \cdot \vec{V} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} \parallel \vec{\nabla} f \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \frac{\vec{\nabla} f}{|\vec{\nabla} f|} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k}}{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2}}$$

$$\Rightarrow \frac{F_x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{F_y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{F_z}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

حال می خواهیم کار انجام شده توسط نیروی قند در هنگام جابجایی هم از $\vec{r}$ به $\vec{r} + d\vec{r}$ را بدست آوریم

$$dw = \vec{F}' \cdot d\vec{r} = \frac{F'}{|\vec{\nabla} f|} \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = 0$$

کار انجام شده توسط نیروی متغیر حول نقطه (مستقل از زمان است) چگونه صورت (workless) (به صورت صریح)



کارهای انجام شده توسط نیروهای متغیر در هر نقطه
اما نیروهای اصطکاک همیشه نیروی متغیری نیستند اگر چه مقدار آنها به نیروهای
مخاله وابسته است
در این استاتیکی نیروی اصطکاک را نیروی متغیری نمی دانیم چون تابع از حرکت جسم می شود
اما در دینامیکی نیروی اصطکاک فقط مانند یک نیروی خارجی بر روی سیستم عمل
می کند پس نیروی متغیری محسوب می شود

اگر متغیر حول نقطه به صورت

$$f(x, y, z, t) = 0$$

$$\vec{\nabla} f \cdot \vec{v} = \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \dot{z} = \frac{-\partial f}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} f \cdot \vec{v} \neq 0$$

$$dW = \vec{f}' \cdot d\vec{r} = \frac{F'}{|\vec{\nabla} f|} \cdot \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} \neq 0$$

کارهای متغیری در هر نقطه

Subject:

Data:

متور غیر هارمونیک

$$a_x \ddot{x} + a_y \ddot{y} + a_z \ddot{z} + a = 0$$

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} \dot{q}_k + a_j = 0 \quad \dot{q} = 1.2 \text{ rad/s}$$

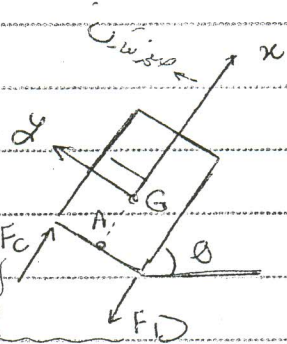
تعداد متور

تعداد متور معرف غیر هارمونیک است. این یک جسم در روی یک سطح است. این یک متور است.

درجه آزادی دارد یعنی هم می تواند بلغزد هم بچرخد. اما در غرض از این باب متور وجود دارد.

برای تعیین آن حل می کنیم این متور متور غیر هارمونیک است (جواب 8)

لغزایی محسوب می شود



می خواهیم سرعت نقطه A را بدست آوریم

بای علامت

$$\vec{v}_A = \dot{x}_A \hat{i} + \dot{y}_A \hat{j}$$

$$\vec{v}_A \cdot \hat{j} = 0$$

$$\hat{j} = \cos \theta \hat{j} - \sin \theta \hat{i}$$

و این از این کتاب

$$\rightarrow -\dot{x}_A \sin \theta + \dot{y}_A \cos \theta = 0$$

$$\dot{x}_A = \frac{\dot{y}_A}{\tan \theta}$$

tg theta

این متور غیر هارمونیک است زیرا هیچ ف وجود ندارد که اگر از آن متور به x متور کنیم

- sin theta یعنی متور در راستای y متور کنیم cos theta یعنی متور

در خود و عدم لغزش هیچ نهاد اصطکاک جانی هیچ خاصیت این اتفاق می افتد

Subject: 20

Date: _____

سوال: جلوه بخش دهم در آمارهای هندلر است یا نه؟
از نظر ریاضی به معنای اینکه مقدار در فرم $plaffian$ یا فرم تحت انتقال پذیر باشد
به فرم $Configuration$ رابطه قیاسی باشد شرایط در این فرم پذیر باشد یا نه؟

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} \dot{q}_k + a_{j0} = 0 \quad (*)$$

$f_j(q_1, \dots, q_n, t) = 0$
اگر از f_j در این فرم گرفته شود و در فرم انتقال پذیر
 $g_j(q_1, \dots, q_n)$ قرار گیرد

$$df_j = \frac{1}{g_j} \frac{\partial f_j}{\partial q_1} dq_1 + \dots + \frac{1}{g_j} \frac{\partial f_j}{\partial q_n} dq_n$$

$$+ \frac{1}{g_j} \frac{\partial f_j}{\partial t} dt = 0$$

$$\frac{df_j}{dt} = \frac{1}{g_j} \frac{\partial f_j}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{1}{g_j} \frac{\partial f_j}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{1}{g_j} \frac{\partial f_j}{\partial t} = 0 \quad (**)$$

$$*, ** \Rightarrow \frac{\partial f_j}{\partial q_k} = g_j a_{jk}, \quad \frac{\partial f_j}{\partial t} = g_j a_{j0} \quad k=1, 2, \dots, n$$

در این فرم هندلر است یا نه لازم است تابع f_j و ماتریس انتقالی g_j هاین پذیر باشد
رابطه *
که رابطه ** در آن قرار گیرد

$$\frac{\partial^2 f_j}{\partial q_k \partial q_r} = \frac{2}{g_j} (g_j a_{jk} a_{jr})$$

Subject:

Date:

$$\frac{\partial^2 f_j}{\partial q_k \partial q_r} = \frac{\partial}{\partial q_k} (g_j a_{jr})$$

$$\frac{\partial^2 f_j}{\partial q_r \partial t} = \frac{\partial}{\partial q_r} (g_j a_{j0})$$

$$k, r = 1, 2, \dots, n$$

$$j = 1, \dots, m$$

$$\frac{\partial^2 f_j}{\partial q_r \partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (g_j a_{jr})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial q_r} (g_j a_{jk}) = \frac{\partial}{\partial q_k} (g_j a_{jr}) \\ \frac{\partial}{\partial q_r} (g_j a_{j0}) = \frac{\partial}{\partial t} (g_j a_{jr}) \end{cases}$$

$$k, r = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m$$

اگر تابع g بیونیای بیوانی و در شرایط بالا صدق کند آنگاه قید هولونومیک است

$$f(q_1, \dots, q_n, t) \geq 0$$

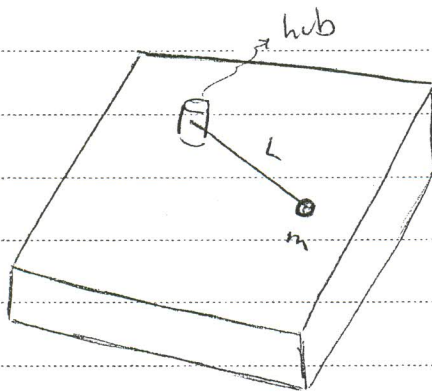
تمام قوای که به صورت غیرآری وجود

$$\sum a_k q_k + a_0 \geq 0 \quad \xrightarrow{T} \quad \text{دارند غیر هولونومیک هستند}$$

$$f=0 \quad \text{چون حرکت نمی توانست}$$

را نوشت

در سیستم هایی که نیروهای کشی در بازه ای از زمان نیروی کشی وجود دارد در بازه ای از زمان نبود وجود ندارند قید غیر هولونومیک است



مثال: جسمی به ضایعی با طول L
به صورت یک چرخ حول hub دوران می‌کند
اصطلاحات فیزیکی صورت گرفته است

حالت اول: ضایع حول hub

جمع می‌شود

$$x^2 + y^2 - L^2 = 0 = f(x, y)$$

تیرهدرینوسیک

فیزیکی: گشتن ضایع / طرای نام می‌دهد

حالت دوم: ضایع حول hub جمع می‌شود

hub بازگشت

با استفاده از قانون دوم نیوتن

$$\Sigma M_o = 0 \rightarrow H = cte$$

ساختار از نوع نیروی مرکزی
 $r = L - r_o \theta$
شروع hub

$$H_o = m r^2 \dot{\theta} = cte \Rightarrow r^2 \dot{\theta} = h = cte \quad ?$$

$$\dot{r} = -r_o \dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{-\dot{r}}{r_o}$$

$$\Rightarrow r^2 \dot{\theta} = \frac{-\dot{r} r^2}{r_o} = h$$

$$r^2 \dot{r} = -r_o r^2 \dot{\theta} = -r_o h = C \quad C < 0$$

$$\Rightarrow r^3/3 = cte + D \Big|_{t=0, r=L} \rightarrow D = L^3/3$$

$$f(x, y, t) = \frac{(x^2 + y^2)^{3/2}}{3} - \frac{L^3}{3} - ct = 0$$

Subject:

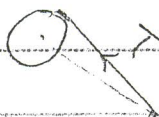
Data:

$$\vec{r} = r \hat{e}_r, \quad \dot{\vec{r}} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta$$

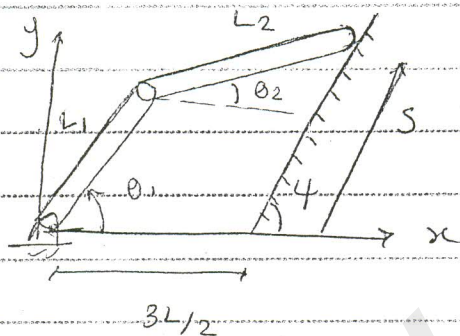
$$\vec{F}' = -F \hat{e}_r$$

$$\vec{F}' \cdot \vec{r} = -Fr \neq 0$$

از آن پس در hub در فضا بودن نیرو به صورت مرکزی استفاده در صورتی که اگر hub ثابت باشد نیروی مرکزی به سمت مرکز است.



شکل:



$\theta_1 + \theta_2 = \phi$ (مساوی درجه بندی)

$$\vec{r}_p = (L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos \theta_2) \hat{i} + (L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin \theta_2) \hat{j}$$

$$\vec{r}_p = \frac{3L_1}{2} \hat{i} + S \cos \phi \hat{i} + S \sin \phi \hat{j}$$

$$\begin{cases} (L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos \theta_2 = \frac{3L_1}{2} + S \cos \phi) \times \sin \phi \\ (L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin \theta_2 = S \sin \phi) \times \cos \phi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{sum: } \cos \theta_1 + \frac{L_2}{L_1} \cos \theta_2 - \frac{1}{\tan \phi} \sin \theta_1 - \frac{L_2}{L_1 \tan \phi} \sin \theta_2 = \frac{3}{2}$$

$$f(\theta_1, \theta_2) = 0$$

$$\underbrace{(\sin \theta_1 + \frac{\cos \theta_1}{\tan \phi})}_{a_1} \dot{\theta}_1 + \underbrace{\frac{L_2}{L_1} (\sin \theta_2 + \frac{\cos \theta_2}{\tan \phi})}_{a_2} \dot{\theta}_2 = 0$$

MICRO®

فرمیت
مساوی

کتاب در - رذات

Subject: 22

تجزیه مکان و زمان به سیستم از وضع حقیقی و تغییر مکان مجازی
تجزیه مکان و زمان به سیستم از وضع حقیقی و تغییر مکان مجازی

virtual Disp. & virtual works کاریابی و جایابی مجازی

$\delta x, \delta y, \delta z$
 $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n \rightarrow$ virtual Disp

$\dot{\delta x}, \dot{\delta y}, \dot{\delta z}$
 $\dot{\delta q}_1, \dot{\delta q}_2, \dots, \dot{\delta q}_n \rightarrow$ virtual velocity

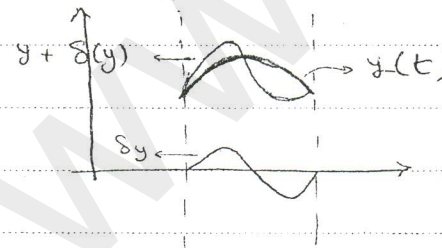
خصوصیت جایابی مجازی

- 1- جایابی مجازی به صورت infinitesimal
 - 2- جایابی مجازی با مقدار ثابت (constat) است و بی‌انتهای مجازی می‌شود
 - 3- جایابی و تغییرات مجازی ثابت ندارند و در حقیقت بی‌انتهای مجازی می‌شود
- مجازی به صورت لحظه‌ای می‌باشد و در افعال آن طراح دارد می‌شود

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\delta \vec{r} = \delta x\hat{i} + \delta y\hat{j} + \delta z\hat{k}$$

$$\delta \vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_n} \delta q_n = \sum \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} \delta q_k$$



$$x = x(q_1, \dots, q_n)$$

$$y = y(q_1, \dots, q_n)$$

$$z = z(q_1, \dots, q_n)$$

$$\delta \vec{r} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial x}{\partial q_k} \hat{i} + \frac{\partial y}{\partial q_k} \hat{j} + \frac{\partial z}{\partial q_k} \hat{k} \right) \delta q_k$$

در صورتی که تغییر مکان مجازی همواره میسر باشد آن در بردار dr در δr هم در یک امتداد باشد.

Subject:

Data:

در سیستم های ریاضیاتی t تغییرهای مستقل $x, y, z, q_1, q_2, \dots, q_n$ تغییرهای وابسته

$$\delta q_k = \delta \left(\frac{dq_k}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (\delta q_k)$$

virtual velocity

$$\vec{r} = \frac{\partial r}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial r}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial r}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial r}{\partial t}$$

مشتق
نسبت
به q_k

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \dot{q}_k} \quad k=1, 2, \dots, n$$

$$\Rightarrow \delta r = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k$$

$$f(x, y, z, t) = 0$$

تغییر وابسته

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z$$

$$a_x \delta x + a_y \delta y + a_z \delta z = 0$$

الزامی

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} \dot{q}_k + a_{j0} = 0$$

$$\Rightarrow a_x \delta x + a_y \delta y + a_z \delta z = 0$$

$$a_{j1} \delta q_1 + a_{j2} \delta q_2 + \dots + a_{jn} \delta q_n = 0$$

$$\delta W = \vec{F} \cdot \vec{\delta r}$$

کار مجازی

$$f(x, y, z, t) = 0 \Rightarrow \vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} = \frac{\vec{F}}{|\nabla f|} \nabla f$$

MICRO

میزدنی سدی

Subject: 23

Data:

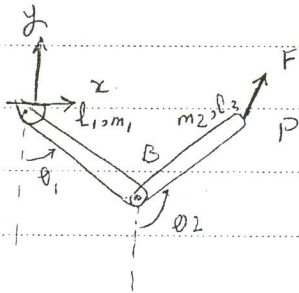
$$\delta W' = \vec{F}' \cdot \delta \vec{r} = F'_x \delta x + F'_y \delta y + F'_z \delta z$$

$$\delta \vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_n} \delta q_n$$

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \delta y +$$

$$\delta W' = \frac{F'}{|\nabla f|} \nabla f \cdot \delta \vec{r} = 0$$

کافی
کارهای قوی کرده و دایره ای که
(در صورت لزوم) برابر است


 $\delta \theta_1, \delta \theta_2$

مثال

$$\vec{F}_B = B_x \hat{i} + B_y \hat{j}$$

$$F_{G1} = -m_1 g \hat{j}$$

$$\vec{r}_B = l_1 \sin \theta_1 \hat{i} - l_1 \cos \theta_1 \hat{j}$$

$$\vec{r}_{G1} = l_1 \sin \theta_1 \hat{i} - l_1 \cos \theta_1 \hat{j}$$

$$\delta \vec{r}_B = \underbrace{\frac{\partial \vec{r}_B}{\partial x}}_{\frac{\partial \vec{r}_B}{\partial \theta_1}} \delta \theta_1 + \underbrace{\frac{\partial \vec{r}_B}{\partial y}}_{\frac{\partial \vec{r}_B}{\partial \theta_1}} \delta \theta_1$$

$$\delta \vec{r}_{G1} = l_1 \cos \theta_1 \delta \theta_1 \hat{i} + l_1 \sin \theta_1 \delta \theta_1 \hat{j}$$

$$\delta W_{\text{link1}} = F_{G1} \cdot \delta \vec{r}_{G1} + F_B \cdot \delta \vec{r}_B$$

Subject:

Date:

$$\delta W_{\text{link2}} = -\vec{F}_B \cdot \delta \vec{r}_B + \vec{F} \cdot \delta \vec{r}_P + F_{G2} \cdot \delta r_{G2}$$

$$\vec{r}_P = (l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2) \hat{i} - (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2) \hat{j}$$

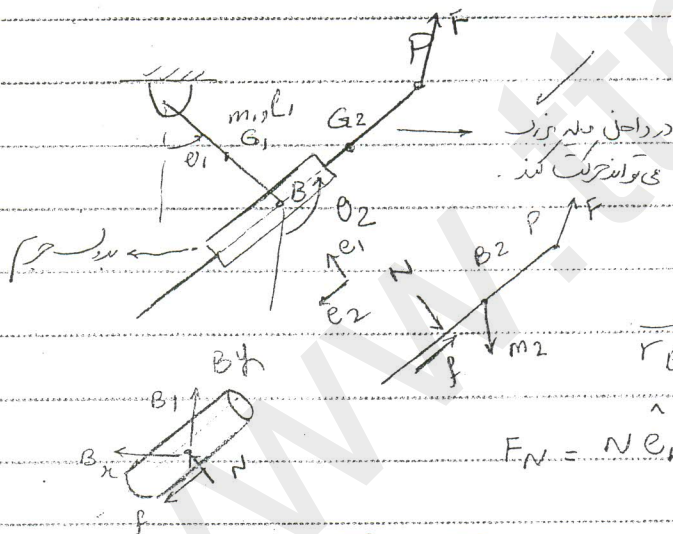
$$r_{G2} = \dots$$

$$\delta r_P = \dots$$

$$\delta r_{G2} = \dots$$

$$\delta W_{\text{to}} = \delta W_{\text{link1}} + \delta W_{\text{link2}}$$

$$= F \delta r_P - m_2 g \hat{j} \cdot \delta \vec{r}_{G2} - m_1 g \hat{j} \cdot \delta \vec{r}_{G1}$$



$$\vec{r}_{B1} = \vec{r}_{B1}$$

$$\vec{r}_{B2} = \vec{r}_{B1} + l_2 \hat{e}_2$$

$$\vec{F}_N = N \hat{e}_1, \quad \vec{f}_f = f \hat{e}_2$$

$$\delta W_{\text{link1}} = (\vec{F}_N + \vec{f}) \cdot \delta \vec{r}_{B1} - m_1 g \hat{j} \cdot \delta \vec{r}_{G1}$$

$$\delta W_{\text{link2}} = -(\vec{F}_N + \vec{f}) \cdot \delta \vec{r}_{B2} + \vec{F} \cdot \delta \vec{r}_P - m_2 g \hat{j} \cdot \delta \vec{r}_{G2}$$

دو مدل در این مدل فرض می‌کنیم که

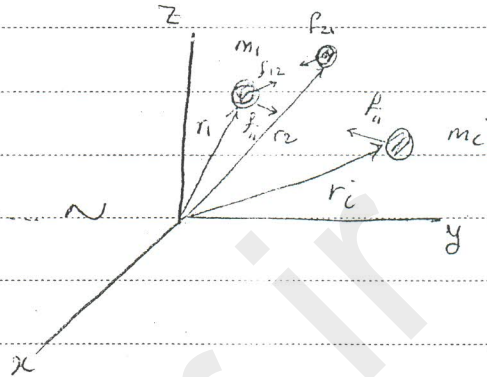
$$\delta W_t = \delta W_{\text{link1}} + \delta W_{\text{link2}} = F \cdot \delta r_P - m_2 g \hat{j} \cdot \delta r_{G2} - m_1 g \hat{j} \cdot \delta r_{G1} - f \delta q$$

Generalized forces نیروهای تعمیم یافته

F_{ij} نیروی اکل به از طرف j روی i
نیام بر ذره i ام

$$\vec{R}_i = \vec{F}_i + \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ij} \quad i=1,2,\dots,N$$

$\vec{R}_i$ (نیروی کل) = $\vec{F}_i$ (نیروی خارجی) + $\sum \vec{F}_{ij}$ (نیروهای داخلی)



$$\delta W_i = \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i$$

$$\delta W = \sum_i \delta W_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ij} \cdot \delta \vec{r}_i$$

نیروی داخلی (نیروهای تعمیم یافته)

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i$$

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \quad i=1,2,\dots,N$$

موقعیت تعمیم یافته

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \Rightarrow \delta W = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k$$

$$= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k$$

$$\Rightarrow \delta W = \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k$$

Generalized force

نیام k ام

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \quad k=1,2,\dots,n$$

$$W = V_1 - V_2$$

$$W = V(q_1, t) - V(q_1 + \delta q_1, t)$$

Subject:

Data:

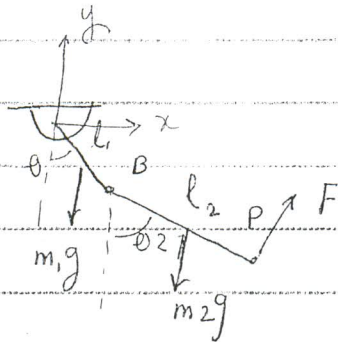
$$Q_k = Q_{KC} + Q_{KNC}$$

$$Q_k = -\frac{\partial}{\partial q_k} V(q_1, t)$$

$$-\frac{\partial V}{\partial q_k} + \sum_{i=1}^N F_{inc} \frac{\partial r_i}{\partial q_k}$$

حاصل بردن نیروهای تعمیم یافته

$$\delta q_k \quad \delta W = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i \quad (k=1, 2, \dots, n)$$



مثال: نیروهای تعمیم یافته برای یک سیستم دو لینک

$$\vec{r}_{G1} = L_1 \sin \theta_1 \vec{i} - L_1 \cos \theta_1 \vec{j}$$

$$\vec{r}_{G2} = (L_1 \sin \theta_1 + L_2 \cos \theta_2) \vec{i} - (L_1 \cos \theta_1 + L_2 \sin \theta_2) \vec{j}$$

$$q_1 = \theta_1, \quad q_2 = \theta_2$$

$$\delta W = -m_1 g \vec{j} \cdot \delta \vec{r}_{G1} - m_2 g \vec{j} \cdot \delta \vec{r}_{G2} + \vec{F} \cdot \delta \vec{r}_P \quad Q_1$$

$$= (F_x L_1 \cos \theta_1 + F_y L_1 \sin \theta_1 - m_2 g L_1 \sin \theta_1 - m_1 g L_2 \sin \theta_1) \delta \theta_1$$

$$+ (F_x L_2 \cos \theta_2 + F_y L_2 \sin \theta_2 - m_2 g L_2 \sin \theta_2) \delta \theta_2 \quad Q_2$$

$$= \sum Q \delta q_1 + Q_2 \delta q_2$$

Subject: 25

Data:

$$\text{کامپوزیت} \quad \frac{\partial r_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial r_i}{\partial \dot{q}_k} - 2$$

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_k} = \left[F_i \frac{\partial r_i}{\partial \dot{q}_k} \right]$$

مثال قبل: حل مسئله دروس 2

$$\frac{\partial r_{G1}}{\partial \theta_1}, \quad \frac{\partial r_{G1}}{\partial \theta_2}$$

$$\frac{\partial r_{G2}}{\partial \theta_1}, \quad \frac{\partial r_{G2}}{\partial \theta_2}$$

$$\frac{\partial r_p}{\partial \theta_1}, \quad \frac{\partial r_p}{\partial \theta_2}$$

$$\vec{Q}_1 = \vec{F}_{G1} \frac{\partial r_{G1}}{\partial \theta_1} + F_{G2} \frac{\partial r_{G2}}{\partial \theta_1} + F \frac{\partial r_p}{\partial \theta_1}$$

$$Q_2 = F_{G1} \frac{\partial r_{G1}}{\partial \theta_2} + F_{G2} \frac{\partial r_{G2}}{\partial \theta_2} + F \frac{\partial r_p}{\partial \theta_2}$$

3- نکته: برای نیروهای کشش و انعطاف

$$Q_{kc} = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$$

$$V = -m_1 g \frac{L_1}{2} \cos \theta_1 - m_2 g L_1 \cos \theta_1 - m_2 g \frac{L_2}{2} \cos \theta_2$$

$$Q_{1c} = -\frac{\partial V}{\partial \theta_1} = -\frac{1}{2} m_1 g L_1 \sin \theta_1 - m_2 g L_1 \sin \theta_1$$

که چون F مرتبط با نیروهای کشش و انعطاف است و از این روش نمی‌توان استفاده کرد

Subject:

Date:

اصل کار مجازی برای تعادل استاتیکی

$$R_i = 0 \quad i=1, 2, \dots, N$$

برآیندها

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i$$

$$= \sum_{i=1}^N (\underbrace{\vec{F}_i}_{\text{برآیندهای خارجی}} + \underbrace{\vec{F}_i'}_{\text{برآیندهای داخلی}}) \cdot \delta \vec{r}_i$$

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i + 0 = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

اصل کار مجازی / برای تعادل استاتیکی

کار مجازی نیروهای خارجی و در درجه تعادل استاتیکی برابر صفر است

$$\delta W = \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k = 0$$

اگر سیستم در حالت تعادل باشد، تغییرات بی‌نهایت کوچک در مختصات تعادل صفر خواهد بود

$$\Rightarrow Q_k = 0$$

کار مجازی تغییرات بی‌نهایت کوچک در مختصات تعادل صفر خواهد بود (در معادله تعادل استاتیکی)

$$\delta W = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + Q_3 \delta q_3 + \dots + Q_n \delta q_n = 0$$

$$Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n = 0$$

برای تعادل استاتیکی

در روش استفاده از اصل کار مجازی

از مختصات تعادل استفاده می‌شود

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

استاندارد

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) = 0$$

$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$

2- یک دسته مختصات تعمیم یافته مستقل اختیار کرد و داریم

استاندارد

اصل دالامبر (D'Alembert's principle)

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\sum \vec{F} - m\vec{a} = 0$$

$$\sum \vec{F} + \vec{f} = 0$$

اصل دالامبر

$$\vec{f} = -m\vec{a}$$

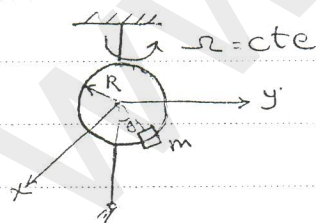
$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

در کارهای بسیاری به تعین نیروهای داخلی سیستم نیست

برای هم صلب در حرکت صفحه ای:

$$(F - ma_G) \cdot \delta \vec{r}_G + (M_G - I_G \ddot{\theta}) \delta \theta = 0$$

تغییر مختصات مرکز جرم



معادلات حرکت لغزنده در داخل شیب (با استفاده از)

اصل دالامبر (کارهای) میابند

دسته مختصات xy متصل به صفحه

$$(F - ma) \delta \vec{r} = 0$$

$$\vec{r} = R \sin \theta \vec{j} - R \cos \theta \vec{k}$$

$$\delta \vec{r} = R \cos \theta \delta \theta \vec{j} + R \sin \theta \delta \theta \vec{k}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_{rel} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Subject:

Date:

$$= R\dot{\theta} \cos\theta \mathbf{j} + R\dot{\theta} \sin\theta \mathbf{k} - R\dot{\theta} \sin\theta \mathbf{i}$$

$$\vec{a} = a_{rel} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}$$

$$(F - ma) \delta r = 0$$

$$(-mg\mathbf{k} - m\vec{a}) \cdot (R \cos\theta \delta\theta \mathbf{j} + R \sin\theta \delta\theta \mathbf{k}) = 0$$

$$\ddot{\theta} + \sin\theta (g/R - \dot{\theta}^2) = 0$$

Hamilton's principle اصل هاميلتون

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

$$\delta W = \sum \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i$$

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i \rightarrow \delta T_i = m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \dot{\vec{r}}_i$$

$$\frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i) = \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \dot{\vec{r}}_i$$

$$\frac{1}{2} \delta (\dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i)$$

$$m_i \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i) = m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i + m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \dot{\vec{r}}_i$$

$$= m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \delta T_i \quad * *$$

$$\delta T = \sum_{k=1}^N \delta T_k = \sum \frac{1}{2} m_i \delta (\dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i)$$

Subject: 27

Data: _____

$$\Rightarrow -\delta T - \delta W + \sum_{i=1}^N m_i \frac{d}{dt} (\vec{r}_i \cdot \delta \vec{r}_i) = 0$$

$$\Rightarrow \delta T + \delta W = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d}{dt} (\vec{r}_i \cdot \delta \vec{r}_i)$$

از رابطه فوق بین زمان t_1 و t_2 انتگرال می‌گیریم

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta W) dt = \int \sum \dots dt$$

$$= \int \sum m_i d(\vec{r}_i \cdot \delta \vec{r}_i) = \left[\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \cdot \delta \vec{r}_i \right]_{t_1}^{t_2}$$

$\downarrow$
 $\frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{r}}_i}$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta W) dt - \left[\sum_{i=1}^N \frac{\partial T_i}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \delta \vec{r}_i \right]_{t_1}^{t_2} = 0$$

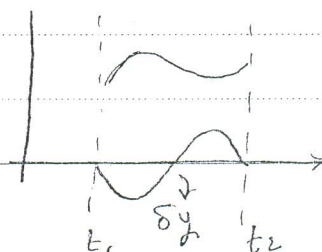
↑ Hamilton's Principle of varying action

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial T_i}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \delta \vec{r}_i \Big|_{t_1}^{t_2} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial T_i}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta W) dt = \sum_{k=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \Big|_{t_1}^{t_2}$$

نوعی هندسه در تغییرات δq_k بین t_1 و t_2 صورت می‌گیرد



Subject:

Date:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta W) dt = 0$$

Extended hamiltons principle

$$\delta W = \delta W_{nc} = \delta V$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V + \delta W_{nc}) dt = 0$$

انرژی جنبشی

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} (\delta L + \delta W_{nc}) dt = 0$$

$$L = T - V$$

Lagrangian

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0$$

اگر سیستم طایفه اول باشد

اگر سیستم طایفه دوم باشد
در حالت کلی نمی توان جای استقرار دگرهای معین کرد

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$$

تغییرات یک تابع مقرونه را می توان
معمولاً به این شکل نوشت

مثال در کتاب (حتماً بخوان !)

Subject: 28

دانش

Data:

معادلات لاگرانژ

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V + \delta W_{nc}) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta T dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0$$

$$L = L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t)$$

$$\delta L = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k \right)$$

در اینجا δt یعنی تغییرات t نیست

$$\delta W_{nc} = \sum_{k=1}^n Q_{knc} \delta q_k$$

معمولاً

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \bigg|_{t_1}^{t_2}$$

$$- \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k dt$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V + \delta W_{nc}) dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^n \left[-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) + \frac{\partial L}{\partial q_k} + Q_{knc} \right] \delta q_k dt$$

این است که
بازرسی از شرایط
پس از این
صورت

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_{knc} \quad k=1, 2, \dots, n$$

معادلات لاگرانژ

Subject:

Date:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = Q_{knc}$$

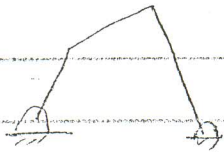
الگوریتم پیشنهادی
درست است

1- اخذ از لایحه جداولی کنیم و به روشی دیگر بررسی شود
2- یک لایحه رسم را می کشیم

3- معادلات را برای هر جسم بنویسیم

4- سینک هر جسم را پیدا می کنیم

5- معادلات را حل می کنیم



در مکانیک کلیدی

1- 9 حمار مشخص کنیم

2- می بینیم هر یک از این حمارها را می بینیم

3- حمارها را به یکدیگر می گوییم و به یکدیگر می گوییم

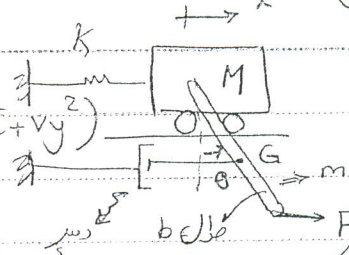
4- می بینیم هر یک از این حمارها را می بینیم

5- می بینیم هر یک از این حمارها را می بینیم

مثال

$$q_1 = x \quad q_2 = \theta$$

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I_G \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M (\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2)$$



$$v_x = \frac{dx_G}{dt} = \frac{d}{dt} (x + \frac{b}{2} \sin \theta) = \dot{x} + \frac{b}{2} \dot{\theta} \cos \theta$$

تبدیل

در هر حالت یک رابطه را می توانیم بنویسیم

Subject: 29

Data:

$$v_y = \frac{dy_G}{dt} = \frac{d}{dt}(-b/2 \cos \theta) = b/2 \dot{\theta} \sin \theta$$

$$T = \frac{1}{2} (M+m) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m b \dot{\theta} \dot{x} \cos \theta + \frac{1}{6} m b^2 \dot{\theta}^2$$

$$V = \frac{1}{2} k x^2 - mg b/2 \cos \theta$$

$$\delta W_{nc} = F \delta r - \overbrace{C v_x}^{\text{سرکشی}} \delta x_G$$

$$= F \delta (x + b \sin \theta) - c [\dot{x} + b/2 \dot{\theta} \cos \theta] [\delta x + b/2 \cos \theta \delta \theta]$$

$$= \underbrace{(\quad)}_{Q_x} \delta x + \underbrace{(\quad)}_{Q_\theta} \delta \theta$$

$$Q_x = F - c \dot{x} - \frac{1}{2} c b \dot{\theta} \cos \theta$$

$$Q_\theta = F b \cos \theta - \frac{1}{4} c b^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta - \frac{1}{2} c b \dot{x} \cos \theta$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial \theta}, \frac{\partial T}{\partial \dot{x}}, \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}, \frac{\partial T}{\partial \ddot{x}}, \frac{\partial T}{\partial \ddot{\theta}}$$

$$mg b/2 \sin \theta \rightarrow \text{سرکشی}$$

$$(M+m) \ddot{x} + \frac{1}{2} m b \ddot{\theta} \cos \theta - \frac{1}{2} m b \dot{\theta}^2 \sin \theta + c \dot{x} +$$

$$\frac{1}{2} c b \dot{\theta} \cos \theta + kx = F$$

$$\frac{1}{2} m b^2 \ddot{\theta} + \frac{1}{2} m b \ddot{x} \cos \theta + \frac{1}{2} c b \dot{x} \cos \theta + \dots = F b \cos \theta$$

تاریخ: 12, 18

Subject:

Year: Month: Date: ()

مسئله: جسم A و B در یک خط مستقیم (جریان مستقیم)

1. A و B در یک خط مستقیم (جریان مستقیم)

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{AB})$$

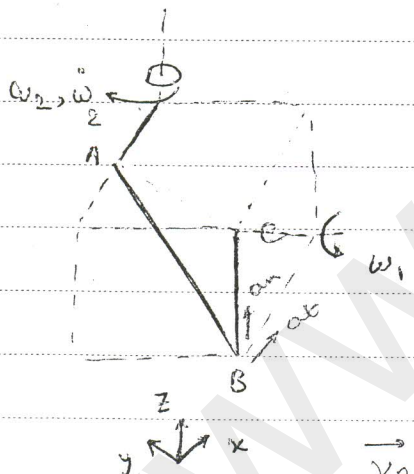
2. A و B در یک خط مستقیم (جریان مستقیم)

$$\vec{v}_A|_{xyz} = \vec{v}_A|_{xy3} + \vec{R} + \vec{\omega} \times \vec{r}_A$$

3. A و B در یک خط مستقیم (جریان مستقیم)

4. A و B در یک خط مستقیم (جریان مستقیم)

$$\vec{a}_A|_{xyz} = \vec{a}_A|_{xy3} + \vec{R} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_A|_{xy3} + \vec{\omega} \times \vec{r}_A + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_A)$$



$$\omega_1 = 6 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = ? \quad \omega_{AB} = ?$$

$$\omega_2 = ? \quad \omega_{AB} = ?$$

$$AD = 50 \text{ mm}$$

$$BC = 100 \text{ mm}$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{AB}$$

$$50\omega_2 \hat{j} = 100(6) \hat{i} + (\omega_x \hat{i} + \omega_y \hat{j} + \omega_z \hat{k}) \times (50 \hat{i} + 100 \hat{j} + 100 \hat{k})$$

$$50\omega_2 = 50\omega_x - 100\omega_z \quad (1)$$

$$0 = 600 + 100\omega_y - 100\omega_z \quad (2)$$

$$0 = 100\omega_x - 50\omega_y \quad (3)$$

$$\vec{\omega}_{AB} \cdot \vec{r}_{AB} = 0$$

$$(2) \rightarrow \omega_z = 6 + \omega_y \quad (4)$$

$$(3) \rightarrow \omega_x = 0.5\omega_y \quad (5)$$

$$\omega_x = -4/3$$

$$\omega_y = -8/3$$

$$\omega_z = 10/3$$

$$4.5 \text{ into } 1 \quad \omega_2 = 6 \text{ rad/s}$$

Subject:

Year: Month: Date: ()



ω_{AB} در راستای AB و محور AB می باشد. ω_{AB} در راستای AB و محور AB می باشد. ω_{AB} در راستای AB و محور AB می باشد. ω_{AB} در راستای AB و محور AB می باشد.

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}) \quad **$$

$$\vec{a}_B = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{CB} + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{CB}) = 0 + (-6\hat{j}) \times (-6\hat{j} \times (-100\hat{k})) = 3600\hat{k}$$

$$\vec{a}_A = \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{DA} + \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{DA}) = -6\hat{k} \times (-6\hat{k} \times (-50\hat{i})) = +50\omega_2\hat{j} + 1800\hat{i}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 50\omega_2\hat{j} + 1800\hat{i} &= 3600\hat{k} + (\omega_x\hat{i} + \omega_y\hat{j} + \omega_z\hat{k}) \times (50\hat{i} + 100\hat{j} + 100\hat{k}) + (-\frac{4}{3}\hat{i} - \frac{8}{3}\hat{j} + \frac{10}{3}\hat{k}) \times \\ & \quad [(-\frac{4}{3}\hat{i} - \frac{8}{3}\hat{j} + \frac{10}{3}\hat{k}) \times (50\hat{i} + 100\hat{j} + 100\hat{k})] \end{aligned}$$

$$28 = \omega_y - \omega_z$$

$$\omega_2 + 40 = -2\omega_x + \omega_z$$

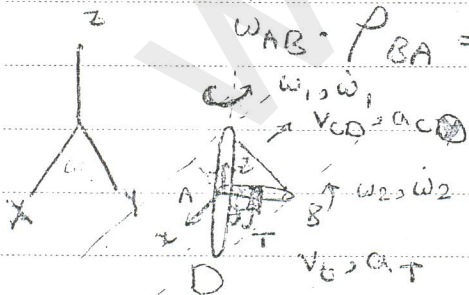
$$-32 = 2\omega_x - \omega_y$$

$$\omega_x = -8$$

$$\omega_y = 16$$

$$\omega_z = -12$$

$$\omega_2 = -36$$



$$\omega_1 = 0.8$$

$$\omega_2 = 0.4$$

$$\omega_1 = 0.5$$

$$\omega_2 = 0.6$$

$$v_T = 3 \text{ m/s}$$

$$a_P = 5 \text{ m/s}^2$$

$$v_{CD} = 8 \text{ m/s}$$

$$a_{CD} = 9 \text{ m/s}^2$$

$$AT = 3 \text{ m}$$

Subject:

Year. Month. Date. (7)

Je: $a_T \rightarrow v_T = ?$

A in AB in the xy plane

in the xy plane

$$v_T /_{xyz} = v_T /_{xy3} + \vec{R} + \vec{\omega} \times \vec{r}_T$$

3

$$= 3j - 8i + (0.5\hat{k} + 0.4i) \times 3j$$

$$= -9.5i + 3j + 1.2\hat{k} \text{ (m/s)}$$

$$a_T /_{xyz} = \vec{a}_T /_{xy3} + \vec{R} + 2\vec{\omega} \times v_T /_{xy3} + \vec{\omega} \times \vec{r}_T + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_T)$$

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$$

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = 0.8\hat{k} + 0.6\hat{i} + (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \vec{\omega}_2$$

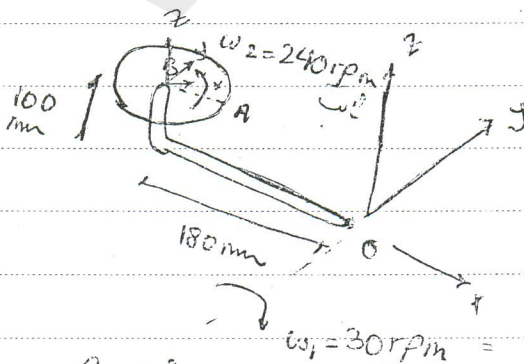
$$\frac{dA}{dt} /_{xyz} = \frac{dA}{dt} /_{xy3} + \vec{\omega} \times A = 0.6\hat{i} + 0.8\hat{k} + 0.2\hat{j}$$

xyz, in the xy plane

$$a_T /_{xyz} = 5j - 6i + 2(0.5\hat{k} + 0.4i) \times 3j$$

$$+ (0.6\hat{i} + 0.2\hat{j} + 0.8\hat{k}) \times (3j) + (0.5\hat{k} + 0.4i)$$

$$\times [(0.5\hat{k} + 0.4i) \times 3j] = -14.4i + 3.77j + 4.2\hat{k} \text{ (m/s}^2\text{)}$$



$$\omega_2 = 8\pi \text{ rad/s}$$

$$\omega_1 = 30 \text{ rpm} = \pi \text{ rad/s}$$

$$a_A = ?$$

$$v_A = ?$$

Subject:

Year: Month: Date: ()

المركبة B, A: الجذر

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_B &= \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{OB} = \pi \hat{j} \times (-180 \hat{i} + 100 \hat{k}) \\ &= 180\pi \hat{k} + 100\pi \hat{i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_A &= 180\pi \hat{k} + 100\pi \hat{j} + (\pi \hat{j} + 8\pi \hat{k}) \times (100 \hat{i}) \\ &= \pi (100 \hat{i} + 800 \hat{j} + 80 \hat{k}) \quad \text{m/s} \end{aligned}$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{BA} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{BA})$$

$$\begin{aligned} \vec{a}_B &= \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{OB} + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{OB}) \\ &= \pi \hat{j} \times (-180 \hat{i} + 100 \hat{k}) \\ &= 180\pi^2 \hat{i} - 100\pi^2 \hat{k} \end{aligned}$$

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{\omega}} &= \dot{\vec{\omega}}_1 + \dot{\vec{\omega}}_2 = 0 + \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2 \\ &= (\pi \hat{j}) \times (8\pi \hat{k}) = 8\pi^2 \hat{i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{a}_A &= 180\pi^2 \hat{i} - 100\pi^2 \hat{k} + 8\pi^2 \hat{i} \times (100 \hat{i}) \\ &+ (\pi \hat{j} + 8\pi \hat{k}) \times [(\pi \hat{j} + 8\pi \hat{k}) \times (100 \hat{i})] \\ &= -\pi^2 (6320 \hat{i} + 100 \hat{k}) \quad \text{m/s}^2 \end{aligned}$$

Subject:

Year: Month: Date: 13

روش دوم: استفاده از سیستم مختصات دایره

xyz: سیستم مختصات دایره ای، OB و OA در B

xyz: سیستم مختصات اصلی (مختل - نسبی)

$$\vec{v}_A|_{xyz} = \vec{v}_A|_{xyZ} + \vec{R} + \vec{\omega} \times \vec{r}_A$$

$$= 100 \times 8\pi \hat{j} + (-180\pi \hat{k} + 100\pi \hat{i}) + \pi \hat{j} \times 100 \hat{i}$$

$$= \pi (100 \hat{i} + 800 \hat{j} + 80 \hat{k}) \text{ m/s}$$

$$a_A|_{xyz} = a_A|_{xyZ} + \vec{R} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_A|_{xyZ} + \vec{\omega} \times \vec{r}_A + \omega \times (\omega \times \vec{r}_A)$$

$$a_A|_{xyz} = -(100)(8\pi)^2 \hat{i} + 180\pi^2 \hat{i} - 100\pi^2 \hat{k}$$

$$+ 2(\pi \hat{j}) \times (100) 8\pi \hat{j} + \pi \hat{j} \times (\pi \hat{j} \times 100 \hat{i})$$

$$= -\pi^2 (6320 \hat{i} + 100 \hat{k})$$

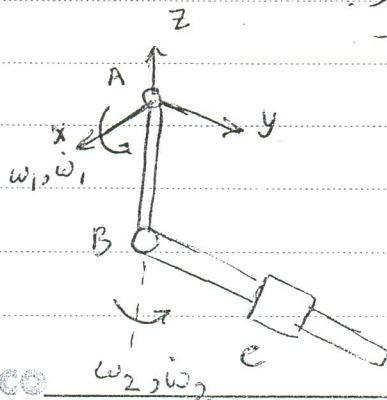
محل اتصال را در نظر بگیرید عضو AB و محور yz و می توانید حرکت در آن محاسبه داشته باشید

با سرعت در آن، ω_1 و ω_2 عضو BD در نقطه شان (دایره ای) محاسبه حول

محور AB می باشد که سرعت زاویه ای نسبت به محور AB ω_1 و ω_2 می باشد

لغزنده C روی عضو BD دارای سرعت در آن نسبت به محور BD برابر با v_C و

a_C می باشد. شتاب سرعت لغزنده را تعیین کنید



$$AB = 0.5 \text{ m}$$

$$BC = 0.2 \text{ m}$$

$$\omega_1 = 4 \text{ rad/s}$$

$$\omega_1 = 1.5 \text{ rad/s}^2$$

$$\omega_2 = 5 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = -6 \text{ rad/s}^2$$

$$v_C = 3 \text{ m/s}$$

$$a_C = 2 \text{ m/s}^2$$

PAPCO

سوال

32-3K=5.45

۳۳

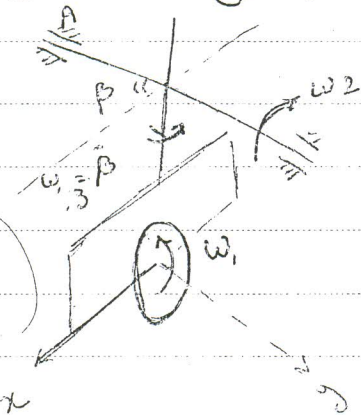
$$\vec{v}_C = -\hat{i} + 5\hat{j} + 0.8\hat{k}$$

$$a_C = -28.8\hat{i} - 5.48\hat{j}$$

Subject:

Year: Month: Date: ()

ماتوجه به شکل زیر و چرخ با سرعت زاویه ثابت β این حول محور خودی می‌گردد. کل مکانیزم با سرعت زاویه ثابت ω_1 حول محور AB می‌گردد. در حال چرخش است. محور AB چرخ با سرعت زاویه β می‌گردد که تابع دلخواهی از زمان است. شتاب زاویه‌ای چرخ را بدست آورید.



$$\vec{\omega}_{\text{wheel}} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3$$

$$\alpha_{\text{wheel}} = \dot{\vec{\omega}}_1 + \dot{\vec{\omega}}_2 + \dot{\vec{\omega}}_3$$

سیستم مختصات

دایره متعلق به چرخ

$$\vec{\omega}_1 = 0 + (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3) \times \vec{\omega}_1$$

$$= (\vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3) \times \vec{\omega}_1$$

$$= (\omega_2 \cos \beta \hat{i} - \omega_2 \sin \beta \hat{j} + \beta \hat{k}) \times (\omega_1 \hat{i})$$

$$= \omega_1 \omega_2 \sin \beta \hat{k} + \omega_1 \beta \hat{j}$$

$$\vec{\omega}_2 = \omega_2 \cos \beta \hat{i} - \omega_2 \sin \beta \hat{j} \quad (\text{دایره متعلق به زمین})$$

$$\vec{\omega}_3 = \beta \hat{k} + (\vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3) \times \vec{\omega}_3 \quad (\text{محور دایره متعلق به چرخ})$$

$$= \beta \hat{k} + (\omega_2 \cos \beta \hat{i} - \omega_2 \sin \beta \hat{j}) \times \beta \hat{k}$$

$$= \beta \hat{k} - \omega_2 \beta \cos \beta \hat{j} - \beta \omega_2 \sin \beta \hat{i}$$

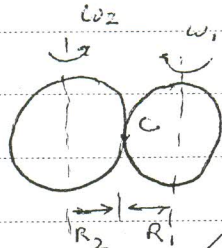
$$\alpha = (\omega_2 \sin \beta - \omega_2 \beta \sin \beta) \hat{i} + (\omega_1 \beta - \omega_2 \sin \beta - \omega_2 \beta \cos \beta) \hat{j}$$

$$+ (\omega_1 \omega_2 \sin \beta + \beta^2) \hat{k}$$

Subject:

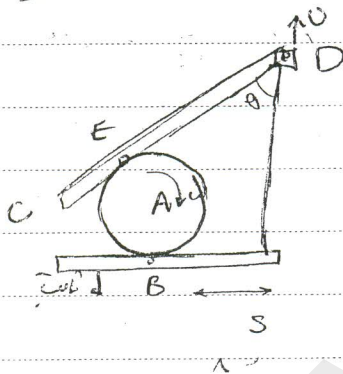
Year: Month: Date: 14

نکته: چرخ و میله در سرعت نقطه تماس روی دو جسم عمود با هم برابر است



$$R_1 \omega_1 = R_2 \omega_2$$

با توجه به شکل زیر چرخ رنده‌ی A با چرخ رنده‌ی C و D درگیر است. چرخ رنده‌ی A دارای شعاع R است و چرخ رنده‌ی C دارای شعاع R2 و چرخ رنده‌ی D دارای شعاع R1 است. چرخ رنده‌ی A با سرعت U به سمت راست حرکت می‌کند. چرخ رنده‌ی C با سرعت U به سمت چپ حرکت می‌کند. چرخ رنده‌ی D با سرعت U به سمت راست حرکت می‌کند. چرخ رنده‌ی A با چرخ رنده‌ی C در نقطه E درگیر است و با چرخ رنده‌ی D در نقطه D درگیر است. چرخ رنده‌ی A با سرعت U به سمت راست حرکت می‌کند.



$$\vec{V}_B = 0$$

$$\vec{V}_E \Big|_{\text{gear A}} = \vec{V}_E \Big|_{\text{gear CD}}$$

$$\vec{V}_A + \omega_{GA} \times \vec{r}_{AE} = \vec{V}_D + \omega_{GCD} \times \vec{r}_{DE}$$

$$-R\omega_{GA} \hat{i} + \omega_{GA} \hat{k} \times (R \cos \theta \hat{i} + R \sin \theta \hat{j}) = U \hat{j} + \dot{\theta} \hat{k} \times (DE \sin \theta \hat{i} - DE \cos \theta \hat{j})$$

$$(DE \sin \theta \hat{i} - DE \cos \theta \hat{j})$$

$$-R\omega_{GA} - R\omega_{GA} \sin \theta = DE \dot{\theta} \cos \theta$$

$$R\omega_{GA} \cos \theta = U + DE \dot{\theta} \sin \theta$$

$$\Rightarrow \omega_{GA} = \frac{U \cos \theta}{R(1 + \sin \theta)}$$

$$\dot{\theta} = \frac{-U}{DE}$$

$$DE \sin \theta - R \cos \theta = S \Rightarrow DE = \frac{S + R \sin \theta}{\sin \theta}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = -\frac{U \sin \theta}{S + R \cos \theta}$$

نکته: سرعت نقطه تماس از تغییر جهت

سرعت است چون سرعت A تغییر

$$\vec{V}_A = -R\omega_{GA} \hat{i} = \frac{-U \cos \theta}{1 + \sin \theta} \hat{i}$$

V_A

Subject:

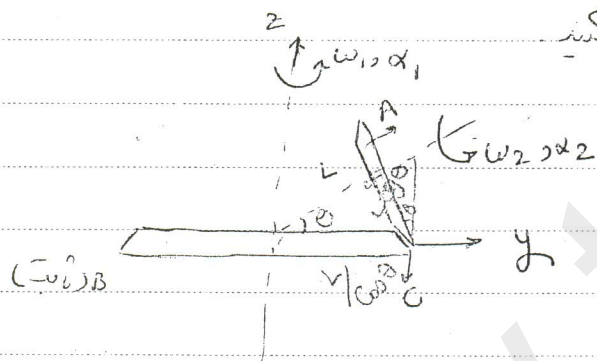
Year: Month: Date: ()

$$\vec{a}_A = a_{An} \hat{j} + a_{At} \hat{i} = 0 + v_A \hat{i}$$

$$\vec{v}_A = -v\theta \left(\frac{-\sin\theta(1+\sin\theta) - \cos\theta}{(1+\sin\theta)^2} \right) = \frac{v\theta}{1+\sin\theta}$$

$$\vec{v}_A = \frac{-v^2 \sin\theta}{(1+\sin\theta)(S+R\sin\theta)} \hat{i}$$

مطابق شکل چرخ زنده‌ی A روی چرخ زنده‌ی ثابت B می‌غلتد و حرکتی که در نقطه‌ی M نشان داده شده‌ی مرکز چرخ زنده‌ی A دارای سرعت ω_1 و شتاب زاویه‌ای α_1 باشد سرعت زاویه‌ی B و شتاب زاویه‌ی A را تعیین کنید.



$$\omega_1 = 2 \text{ rad/s} \quad \theta = 30^\circ$$

$$\omega_2 = 4 \text{ rad/s} \quad L = 1 \text{ m}$$

$$\vec{v}_C = 0$$

$$\vec{v}_C + \omega_A \times \vec{r}_{OC} = 0$$

$$\rightarrow -L \sin\theta \omega_1 \hat{i} + (\omega_2 \cos\theta \hat{j} + \omega_2 \sin\theta \hat{k} + \omega_1 \hat{k}) \times (-L \tan\theta \cos\theta \hat{k} + L \tan\theta \sin\theta \hat{j}) = 0$$

$$\omega_2 = \frac{-1}{\sin\theta} \times \omega_1 = \frac{-1}{\sin(30)} (2) = -4 \text{ rad/s}$$

$$\omega_{gA} = (\omega_1 \hat{k} + \omega_2 \cos\theta \hat{j} + \omega_2 \sin\theta \hat{k})$$

$$= -3.46 \hat{j} \text{ (rad/s)}$$

$$\alpha_2 = \omega_2 = \frac{-1}{\sin\theta} \omega_1 = \frac{-1}{\sin 30} \times 4 = -8 \text{ rad/s}$$

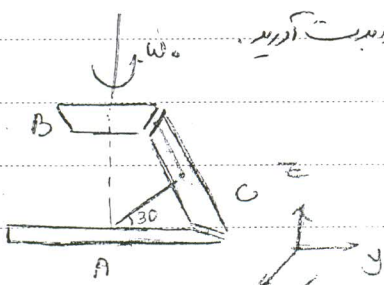
$$\vec{\alpha}_{gA} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = \alpha_1 \hat{k} + (\alpha_2 \cos\theta \hat{j} + \alpha_2 \sin\theta \hat{k})$$

$$+ (\omega_1 \times \omega_2)$$

$$= 4\hat{k} + (-8\cos 30^\circ \hat{j} - 8\sin 30^\circ \hat{k}) + 2\hat{k} \times (-4\cos 30^\circ \hat{j} - 4\sin 30^\circ \hat{k})$$

$$6.93\hat{i} - 6.93\hat{j}$$

نقطه A: چرخش در جهت مثبت B: در جهت مثبت C: چرخش در جهت مثبت



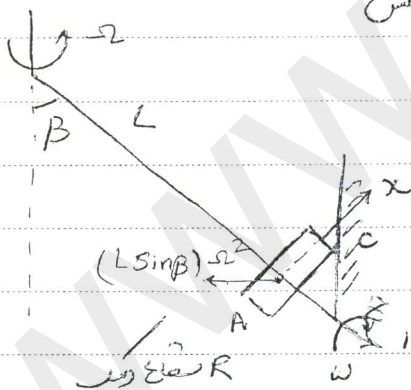
نقطه A: چرخش در جهت مثبت B: در جهت مثبت C: چرخش در جهت مثبت

$$v_c = 0 \rightarrow v_A + \omega_{disc} \times r_{AC} = 0$$

$$- \omega L \sin \beta \hat{j} + (-\omega \hat{k} - \omega \cos \beta \hat{k} + \omega \sin \beta \hat{i}) \times R \hat{i} = 0$$

$$\omega = - \frac{L}{R} (\sin \beta + \cos \beta)$$

$$\omega = -$$



$$\vec{\omega}_{disc} = \omega \left(\frac{L}{R} \sin \beta + \cos \beta \right) \hat{k} - \omega \cos \beta \hat{k} + \omega \sin \beta \hat{i}$$

$$\vec{\omega}_{disc} = \omega \sin \beta \left(\frac{L}{R} \hat{k} + \hat{i} \right)$$

$$\alpha_{disc} = \vec{\omega}_{dis} = \vec{\omega} + \vec{\omega}$$

$$\alpha_{disc} = (\vec{\omega} \times \vec{\omega}) \times \vec{\omega}$$

$$(-\omega \cos \beta \hat{k} + \omega \sin \beta \hat{i}) \times (-\omega \left(\frac{L}{R} \sin \beta + \cos \beta \right) \hat{k})$$

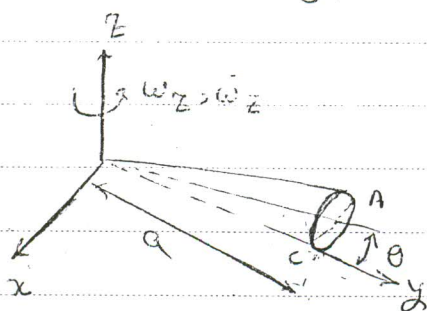
$$\vec{a}_c = \vec{a}_A + \vec{\omega}_{disc} \times \vec{r}_{AC} + \vec{\omega}_{disc} \times (\vec{\omega}_{disc} \times \vec{r}_{disc})$$

Subject:

Year: Month: Date: ()

$$\begin{aligned}
 &= (L \sin \beta \Omega^2)(-\cos \beta \hat{i} - \sin \beta \hat{k}) \\
 &+ (-\Omega^2 \sin \beta (L/R \sin \beta + \cos \beta) \hat{j}) \times R \hat{i} \\
 &+ \Omega \sin \beta (L/R \hat{k} + \hat{i}) \wedge [\vec{\omega}_{disc} \times R \hat{i}] \\
 &= -\Omega^2 (L/R \sin^2 \beta + \sin \beta \cos \beta) (L \hat{i} - R \hat{k})
 \end{aligned}$$

فرض کنیم که دیسک در یک سطح مقابل حول محور Z چرخش می کند. در یک لحظه مشخص، نقطه A در لبه دیسک قرار دارد.



$$\omega_z = 4 \text{ rad/s}$$

$$\omega_c = 3 \text{ rad/s}$$

$$\theta = 20^\circ$$

$$a = 2 \text{ ft}$$

سرعت زاویه ای دیسک حول محور خود را ω_c در نظر بگیرید.

$$\vec{V}_C = 0 \rightarrow \text{سرعت نقطه مرکزی} \rightarrow \text{شرط لغزش}$$

$$\vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_{OC} = 0$$

$$0 + ((\omega_z - \omega_c \sin \theta) \hat{k} - \omega_c \sin \theta \hat{j}) \times a \hat{j} = 0$$

$$\omega_c = \frac{\omega_z}{\sin \theta}$$

$$\omega_c = \frac{\omega_z}{\sin \theta}$$

$$\vec{\omega} = (\omega_z - \omega_c \sin \theta) \hat{k} - \omega_c \sin \theta \hat{j}$$

مجموعه سرعت زاویه ای دیسک

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_z + \vec{\omega}_c$$

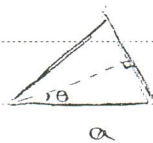
$$\vec{\omega} = \omega_z \hat{k} + (\omega_c \sin \theta \hat{k} - \omega_c \cos \theta \hat{j})$$

$$+ \omega_z \hat{k} \times (-\omega_c \sin \theta \hat{k} - \omega_c \cos \theta \hat{j})$$

Subject:

Year. Month. Date. 6

TA - دایره



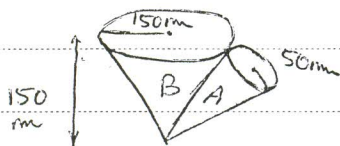
$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_{OA}$$

$$= -\vec{\omega} \times (-a \sin \theta \hat{i} + a \sin^2 \theta \hat{j} + a \sin \theta \cos \theta \hat{k})$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \vec{\dot{\omega}} \times \vec{r}_{OA} + \omega \times (\omega \times \vec{r}_{OA})$$

نقطه A بر روی زائیدای ثابت بر روی مخروط ثابت B می‌گردد به گونه‌ای که 4 ثانیه پس از حرکت
کامل حول مخروط B انجام می‌دهد اندازه شتاب زائیدای مخروط A را بیابید.

$$\alpha = 6.32 \text{ rad/s}^2$$



$$\vec{\omega}_{AB} = \vec{\omega}_{AB,t} + \vec{\omega}_{AB,n}$$

حل سوال ۱

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{BA}$$

$$= \vec{v}_B + (\vec{\omega}_{AB,t} + \vec{\omega}_{AB,n}) \times \vec{r}_{BA}$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{AB,n} \times \vec{r}_{BA}$$

$$\vec{a}_A = \underbrace{\vec{a}_B}_{I \text{ پ}} + \underbrace{\vec{\dot{\omega}}_{AB} \times \vec{r}_{BA}}_{I \text{ پ}} + \underbrace{\omega_{AB} (\omega_{AB} \times \vec{r}_{BA})}_{II \text{ پ}}$$

$$\vec{\omega}_{AB} = (\omega_{AB})_d + \omega_{AB,n} = \omega_{AB,t} \hat{e}_t + (\omega_{AB,t} + \omega_{AB,n}) \times \omega_{AB,t} + \omega_{AB,n}$$

$$I \text{ پ}) \quad \omega_{AB} \times \vec{r}_{BA} = 0 + (\omega_{AB,n} + \omega_{AB,t}) \times \vec{r}_{BA} + \omega_{AB,n} \times \vec{r}_{BA}$$

Subject:

Year. Month. Date. ()

$$\vec{H}_P = (\vec{\omega}_{AB,n} + \vec{\omega}_{AB,t}) \times [(\omega_{AB,t} + \omega_{AB,n}) \times \vec{r}_{PA}]$$

شیب امتیاز صلب در رصا

$$\vec{G} = m \cdot \vec{V}_G$$

اندازه حرکت خطی

$$\vec{H}_A = [I]_A \vec{\omega}$$

سرعت زاویه‌ای $\vec{\omega}$
ماتریس اینرسی (تسویق‌شده هم)
نسبت به محورهای سیستم مختصات A

نسبت به محورهای سیستم مختصات A

فریزم باینده ثابت A

$$[I] = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

درج نامیده از محور x

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2) dx$$

$$I_{xy} = \int xy dm = I_{yx}$$

$$\vec{r} = \vec{PG}$$

نقطه دلخواه P

$$\vec{H}_P = \vec{H}_G + \vec{r} \times \vec{G}$$

محال بردار اندازه حرکت خطی
حول مرکز جرم

transfer principle
for angular momentum

$$\begin{cases} \sum \vec{F} = \vec{G} = m \vec{V}_G = m a_G \\ \sum \vec{M}_A = \vec{H}_A = \dot{\vec{H}}_A + \vec{\Omega} \times \vec{H}_A \end{cases}$$

نسبت دایره سیستم مختصات A $\vec{\Omega}$

حالت خاص: 1- نقطه ثابت یا مرکز جرم در تسویق‌شده شود

2- سیستم مختصات دایره متحرک جسم صلب $(\vec{\Omega} = \vec{\omega})$

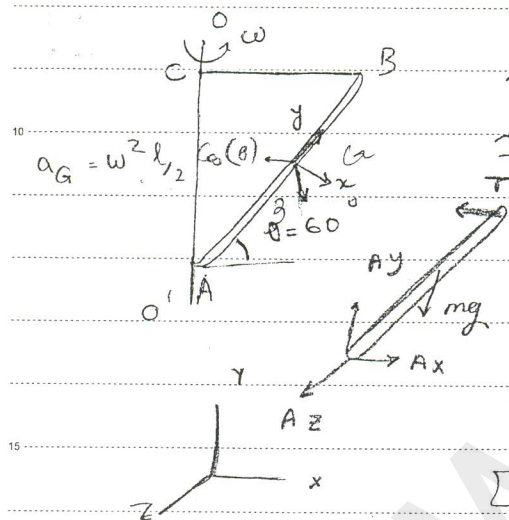
3- محورهای سیستم مختصات دایره متحرک نسبت به محورهای اصلی اینرسی باشد

Subject:

Year: Month: Date: 7

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma M_x = I_{xx} \dot{\omega}_x - (I_{yy} - I_{zz}) \omega_y \omega_z \\ \Sigma M_y = I_{yy} \dot{\omega}_y - (I_{zz} - I_{xx}) \omega_z \omega_x \\ \Sigma M_z = I_{zz} \dot{\omega}_z - (I_{xx} - I_{yy}) \omega_x \omega_y \end{array} \right.$$

مثال: یک قطعه یکنواختی AB در نقطه A به یک محور عمود بر صفحه و در نقطه B به یک قطعه یکنواختی BC به یک محور عمود بر صفحه متصل است. در هر دو محور سرعت زاویه‌ای $\omega = 15 \text{ rad/s}$ وجود دارد. نیروی کشش سطحی و نیروی گرانشی را در A تعیین کنید. بدنه AB را در نظر بگیرید.



$$m = 20 \text{ kg}$$

$$l = 2.4 \text{ m}$$

$$\Sigma F = ma_G$$

$$\Sigma M_G = \vec{H}_G$$

$$xyz = i, j, k$$

$$xyB = i, j, k$$

$$\Sigma F = ma_G$$

$$A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} - T \hat{i} - mg \hat{j} = -m \frac{l}{2} \sin 60 \omega^2 \hat{i}$$

$$A_x - T = -2700$$

$$A_y - 196.2 = 0 \rightarrow A_y = 196.2$$

$$A_z = 0$$

$$\Sigma \vec{M}_G = \vec{H}_G = \vec{H}_G|_{xyB} + \vec{r}_{xH} \times \vec{H}_G$$

$$\vec{H}_G = [I]_G \vec{\omega} = I_{xx} \omega_x \hat{i} + I_{yy} \omega_y \hat{j} + I_{zz} \omega_z \hat{k}$$

$$\omega_x = -\omega \sin 60$$

$$\omega_y = \omega \sin 60$$

$$\omega_z = 0$$

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Subject:

Year. Month. Date. ()

$$I_{xx} = \frac{1}{12} m l^2$$

$$I_{yy} = 0 \quad (\text{زیر مد})$$

$$I_{zz} = \frac{1}{12} m l^2$$

$$\vec{H}_G = -\frac{1}{12} m l^2 \omega \sin 60 \hat{i}$$

$$\vec{H}_G|_{xy} = 0$$

$$\vec{H}_G = (-\omega \cos 60 \hat{i} + \omega \sin 60 \hat{j}) \times (-\frac{1}{12} m l^2 \sin 60 \hat{i})$$

$$= \frac{1}{12} m l^2 \omega^2 \sin 60 \cos 60 \hat{k}$$

$$= 935.31 \hat{k}$$

$$\vec{M}_G = \vec{G} \vec{A} \times \vec{A} + \vec{G} \vec{B} \times \vec{T}$$

$$= (A_x \frac{l}{2} \sin 60 - A_y \frac{l}{2} \cos 60 + T \frac{l}{2} \sin 60) \hat{k}$$

$$- A_z \frac{l}{2} \hat{i} = (1.04 A_x - 0.6 A_y + 1.04 T) \hat{k} - 1.2 A_z \hat{i}$$

$$1.04 A_x - 0.6 A_y + 1.04 T = 935.31$$

$$-1.2 A_z = 0$$

$$\Rightarrow A_x = -843.735$$

$$A_y = 196.2$$

$$A_z = 0$$

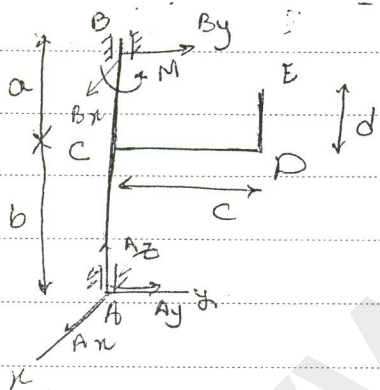
$$T = 1856.265$$

$$\Sigma M_x = -1.2 A_z = 0$$

[My: $a = 0$]

$$1.04 A_y - 0.6 A_y + 1.04 T = \frac{1}{2} m \ell^2 \omega^2 \sin 60^\circ \cos 60^\circ$$

مسازه‌ی نشان داده شده در شکل دارای وزن موزانده طول L می باشد این مسازه در محل B دارای پتانسیل است که نیروهای عکس العکلی و رجهاب داخلی ایجاد می کند و همچنین در محل A پتانسیلی وجود دارد که نیروهای عکس العکلی و رجهاب خارجی ایجاد می کند در صورتی که گشتاور M در راستای نیروی AB بر مسازه اعمال شود مؤلفه های نیروهای عکس العکلی در پتانسیل همانند همچنین شتاب زاویه ای مسازه را در لحظه نشان داده شده وقتی مسازه زاویه ای θ از مسازه برابر θ_0 است بدست



$$x = 5 \text{ lb/ft} \quad M = 20 \text{ lb-ft} \quad \sqrt{\quad}$$

$$a = 4 \text{ ft} \quad y = 32.2$$

$$b = 2 \text{ ft} \quad \omega = 10 \text{ rad/s}$$

$$c = 2 \text{ ft}$$

$$d = 2 \text{ ft}$$

مدرسة الجاهلية الخ

$$\varphi_{\text{جرم}} = \frac{4}{9}$$

$$I_{\text{in}} = \underbrace{f(a+b)}_{ab \text{ w/o } f} \frac{(a+b)^2}{12} + f(a+b) \left(\frac{a+b}{2} \right)^2$$

$$+ \rho_C \frac{c^2}{12} + \rho_C (b^2 + (c/2)^2)$$

$$+ p_d d_{12}^2 + p_d (c^2 + (b + d_{12})^2)$$

$$I_{yy} = \rho(a+b) \frac{(a+b)^2}{12} + \rho(a+b) \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$+ \rho c b^2 + \rho d \frac{d^2}{12} + \rho d (b + d/2)^2$$

$$I_{zz} = 0 + \rho c \frac{c^2}{12} + \rho c (c/2)^2 + \rho d c^2$$

$\frac{1}{2} \text{KClO}_3 \rightarrow \frac{1}{2} \text{KCl} + \frac{3}{2} \text{O}_2$
 PAPCO
 $I_{xy} = 0$

Subject: _____

Year: _____

Month: _____

Date: _____

()

$$I_{yz} = \int_0^c \int_b^{b+d} \rho y z \, dy \, dz + \int_b^{b+d} \int_0^c \rho z y \, dy \, dz$$

$$= \rho \int_0^c \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^c \left[z \right]_b^{b+d} dz + \rho \int_b^{b+d} \left[\frac{z^2}{2} \right]_b^{b+d} \left[y \right]_0^c dy$$

$$= \rho b \frac{c^3}{2} + \rho c \frac{d^3 + 3bd^2}{2}$$

$$[I] = \begin{bmatrix} 16.98 & 0 & 0 \\ 0 & 15.32 & -2.48 \\ 0 & -2.48 & 1.66 \end{bmatrix} \text{ lbm-ft}^2$$

$$\sum M_A = \dot{H}_A$$

$$H_A = [I_A] \vec{\omega} \quad \vec{\omega} = \omega \hat{k}$$

$$H_A = -I_{yz} \omega \hat{j} + I_{zz} \omega \hat{k}$$

$$\dot{H}_A = H_A|_{xyz} + \vec{\omega} \times H_A$$

$$= -I_{yz} \dot{\omega} \hat{j} + I_{zz} \dot{\omega} \hat{k} + \omega \hat{k} \times (-I_{yz} \omega \hat{j} + I_{zz} \omega \hat{k})$$

$$= -I_{yz} \dot{\omega} \hat{j} + I_{zz} \dot{\omega} \hat{k} + I_{yz} \omega^2 \hat{i}$$

$$= -2.48 \dot{\omega} \hat{j} + 1.66 \dot{\omega} \hat{k} + 2.48 \omega^2 \hat{i}$$

$$\sum \vec{M}_A = B_x(a+b) \hat{j} - (B_y(a+b) + \gamma c \frac{c}{2} + \gamma d c) \hat{i}$$

$$+ M \hat{k} = 6B_x \hat{j} - (6B_y + 30) \hat{i} + 50 \hat{k}$$

$$\begin{cases} -6B_y - 30 = 248 \\ 6B_x = -2.48 \dot{\omega} \\ 50 = 1.66 \dot{\omega} \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} \dot{\omega} \\ B_x \\ B_y \end{matrix}$$

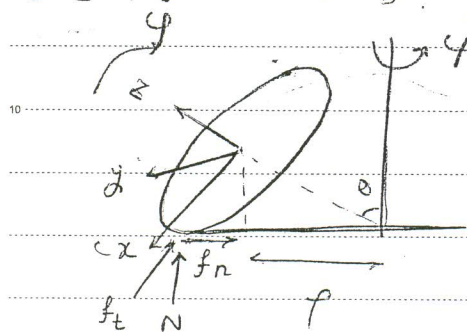
Subject:

Year. Month. Date. 9

$$\sum \vec{F} = m \vec{a}_G$$

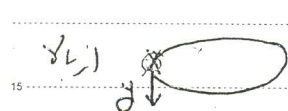
$$(A_x + B_x) \hat{i} + (A_y + B_y) \hat{j} + (A_z - \rho(a+b+c+d)) \hat{k} \\ = \rho(a+b+c+d) a_G$$

دیسک هلتی نازی به جسم m بدون لغزش بر روی یک سطح افقی می چرخد به سبب نیروی کشش که در مرکز دیسک وارد می شود. دایره ای به شعاع R می کشد نازید به نشان داده شده در شکل ثابت می باشد. در صورتی که سرعت مرکز دیسک v باشد برای سرعت v و جرم دیسکهای R, θ, ρ باید



$$\vec{\omega} = \dot{\varphi} \hat{k} + \dot{\psi} \hat{i}$$

$$\vec{\omega} = (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) \hat{k} - \dot{\psi} \sin \theta \hat{i}$$



$$V_C = 0 \quad \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AC} = 0$$

$$\dot{\psi} \hat{j} + ((\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) \hat{k} - \dot{\psi} \sin \theta \hat{i}) \times R \hat{i}$$

$$\rightarrow \dot{\varphi} = -(\frac{R}{r} + \cos \theta) \dot{\psi} \quad \dot{\psi} = \frac{v}{R}$$

$$\vec{\omega} = -\dot{\psi} \left(\frac{R}{r} \hat{k} + \sin \theta \hat{i} \right)$$

$$\vec{\alpha} = \ddot{\varphi} \hat{k} + \ddot{\psi} \hat{i} = 0 + \ddot{\psi} \hat{i}$$

$$= (\dot{\psi} \cos \theta \hat{k} - \dot{\psi} \sin \theta \hat{i}) \times \dot{\psi} \hat{k}$$

$$= \dot{\psi} \dot{\psi} \sin \theta \hat{j} = -(\frac{R}{r} + \cos \theta) \dot{\psi}^2 \sin \theta \hat{j}$$

$$\vec{H}_G = \vec{H}_G|_{xy3} + \vec{L} \times \vec{H}_G$$

سیستم مختصات xy3 دایره مرکزی دایره ای

Subject: _____

Year. _____ Month. _____ Date. _____ ()

$$= \omega + (\dot{\phi} \cos \theta \hat{k} - \dot{\phi} \sin \theta \hat{i}) \wedge (-\dot{\phi} (I_{zz} \frac{p}{R} \hat{k} + I_{xx} \sin \theta \hat{i}))$$

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{4} m R^2$$

$$I_{zz} = \frac{1}{2} m R^2$$

$$= -\dot{\phi}^2 m R^2 \sin \theta \left(\frac{1}{4} \sin \theta + \frac{1}{2} \frac{p}{R} \right)$$

$$\Sigma \vec{M}_C = f_n R \sin \theta \hat{i} - R f_t \hat{k} - N R \cos \theta \hat{j}$$

$$\Sigma \vec{M}_C = \vec{H}_C \rightarrow \begin{cases} -R f_t = 0 \rightarrow f_t = 0 \end{cases}$$

$$f_n R \sin \theta - N R \cos \theta = -\dot{\phi}^2 m R^2 \sin \theta \left(\frac{1}{4} \sin \theta + \frac{1}{2} \frac{p}{R} \right)$$

$$\Sigma \vec{F} = m \vec{a}_G$$

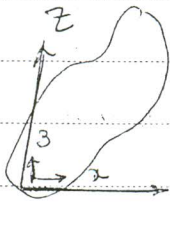
$$f_n \hat{i} - f_t \hat{k} + N \hat{j} - mg \hat{j} = \frac{mv^2}{p} \hat{i}$$

$$= \begin{cases} f_n = \frac{mv^2}{p} \\ N = mg \end{cases}$$

$$\text{II into I} \rightarrow v^2 = \frac{49 p^2 \cos \theta}{6 p + R \cos \theta}$$

Subject:

Year . Month . Date . 10



حرکت حول یک نقطه ثابت - زوایای اویلر

ψ = چرخش حول محور z (precession angle)

θ = چرخش حول محور x (Nutation angle)

ϕ = چرخش حول محور z (spin angle)

$$I' = I_{xx} = I_{yy} \quad I_{zz} = I$$

$$\Sigma M_x = I' \ddot{\theta} + (I - I') (\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta) + I \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \theta$$

$$\Sigma M_y = I' \ddot{\psi} \sin \theta + 2I' \dot{\theta} \dot{\psi} \sin \theta - I (\dot{\phi} + \dot{\psi} \sin \theta) \dot{\theta}$$

$$\Sigma M_z = I (\ddot{\phi} + \dot{\psi} \sin \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta)$$

در حالت (steady precession) $\dot{\theta} = 0$

$$\Sigma M_x = [I (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) - I' \dot{\psi} \cos \theta] \dot{\psi} \sin \theta$$

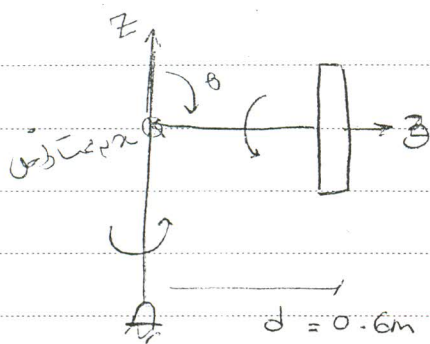
$$\Sigma M_y = 0$$

$$\Sigma M_z = 0$$

دیسک نشان داده شده در شکل مقابل با سرعت زاویه‌ای 0.3 rad/s حول محور قائم می‌چرخد و در صورتی که وزن دیسک 90 N باشد، راخرج عمود بر محور تقارن و در سرعت زاویه‌ای چرخش دیسک حول محور خود را با استفاده از زوایای اویلر بیابید.

Subject:

Year. Month. Date. ()



کافی زاید ثابت باشد

$$\dot{\varphi} = 0.3 \text{ rad/s}$$

و زاویه بین Z و z

$$\theta = +\pi/2$$

کثافت ثابت باید دردی

$$\ddot{\varphi} = ?$$

باشد

$$I' = \frac{1}{4} m R^2 + m d^2$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{90}{9.81} \right) (0.15)^2 + \left(\frac{90}{9.81} \right) \times 0.6^2$$

$$= 3.3543$$

$$I = \frac{1}{2} m R^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{90}{9.81} \right) (0.15)^2 = 0.10321$$

$$\sum M_x = [I(\ddot{\varphi} + \dot{\varphi} \sin \theta) - I' \dot{\varphi} \cos \theta] \dot{\varphi} \sin \theta$$

$$90(0.6) = [0.10321(\ddot{\varphi} + 0.3 \cos \pi/2) - 3.3543(0.3) \cos \pi/2]$$

$$\ddot{\varphi} = 1744.02 \text{ rad/s}$$

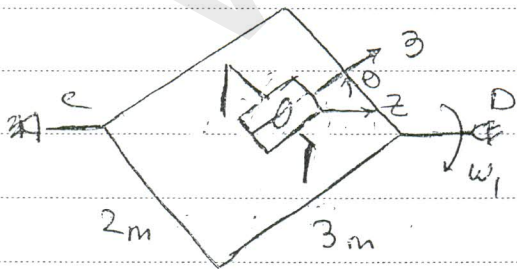
$$0.3 \sin \pi/2$$

صورتی آن دانه در سطح سرعت زاویه ای ثابت $\omega_1 = 2 \text{ rad/s}$ حول محور CD می چرخد و سطح افقی

شیر و کوب (درجه آزادی نصب شده که دارای دسکی بدون 3.4 N و ارتفاع 50 m می باشد

دسک با سرعت زاویه ای $\omega_2 = 10,000 \text{ rpm}$ به قاع حول محور خود می چرخد در صورتی که بخواهم

قاع را به دو انوار صفحه بلند دارم چیده شده در دو دایره موازی



و معادلات دینامیکی و معادلات حرکتی است که در زیر نشان

برادرین و کوچک تر از می هم

$$\dot{\varphi} = \omega_1 = 2 \text{ rad/s}$$

$$\dot{\varphi} = 10000 = 1047.197 \text{ rad/s}$$

Subject:

Year.

Month.

Date.

()

7

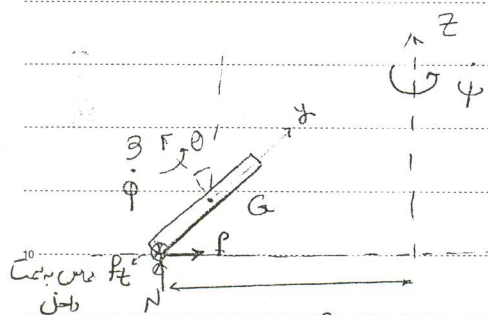
TA

$$\theta = \tan^{-1}(2/3) = 33.69^\circ$$

$$I = \frac{1}{2} m R^2 = 4.332 \times 10^{-4}$$

$$I' = \frac{1}{4} m R^2 = 2.166 \times 10^{-4}$$

$$M_x = 0.5037 \text{ N.m}$$



$$\dot{\psi} = \frac{v}{R}$$

$$\vec{v}_G = 0$$

$$\vec{v}_G + \omega \times \vec{r}_{GC} = 0$$

$$\vec{\omega} = \dot{\phi} + \dot{\psi} = (\dot{\phi} + \dot{\psi} \sin \theta) \hat{k} + \dot{\psi} \sin \theta \hat{j}$$

$$R \dot{\psi} \hat{i} + [(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \hat{k} + \dot{\psi} \sin \theta \hat{j}] \times (-R \hat{j}) = 0$$

$$\dot{\phi} = - \frac{R + R \cos \theta}{R} \dot{\psi}$$

$$\vec{\omega} = \dot{\phi} \hat{k} + \dot{\psi} \hat{j}$$

$$\sum \vec{F} = m \vec{a}_G \rightarrow (N - mg) \hat{k} + f_n \hat{j} - f_t \hat{i} = \frac{mv^2}{R} \hat{j}$$

$$f_n = + \frac{mv^2}{R}$$

$$f_t = 0$$

$$N = mg$$

$$\sum M_x = f_n R \sin \theta - N R \cos \theta = \frac{mv^2}{R} R \sin \theta - mg R \cos \theta$$

$$\sum M_x = (I - I') \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + I \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \theta$$

$$1, 2, 3 \rightarrow 4 \Rightarrow v^2 = \frac{4gR \cot \theta}{6R + R \sin \theta}$$

$$\vec{\Sigma M}_A = \vec{H}_A$$

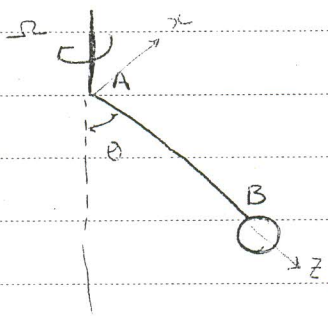
نقطه ثابت یا نقطه با سرعت ثابت (مشتاب صفر)

نسبت به محضات انفرسی

نقطه ای که راستای بردار شدن از مرکز جرم

گذرد

۱. شتاب خطی مرکز جرم m به انتهای میله AB منتقل شده است به گونه ای که نسبت دوران حولی برابر با گویه میله منتقل شده به آن با سرعت زاویه ω حول خود قائم می شود در صورتی که در لحظه نشان داده شده زاویه راستای میله با راستای قائم با جهش θ در حال افزایش باشد مرکز جرم میله AB صرف نظر گردد انرژی جنبشی گویه را باید R شعاع گویه d فاصله مرکز گویه از نقطه A



$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{H}_A$$

به شرط ثابت بودن نقطه

$$\vec{\omega} = -\omega \sin \theta \hat{i} + \dot{\theta} \hat{j} + \omega \cos \theta \hat{k}$$

$$\vec{H}_A = [I_A] \vec{\omega}$$

$$= -I_{xx} \omega \sin \theta \hat{i} + I_{yy} \dot{\theta} \hat{j}$$

$$+ I_{zz} \omega \cos \theta \hat{k}$$

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{2}{5} m R^2 + m d^2$$

$$I_{zz} = \frac{2}{5} m R^2$$

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{H}_A = \frac{1}{2} (I_{xx} \omega^2 \sin^2 \theta + I_{yy} \dot{\theta}^2 + I_{zz} \omega^2 \cos^2 \theta)$$

دستی بدون لغزش در حال غلتش است به گونه ای که زاویه θ در مورد سطح دیسک راستای

قائم ثابت می باشد انرژی جنبشی دیسک را بر حسب زاویه θ و سرعت زاویه ω را باید

شعاع دیسک R

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{H}_A$$

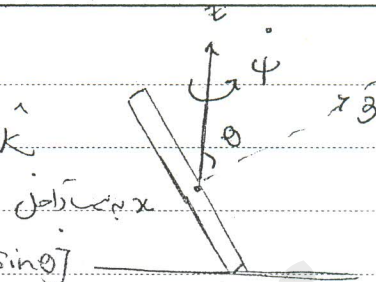
$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{H}_G$$

Subject:

Year. Month. Date. 12

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{H}_G$$

$$\vec{\omega} = \dot{\phi} \sin \theta \hat{j} + \dot{\theta} \hat{i} + (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\phi}) \hat{k}$$

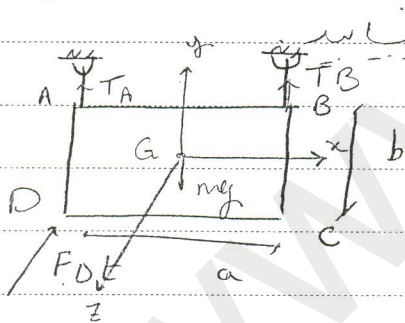


$$H_G = [I]_G \vec{\omega} = I_{xx} \dot{\theta} \hat{i} + I_{yy} \dot{\phi} \sin \theta \hat{j} + I_{zz} (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\phi}) \hat{k}$$

$$v_G = \vec{\omega} \times \vec{r}_{CG} = R \dot{\theta} \hat{k} - R (\dot{\phi} + \dot{\phi} \cos \theta) \hat{i}$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m R^2 [5 \dot{\theta}^2 + 6 \dot{\phi} (\dot{\phi} + \dot{\phi} \cos \theta) + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta]$$

در یک مستطیل شکل به جرم m از نقاط A و B توسط دو طناب آویزان است. مرکز جرم G در وسط آن قرار دارد. در نقطه D و C دو نیروی عمود بر سطح اعمال می‌شود. مرکز جرم G در وسط آن قرار دارد.



$$v_{Gy} = 0$$

$$\omega_y = 0$$

$$v_G = v_x \hat{i} + v_z \hat{k}$$

$$\vec{\omega} = \omega_x \hat{i} + \omega_y \hat{j}$$

$$\vec{H}_G = I_{xx} \omega_x \hat{i} + I_{yy} \omega_y \hat{j} = \frac{1}{2} m b^2 \omega_x \hat{i} + \frac{1}{2} m a^2 \omega_y \hat{j}$$

$$-F_{Dt} \hat{k} + (T_A \hat{e}_t + T_B \hat{e}_t - mg \hat{j}) \hat{j} = m (v_x \hat{i} + v_z \hat{k})$$

$$m v_x = 0 \Rightarrow v_x = 0$$

$$-F_{Dt} = m v_z \Rightarrow v_z = \frac{-F_{Dt}}{m} \quad (I)$$

$$T_A + T_B - mg = 0 \Rightarrow T_A + T_B = mg$$

Subject:

Year: Month: Date: ()

$$\vec{V}_G = \frac{-F \Delta t}{m} \hat{k}$$

$$(-T_A \Delta t \frac{a}{2} + T_B \Delta t \frac{a}{2}) \hat{k} - F \Delta t (\frac{a}{2}) \hat{j}$$

$$+ F \Delta t (\frac{b}{2}) \hat{i} = \frac{1}{12} m b^2 \omega_x \hat{i} + \frac{1}{12} m a^2 \omega_y \hat{j}$$

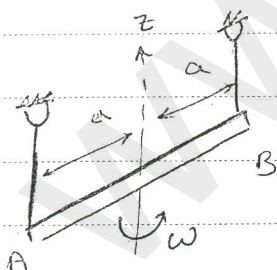
$$\Rightarrow \begin{cases} -F \Delta t (\frac{a}{2}) = \frac{1}{12} m a^2 \omega_y \\ F \Delta t (\frac{b}{2}) = \frac{1}{12} m b^2 \omega_x \end{cases} \quad \text{II}$$

$$-T_A + T_B = \dots$$

$$\Rightarrow \omega_y = \frac{-6 F \Delta t}{m a}$$

$$\omega_x = \frac{6 F \Delta t}{m b} \quad \text{II} \quad T_A = T_B = \frac{m g}{2}$$

نشان می‌دهد که میله AB دارای چگالی دینی (وزن بر واحد طول) λ می‌باشد و در یک طرف آن میله از نقطه A تا B آزادانه در یک فضای بدون اصطکاک می‌تواند حرکت کند. میله در یک حالت تعادل قرار دارد. اگر از یک طرف میله یک نیروی عمودی به بالا اعمال شود و میله را به یک زاویه θ از حالت تعادل می‌تواند حرکت کند. اگر از یک طرف میله یک نیروی عمودی به بالا اعمال شود و میله را به یک زاویه θ از حالت تعادل می‌تواند حرکت کند.



$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{12} \frac{\lambda (2a)}{g} (2a)^2 \right] \omega^2 + \dots$$

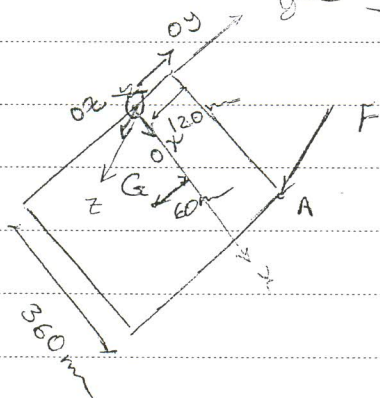
$$= 0 + \lambda (2a) h$$

$$\Rightarrow h = \frac{1}{6} a^2 (\omega^2 / g)$$

Subject:

Year: Month: Date: 18

در یک مربع 10 kg از جنس یک مصالح لوله ای طره ای آویزان شده است و در ابتدا در حال سکون است. سپس توسط جکش صغیره ای در نقطه A بر آن اعمال می گردد نیروی صغیره ای تولید شده به وسیله جکش عمود بر سطح درون بوله و مقدار متوسط آن در بازه زمانی 4 میلی ثانیه (زمان اعمال نیرو) برابر با 5000 نیوتن می باشد. سرعت زاویه ای در آن لحظه بعد از اعمال صغیره است. آردید همچنین نیروی عکس العملی متوسط در نقطه O را بدین



نیروی در آن در بازه نیروی صغیره صرف تقریبی کنیم

$$I_{xx} = \frac{1}{2} \times 10 \times 0.36^2 + 10(0.06)^2 = 0.144$$

$$I_{yy} = \frac{1}{2} \times 10 \times 0.36^2 + 10(0.18)^2 = 0.432$$

$$I_{zz} = \frac{1}{12} \times 10(0.36^2 + 0.36^2) + 10(0.18^2 + 0.06^2) = 0.576$$

$$I_{xy} = 10(-0.18)(0.06) = -0.108$$

$$\vec{\omega} = \omega_x \hat{i} + \omega_y \hat{j} + \omega_z \hat{k}$$

$$(\vec{v}_G)_z = \vec{\omega} \times \vec{r}_{AG} = 0.06\omega_z \hat{i} + 0.18\omega_z \hat{j} - (0.06\omega_x + 0.18\omega_y) \hat{k}$$

$$(\vec{H}_O)_z = (0.144\omega_x + 0.108\omega_y) \hat{i} + (0.432\omega_y + 0.108\omega_x) \hat{j} + 0.576\omega_z \hat{k}$$

$$\sum M_{Oet} = (\vec{H}_O)_z - (\vec{H}_O)_i$$

چون در آن است

$$[(0.36\hat{i} + 0.12\hat{j}) \times 5000\hat{k}](0.004) = (\vec{H}_O)_z$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0.144\omega_x + 0.108\omega_y = 2.4 \\ 0.432\omega_y + 0.108\omega_x = -7.2 \\ 0.576\omega_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \omega_z = 35.90 \hat{i} - 25.6 \hat{j}$$

Subject:

Year. Month. Date. ()

اصل ضربه - دبرقوف
عقلی

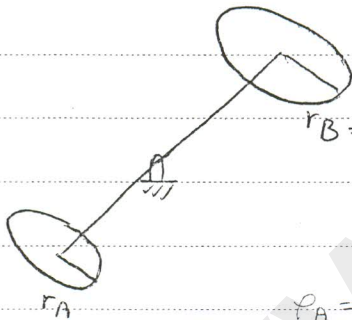
$$\sum \vec{f} \Delta t = m(\vec{v}_G)_2 - m(\vec{v}_G)_1$$

$$[0x\hat{i} + 0y\hat{j} + (0z + F)\hat{k}] \Delta t = 10 [0.06\omega_z\hat{i} + 0.18\omega_z\hat{j} - (0.06\omega_x + 0.18\omega_y)\hat{k}]$$

$$0x = 0y = 0$$

$$0z = 1153 \text{ N}$$

در دو دیسک به موازات یک خط میخورد و دیسک A دارای جرم 20 kg و شعاع $r_A = 150 \text{ mm}$ است. دیسک B در برابر A ثابت در ابتدا میخورد و در حال سکون است. دیسک B شعاع 30 N.m میخورد و به محض اعمال میخورد در صورتیکه سرعت زاویه ای میخورد از 5 هرتز به 480 rpm در شعاع B را تعیین کنید.



اصل تطابق

$$\omega_{1 \rightarrow 2} = T_2 - T_1$$

$$I_A = \frac{1}{2} m_A r_A^2 = \frac{1}{2} \times 20 (0.15)^2 = 0.225 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$r_A = r_B \rightarrow \frac{m_A}{r_A^2 t_A} = \frac{m_B}{r_B^2 t_B}$$

$$m_B = m_A \left(\frac{t_B}{t_A} \right) \left(\frac{r_B}{r_A} \right)^2$$

$$= 20 \times 2 \text{ n}^2 = 40 \text{ n}^2 \text{ kg}$$

$$I_B = \frac{1}{2} m_B r_B^2 = \frac{1}{2} (40 \text{ n}^2) (0.15 \text{ n})^2 = 0.45 \text{ n}^4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I = I_A + I_B = (0.225 + 0.45 \text{ n}^4) \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad I$$

$$\omega_{1 \rightarrow 2} = T_2 - T_1 \quad \omega_{1 \rightarrow 2} = M(\theta_2 - \theta_1) = 30 \times 5 \times 2\pi = 300\pi \text{ rad}$$

$$T_1 = 0 \quad T_2 = \frac{1}{2} I (16\pi)^2$$

$$\omega_2 = 480 \text{ rpm} = 16\pi$$

Subject: 14

Data: _____

$$300\pi = \frac{1}{2} I (16\pi)^2$$

$$I = \frac{2(300\pi)}{(16\pi)^2} = 0.94604 \text{ I}$$

$$I \text{ \& II } 0.225 + 0.45n^4 = 0.74607$$

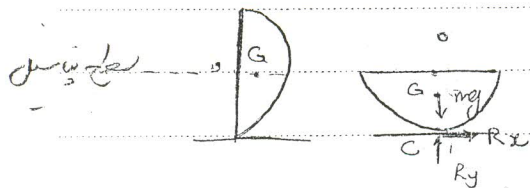
$$n = 1.03732$$

$$r_B = nr_A = 155.6$$

بیم استوانه‌ای به جرم M و شعاع R از دو محبت نشان داده شده در شکل داخل بدون رهای کرد
 با فرض غلش و غلش برای بیم استوانه سرعت زاویه‌ای آن را ابعاد غلش به اندازه 90° بیاید
 همچنین در آن لحظه نیروهای غلش اعمالی دارد بیم استوانه از سطح افقی رها بیاید

$$I_0 = \frac{1}{2} m R^2$$

$$OG = \frac{4}{3} R/\pi$$



چون با فرض غلش و غلش برای بیم استوانه سرعت زاویه‌ای آن را ابعاد غلش به اندازه 90° بیاید

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2$$

$$U_1 = 0, T_1 = 0$$

$$U_2 = mg(-OG) = -\frac{4}{3}\pi mgR$$

$$I_G = \frac{1}{2} m R^2 - m \left(\frac{4R}{3\pi} \right)^2 = 0.319873 m R^2$$

$$(V_G)_2 = (R - \frac{4}{3\pi} R) \omega_2 R = 0.57553 \omega_2 R$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m (V_G)_2^2 + \frac{1}{2} I_G \omega_2^2 = 0.32559 m R^2 \omega_2^2$$

$$0 + 0 = 0.32559 m R^2 \omega_2^2 - \frac{4}{3\pi} mgR$$

$$\omega_2 = 1.142 \sqrt{\frac{g}{R}}$$

Subject:

Data:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_0 + \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{OG}) + \vec{\alpha}_2 \times \vec{r}_{OG}$$

لا يقدر الله على أن يهدي قوماً غافلين

$$R\alpha_2 i + (-\omega_2 k) \wedge ((-\omega_2 \hat{k}) \wedge (-OGj)) + (-\alpha_2 K) \wedge (-OGj) \\ = (R - OG) \alpha_2 i + OG \omega_2^2 j$$

مختصات مرکز انفرجه $\Sigma M_c = I_c \alpha_2$

حق فی قیام.

$$= \left(I_G + m(R_{OG})^2 \right) \alpha$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = 0$$

$$\vec{a}_G = OG \omega_2^2 \hat{j}$$

$$\Sigma F_x = m(a_G)_x \rightarrow R_x = 0$$

$$\text{If } F_y = m(a_G)_y \rightarrow R_y = mg - m(OG\omega_2^2) = m \frac{4R}{3L} \omega_2^2$$

W25 Jan 40

$$R_y = 1.553 \text{ mg}$$

دست چرخ A ، دارای جرم m ، شعاع R ، سرعت زاویه‌ای ω ، و یک جسم B با جرم m_B به گونه‌ای در دست قرار دارد که محور است و طول آن l و جرم آن M و مرکز جرم آن در وسط آن است. جسم B با دست در تماس است و در دست قرار دارد. در موقع تماس برابر $\frac{1}{2} m \omega R$ از دست لغزش و دست را به سمت راست حرکت می‌دهند. در جهت مخالف می‌روند. در دست B حرکتی افقی است. دست B با دست A با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد. دست A با دست B با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد. دست A با دست B با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد.



Subject: 15

Data: _____

$$\omega_{1-2} = \omega_2 - \omega_1$$

$$(T_1)_A = \frac{1}{2} I \omega_0^2$$

$$(T_1)_B = 0$$

$$(T_2)_A = \frac{1}{2} I \omega_f^2$$

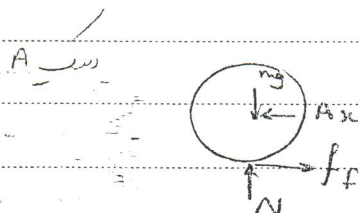
$$(T_2)_B = \frac{1}{2} I \omega_f^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} T_1$$

$$T_2 = I \omega_f^2$$

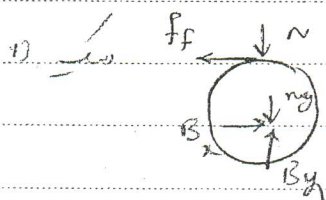
$$T_1 = \frac{1}{2} I \omega_0^2$$

$$\omega_f = \frac{1}{2} \omega_0$$



$$\sum f_y = 0 \Rightarrow mg = N$$

$$f_f = \mu_k N = \mu_k mg$$



$$(\omega_{1-2})_A = (T_2)_A - (T_1)_A$$

$$(\omega_{1-2})_A = \sum M_A \theta_A = + f_f r \theta_A$$

$$= + \mu_k mg r \theta_A$$

$$(\omega_{1-2})_B = \sum M_B \theta_B = f_f r \theta_B = \mu_k mg r \theta_B$$

$$(\omega_{1-2})_A + (T_1)_A = (T_2)_A$$

$$\mu_k mg r \theta_A + \frac{1}{2} I \omega_0^2 = \frac{1}{2} I \omega_f^2 \rightarrow \theta_A = \frac{I(\omega_0^2 - \omega_f^2)}{2 \mu_k mg r}$$

$$\theta_A = \frac{\frac{1}{2} m r^2 (\omega_0^2 - \frac{1}{4} \omega_0^2)}{2 \mu_k mg r} = \frac{3 r \omega_0^2}{16 \mu_k g}$$

$$n_A = \frac{\theta_A}{2\pi} = \frac{3 r \omega_0^2}{32 \pi \mu_k g}$$

Subject: _____

Date: _____

$$(\omega_{1-2})_B + (T_1)_B = (T_2)_B$$

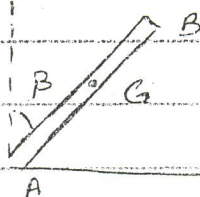
$$\mu_k m g r \theta_B + 0 = \frac{1}{2} I \omega_f^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m r^2 \right) \left(\frac{1}{4} \omega^2 \right)$$

$$\theta_B = \frac{r \omega^2}{2}$$

$$16 \mu_k g$$

$$n_B = \frac{\theta_B}{2\pi} = \frac{r \omega^2}{32\pi \mu_k g}$$

معمولی تغییر AB به طول L از ارتفاعی بر روی سطح بدون اصطکاک رخ می‌دهد در صورتی که در لحظه‌ای
برخورد با سطح راستی به راستی قائم زادی B به دور دارای سرعت قائم v_1 و بدون سرعت زادی‌ای
است. سرعت زادی‌ای عمده را بلافاصله بعد از برخورد در دو حالت زیر بدست آورید.



$$e = 1 \rightarrow \frac{0 - (v_{Ay})_2}{(v_{Ay})_1 - 0} = 1$$

$$(v_{Ay})_2 = - (v_{Ay})_1 = -(-v_1) = v_1$$

$$(v_A)_2 = (v_{Ax})_2 \hat{i} + v_1 \hat{j}$$

$$\sum \tau_A = 0 = m (v_{Gx})_2 \rightarrow (v_{Gx})_2 = 0$$

$$(H_A)_1 = (H_A)_2 \quad (v_G)_2 = (v_A)_2 + \omega_2 \times \rho_{AG}$$

$$(v_{Gy})_2 \hat{j} = (v_{Ax})_2 \hat{i} + v_1 \hat{j} + \omega_2 \hat{k} \times (l/2 \sin \beta \hat{i} + l/2 \cos \beta \hat{j})$$

$$\rightarrow (v_{Gy})_2 = v_1 + l/2 \omega_2 \sin \beta$$

$$(H_A)_1 = (H_A)_2$$

$$m v_1 \ell/2 \sin \beta k = I_G \omega_2 k + \omega (v_1 + \ell/2 \omega_2 \sin \beta) (\ell/2 \sin \beta) k$$

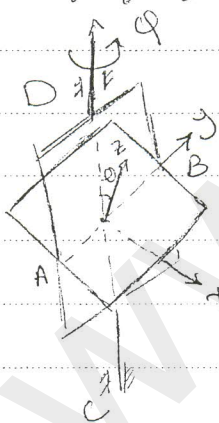
$$\omega_2 = - \frac{12 v_1 \sin \beta}{\ell (1 + 3 \sin^2 \beta)}$$

$$e = \cdot \rightarrow (v_{Ay})_2 = \cdot$$

$$\omega_L = - \frac{6 \sin \beta}{1 + 3 \sin^2 \beta}$$

در مورد الایست

در یک مربع شکل هتلی به حجم m طول C در شیب A و B توسط قلابی غیر دایره ای می شود حجم قلاب قابل صرف تحریر و یا آسان هایی که در شیب D قرار دارند یکباره های قلاب می باشند و در قلاب می توانست آزادانه حول محورهای AB و CD بچرخند با فرض اینکه در ابتدا $\theta = 45^\circ$ و $\dot{\phi}_0 = 8$ باشد برای حرکت حاصل الف) سرعت زاویه θ ب) می بینیم مقدار $\dot{\phi}$ ج) می بینیم مقدار $\dot{\theta}$



$$H_G = I_{xx} \omega_x i + I_{yy} \omega_y j + I_{zz} \omega_z k$$

$$\vec{\omega} = -\dot{\phi} \sin \theta \hat{i} + \dot{\theta} \hat{j} + \dot{\phi} \cos \theta \hat{k}$$

$$\begin{cases} I_{xx} = I_{yy} = I \\ I_{zz} = 2I \end{cases}$$

$$H_G = I(-\dot{\phi} \sin \theta \hat{i} + \dot{\theta} \hat{j} + 2\dot{\phi} \cos \theta \hat{k})$$

$$\tau_{\phi, \theta} = H_G \cdot \hat{k} = cte \quad \left\{ \begin{array}{l} I \dot{\phi} (\sin^2 \theta + 2 \cos^2 \theta) = cte \\ \hat{k} = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{k} \end{array} \right. \rightarrow \frac{I \dot{\phi} (\sin^2 \theta + 2 \cos^2 \theta)}{1 + \cos 2\theta} = cte$$

MICRO

$$\dot{\phi} (\sin^2 \theta + 2 \cos^2 \theta) = C_1 \quad (I)$$

$$C_1 = \dot{\phi}_0^2 (1 + \cos^2 \theta_0) = 12 \text{ rad/s}$$

47

Data:

$$\phi^2(1+\cos^2\theta) + \theta^2 - c_2 \sin^2 \theta \quad II$$

$$LII \quad \dot{\phi} + \dot{\theta}^2 = C_2$$

$$e_1 \dot{\phi}_0 + \dot{\phi}_0^2 = e_2 = 12 \times 8 + 0 = 96$$

$$3) \quad \ddot{\theta}^2 = C_2 - C_1 \dot{\phi} \rightarrow \ddot{\theta}^2 = C_2 - \frac{C_1^2}{1 + \cos^2 \theta} \quad \gamma$$

$$96 - \frac{144}{1 + \cos^2 \theta} \geq 0 \rightarrow \cos^2 \theta \geq 0.5$$

$$-45^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$$

$$\dot{\phi}_{\min} = \frac{C_1}{1 + \cos^2 \theta_{\min}} \Rightarrow \dot{\phi}_{\min} = \frac{12}{2} = 6 \text{ rad/s}$$

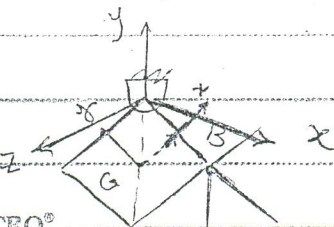
$$B_{\text{max}}^2 = C_2 - C_1 \phi_{\text{min}}$$

$$\dot{\theta}_{\text{max}} = 4.9 \text{ rad/s}$$

نوع منبع: نظر به طول و حجم m به دست می آید. طولی که برای اتصال به درخت می آید.

محور دایره B در نقطه A بر خط AB عمود است. محور A در نقطه B بر خط AB عمود است. محور A در نقطه B بر خط AB عمود است.

شماره برق را در دست جان (برجورد در سبک A و B را سبک
اصل عنوان و قسم $(-a_j) \times (\frac{f \Delta t}{\text{صندوق احوال به دور B}}) k$



$$= (\overset{\rightarrow}{H_A})_2 - (\overset{\rightarrow}{H_A})_1$$

Subject: 17/

Date: _____

$$\omega_1 = \omega \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{i} + \omega \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{j}$$

$$(H_G)_1 = \frac{1}{12} m a^2 \frac{\sqrt{2}}{2} \omega_1 (i + j)$$

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{12} m a^2$$

$$(V_G)_1 = 0$$

$$(H_A)_1 = (H_G)_1 + \rho_{AG} \times (m V_G)_1 = H_G$$

$$\begin{aligned} (V_B)_2 &= \omega_2 \times \rho_{AB} = (\omega_{2x} \hat{i} + \omega_{2y} \hat{j} + \omega_{2z} \hat{k}) \times (-a \hat{j}) \\ &= a (-\omega_{2x} \hat{k} + \omega_{2z} \hat{i}) \end{aligned}$$

$$\omega_{2x} = 0 \rightarrow (V_B)_{zz} = 0$$

$$\Rightarrow \omega_{2x} = 0$$

$$\vec{\omega}_2 = \omega_{2y} \hat{j} + \omega_{2z} \hat{k}$$

$$(V_G)_2 = \omega_2 \times \rho_{AG} = (\omega_{2y} \hat{j} + \omega_{2z} \hat{k}) \times \frac{a}{2} (\hat{i} - \hat{j})$$

$$= \frac{1}{2} a (\omega_{2z} \hat{i} - \omega_{2z} \hat{j} + \omega_{2y} \hat{k})$$

$$\rho_{AG} \times (m V_G)_2 = \frac{1}{4} m a^2 (-\omega_{2y} \hat{i} + \omega_{2y} \hat{j} + 2\omega_{2z} \hat{k})$$

$$(H_G)_2 = \frac{1}{12} m a^2 \omega_{2y} \hat{j} + \frac{1}{6} m a^2 \omega_{2z} \hat{k} \quad \text{II}$$

$$(H_A)_2 = (H_G)_2 + (m V_G)_2 \times \rho_{AG} = \text{I} + \text{II} \quad (3)$$

Subject:

Date:

② 8 3 into 1

$$\frac{1}{24} \sqrt{2} m a^2 \omega_0 - a f \Delta t = -\frac{1}{4} m a^2 \omega_{2y} \quad 4/$$

$$\frac{1}{24} \sqrt{2} m a^2 \omega_0 = \frac{1}{12} m a^2 \omega_{2y} + \frac{1}{4} m a^2 \omega_{2y}$$

$$= \frac{1}{6} m a^2 \omega_{2y} + \frac{1}{12} m a^2 \omega_{2y}$$

$$\omega_{2y} = \frac{\sqrt{2}}{8} \omega_0$$

$$\omega_{2z} = 0$$

$$4/ \quad \omega_{2y} \quad f \Delta t = \frac{7}{96} \sqrt{2} m a \omega_0$$

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_z &= \frac{\sqrt{2}}{8} \omega_0 \cdot \hat{j} = \frac{\sqrt{2}}{8} \omega_0 \times \frac{\sqrt{2}}{2} (-\hat{i} + \hat{j}) \\ &= \frac{\omega_0}{8} (\hat{j} - \hat{i}) \end{aligned}$$

$$\times \text{از رابطه 1} \rightarrow (\vec{V}_G)_2 = \frac{\sqrt{2}}{16} a \omega_0 \hat{k} = \frac{\sqrt{2}}{16} a \omega_0 \hat{k}$$

$$B, \text{ از رابطه 2} = \frac{7\sqrt{2}}{96} m a \omega_0 \hat{k}$$

$$\text{جزء دوم - در جهت خطی} \quad \vec{A} \Delta t + f \Delta t \hat{k} = (m \vec{V}_G)_2 - (m \vec{V}_G)_1$$

$$\text{از رابطه 3} \quad A \Delta t + \frac{7\sqrt{2}}{96} m a \omega_0 \hat{k} = \frac{m\sqrt{2}}{16} a \omega_0 \hat{k} - 0$$

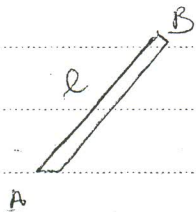
$$A \Delta t = -\frac{\sqrt{2}}{96} m a \omega_0 \hat{k}$$

Subject: 18/

Data:

دانشگاه گیلان

$n = \frac{M}{\text{تعداد محققان}} = \frac{M}{\text{تعداد محققان}} \rightarrow$



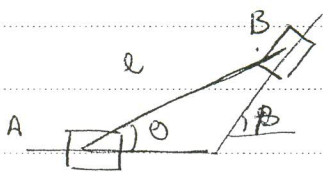
$(x_A, y_A, x_B, y_B, \theta)$

Dof = 3

$$x_B = x_A + l \cos \theta$$

$$y_B = y_A + l \sin \theta$$

(x_A, y_A, θ)

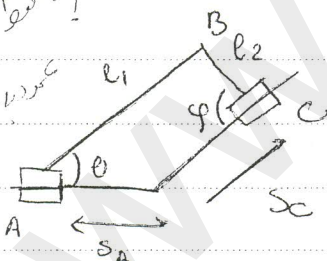


Dof = 1

(x_A, y_A, θ)

$$\begin{cases} x_A = -l \frac{\sin(\beta - \theta)}{\sin \beta} \\ y_A = 0 \end{cases}$$

تفاوت l_1 و l_2 چگونه است؟



اگر ثابت باشد سیستم یک درجه آزادی خواهد داشت و لغزشی C نیز یک درجه آزادی به سیستم می‌دهد پس سیستم 2 درجه آزادی خواهد داشت

Dof = 2

مکانیت (s_A, θ) →

برای سیستم خواهیم داشت زیرا از B به اندازه l_2 گام می‌زنیم که 2 حالت به سیستم می‌دهد

مکانیت (θ, ϕ) →
اتر یک حالت نیست

مکانیت برای B در جواب (s_A, s_C) →

می‌دهد

Subject:

Date:

Configuration Constraints

محدودسازی

velocity constraints (Motion constraints)

$$f(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = 0$$

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} \dot{q}_k + a_{j0} = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (I)$$

Rheonomic

تابع صریح از زمان

لغزدار نیست

نوع

holonomic

scleronomic

nonholonomic

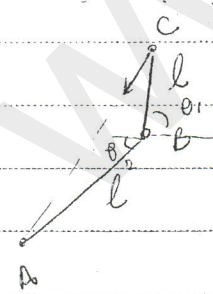
محدودسازی هولونومیک
تابع صریح از زمان
محدودسازی اسکلرونومیک
تابع صریح از زمان

برای تغییرات بی‌نهایت کوچک (I) از تابع f وجود داشته باشد که در آنجا زیر صحت کند

$$\frac{\partial f_j}{\partial q_k} = g_{jk} \quad \frac{\partial f_j}{\partial t} = g_{j0}$$

تغییرات بی‌نهایت هولونومیک است

مثال: نعلبه‌های AB و BC مطابق شکل به یکدیگر پیوسته اند و روی سطح حرکت می‌کنند. این حالت که سرعت در C باید همواره به سمت نقطه A باشد نوع تغییرات بی‌نهایت است.



که اگر تغییرات بی‌نهایت 4 درجه آزادی برداریم حاصل نمی‌شود. داریم سیستم 3 درجه آزادی دارد.

$$(x_A, y_A, \theta_1, \theta_2)$$

$$\vec{v}_C \times \vec{r}_{CA} = 0$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BC} = (\dot{x}_B \vec{i} + \dot{y}_B \vec{j})$$

$$+ (\dot{\theta}_1 \vec{k}) \wedge (l \cos \theta_1 \vec{i} + l \sin \theta_1 \vec{j})$$

Subject: 19

Data:

$$= (\dot{x}_B - l \dot{\theta}_1 \sin \theta_1) i + (\dot{y}_B + l \dot{\theta}_1 \sin \theta_1) j$$

$$\vec{r}_{CA} = -l (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) i - l (\sin \theta_1 + \sin \theta_2) j$$

$$\vec{v}_C \times \vec{r}_{CA} = \vec{v}_B (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) - \dot{x}_B (\sin \theta_1 + \sin \theta_2)$$

$$+ l \dot{\theta}_1 [\cos(\theta_2 - \theta_1) + 1] = 0$$

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} \dot{q}_k + a_{j0} = 0 \quad \xrightarrow[n=4]{j=1} a_{11} \dot{q}_1 + a_{12} \dot{q}_2 + a_{13} \dot{q}_3 + a_{14} \dot{q}_4 + a_{10} = 0$$

$j = 1, \dots, m$

$$a_{11} = -\sin \theta_1 - \sin \theta_2 \quad a_{14} = 0$$

$$a_{12} = \cos \theta_1 + \cos \theta_2 \quad a_{10} = 0$$

$$a_{13} = l [\cos(\theta_2 - \theta_1) + 1]$$

$$\frac{\partial f_j}{\partial q_k} = g_j a_{jk} \quad \frac{\partial f_j}{\partial t} = g_j a_{j0}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_B} &= g_1 a_{11} = f_1 = \int g_1 a_{11} dx_B + h_1(x_B, y_B, \theta_1, \theta_2, t) \\ \frac{\partial f_1}{\partial y_B} &= g_1 a_{12} = f_1 = (\sin \theta_1 + \sin \theta_2) \int g_1 dx_B + h_1(x_B, y_B, \theta_1, \theta_2, t) \\ \frac{\partial f_1}{\partial \theta_1} &= g_1 a_{13} \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \theta_2} = g_1 a_{14} = 0 \quad f_1 = h(x_B, y_B, \theta_1, \theta_2, t)$$

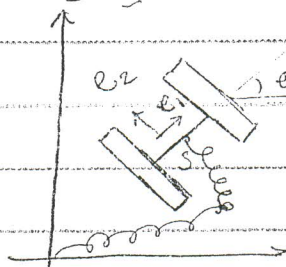
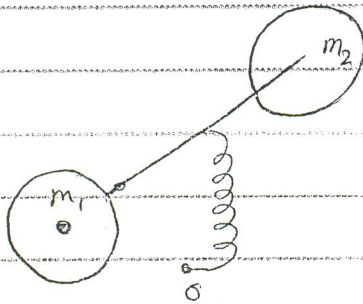
$$\frac{\partial f_1}{\partial \theta} = g_1 a_{10} = 0$$

در اینجا g_1 بستگی به θ_1 و θ_2 دارد و این بستگی در h_1 منعکس می‌شود. h_1 بستگی به θ_1 و θ_2 دارد و این بستگی در h_1 منعکس می‌شود.

Subject:

Date:

دو تپه‌ای M_1 و M_2 توسط یک میله صلب بدون جرم متصل شده اند. حجم‌های M_1 و M_2 به ترتیب V_1 و V_2 و چگالی‌های ρ_1 و ρ_2 دارند. میله در یک وضعیت تعادلی قرار دارد. فرض کنید میله را به یک زاویه θ از حالت تعادل می‌چرخانیم. برای آنکه میله دوباره به وضعیت تعادلی برنگردد، باید چه شرطی برقرار باشد؟ (تقریباً خطی)



$$(x, y, \theta)$$

$$\vec{v}_S \cdot \hat{e}_1 = 0$$

$$(x\hat{i} + y\hat{j}) \cdot (\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}) = 0$$

$$x\cos\theta + y\sin\theta = 0$$

$$a_{11} = \cos\theta \quad a_{12} = \sin\theta \quad a_{13} = 0 \quad a_{14} = 0$$

$$\frac{\partial f_j}{\partial q_k} = g_k a_{jk} \quad \frac{\partial f_j}{\partial t} = g_j a_{j0} \quad j=1$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = g_1 a_{11} \rightarrow f_1 = \cos\theta \int g_1 dx + C_1(x, \theta)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = g_1 a_{12} \quad f_2 = \sin\theta \int g_1 dy + C_2(x, \theta)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \theta} = g_1 a_{13} = 0 \rightarrow f = C_3(x, y)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = g_1 a_{14} = 0 \quad \text{! این شرط برای تعادل است} \quad \text{nonholonomic}$$

Subject: 20

TA - دینامیک 13

Data:

در روش کلی 1 روش 2 و بعد مشتق
یابی
روش سیناتیکی 1 روش سرعت متغیر 8r

$$\delta r = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} \delta q_k$$

کارهای δw

$$\delta w = \sum_{i=1}^n$$

1. کارهای δw کارهای رابط می بینیم و بعد با رابطه ی نیروی می بینیم

$$\delta w = \sum F_i dr_i = \sum Q_k \delta q_k$$

تایید می شود

نقشه یابی

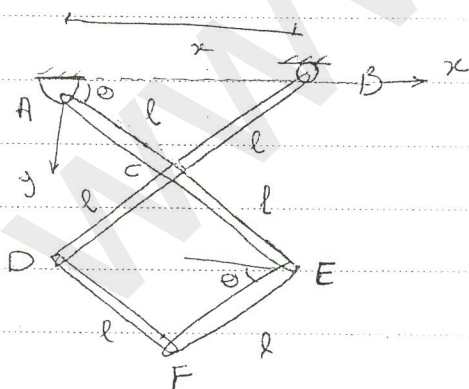
$$Q_k = \sum F_i \frac{\partial r_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^n F_i \frac{\partial r_i}{\partial q_k}$$

2. روش سیستم

3. نیروهای پتانسیل و تابع پتانسیل

$$Q_k = - \frac{\partial V}{\partial q_k}$$

فاصله ای افقی متصل و عمودیه ی کمترین نشان را در سه ای خاصیت نیم یافته در دو رشته می شود
جایابی برای متصل F و عرض مجاری صله EF را در اثر جایابی x بیاید



سیستم! در سه ای

$$\vec{r}_F = \vec{r}_{F/A} = x/2 \vec{i} + 3/2 (4L^2 - x^2)^{1/2} \vec{j}$$

$$\delta \vec{r}_F = d/dx (\vec{r}_F) \delta x = [1/2 \vec{i} - \frac{3x}{2(4L^2 - x^2)} \vec{j}] \delta x$$

$$\theta = \cos^{-1} (x/2L)$$

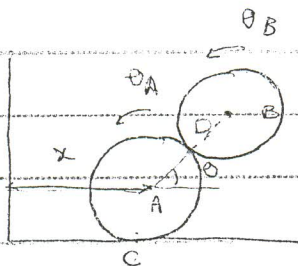
$$\delta \theta = \partial / \partial x (\cos^{-1} (x/2L)) \delta x$$

$$= \frac{-\delta x}{(4L^2 - x^2)^{1/2}}$$

Subject:

Date:

طابق شکل چرخش درونی چرخ درونی A می باشد چرخ درونی A نیز در حال غلتش روی چرخش درونی C است. نقطه های تماس را با هم وصل کنید. چرخ درونی A در این لحظه در نقطه ای قرار دارد که مرکز چرخش آن در مرکز چرخش درونی C قرار دارد. چرخش درونی A را در این لحظه با هم وصل کنید.



$$\vec{V}_A = \dot{x} \hat{i}$$

$$\delta \vec{r}_A = \delta x \hat{i}$$

$$\delta \vec{r} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} \delta q_k$$

$$\vec{V}_A = \vec{V}_C + \omega_A \times \vec{r}_{AC}$$

$$\dot{x} \hat{i} = 0 + (\dot{\theta}_A \hat{k}) \wedge (R \hat{j})$$

$$\dot{x} = -R \dot{\theta}_A \rightarrow \dot{\theta}_A = -\frac{\dot{x}}{R}$$

$$\delta \theta_A = -\frac{\delta x}{R}$$

با فرض داشتن A، B، از این لحظه چرخش درونی A، B را در این لحظه با هم وصل کنید. چرخش درونی A است.

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \omega_{AB} \times \vec{r}_{AB}$$

$$\vec{V}_B = \dot{x} \hat{i} + (\dot{\theta}_A \hat{k}) (2R \cos \theta \hat{i} + 2R \sin \theta \hat{j})$$

$$\vec{V}_B = (\dot{x} - 2R \dot{\theta} \sin \theta) \hat{i} + 2R \dot{\theta} \cos \theta \hat{j}$$

$$\delta \vec{r}_B = (\delta x - 2R \delta \theta \sin \theta) \hat{i} + 2R \delta \theta \cos \theta \hat{j}$$

$$\vec{V}_D = \vec{V}_A + \omega_A \times \vec{r}_{AD} = \vec{V}_B + \omega_B \times \vec{r}_{BD}$$

$$\dot{x} \hat{i} + (\dot{\theta}_A \hat{k}) \wedge (R \cos \theta \hat{i} + R \sin \theta \hat{j}) = (\dot{x} - 2R \dot{\theta} \sin \theta) \hat{i}$$

$$+ 2R \dot{\theta} \cos \theta \hat{j}$$

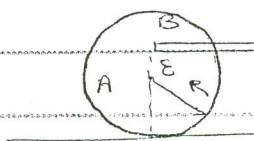
$$+ (\dot{\theta}_B \hat{k}) \wedge (-R \cos \theta \hat{i} - R \sin \theta \hat{j})$$

di

Subject:

Date:

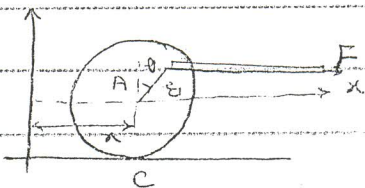
مکان نقطه B را به عنوان نقطه A در نظر بگیرید. نیروی کششی f به سمت راست از نقطه A وارد می شود و نیروی گرانش W به سمت پایین از نقطه B وارد می شود. نقطه A را به عنوان مرکز چرخش در نظر بگیرید. تغییر انرژی پتانسیل را به عنوان تغییر در انرژی پتانسیل گرانشی در نظر بگیرید. تغییر انرژی پتانسیل گرانشی را به عنوان تغییر در انرژی پتانسیل گرانشی در نظر بگیرید.



$$\delta W = \vec{F} \cdot \delta \vec{r}_B$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}_{CA} = 0 + (-\dot{\theta} \hat{k}) R \hat{j}$$

$$= -R \dot{\theta} \hat{i}$$



$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}$$

$$= -R \dot{\theta} \hat{i} + (-\dot{\theta} \hat{k}) R (\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j})$$

$$\vec{v}_B = [(-R + R \sin \theta) \dot{\theta} \hat{i} + R \dot{\theta} \cos \theta \hat{j}]$$

$$\delta \vec{r}_B = [(R + R \cos \theta) \delta \theta \hat{i} - R \sin \theta \delta \theta \hat{j}]$$

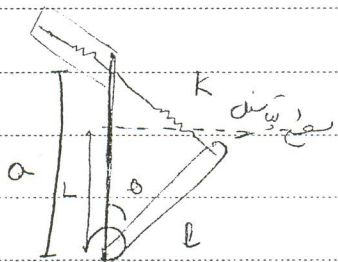
$$\delta W = \vec{F} \cdot \delta \vec{r}_B = f \hat{i} \cdot \delta \vec{r}_B = f (R + R \cos \theta) \delta \theta \Rightarrow Q_\theta = f (R + R \cos \theta)$$

$$\delta W = Q_\theta \delta \theta$$

Subject:

Data:

بند ای به طول l و وزن w به یک فنری به ثابت k در حال تعادل نگه داشته می شود وقتی $\theta = 0$ است فنر دارای طول عاری خودی باشد حالات تعادل سیستم را بیابید.



$$a = l$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$$

سیستم دارای یک درجه آزادی است
چون سیستم در حال تعادل است
مشتق تابع پتانسیل نسبت به
 θ برابر صفر است

$$V = \frac{1}{2} k (a^2 + l^2 - 2al \cos \theta) - \frac{1}{2} wl (1 - \cos \theta)$$

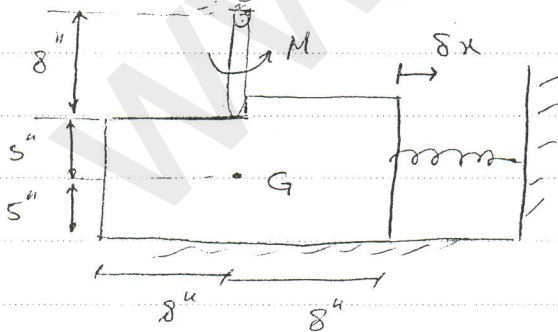
$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \rightarrow -\frac{1}{2} w l \sin \theta + k a l \sin \theta = 0$$

$$\sin \theta = 0 \rightarrow \theta = 0$$

$$L$$

$$k = \frac{1}{2} w / a$$

مغناطیسی نشان داده شده در شکل زیر به اندازه ی 5 اینچ متراکم شده است ضربه اصطکاک بین بند و 100 پوندی در سطح افقی برابر با 0.3 می باشد با استفاده از روش کار مجازی نشان دهید که باید به جلدی تا غم اعمال شود تا بلوک به سمت راست حرکت کند یا باید



x : جایی بند

$$\delta W = -(100)(0.3)\delta x - \frac{1}{2} [(5 + \delta x)^2 - 5^2]$$

$$+ M \frac{\delta x}{8} = 0$$

$$\Rightarrow -30\delta x - 10(25 + 10\delta x + \delta x^2 - 25) + M \frac{\delta x}{8} = 0$$

$$\delta x^2 \text{ قوی} \rightarrow -30\delta x - 100\delta x + M \frac{\delta x}{8} = 0$$

MICRO

$$\delta x = 1040 \text{ lb-in}$$

Data:

$$\sum_{i=1}^N (f - m \vec{a}_i) \delta \vec{r}_i = 0$$

Ushu Chai

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V + \delta W_{nc}) dt = 0$$

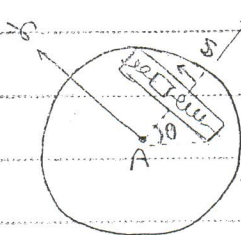
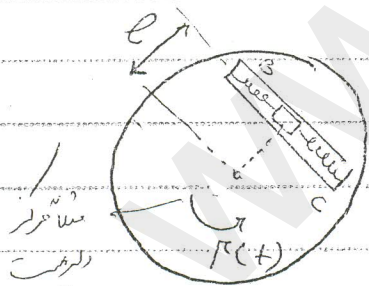
معادلات لاخطی

برای رفتن به محضات نعیم اینست

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial v}{\partial q_k} = Q_{k,nc} \quad k=1,2,\dots,n$$

مطابق شکل هندسه ای شکل در صحنه ای افقی در حالت است $\mathcal{K}(t)$ حول مرکز A می چرخد حجم هندسه ای M در شعاع r می باشد. حول مرکز آن می باشد K می باشد. لغزنده ای به حجم M توسط یک فنر پیوسته شده است. فنر BC حرکت می کند. فنرها در جهت x آن را در نظر گرفته در شکل بدون کشیدگی هستند ثابت هر فنر برابر K می باشد. معادلات حرکت را حل کنید و سیستم را ثابت کنید.

اللہ رحمت آری — بحضرت نعمانیہ مفتی



اسم فہیات دارطیہ و فہیات

$$T = \frac{1}{2} I_{\text{table}} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m v_s^2$$

$$I_{zz, \text{table}} = MK^2$$

● MICRO $\vec{V}_S = V_S|_{zyz} + iR + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_{AS}$

Subject:

Date:

$$= \dot{s}\hat{j} + 0 + (\dot{\theta}\hat{k}) \times (l\hat{i} + s\hat{j})$$

$$= -s\dot{\theta}\hat{i} + (\dot{s} + l\dot{\theta})\hat{j}$$

$$T = \frac{1}{2} M k^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m [(\dot{s}\dot{\theta})^2 + (\dot{s} + l\dot{\theta})^2]$$

$$= \frac{1}{2} [M k^2 + m s^2 + m l^2] \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \dot{s}^2 + m l \dot{s} \dot{\theta}$$

$$V = 2\left(\frac{1}{2} k s^2\right) = k s^2$$

$$\delta W = Q_1 \delta \theta + Q_2 \delta s$$

$$\delta W = \int \delta \theta \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Q_1 = \tau \\ Q_2 = 0 \end{array} \right.$$

نظریاتی
در مورد این موضوع

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{d}{dt} [(M k^2 + m s^2 + m l^2) \dot{\theta} + m l \dot{s}]$$

$$= (M k^2 + m s^2 + m l^2) \ddot{\theta} + 2 m \dot{s} \dot{\theta} + m l \ddot{s}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = m \ddot{s} + m l \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial s} = m s \dot{\theta}^2 \quad \frac{\partial V}{\partial s} = 2 k s$$

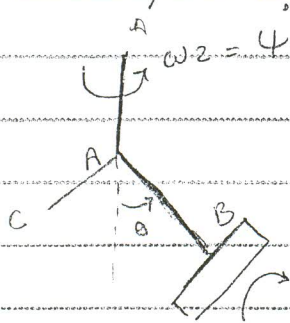
$$(M k^2 + m s^2 + m l^2) \ddot{\theta} + 2 m \dot{s} \dot{\theta} + m l \ddot{s} = \tau$$

$$m \ddot{s} + m l \ddot{\theta} - m s \dot{\theta}^2 + 2 k s = 0$$

Subject:

Date:

طابق شکل یک دیسک حول محور AB با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد. یک جسم m_2 با یک مرکز ثقل G و طول l می‌چرخد. در صورتی که مرکز ثقل G در امتداد محور AB قرار دارد. معادلات حرکت را بنویسید.



سیستم دارای 3 درجه آزادی است. یعنی ψ ، ϕ و θ متغیرها هستند.

محورهای چرخش حول AA' ، AB و AC

در صورتی که ω زاویه‌ای ثابت باشد معادلات حرکت

برای ψ ، ϕ و θ را بنویسید.

$$q_1 = \psi$$

$$q_2 = \theta$$

$$T = \frac{1}{2} (\vec{H}_A \cdot \vec{\omega})_{\text{disk}} + \frac{1}{2} (\vec{H}_A \cdot \vec{\omega})_{\text{shaft}}$$

$$= \frac{1}{2} (I_{xx} \omega_x^2 + I_{yy} \omega_y^2 + I_{zz} \omega_z^2)_{\text{disk}}$$

$$+ \frac{1}{2} (I_{xx} \omega_x^2 + I_{yy} \omega_y^2 + I_{zz} \omega_z^2)_{\text{shaft}}$$

$$\vec{\omega}_{\text{disk}} = -[\dot{\psi} \cos \theta + \omega_1] \hat{i} - \dot{\theta} \hat{j} + \dot{\psi} \sin \theta \hat{k}$$

$$\vec{\omega}_{\text{shaft}} = -\dot{\psi} \cos \theta \hat{i} - \dot{\theta} \hat{j} + \dot{\psi} \sin \theta \hat{k}$$

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m_1 R^2 \right) (\dot{\psi} \cos \theta + \omega_1)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} m_1 R^2 + m_2 l^2 \right) (\dot{\theta}^2 + (\dot{\psi} \sin \theta)^2)$$

$$U = m_1 g (-l \cos \theta) + m_2 g \left(-\frac{l}{2} \cos \theta \right) = -(m_1 + \frac{1}{2} m_2) g l \cos \theta$$

$$\delta W_{\text{nk}} = 0 \rightarrow U_1 = U_2 = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left((I_1 \cos^2 \theta + I_2 \sin^2 \theta) \dot{\psi} - 2(I_1 - I_2) \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta - I_1 \omega_1 \dot{\theta} \sin \theta \right) =$$

$$- I_2 \ddot{\theta} + (I_1 - I_2) \dot{\psi} \sin \theta \cos \theta + I_1 \omega_1 \dot{\psi} \sin \theta + (m_1 + \frac{1}{2} m_2) g l \sin \theta$$

$$\sin \theta = 0$$

Subject:

Data:

$$I_1 = \frac{1}{2} m R^2$$

$$I_2 = \frac{1}{4} m_1 R^2 + (m_1 + \frac{1}{3} m_2) l^2$$

در حل مسائل با استفاده از اصل هملتون باید $\delta q_1, \delta q_2$ را در انتگرال بگیریم. اینها را حذف کنیم و در جواب δq_1 بگیریم.
مثلاً اگر δq_1 بگیریم

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \theta \delta \dot{\theta} dt = \delta \theta \delta \theta \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \delta \ddot{\theta} \delta \theta dt$$

ماده اصل هملتون داریم که $\delta q_k(t_1) = \delta q_k(t_2) = 0$ است. پس انتگرال اول برابر صفر می شود.

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\delta q_1 + \left(\delta q_2 + \dots + \left(\delta q_k \right) \right) \right) \right] dt = 0$$

باید ضرایب δq_k را برابر صفر بگذاریم.