فصل پنجم

معادلات درجه‌ی اوّل و معادله‌ی خط

نگاه کلّی به فصل پنجم

اهداف کلّی

۱ـ آشنایی با معادلات درجه‌ی اوّل و عملیات جبری ساده روی آن‌ها در یک بستر واقعی

۲ـ آشنایی با جواب معادله و حلّ معادلات درجه‌ی اوّل به طور نمادین

۳ـ یافتن فاصله‌ی دو نقطه

۴ـ آشنایی با مفهوم کلّی رابطه و آشنایی با رابطه‌ی خطی و نمودار آن

۵ـ آشنایی با شیب خط و روش محاسبه‌ی آن

۶ـ یافتن شیب خط از طریق معادله‌ی خط و تشخیص حالات توازی و تعامد دو خط با مقایسه‌ی شیب خط‌ها

۷ـ یافتن معادله‌ی خط از طریق شیب و یک نقطه روی خط

۸ـ آشنایی با دستگاه معادلات خطی دو مجهولی و تعبیر هندسی و شیوه‌ی حلّ آن‌ها.

عملکرد مورد انتظار از دانش‌آموز

دانش‌آموزان باید بتوانند :

۱ـ برای حلّ مسائل ساده، معادله تشکیل دهند و معادلات درجه‌ی اول به دست آمده را حل کنند.

۲ـ روی معادلات، عملیات جبری ساده انجام دهند و معادلات را به شکل ساده‌تر بنویسند.

۳ـ شکل استاندارد معادلات درجه‌ی اوّل و حلّ آن‌ها را بشناسند و در عمل به کار برند.

۴ـ با تشکیل جدول و رسم نمودار، روابط خطی را تشخیص دهند و برای آن‌ها معادله بنویسند.

۵ـ فاصله‌ی نقاط در صفحه را از طریق مختصات آن نقاط حساب کنند.

۶ـ از شیب درک ملموس داشته باشند و شیوه‌ی محاسبه‌ی مقدار عددی آن را بشناسند و بتوانند شیب‌های مختلف را با هم مقایسه کنند.

۷ـ مفهوم شهودی شیب را با مفهوم شیب خط به هم مربوط کنند.

۸ـ رابطه‌ی شیب خط و معادله‌ی خط را بشناسند و از آن برای نوشتن معادله‌ی خط استفاده کنند.

۹ـ حالات توازی و تعامد دو خط را از طریق شیب آن خط‌ها تشخیص دهند.

۱۰ـ معنای دستگاه معادله‌ی دو مجهولی را درک کنند و از آن تعبیر هندسی داشته باشند و روش‌های حلّ آن‌ها را به کار برند.

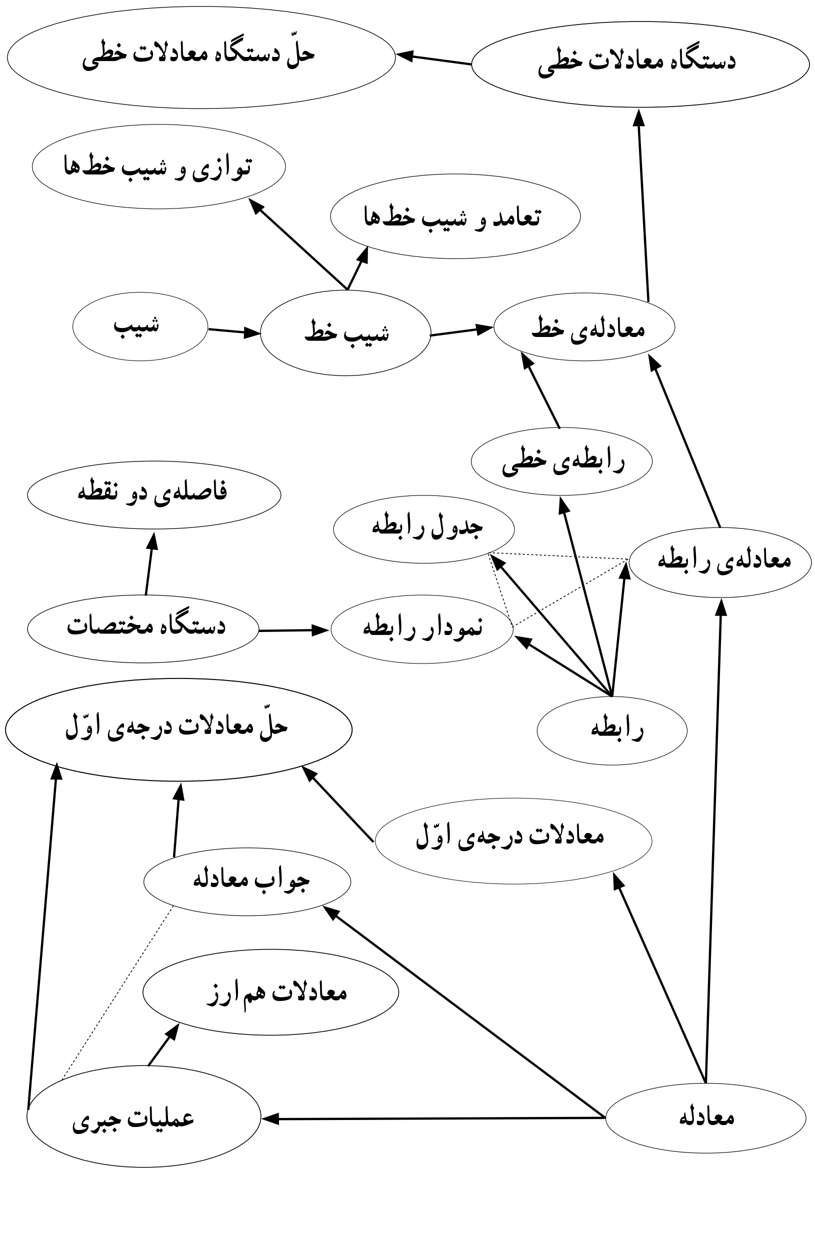
پیش‌نیازها

- آشنایی با عملیات جبری روی اعداد
- آشنایی با نمادها و محاسبات نمادین
- آشنایی با جدول‌های نظام‌دار
- آشنایی کافی با مفاهیم اصلی هندسی مانند خط، توازی، تعامد و قضیه‌ی فیثاغورس

زمان‌بندی پیشنهادی برای تدریس این فصل

پیشنهاد می‌شود این فصل در ۵ هفته تدریس شود.

طرح کلّی مفاهیم فصل پنجم



روش آموزشی فصل پنجم

این فصل با آموزش معادلات درجه‌ی اوّل شروع می‌شود. روش کتاب، ارائه‌ی معادلات در یک زمینه و بافت مجسم است و سعی شده است از طریق ترازو، مفهوم معادله و حلّ آن معنادار شود. هم‌چنین، عملیات جبری ساده روی معادلات از طریق عملیاتی روی ترازو توجیه شده‌اند.

حلّ معادلات درجه‌ی اوّل در حالات ساده از طریق عملیات روی ترازو انجام شده است و با استفاده از آن، عملیات جبری روی معادلات توجیه و حلّ معادلات معنادار شده‌اند. سپس با روش جبری از طریق چند مثال حلّ معادلات درجه‌ی اوّل آموزش داده و حلّ کلی آن در حالت نمادین بیان می‌شود.

در بخش بعد، دستگاه مختصات و مفاهیم اصلی آن یادآوری می‌شود؛ زیرا در سرتاسر کتاب لازم است از آن استفاده شود. در این بخش، هم‌چنین فاصله‌ی دو نقطه روی یک محور و در یک صفحه مورد بحث قرار می‌گیرد و از طریق مثال، فرمول کلّی آن به دست آورده و توجیه می‌شود.

در بخش بعدی، رابطه در معنای کلی آن و رابطه‌ی خطی به شکل تفصیلی، مورد توجه قرار می‌گیرد. آموزش رابطه‌های خطی از طریق مثال‌ها و فعالیت‌های متنوع در زمینه‌های مختلف با رسم جدول و نمودار و یافتن معادله‌ی رابطه انجام می‌شود.

برای توجه دانش‌آموزان به این که هر رابطه‌ای خطی نیست، مثال‌هایی از روابط غیرخطی ارائه شده است؛ به ویژه رابطه‌ی $y=x^2$ با رسم نمودار دقیق بررسی شده است تا تفاوت بین نمودار روابط خطی و روابط غیرخطی دیده شود. نمودار رابطه‌ی $y=x^2$، بعداً در فصل ۸ مورد استفاده قرار می‌گیرد. این بخش با حلّ یک مسئله‌ی قابل توجه خاتمه می‌یابد تا از این طریق دانش‌آموزان هم روی آموخته‌های خود تمرین کرده، مفاهیم را بر پایه‌ی دانسته‌های قبلی خود بسازند و با مفاهیم جدید مرتبط کنند و هم‌چنین توانایی به کارگیری دانش خود را به دست آورند و به اهمیت مفاهیمی که یاد گرفته‌اند، پی‌ببرند و نگرشی مثبت به ریاضی بیابند.

بخش بعدی این فصل «شیب» است. «شیب» در اصل مفهومی فیزیکی است و برای آموزش آن، به مفهوم شهودی آن توجه شده است. ابتدا مفهوم شیب به صورت یک مفهوم کیفی فیزیکی بیان شده و سپس اندازه‌گیری کمّی آن مورد توجه قرار گرفته است.

در بخش شیب خط، ابتدا خط با یک خیابان یا پلکان و شیب آن با شیب خط مشابهت‌سازی شده است. البته با این روش فقط در مورد شیب‌های مثبت می‌توان صحبت کرد. برای توجیه شیب‌های منفی از فرمول محاسبه‌ی شیب که در شیب‌های مثبت به دست آمده، استفاده شده است. این فرمول برای محاسبه‌ی شیب همه‌ی خط‌ها مورد استفاده قرار گرفته است که در مورد برخی خط‌ها عدد منفی به دست می‌دهد در کتاب، در مورد چگونگی تفاوت این خط‌ها با خط‌های با شیب مثبت اشاره شده است.

در بخش بعدی معادله‌ی خط مطرح می‌شود. این بخش با بررسی نمودار رابطه‌های خطی (که یک خط است) آغاز می‌شود. ابتدا رابطه‌ی بین معادله‌ی خط و شیب خط مورد توجه قرار می‌گیرد و سپس معادله یک خط که یک نقطه و شیب آن معلوم است، استخراج می‌شود. در قسمت بعد، با یادآوری وضعیت شیب خط‌های موازی، وضعیت شیب خط‌های عمود بر هم به طور تجربی بررسی و حدس کلی زده می‌شود و به صورت یک قانون بیان می‌شود.

در بخش بعدی، دستگاه معادلات خطی دو مجهولی مطرح می‌شود. ابتدا با ارائه‌ی یک مسئله در یک فعالیت چگونگی به‌وجود آمدن این گونه دستگاه‌ها و اهمیت آن‌ها مطرح و سپس تعبیر هندسی و حل هندسی آن‌ها بیان می‌شود و در ادامه، با یک فعالیت به چگونگی حلّ این دستگاه‌ها از طریق جبری پرداخته و در چند مثال این شیوه‌های حل توضیح داده می‌شوند.

بخش معادله

اهداف بخش

- درک معنای معادله از طریق وضعیت‌های واقعی و استفاده از ترازو
- آشنایی با عملیات جبری ساده روی معادله‌های و توجیه این عملیات با استفاده از ترازو
- آشنایی با مفهوم پاسخ معادله ومعادله‌های هم‌ارز
- آشنایی با شکل نمادین معادله‌ی درجه‌ی اوّل و حلّ آن به طور نمادین.

توضیحات : اگر چه دانش‌آموزان با حلّ معادلات درجه‌ی اوّل در دوره‌ی راهنمایی آشنا شده‌اند، اما این‌جا رویکرد دیگری موردنظر بوده که لازم است دانش‌آموزان از این طریق مفهوم معادله (درجه‌ی اوّل) و روش‌های حلّ آن را یاد بگیرند.

پیش‌نیازها

- آشنایی با اعداد حقیقی و عملیات جبری جمع، تفریق، ضرب و تقسیم روی آن‌ها
- آشنایی با مفهوم متغیر و نمادها و استفاده از نمادها برای بیان ریاضی مطالب
- توانایی انجام محاسبات جبری روی نمادها.

ارتباط با سایر بخش‌ها

معادلات درجه‌ی اوّل در بسیاری از وضعیت‌ها رخ می‌دهند. در حلّ بسیاری از مسائل، حلّ یک معادله‌ی درجه‌ی اوّل مورد نیاز است.

واژه‌های کلیدی

معادله، درجه‌ی معادله، عملیات جبری ساده و معادله‌های هم‌ارز.

ابزارهای کمک آموزشی

یک ترازوی دو کفه‌ای و ماشین حساب (در صورت لزوم).

نگاه کلّی به بخش

در این بخش، از ترازو به عنوان یک وضعیت واقعی برای درک مفهوم معادله استفاده شده است. توصیف ریاضی وضعیت‌های تعادل ترازو، روش اصلی برای درک مفهوم معادله است. از طریق انجام فعالیت‌ها و تمرین‌هایی که در کلاس باید حل شوند، مفاهیم اصلی و روش‌های موردنظر آموزش داده شده‌اند.

ورود به مطلب : می‌توان با طرح مسئله‌ای نظیر این مسئله آغاز کرد : «وزن اجسام معمولی را چگونه اندازه‌گیری می‌کنیم؟» معمولاً با ترازو این عمل انجام می‌شود. با بردن یک ترازوی دو کفه‌ای به کلاس (در صورت امکان) و با داشتن وزنه‌های معلوم بکوشید اجسامی با وزن‌های مجهول را اندازه‌گیری کنید. برای این کار حالت‌های متفاوتی را پیش‌بینی کنید. در برخی حالات وزن مستقیماً معلوم می‌شود. در برخی حالات دیگر با محاسبات جبری باید وزن مجهول را تعیین کنید. با این روش‌ها می‌توانید مفاهیم متناظر با عملیات جبری روی یک معادله را آموزش دهید.

فعالیت آموزشی : پس از ورود به مطلب، عملیات اصلی روی معادلات که یک تساوی بین دو مقدار است، بیان شده است که عملیات جبری ساده نام دارد. این عملیات از طریق مشاهده‌ی وضعیت‌های ترازو، معنادار شده‌اند. در اوّلین «تمرین در کلاس» این بخش، مسئله‌ای واقعی طرح شده است. که حلّ آن موجب تقویت یادگیری عملیات جبری روی معادلات می‌شود.

حل تمرین در کلاس، صفحه‌ی ۹۹

بند ۱ : وزن بسته‌ی بزرگ‌تر را به صورت دو تا وزن نصف شده در نظر می‌گیریم و یکی از این وزن‌های مجهول نصف شده را از دو طرف ترازو بر می‌داریم. نتیجه می‌شود نصف وزن مجهول ۲ کیلوست؛ پس، وزن جسم مجهول ۴ کیلو است.

بند ۲ : اگر وزن بسته‌ی نمک بزرگ را با x نشان دهیم، توصیف ریاضی ترازو به صورت $x = \frac{۱}{۲}x + ۲$ است. و با حلّ آن نتیجه می‌شود : $x=۴$.

بند ۳ : می‌توانیم نصف وزن مجهول را y بنامیم؛ در این صورت $۲y = y + ۲$ و در نتیجه $y = ۲$؛ پس، وزن مجهول که $۲y$ است برابر ۴ می‌شود.

این مسئله، تمرینی ساده برای مدل‌سازی‌های متفاوت از یک وضعیت واقعی است. معادلات به دست آمده از این دو مدل‌سازی با یکدیگر متفاوت‌اند و هم‌ارز نیستند؛ زیرا مجهول آن‌ها معنای متفاوتی با هم دارند. پس از این «تمرین در کلاس» و ارائه‌ی مستقیم عملیات جبری ساده، مثال‌هایی ارائه می‌شود تا این عملیات در این مثال‌ها دیده شوند. در دومین تمرین در کلاس، دانش‌آموزان خودشان با ذکر دلیل باید محاسبات مربوط به حلّ یک معادله‌ی درجه‌ی اوّل را توضیح دهند.

تمرین در کلاس، صفحه‌ی ۱۰۱

بند ۱ : برای حلّ معادله‌ی $۳(۲x - ۷) = ۸۱$، می‌توانیم ابتدا ۳ را در پرانتز ضرب کنیم که نتیجه می‌شود $۶x - ۲۱ = ۸۱$، در این‌جا از خاصیت پخشی ضرب نسبت به تفریق استفاده کرده‌ایم. در مرحله‌ی بعد ۲۱ را به طرفین اضافه می‌کنیم و نتیجه می‌شود : $۶x = ۱۰۲$. در این‌جا از خاصیت جمع طرفین یک تساوی با یک عدد استفاده کرده‌ایم. سپس طرفین را بر ۶ تقسیم می‌کنیم و نتیجه می‌شود $\frac{۶x}{۶} = \frac{۱۰۲}{۶}$. در این‌جا از خاصیت تقسیم طرفین یک تساوی بر یک عدد غیر صفر استفاده کرده‌ایم؛ در نتیجه $x = ۱۷$.

بند ۲ : راه دیگر حلّ این معادله آن است که ابتدا طرفین تساوی را به ۳ تقسیم و سپس مانند بند (۱) عمل کنیم.

در تمرین بالا از دانش‌آموزان خواسته شده است تا معادله را از راه‌های گوناگون حل کنند تا دانش‌آموزان متوجه این نکته باشند که معمولاً مسائل را می‌توان با روش‌های گوناگون حل کرد؛ مثلاً در مسئله‌ی بالا دانش‌آموزان می‌توانند کلّ $۲x - ۷$ را مانند یک مجهول در نظر بگیرند و با تقسیم طرفین بر ۳، مقدار آن را به دست آورند و سپس حلّ مسئله را ادامه دهند. هدف این تمرین و تمرین قبلی پرورش تفکر منعطف یعنی یافتن راه حل‌های مختلف است.

پس از این تمرین، فعالیتی در این بخش وجود دارد که هدف از آن، معرفی معادلات هم‌ارز است.

فعالیت صفحه‌ی ۱۰۱

بند ۱ : تمامی این چهار معادله، پاسخ یکسان دارند که برابر ۹ است.

بند ۲ : پاسخ‌های این معادلات یکسان هستند.

بند ۳ : برای رسیدن به معادله‌ی «ب» از طریق معادله‌ی «الف» کافی است x را از طرفین حذف کنیم.

برای رسیدن به معادله‌ی «پ» از طریق معادله‌ی «ب» کافی است طرفین را بر ۲ تقسیم کنیم.

برای رسیدن به معادله‌ی «ت» از طریق معادله‌ی «پ» کافی است طرفین را در ۴ ضرب کنیم.

برای رسیدن به معادله‌ی «الف» از طریق معادله‌ی «ت» یک راه آن است که تمامی عملیات بالا را برعکس انجام دهیم و یک راه مستقیم‌تر آن است که طرفین را با $۲x$ جمع و سپس طرفین را بر ۲ تقسیم کنیم.

از طریق این فعالیت، مفهوم معادلات هم‌ارز معرفی می‌شوند. دو معادله‌ی هم‌ارز معادلاتی‌اند که می‌توان از طریق عملیات اساسی جبری که در کتاب آمده است، از یکی دیگری را به دست آورد.

در آخر این بخش کلیه‌ی عملیات انجام شده برای حلّ معادلات درجه‌ی اول به طور نمادین معرفی می‌شوند.

مسائل صفحه‌ی ۱۰۲

مسئله‌ی ۱ : جمله‌ی اوّل متناظر فرمول سوم، جمله‌ی دوم متناظر فرمول اوّل، جمله‌ی سوم متناظر فرمول‌های دوم و چهارم است.

مسئله‌ی ۲ : حلّ این معادلات آسان است و پاسخ‌ها عبارت‌اند از :

۱) ۴ ۲) ۱۲/۵ ۳) ۱۱ ۴) ۶ ۵) ۱۲− ۶) ۱/۸ ۷) ۲/۵

مسئله‌ی ۳ : اگر اولین عدد به صورت $2n$ باشد؛ اعداد بعدی به صورت $2n+2$ و $2n+4$ خواهند بود و جمع آن‌ها ۴۲ است؛ پس :

$$2n + 2n + 2 + 2n + 4 = 42$$
$$6n + 6 = 42$$
$$6n = 36$$
$$n = 6$$

بنابراین، این اعداد عبارت‌اند از : ۱۲ و ۱۴ و ۱۶.

مسئله‌ی ۴ : تعداد بیسکویت‌ها را با x نشان می‌دهیم. نیمی از بیسکویت‌ها $\frac{x}{2}$ است و نیمه‌ی بقیه $\frac{x}{4}$ است؛ پس :

$$x - \frac{x}{2} - \frac{x}{4} = 5$$
$$\frac{4x - 2x - x}{4} = 5$$
$$x = 20$$

مسئله‌ی ۵ :

$$\frac{2t+1}{t-1} = 0/2$$
$$2t + 1 = 0/2t - 0/2$$
$$1/8t = -1/2 \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{2}{3}$$

مسئله‌ی ۶ : در این مسئله، دانش‌آموزان باید انشانویسی کنند و معلمان با بررسی انشای آن‌ها نقاط ضعف و احیاناً بد فهمی‌های دانش‌آموزان را تشخیص دهند.

مسئله‌ای از مفتاح المعاملات : در این مسئله، غیر مستقیم گفته شده که قیمت هر خربزه $\frac{1}{20}$ درهم و هزینه‌ی حمل هر خربزه $\frac{1}{60}$ درهم است؛ پس اگر تعداد خربزه‌های خریداری شده را با x نشان دهیم، داریم :

$$\frac{x}{20} + \frac{x}{60} = 1$$
$$\frac{4x}{60} = 1$$
$$x = 15$$

ارزیابی یادگیری : برای سنجش یادگیری دانش‌آموزان می‌بایست مسائل مناسبی طرح شوند که حلّ آن‌ها به معنای رسیدن به اهداف بخش توسط دانش‌آموزان باشد. در این قسمت بهتر است مسائلی طرح شوند که هم شیوه‌ی توصیف ریاضی و هم حلّ معادلات به دست آمده ارزیابی شود.

محدوده‌ی مطالب : در این بخش، فقط فهمیدن مفهوم معادله و معنای آن در حالت معادلات درجه‌ی اوّل مورد نظر هستند و لزومی به طرح معادلات پیچیده‌تر و درجات بالاتر نیست.

بخش دستگاه مختصات

اهداف بخش

- یادآوری دستگاه مختصات و مختصات نقطه در صفحه
- محاسبه‌ی فاصله‌ی بین دو نقطه روی یک محور از طریق طول آن نقاط
- محاسبه‌ی فاصله‌ی بین دو نقطه در صفحه از طریق مختصات آن نقاط.

پیش‌نیازها

- محور اعداد، طول نقاط یک محور، تعامد و قضیه‌ی فیثاغورس.

واژه‌های کلیدی

دستگاه مختصات، مختصات نقطه، فاصله‌ی دو نقطه، قدر مطلق و قضیه‌ی فیثاغورس.

نگاه کلی به بخش

در این بخش، ابتدا دستگاه مختصات یادآوری می‌شود و در «تمرین در کلاس» ویژگی‌های جبری و هندسی که مختصات نقاط نشان می‌دهند، تمرین می‌شود.

سپس به فاصله‌ی دو نقطه روی محور اعداد پرداخته می‌شود. این مفهوم طیّ یک فعالیت آموزش داده شده است تا دانش‌آموزان خودشان فرمول فاصله‌ی دو نقطه روی محور اعداد را بیابند.

سپس به فاصله‌ی دو نقطه در صفحه پرداخته می‌شود. ابتدا از طریق یک مثال، فاصله‌ی دو نقطه با مختصات معین محاسبه می‌شود. بعد برای دو نقطه‌ی دلخواه با مختصات دلخواه همان عملیات تکرار و فرمول فاصله‌ی دو نقطه‌ی دلخواه ارائه می‌شود.

ورود به مطلب : ابتدای این بخش یادآوری دستگاه مختصات است و می‌توان ابتدا در مورد اهمیت دستگاه مختصات در برقراری ارتباط بین مفاهیم هندسی و جبری سخن گفت که در «تمرین در کلاس» این بخش تا اندازه‌ای روی آن تمرین می‌شود.

در بخش بعدی می‌توان با طرح سؤال درباره‌ی چگونگی محاسبه‌ی فاصله‌ی دو نقطه با مختصات معین شروع کرد. ابتدا حالت ساده‌ی نقاط روی محور اعداد و سپس حالت نقاط یک صفحه را می‌توان مطرح کرد. روش یافتن فاصله را می‌توانید از طریق مباحثه و حدسیات دانش‌آموزان به دست آورد یا آن‌که با راهنمایی‌های مناسب دانش‌آموزان را به یافتن فرمول محاسبه‌ی فاصله‌ی دو نقطه راهنمایی کرد.

فعالیت آموزشی

تمرین در کلاس، صفحه‌ی ۱۰۵

بند ۱ : در صفحه‌ی شطرنجی داده شده در کتاب، محورهایی را رسم کنید.

بند ۲ : این نقاط را در صفحه مشخص کنید.

بند ۳ : این خط نیمساز ربع اوّل و سوم است و مستقیماً با یافتن و مشاهده تشخیص داده می‌شود که فقط نقاط $\begin{bmatrix}۲\\۲\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}۰\\۰\end{bmatrix}$ روی این خط قرار دارند.

بند ۴ : از طریق مشاهدات مختصات، چند نقطه از این خط و وضعیت هندسی خط، دانش‌آموزان می‌توانند به این حدس برسند که فقط نقاطی روی این خط قرار دارند که طول و عرض آن‌ها مساوی باشند.

بند ۵ : باید نیمه‌ی مثبت محور طول‌ها مشخص شود.

بند ۶ : عرض این نقاط صفر بوده و طول این نقاط منفی است.

بند ۷ : باید نیمه‌ی منفی محور عرض‌ها مشخص شود.

بند ۸ : طول این نقاط صفر بوده و عرض این نقاط مثبت است.

بند ۹ : باید ربع اوّل مشخص شود.

بند ۱۰ : باید ربع دوم مشخص شود.

بند ۱۱ : باید ربع سوم مشخص شود.

بند ۱۲ : باید ربع چهارم مشخص شود.

فاصله‌ی بین دو نقطه : بخش بعدی با فعالیت زیر شروع می‌شود.

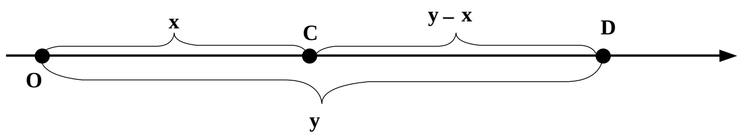
فعالیت صفحه‌ی ۱۰۵

بند ۱ : طول OA برابر ۴ واحد و OB برابر ۶ واحد است.

بند ۲ : طول پاره خط AB با اندازه‌گیری مستقیم یا شمارش تعداد واحدها برابر ۲ خواهد شد. فاصله‌ی دو نقطه مانند ۴ و ۶ همان فاصله‌ی دو نقطه‌ی A وB بوده و برابر ۲ است.

بند ۳ : پاره‌خط OC به طول x واحد و پاره‌خط OD به طول y واحد است.

بند ۴ : طول پاره خط CD، بنا به قوانین جمع اعداد که از طریق پهلوی هم گذاشتن پاره‌خط‌ها انجام می‌شود، عددی است که اگر با x جمع شود، برابر y می‌شود. این عدد همان تفاضل x از y نام دارد و y−x است.



فاصله‌ی نقاط مانند x و y همان فاصله‌ی C از D بوده و برابر y − x است.

از این فعالیت نتیجه می‌شود که فاصله‌ی دو نقطه روی محور اعداد که طول آن‌ها x و y باشند، برابر y − x است. بدیهی است روی محور yها نیز فاصله‌ی هردو نقطه به شکل مشابه است. در قسمت بعدی این بخش، از طریق مثال‌ها فرمول محاسبه‌ی فاصله دو نقطه با مختصات دلخواه به دست می‌آید.

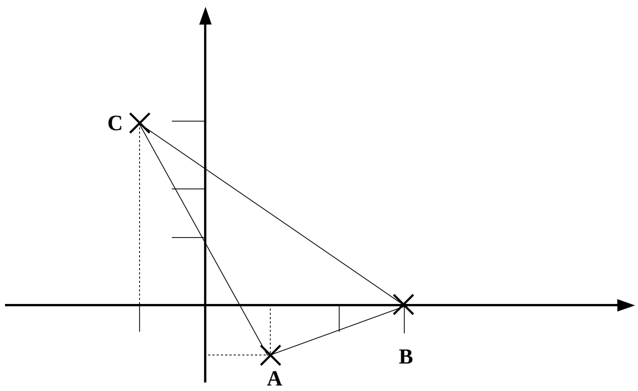
مسائل صفحه‌ی ۱۰۸

مسئله‌ی ۱ : $A=\begin{bmatrix}۳\\۳\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}۴\\۰\end{bmatrix}$ ، $C=\begin{bmatrix}-۳\\-۱\end{bmatrix}$ ، $D=\begin{bmatrix}۱\\-۳\end{bmatrix}$ ، $E=\begin{bmatrix}-۱\\۱\end{bmatrix}$

$AB=\sqrt{(۳-۴)^۲+(۳-۰)^۲}=\sqrt{۱۰}$ ، $AC=\sqrt{۵۲}$ ، $AD=\sqrt{۴۰}$ ، $AE=\sqrt{۲۰}$

مسئله‌ی ۲ :

قسمت الف)



قسمت ب)

$$\text{طول ضلع AB} = \sqrt{(۳-۱)^۲ + (۰-(-۱))^۲} = \sqrt{۴+۱} = \sqrt{۵}$$

$$\text{طول ضلع AC} = \sqrt{(۱-(-۱))^۲ + (-۱-۳)^۲} = \sqrt{۴+۱۶} = \sqrt{۲۰}$$

$$\text{طول ضلع BC} = \sqrt{(۳-(-۱))^۲ + (۰-۳)^۲} = \sqrt{۱۶+۹} = \sqrt{۲۵} = ۵$$

$$\text{محیط مثلث} = \sqrt{۵} + \sqrt{۲۰} + ۵ = ۵ + ۳\sqrt{۵}$$

قسمت پ) هیچ کدام از ضلع‌های این مثلث مساوی نیستند؛ پس، مثلث متساوی‌الساقین نیست. از روی شکل به نظر می‌آید که این مثلث در رأس A قائم‌الزاویه است. برای بررسی درستی این مطلب برقراری رابطه‌ی فیثاغورس $BC^۲ = AB^۲ + AC^۲$ را بررسی می‌کنیم :

$$BC^۲ = ۵^۲ = ۲۵$$

$$AB^۲ + AC^۲ = (\sqrt{۵})^۲ + (\sqrt{۲۰})^۲ = ۵ + ۲۰ = ۲۵$$

پس، مثلث ABC در رأس A، قائم‌الزاویه است.

مسئله‌ی ۳ : یک پاره‌خط به طول ۴ در نظر بگیرید و آن را روی محور اعداد مشخص کنید؛ به طوری که یک سر آن در نیمه‌ی مثبت محور و سر دیگر آن در نیمه‌ی منفی محور قرار گیرد. بدیهی است که به بی‌نهایت طریق می‌توانید این عمل را انجام دهید و مسئله بی‌نهایت پاسخ دارد؛ مثلاً نقاط به طول‌های ۱− و ۳ هم‌چنین نقاط به طول‌های ۲− و ۲ از جمله پاسخ‌ها هستند. کلیه‌ی پاسخ‌ها به صورت a و a − ۴ هستند که $۰ < a < ۴$.

مسئله‌ی ۴ : نقطه‌ی A روی محور yها قرار دارد و نقاط B و C را باید روی محور xها بیابیم؛ به طوری که AB = AC. داریم $A = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۳ \end{bmatrix}$ و اگر طول نقاط B و C را به ترتیب b و c بنامیم، داریم :

$B = \begin{bmatrix} b \\ ۰ \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} c \\ ۰ \end{bmatrix}$ ؛ پس :

$$AB = \sqrt{(۰-b)^۲ + (۳-۰)^۲} = \sqrt{b^۲ + ۹} \quad ، \quad AC = \sqrt{(۰-c)^۲ + (۳-۰)^۲} = \sqrt{c^۲ + ۹}$$

بنابراین باید داشته باشیم $\sqrt{b^۲+۹}=\sqrt{c^۲+۹}$ که با توان‌رسانی نتیجه می‌دهد $b^۲=c^۲$. از آن‌جا که b و c باید متمایز باشند، داریم $b=-c$. این از لحاظ هندسی یعنی نقاط B و C باید قرینه‌ی هم باشند و مسئله بی‌نهایت پاسخ دارد.

در حالتی که مثلث ABC بخواهد متساوی‌الاضلاع باشد، باید داشته باشیم $AB=AC=BC$. با فرض آن که نقطه‌ی B در نیمه‌ی مثبت محور xهاست، داریم $BC=|b-c|=|b+b|=۲b$ ؛ پس باید :

$$\sqrt{b^۲+۹}=۲b$$

$$b^۲+۹=۴b^۲$$

$$۳b^۲=۹$$

$$b^۲=۳$$

$$b=\sqrt{۳}$$

بنابراین، مسئله یک جواب دارد که نقاط $B=\begin{bmatrix}\sqrt{۳}\\ ۰\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}-\sqrt{۳}\\ ۰\end{bmatrix}$ هستند.

ارزیابی یادگیری : توانایی یافتن نقاط با مختصات داده شده و یافتن مختصات نقطه داده شده و تشخیص ویژگی‌های مختصاتی ربع‌های اوّل تا چهارم صفحه و توانایی محاسبه‌ی فاصله‌ی دو نقطه با مختصات داده شده، و یافتن نقطه‌ای روی محورx ها یا yها که فاصله‌ی مشخصی را تا نقطه‌ی داده شده‌ای داشته باشد، نشان دهنده‌ی یادگیری مفهوم این بخش است.

سطح بالاتر : در این بخش، مفهوم فاصله‌ی نقطه تا خط نیز قابل طرح است و می‌توانید با دادن نقاط و خط‌های مشخص، از دانش‌آموزان بخواهید فاصله‌ی نقطه تا خط را به دست آورند. حتی برای خط‌های خاص می‌توانید فاصله‌ی نقطه‌ی دلخواه با مختصات دلخواه را تا آن خط‌های خاص به دست آورید. در نهایت، برای نقطه‌ی دلخواه و خطّ دلخواه فرمول محاسبه‌ی فاصله‌ی نقطه تا خط را به دست آورید. توجه کنید که تمامی این موارد باید با محاسبه به دست آیند و صرفاً دادن دستورالعمل محاسبه فایده‌ای را در بر نخواهد داشت.

بخش رابطه‌ی خطی

اهداف بخش

- آشنایی مقدماتی با مفهوم رابطه
- آشنایی با رابطه‌ی خطی و تشخیص آن در زمینه‌های مختلف
- آشنایی با نمودار رابطه‌های خطی
- به کارگیری رابطه‌ی خطی در حلّ مسائل جالب توجه.

پیش‌نیازها

- داشتن توانایی بیان ریاضی و استفاده از نمادها برای بیان موقعیت‌های مربوط به رابطه‌ها
- آشنایی با دستگاه مختصات در صفحه و یافتن نقطه در آن از طریق مختصات
- توانایی انجام محاسبات جبری با اعداد و نمادها.

ارتباط با سایر بخش‌ها

رابطه‌ی خطی در بخش‌های شیب، شیب خط و معادله‌ی خط بکار می‌رود.

واژه‌های کلیدی

رابطه، رابطه‌ی خطی، نمودار رابطه، جدول رابطه و معادله‌ی رابطه.

ابزارهای کمک آموزشی

کاغذ شطرنجی و خط‌کش برای رسم نمودار.

نگاه کلی به بخش

استفاده از زمینه‌های واقعی برای مشاهده‌ی رابطه‌ی خطی، روش اصلی این بخش است. در این قسمت بین مفهوم رابطه‌ی خطی، جدول، نمودار و معادله‌ی رابطه خطی ارتباط برقرار شده است تا درک مفهوم، دقیق‌تر و کارکردن با آن آسان‌تر باشد. توجه داشته باشید که هرگاه یک مفهوم به صورت‌های مختلفی مانند نموداری (هندسی) و معادله‌ای (جبری) و داده‌ای (جدولی) ارائه و ارتباط بین آن‌ها بررسی می‌شود، یادگیری آن مفهوم عمیق‌تر خواهد بود. روش دیگر این قسمت، انجام فعالیت‌ها و حلّ تمرین در کلاس است تا مفاهیم درک و تثبیت شوند.

ورود به مطلب : طرح مثال‌هایی از کمیّت‌های واقعی که در ارتباط با یکدیگرند و درخواست از دانش‌آموزان برای ارائه‌ی مثال‌هایی دیگر، می‌تواند ورود مناسبی برای درک مفهوم رابطه باشد. ارائه‌ی مثال‌هایی واقعی با نوشتن یک معادله برای رابطه‌ی مورد نظر می‌تواند مفهوم معادله‌ی یک رابطه را آشکار کند.

فعالیت آموزشی : پس از ورود به مطلب می‌توانید وارد اوّلین فعالیت این بخش در صفحه‌ی ۹۷ شوید. در این فعالیت با استفاده از چهار عمل اصلی، رابطه‌هایی عرضه شده‌اند. در این فعالیت، دانش‌آموز باید به این نکته پی‌ببرد که برای دو کمیّت مرتبط، اگر مقدار یکی را انتخاب کرد، مقدار دومی خود به خود معیّن می‌شود. البته این ویژگی مربوط به توابع است که حالت خاصی از رابطه‌ها هستند. توجه داشته باشید که اصطلاح «تابع» را برای دانش‌آموزان به کار نخواهیم برد.

فعالیت بالای صفحه‌ی ۱۰۹

بند ۱ : در این‌جا یکی از چهار عمل جمع، تفریق، ضرب یا تقسیم انتخاب می‌شوند.

بند ۲ : عدد اوّلی به دلخواه انتخاب ولی برای عدد دوم اجباراً یک عدد خاص پیدا می‌شود. البته فقط در حالتی که عمل ضرب یا تقسیم انتخاب شده باشد و عدد اوّل را صفر انتخاب کنیم، هیچ عددی را نمی‌توان یافت که تساوی را برقرار کند اما در سایر حالات عدد مشخصی تساوی را برقرار خواهند کرد.

بند ۳ : عدد اوّل دلخواه می‌تواند باشد.

بند ۴ : عدد دوم در صورت وجود فقط یکی خواهد بود.

پس از این فعالیت، به کارگیری نمادهایی مانند x و y در بیان ریاضی یک رابطه مطرح می‌شود که معادله‌ی آن، «رابطه» نام دارد. توجه داشته باشید که نمادهایی مانند x و y که در معادله‌ی یک رابطه به کار می‌روند، حالت مجهول را دارند که فقط به ازای برخی اعداد خاص، تساوی معادله را برقرار می‌کنند؛ در حالی که این نمادها که در یک چند جمله‌ای به کار می‌روند، «متغیر» نامیده می‌شوند که هر مقداری را برای آن‌ها می‌توان در نظر گرفت.

توجه کنید که در رابطه‌های مورد بررسی فعالیت بالا، اگر اعمال ضرب یا تقسیم انتخاب شوند، روابط خطی نخواهند بود و رابطه‌های خطی از این به بعد مطرح می‌شوند.

فعالیت بعدی این بخش یک رابطه‌ی خطی، جدول آن رابطه، و نمودار آن را مطرح می‌کند. این رابطه به صورت توصیفی بیان و سپس معادله، جدول و نمودار آن خواسته شده است.

فعالیت پایین صفحه‌ی ۱۰۹

بند ۱ : ۳ سال

بند ۲ : ۲۴ سال

بند ۳ : $y = x + ۴$ (یا هم ارزهای این رابطه)

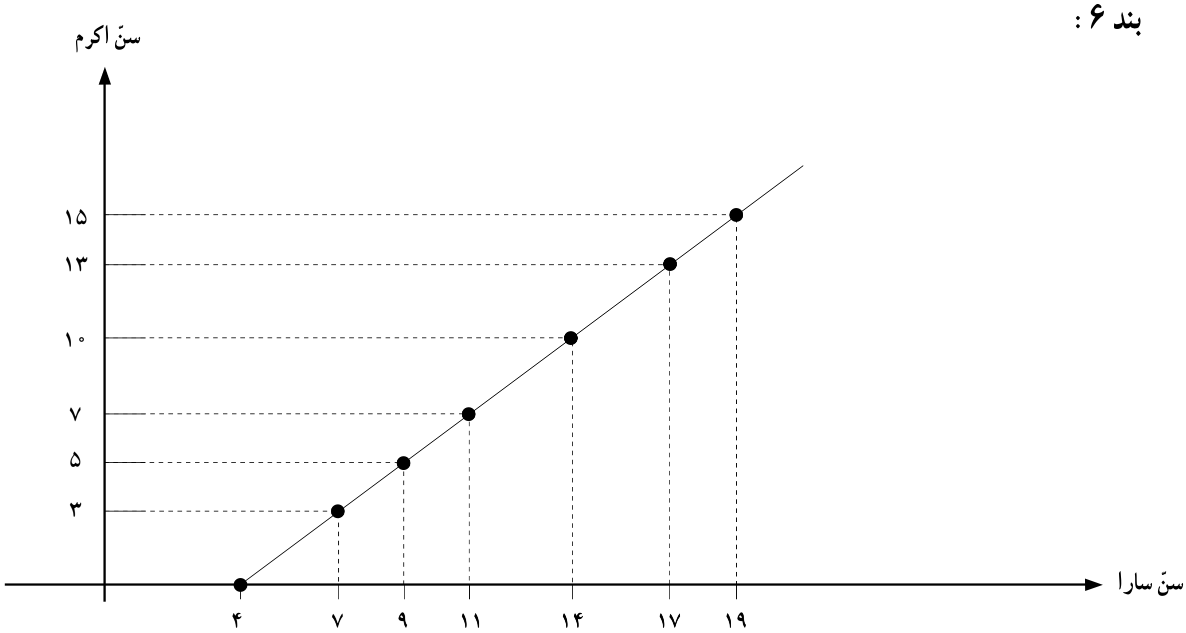
بند ۴ : به هر میزان که اکرم بزرگ‌تر شود، به همان میزان سارا بزرگ‌تر می‌شود.

بند ۵ :

سنّ سارا	۴	۷	$\boxed{۹}$	$\boxed{۱۱}$	۱۴	$\boxed{۱۷}$	$\boxed{۱۹}$
سنّ اکرم	۰	$\boxed{۳}$	۵	$\boxed{۷}$	$\boxed{۱۰}$	۱۳	$\boxed{۱۵}$

توجه کنید که وقتی سن هر دو خواهر را می‌خواهیم انتخاب کنیم، انتخاب یکی از سن‌ها اختیاری است ولی سن دیگر را باید برحسب سن اوّلی محاسبه کنیم.

بند ۶ :



با وصل کردن این نقاط یک خط تشکیل می‌شود.

در فعالیت بعدی نیز یک رابطه‌ی خطی کمی مشکل‌تر آمده است که در یک زمینه‌ی واقعی قرار دارد.

فعالیت صفحه‌ی ۱۱۰

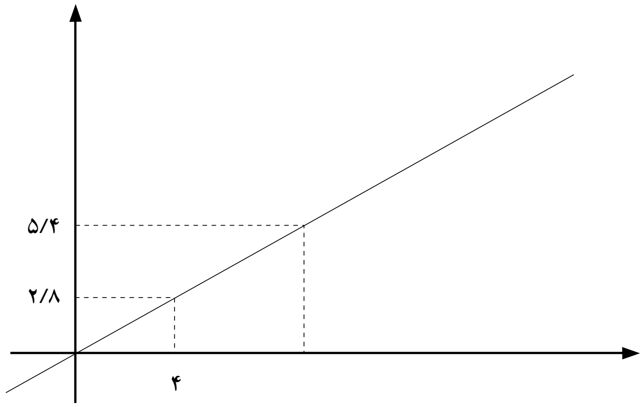
بند ۱ : ۲۸۰ کیلومتر

بند ۲ : جدول کامل شده به شکل زیر است. اعداد را می‌توانید یا از طریق اندازه‌گیری با خط‌کش یا از طریق استدلال هندسی روی تشابه مثلث‌هایی که در شکل می‌توان ساخت، به دست آورید.

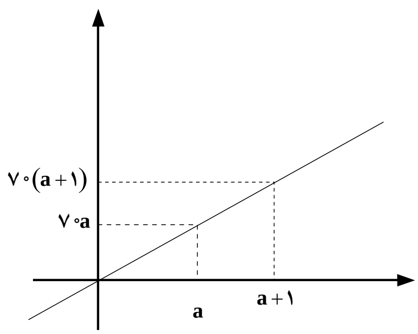
ساعت	۰	۲	۴	۶
فاصله تا زاهدان	۰	۱۴۰	۲۸۰	۴۲۰

بند ۳ : $y = ۷۰x$. کافی است توجه شود این ماشین در هر یک ساعت هفتاد کیلومتر حرکت می‌کند.

بند ۴ : از طریق معادله باید با قرار دادن $y = ۵۴۰$، مقدار x را پیدا کرد. $۵۴۰ = ۷۰ \times x$ ، پس $x = \frac{۵۴۰}{۷۰} \approx ۷/۷۱$ ؛ یعنی، تقریباً ۷ ساعت و ۴۳ دقیقه برای رسیدن به کرمان وقت صرف می‌شود. از طریق نمودار، باید از نقطه‌ی ۵/۴ روی محور yها خطّی عمود بر محور yها رسم کنیم که نمودار را قطع کند و از محلّ تقاطع به محور xها خطی عمود کنیم و فاصله تا مبدأ را با خط‌کش به دست آوریم و زمان را برحسب ساعت بیان کنیم. با تقریب ۵ دقیقه باید بتوانیم پاسخی نزدیک به پاسخ واقعی به دست آوریم.



بند ۵ : اگر مسافت طی شده در ساعت اوّل را حساب کنیم، ۷۰ کیلومتر می‌شود. محاسبه‌ی مسافت‌های طی شده در هر یک ساعت، بین ساعت a تا ساعت $a + ۱$ نیز قابل محاسبه است و :



$$۷۰ (a + ۱) - ۷۰a = ۷۰a + ۷۰ - ۷۰a = ۷۰$$

توجه کنید که اعداد روی محور عمودی بر حسب کیلومتر قرار داده شده‌اند.

در هر یک ساعت، این ماشین ۷۰ کیلومتر می‌رود. برای محاسبه‌ی مسافت طی شده در هر دو ساعت، مسافت طی شده بین ساعت a، $a + ۲$ را حساب می‌کنیم.

$$۷۰ (a + ۲) - ۷۰a = ۷۰a + ۱۴۰ - ۷۰a = ۱۴۰$$

در حالت اوّل، نسبت مسافت طی شده به زمان سپری شده، $\frac{۷۰}{۱}$ و در حالت دوم، $\frac{۱۴۰}{۲}$ است که مقدار ثابت ۷۰ است. در حالت کلّی، مسافت طی شده بین زمان $a + t$, a برابر است با :

$$۷۰(a + t) - ۷۰a = ۷۰a + ۷۰t - ۷۰a = ۷۰t$$

در این‌جا نسبت مسافت طی شده به زمان سپری شده برابر $\frac{۷۰t}{t}$ است که باز هم برابر ۷۰ است؛ بنابراین، این نسبت همواره ثابت است.

توجه داشته باشید که این دو فعالیت یکسان نیستند و در یکی، رابطه به صورت جبری مشخص است و نمودار آن به دست می‌آید و در دیگری، نمودار رابطه در دست است و رابطه به طور جبری مشخص می‌شود.

پس از این فعالیت، مفهوم رابطه‌های خطی توضیح داده شده است. ویژگی اصلی رابطه‌های خطی در آن است که نسبت افزایش یکی از متغیرها به افزایش (یا کاهش) متغیر دیگر مقداری ثابت است و مهم نیست در کدام نقطه این افزایش (یا کاهش) را حساب می‌کنیم.

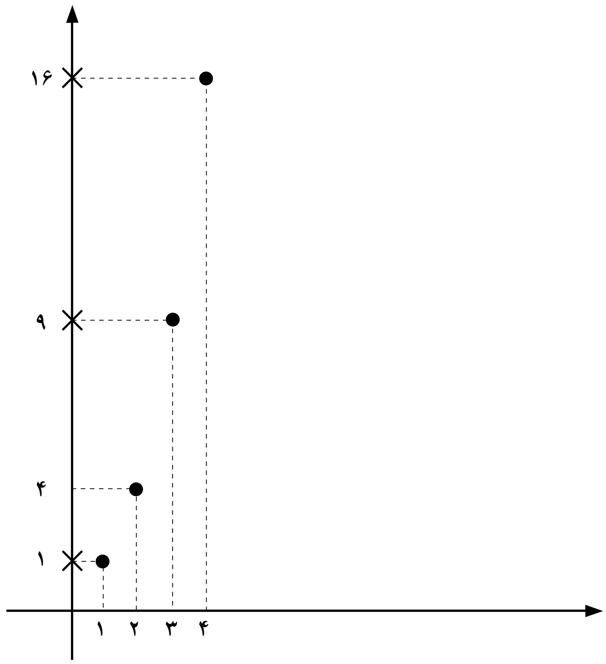
فعالیت صفحه‌ی ۱۱۱

بند ۱ : $y = x^۲$

بند ۲ : جدول کامل شده به شکل زیر است :

x	۱	۲	۳	۴	۵
y	۱	۴	۹	۱۶	۲۵

بند ۳ : نشان دادن ۲۵ واحد روی محور yها مشکل است و فقط ۴ نقطه‌ی اول را نشان می‌دهیم؛ به این صورت :



بند ۴ : میزان افزایش مساحت مربع وقتی طول از ۱ به ۲ افزایش می‌یابد، برابر است با ۳ = ۱ − ۴.

میزان افزایش مساحت مربع وقتی طول از ۲ به ۳ افزایش می‌یابد، برابر است با ۵ = ۴ − ۹.

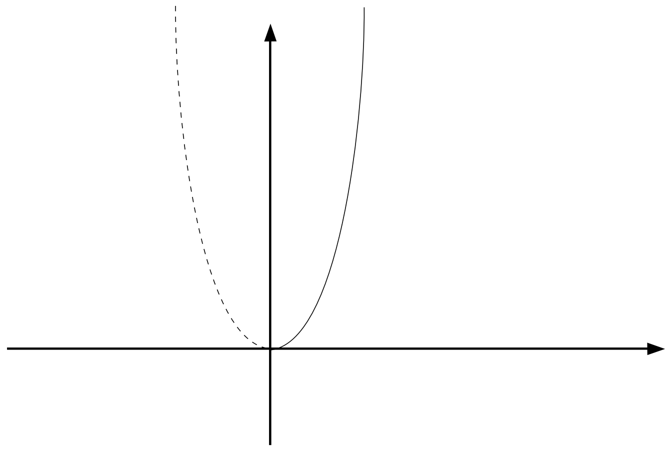
میزان افزایش مساحت مربع وقتی طول از ۴به ۵ افزایش می‌یابد، برابر است با ۹ = ۱۶ − ۲۵.

اگر چه در محاسبات بالا همواره یک واحد به طول مربع اضافه کردیم اما افزایش مساحت مربع‌ها به ازای هر یک واحد افزایش طول مقدارهای متفاوتی بود.

بند ۵ : اگر دو نقطه را با خط وصل کنیم، نقاط دیگر خارج از خط خواهند بود؛ پس، رابطه خطی نیست.

بند ۶ :

x	۰	۰/۲	۰/۵	۰/۸	۱	۱/۲	۱/۴	۱/۶	۱/۸	۲	۲/۲	۲/۴	۲/۶	۲/۸	۳
x^2	۰	۰/۰۴	۰/۲۵	۰/۶۴	۱	۱/۴۴	۱/۹۶	۲/۵۶	۳/۲۴	۴	۴/۸۴	۵/۷۶	۶/۷۶	۷/۸۴	۹



بند ۷ : همان اعداد جدول قبلی را تکرار می‌کنیم.

بند ۸ : نمودار ساخته شده در قسمت مثبت محور xها را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم.

تمرین در کلاس، صفحه‌ی ۱۱۳

بند ۱ : نمودار رشد انسان خطی نیست؛ بنابراین، نمودارهای به صورت خط پاسخ نیستند. از دو نمودار دیگر، یکی از مبدأ شروع شده که در صورت درستی به معنای آن است که طول قد انسان در بدو تولد صفر است که صحیح نیست؛ پس، فقط آن نمودار منحنی که در لحظه‌ی صفر مقداری ناصفر را برای قد نشان می‌دهد می‌تواند صحیح باشد.

بند ۲ : محلّ برخورد نمودار با محور yها، نشان دهنده‌ی طول قدّ انسان در لحظه‌ی تولد است.

حلّ یک مسئله : در این بخش، یک مسئله مطرح و حلّ آن تا حدی انجام شده است. تکمیل حلّ این مسئله در «تمرین در کلاس» صفحه‌ی ۱۱۵ قرار گرفته است. این مسئله بسیار جالب توجه است و توصیه می‌شود که حلّ این‌گونه مسائل در کلاس انجام شود. حل این‌گونه مسائل یک روش اصلی آموزش این کتاب است که علاوه بر مهارت به کارگیری ریاضی، نگرشی مثبت نسبت به ریاضی در دانش‌آموزان ایجاد می‌کند.

در این مسئله (با داشتن یک رویکرد تربیتی)، یک عمل خیریه‌ای اقتصادی خرید موادّ اولیه، تولید کالا و فروش کالا انجام می‌شود و هدف، بررسی چگونگی سود و زیان با استفاده از ابزارهای ریاضی است. موادّ اوّلیه همان لیوان‌های یک‌بار مصرف و ماده‌ی تولید کننده‌ی شربت است. در این مسئله، فرض بر آن است که هزینه‌ی خرید لیوان‌ها به طور کامل انجام شده است. اما هزینه‌ی ماده مربوط به تولید شربت به ازای هر لیوان محاسبه می‌شود و اگر مقداری از این ماده اضافی بیاید، قابل بازگرداندن است و هزینه محسوب نمی‌شود.

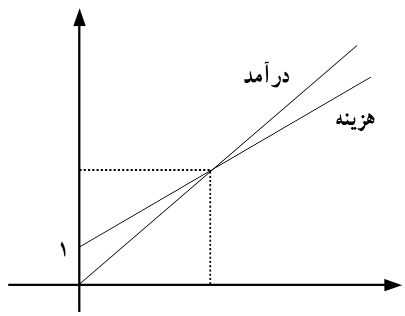
هزینه‌ی صرف شده برای خرید لیوان‌ها، ۱۰۰۰ تومان و هزینه‌ی ماده مربوط به تولید شربت در هر لیوان، ۹۰ تومان است؛ پس، جدول ارائه شده در صفحه‌ی ۱۱۴ به شکل صفحه‌ی بعد کامل می‌شود :

تعداد لیوان‌های فروخته شده	۰	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰
هزینه‌ی صرف شده	۱۰۰۰	۱۹۰۰	۲۸۰۰	۳۷۰۰	۴۶۰۰	۵۵۰۰
درآمد حاصل از فروش	۰	۱۲۵۰	۲۵۰۰	۳۷۵۰	۵۰۰۰	۶۲۵۰
سود یا ضرر	ضرر	ضرر	ضرر	سود	سود	سود

تمرین در کلاس، صفحه‌ی ۱۱۵

بند ۱ : این جدول دربالا تکمیل شده است.

بند ۲ : برای رسم نمودارهای مربوط به این جدول باید مقیاس مناسبی اختیار کنیم تا معادله‌ی خط‌های به دست‌آمده ضرایب مناسبی داشته باشند. اگر روی محور افقی، هر ۱۰ لیوان را یک واحد و روی محور عمودی هر ۱۰۰۰ تومان را یک واحد حساب کنیم، معادله‌ی هزینه به صورت $y = ۰/۹x + ۱$ و معادله‌ی درآمد به صورت $y = ۱/۲۵x$ در می‌آید و نمودار آن‌ها به صورت زیر است :



توجه داشته باشید که اگر چه تعداد لیوان‌ها کمّیتی گسسته است ولی ما آن را پیوسته در نظر می‌گیریم تا نمودارها را پیوسته رسم کنیم و محاسبات را آسان‌تر انجام دهیم.

بند ۳ : همان‌طور که دیده می‌شود، با اضافه شدن تعداد لیوان‌های فروخته شده، از ضرر کم می‌شود و در مرحله‌ای سود به دست می‌آید. آن تعداد لیوانی که در آن از ضرر به سود می‌رسیم، جایی است که مقدار هزینه با مقدار درآمد مساوی می‌شود. اگر این تعداد لیوان را x بنامیم، داریم :

$$۱/۲۵x = ۰/۹x + ۱$$

پاسخ این معادله $x = \frac{۱}{۰/۳۵} \approx ۲/۸۶$ بوده که به معنای ۲۸/۶ لیوان است. این پاسخ تعداد صحیحی لیوان را نشان نمی‌دهد و معنای آن، این است که در فروش ۲۸ لیوان ضرر کرده و در فروش ۲۹ لیوان سوده کرده‌ایم؛ پس، حداقل ۲۹ لیوان باید فروخته شود تا سود برده باشیم.

بند ۴ : مقدار هزینه در ۱۰۰ لیوان شربت برابر است با $۰/۹ \times ۱۰ + ۱ = ۱۰$. (توجه کنید که واحدهای اندازه‌گیری به کار رفته در نوشتن معادله‌ی هزینه و درآمد، هر ۱۰ لیوان یک واحد شمارش لیوان‌ها و هر ۱۰۰۰ تومان یک واحد هزینه یا درآمد است. مقدار درآمد در ۱۰۰ لیوان شربت نیز برابر است با $۱/۲۵ \times ۱۰ = ۱۲/۵$؛ پس، میزان سود برابر است با $۱۲/۵ - ۱۰ = ۲/۵$؛ یعنی، ۲۵۰۰ تومان سود حاصل می‌شود.

بند ۵ : در این حالت، نمودار هزینه فرقی نمی‌کند ولی معادله‌ی درآمد به صورت $y = ۱/۵x$ در می‌آید و تعداد لیوانی که در آن،

هزینه و درآمد مساوی می‌شود، پاسخ معادله‌ی زیر است.

$$۱/۵x = ۰/۹x + ۱$$

پاسخ این معادله $x = \frac{۱}{۰/۶} \approx ۱/۶۶$ بوده که به معنای ۱۶/۶ لیوان است؛ پس، در فروش ۱۶ لیوان ضرر کرده و در فروش ۱۷ لیوان سود کرده‌ایم. با فروش همه‌ی ۱۰۰ لیوان، میزان سود به شکل زیر است :

$$۱/۵ \times ۱۰ - (۰/۹ \times ۱۰ + ۱) = ۱۵ - ۱۰ = ۵$$

یعنی، ۵۰۰۰ تومان سوده برده می‌شود.

در حلّ این مسئله، توجه داشته که در دو معادله‌ی $y = ۰/۹x + ۱$ و $y = ۱/۲۵x$ نماد y معناهای متفاوتی دارد و در یکی، نشان‌دهنده‌ی درآمد و در دیگری، نشان‌دهنده‌ی هزینه است؛ پس، در یافتن نقطه‌ی تلاقی این دو خط اگر چه مانند آن است که دستگاه معادله تشکیل شده از این دو معادله را حل می‌کنیم ولی در واقع فقط مقداری برای x می‌یابیم که مقدار عددی هزینه و درآمد مساوی شوند؛ یعنی، مفهوم دستگاه معادله در این‌جا وجود ندارد ولی روش حل مانند حلّ دستگاه معادله است.

مسائل صفحه‌ی ۱۱۵

مسئله‌ی ۱ : الف)

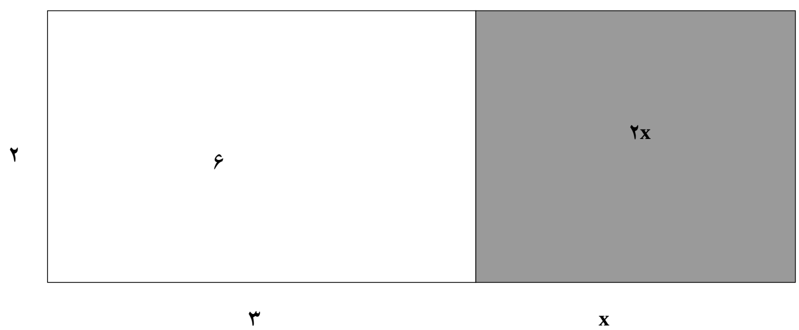
x	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y	۰	۲۰۰۰	۴۰۰۰	۶۰۰۰	۸۰۰۰	۱۰۰۰۰

ب) $y = ۲۰۰۰x$

پ) چون در جدول بالا برای محاسبه‌ی y دو عدد صحیح در هم ضرب شده‌اند.

ت) برای رسم نمودار به نحو مناسب، بهتر است مقیاس محورها را مناسب انتخاب کنیم؛ مثلاً هر واحد روی محور yها را برابر ۱۰۰۰ تومان و هر واحد محور xها را برابر یک نفر می‌گیریم؛ در این صورت، رابطه‌ی بین x و y به صورت $y = ۲x$ خواهد بود و نمودار این رابطه‌ی خط با معادله $y = ۲x$ است.

مسئله‌ی ۲ : الف) عدد ۶ نشان دهنده‌ی مساحت مستطیل اوّلیه بوده و عدد ۲ نشان‌دهنده‌ی عرض مستطیل است. بهتر است در شکلی مانند آن‌چه در زیر آمده است، این اعداد نشان داده شوند.



ب) افزایش طول به میزان ۳/۲ سانتی‌متر باعث می‌شود مساحت مستطیل از رابطه‌ی بالا به ازای $x = ۳/۲$ به دست آید و برابر است با $۱۲/۴ = ۶/۴ + ۶ = ۳/۲ \times ۲ + ۶$ که به معنای ۱۲/۴ سانتی‌متر مربع است.

مسئله‌ی ۳ : الف) در این حالت، طول فنر از رابطه‌ی داده شده به ازای $m = ۳/۷۲$ به دست می‌آید و برابر است با $۹/۸۶ = ۳/۷۲ \times ۰/۵ + ۸ = L$؛ پس، میزان افزایش طول برابر است با $۱/۸۶ = ۸ - ۹/۸۶$. این افزایش طول برحسب سانتی‌متر بوده و برحسب میلی‌متر، میزان افزایش طول ۱۸/۶ است.

ب) طول ۱۲۳ میلی‌متر به معنای ۱۲/۳سانتی‌متر است و جرم خواسته شده بر حسب کیلوگرم از معادله‌ی $۱۲/۳ = ۸ + ۰/۵\,m$ به دست می‌آید. پاسخ این معادله $m = ۸/۶$ که به معنای جسمی به وزن ۸/۶ کیلوگرم است.

مسئله‌ی ۴ : در این مسئله، اطلاعات اضافی وجود دارد و دانش‌آموز باید تشخیص دهد کدام اطلاعات موردنیاز او هستند. طول اوّلیه‌ی نوزادان سوسمار ۳۰ سانتی‌متر است و سالیانه ۲۲/۵ سانتی‌متر رشد می‌کنند؛ پس، طول سوسمارها از رابطه‌ی $L = ۳۰ + ۲۲/۵\,t$ به دست می‌آید. L برحسب سانتی‌متر و t برحسب سال است؛ پس، مدت زمان لازم برای آن‌که نوزاد سوسمار به ۸۰ سانتی‌متر برسد، از معادله‌ی زیر به دست می‌آید.

$$۸۰ = ۳۰ + ۲۲/۵t$$

پاسخ این معادله $t = \frac{۵۰}{۲۲/۵} \approx ۲/۲۲$ است که تقریباً به معنای ۲ سال و ۲ ماه و نیم است.

نکته‌ی مهم : لابد توجه کرده‌اید که در تمامی این مسائل، پس از حلّ معادلات و رسیدن به جواب‌های عددی، همواره اعداد به دست آمده را تفسیر کرده و گفته‌ایم که این اعداد نشان‌دهنده‌ی چه چیزی هستند. بدون این تفسیر نهایی، حلّ مسئله ناقص است و معلوم نیست دانش‌آموزان چه برداشتی از مسائل و حلّ آن‌ها خواهند داشت و نخواهند توانست شیوه‌های به کارگیری ریاضیات را به طور کامل یاد بگیرند.

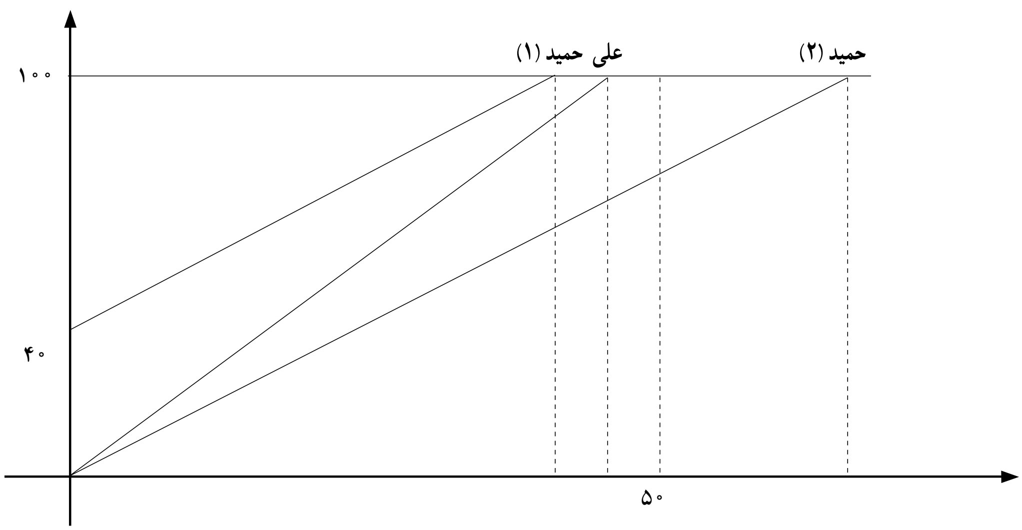
مسئله‌ی ۵ : هدف این مسئله استخراج اطلاعات مورد نیاز از طریق نمودار و تفسیر درست نمودار است.

الف)در لحظه‌ی صفر، علی در مبدأ است ولی حمید در مسافت ۴۰ متر جلوتر از مبدأ است؛ پس، حمید ۴۰ متر جلوتر از علی ایستاده است.

ب) رسیدن به انتهای خطّ مسابقه که در عدد ۱۰۰ متر روی محور مسافت مشخص شده است، در نمودار مربوط به حمید در زمان ۴۰ ثانیه رخ داده ولی همین نقطه در نمودار مربوط به علی در زمان ۴۵ ثانیه رخ داده است؛ پس، حمید پس از ۴۰ ثانیه و علی پس از ۴۵ ثانیه به انتهای خطّ مسابقه رسیده‌اند.

پ) حمید زودتر به خطّ پایان رسیده و برنده است.

ت) اگر حمید نیز از مبدأ شروع به حرکت می‌کرد، با توجه به آن‌که سرعت او تغییری پیدا نمی‌کرد می‌بایست نمودار حرکت او را به موازات خود به پایین انتقال دهیم تا از مبدأ بگذرد و آن‌را امتداد دهیم تا به مسافت ۱۰۰ متر برسد؛ مانند شکل زیر :



در شکل صفحه‌ی قبل و شکل کتاب واحد اندازه‌گیری خاصی روی محورها قید نشده است ولی با اعدادی که روی محورهای عمودی و افقی قرار داده شده است، با خط‌کش می‌توان اندازه‌گیری کرد که هر واحد طول روی محور افقی معادل چند ثانیه و هر واحد طول روی محور عمودی معادل چند متر است.

با رسم شکل می‌توان مقدار تقریبی زمان طی شده را با خط‌کش اندازه‌گیری کرد. روشن است که این بار علی برنده می‌شود. برای یافتن میزان زودتر رسیدن، به طور دقیق‌تر می‌توان با یک تناسب، زمانی را که حمید برای طیّ مسافت ۱۰۰ متر صرف کرده است، حساب کرد.

حمید ۶۰ متر را در زمان ۴۰ ثانیه دویده است و اگر ۱۰۰ متر را در زمان t ثانیه طی کرده باشد، t با تناسب زیر معیّن می‌شود.

۶۰	۴۰
۱۰۰	$t=\frac{۱۰۰\times ۴۰}{۶۰}=\frac{۲۰۰}{۳}\approx ۶۶/۶$

پس، میزان زودتر رسیدن علی تقریباً برابر است با $۶۶/۶ - ۴۵ = ۲۱/۶$.

نکته‌ی مهم : بهتر است که روی این مسئله وقت کافی گذاشته شود؛ زیرا نمایش نموداری مفاهیم و استخراج اطلاعات از روی نمودار و نمودار خوانی و تفسیر نمودار از مشخصات مهمّ این مسئله است که از مهارت‌های مهمّ ریاضی است. به ویژه دانش‌آموزان معمولاً در تفسیر کمیّت‌هایی که معکوس آن‌ها اهمیت دارد، دچار اشتباه می‌شوند. در این‌جا زمان بیش‌تری به معنای بازنده شدن است و ممکن است دانش‌آموزان تفسیر درستی از نمودار ارائه نکنند.

ارزیابی یادگیری : برای ارزش‌یابی یادگیری دانش‌آموزان از مطالب این بخش لازم است دانش‌آموزان بتوانند نمونه‌هایی از رابطه‌های خطی را معرفی کنند و رابطه‌ی بین کمیّت‌های آن را با در نظر گرفتن واحدهای اندازه‌گیری مناسب به زبان ریاضی بنویسند و نمودار آن را رسم کنند. برعکس، با داشتن نمودار یک رابطه باید بتوانند به سؤالات مطرح شده در مورد آن رابطه پاسخ بگویند. هم‌چنین، دانش‌آموزان باید بتوانند رابطه‌های خطی را از غیرخطی تشخیص دهند و نمونه‌هایی را ارائه کنند.

محدوده‌ی مطالب : این بخش محدود به روابط خطی، نمودار و جدول این رابطه‌هاست. یافتن رابطه‌هایی که تشخیص آن‌ها پیچیدگی‌های اضافی دارد، مورد نظر نیستند و فقط بررسی رابطه‌هایی که مستقیماً معادله‌ی آن‌ها قابل بیان است، مورد نظر هستند.

نکات مهم : در این بخش با نمودارهایی سروکار داشتیم که عموماً مربوط به دو کمیّت ناهم‌جنس بودند. در عمل، معادله این روابط به مقیاس اندازه‌گیری این کمیّت‌ها بستگی دارد. برای رسم نمودار این رابطه‌ها لازم است مقیاس اندازه‌گیری این کمیّت‌ها را به گونه‌ای تغییر دهیم که معادله‌ی رابطه‌ی بین آن‌ها با ضرایب عددی مناسبی در آیند تا نمودار آن‌ها را بتوان به درستی رسم کرد. دانش‌آموزان باید بتوانند این تغییر مقیاس‌ها را درک و با این تغییر مقیاس‌ها مجدداً معنای معادله را تفسیر کنند. بهتر است که چگونگی تغییر مقیاس‌ها را در مواردی به عهده‌ی خود دانش‌آموزان بگذاریم تا خودشان تغییر مقیاس مناسب را بیابند و با این روش به طور عملی آشنا شوند.

سطح بالاتر : می‌توان از سه کمیّت که اوّلی نسبت به دومی و دومی نسبت به سومی رابطه‌ی خطی دارند صحبت کرد که نتیجه گرفته می‌شود اوّلی نیز نسبت به سومی رابطه‌ای خطی دارد و معادله‌ی این رابطه‌ها را به دست آورد. به ویژه طرح سؤالات جالب توجه مانند هزینه و درآمد و سود در مثال‌های دیگر نیز قابل انجام است.

چالش‌های احتمالی : تغییر مقیاس‌های اندازه‌گیری کمیّت‌ها باعث تغییر در معادله‌ی رابطه بین کمیّت‌ها و نمودار آن‌ها می‌شود

و این مطلب ممکن است مشکلاتی را برای دانش‌آموزان به وجود آورد. باید در مورد چگونگی این عمل و معنای معادلات جدید به دست آمده کار بیش‌تری انجام داد و این عمل به عنوان یک روش خوب برای نمایش درآوردن رابطه‌ها به صورت نمودار مناسب فهمیده شود. کافی است یک بار بدون تغییر مقیاس‌ها نمودار رابطه‌ای را رسم کنید و بار دیگر با تغییر مناسب مقیاس‌ها، این عمل را انجام دهید.

بخش شیب

اهداف بخش

- آشنایی با مفهوم شهودی شیب از جنبه‌ی فیزیکی
- آشنایی با اندازه‌گیری شیب
- مقایسه‌ی شیب‌های مختلف و رسم شیب داده شده

پیش‌نیازها

- طول پاره‌خط، نسبت پاره‌خط‌ها، و نسبت‌های یکسان در قضیه‌ی تالس و در مثلث‌های قائم‌الزاویه.

ارتباط با سایر بخش‌ها

این بخش، مقدمه‌ای برای بخش بعدی است که مفهوم شیب خط را مطرح می‌سازد؛ هم‌چنین در بخش مثلثات شیب با مفهوم تانژانت زاویه‌های حاده ارتباط نزدیکی دارد.

واژه‌های کلیدی

شیب، مسافت افقی طی شده، ارتفاع از یک سطح معین، و نسبت دو پاره‌خط.

نگاه کلّی به بخش

این بخش با یک تصویر شروع می‌شود که نشان دهنده‌ی شخصی است که از خیابان‌های با سربالایی‌های متفاوت بالا می‌رود و میزان سختی این بالا رفتن در شکل به تصویر کشیده شده است. در این تصویر مفهوم شهودی شیب در دانش‌آموز ایجاد می‌شود. توجه داشته باشید که اصولاً مفهوم شیب مربوط به مفاهیم فیزیکی است که وارد ریاضی شده است؛ بنابراین، جایگاه اصلی این مفهوم در همان خیابان‌ها و پلکان‌هاست. در این کتاب نیز از همین جا آموزش مفهوم شیب آغاز می‌شود.

در ادامه از پلکان برای آموزش بهتر مفهوم شیب استفاده شده است؛ زیرا در محاسبه‌ی اندازه شیب دو مقدار مسافت افقی طی شده و میزان افزایش ارتفاع، نقش اصلی را دارند که در پله‌ها مستقیماً دیده می‌شوند. این دو مقدار در یک خیابان مستقیماً قابل دیدن نیستند.

پس از ایجاد درک شهودی، مسئله‌ی اصلی، کمّی کردن این مفهوم کیفی است و این سؤال طرح می‌شود که چگونه می‌توان میزان سربالایی‌ها را با هم مقایسه و آن‌ها را اندازه‌گیری کرد. برای پیچیده نشدن بحث، مستقیماً شیوه‌ی اندازه‌گیری شیب پیشنهاد می‌شود و با شکل صفحه‌ی ۱۰۶ درستی این شیوه اندازه‌گیری قابل قبول نشان داده می‌شود. سپس در چند مثال، شیب‌های داده شده اندازه‌گیری می‌شوند.

ورود به مطلب : زمینه‌سازی برای طرح مفهوم شیب می‌تواند طرح این مسئله باشد که برای رفتن به پشت بام از چه طریق‌هایی می‌توان اقدام کرد و کدام راه راحت‌تر است. استفاده از نردبان که تقریباً عمودی باشد، استفاده از پله، ساختن پله‌ی جدید می‌تواند

پیشنهاد شود. سپس می‌توان به این سؤال رسید که میزان سربالایی بودن یک خیابان یا پله را چگونه می‌توان اندازه‌گرفت و آن‌ها را با هم مقایسه کرد. بهتر است که در این زمینه، دانش‌آموزان مباحثه و هر کدام روشی پیشنهاد کنند و در نهایت، با راهنمایی معلم اشکالات پیشنهادات نامناسب بررسی شود و پیشنهاد مناسب مورد استفاده قرار گیرد.

فعالیت آموزشی : پس از ورود به مطلب و ارائه‌ی مثال‌ها، «تمرین در کلاس» مطرح می‌شود.

تمرین در کلاس، صفحه‌ی ۱۱۹

بند ۱ : در مورد نردبان اوّل، فاصله‌ی نوک نردبان تا زمین برحسب متر برابر است با $\sqrt{۴^۲-(۱/۲)^۲}=\sqrt{۱۴/۵۶}$ و شیب نردبان اوّل برابر است با $\frac{\sqrt{۱۴/۵۶}}{۱/۲}\approx ۳/۱۷$. در مورد نردبان دوم، فاصله‌ی نوک آن تا زمین برحسب متر برابر است با $\sqrt{۴^۲-(۲/۷)^۲}=\sqrt{۸/۷۱}$ و شیب نردبان دوم برابر است با $\frac{\sqrt{۸/۷۱}}{۲/۷}\approx ۱/۰۹$. از آن‌جا که $۱/۰۹<۳/۱۷$، شیب نردبان اوّل بیش‌تر است.

بند ۲ : اگر فاصله‌ی نردبان تا دیوار را برابر x متر فرض کنیم، داریم $۳^۲+x^۲=۴^۲$ که نتیجه می‌دهد $x^۲=۵$ و در نتیجه $x=\sqrt{۵}$ ؛ بنابراین، شیب نردبان برابر است با $\frac{۳}{\sqrt{۵}}=\frac{۳\sqrt{۵}}{۵}\approx ۱/۳۴$.

ارزیابی یادگیری : توانایی محاسبه‌ی شیب حالات مختلف داده شده رسم خط‌های با شیب‌های از پیش معین، توانایی توصیف شهودی شیب، تشخیص آن‌که در محاسبه مقدار شیب واحدهای اندازه‌گیری طول‌ها تأثیری نمی‌گذارد و مقدار شیب هر عدد مثبتی (یا هر عدد منفی نیز) می‌توان باشد، نشان‌دهنده‌ی درک دانش‌آموز از مفهوم شیب خواهد بود. در هر یک از موارد بالا می‌توان با طرح مسائل مناسب، درک دانش‌آموز را از این موارد تشخیص داد.

نکات مهم : یکی از نکات مهم این بخش، کمّی کردن یک مفهوم کیفی است. وقتی یک درک شهودی از مفهومی ایجاد می‌شود،برای دقت بیش‌تر و توصیف دقیق‌تر آن لازم است آن را به گونه‌ای اندازه‌گیری کنیم. چگونگی اندازه‌گیری مفهومی که فقط یک درک کیفی از آن داریم، عمل راحتی نیست و نیازمند یک تفکر خلاق و درک همه جانبه از آن مفهوم است. در این‌جا مفهوم شیب خیابان یا پله اگر چه قابل درک است اما چگونگی اندازه‌گیری آن از قبل معین نیست و ما خودمان باید طرحی برای اندازه‌گیری آن ارائه کنیم.

یکی از نکاتی که در تدریس ریاضی بسیار از آن غفلت می‌شود، این است که ظاهراً تمام مفاهیم ریاضی خود به خود از اول به همین شکل بوده‌اند و ما فقط باید آن‌ها را یاد بگیریم، اما واقعیت این است که مفاهیم ریاضی و تعاریف آن‌ها توسط ریاضیدان ابداع می‌شوند و محتاج یک عمل خلاقانه است.

در این‌جا چگونگی اندازه‌گیری شیب، یک نمونه‌ی ساده از این فرایند بوده و بسیار مناسب است که معلمان با مباحثه و برانگیختن خلاقیت دانش‌آموزان، از آن‌ها بخواهند طرحی برای اندازه‌گیری شیب ارائه کنند و در میان طرح‌های مختلف، نقادی و قضاوت دسته جمعی انجام شود. برای دانش‌آموزان هیچ طرح از پیش آماده‌ای نباید وجود داشته باشد که بر دیگر طرح‌ها ارجحیت داشته باشد و باید بین طرح‌های مختلف با معیارهای مربوط به خوبی یک تعریف، قضاوت کرد. تعریف خوب از یک مفهوم باید با درک شهودی آن مفهوم هماهنگ باشد و در حالات خاص، همان نتیجه‌ی موردنظر به دست آید.

بخش شیب خط

اهداف بخش

- مفهوم‌سازی شیب خط از طریق مشابه‌سازی خط‌ها با خیابان‌ها و پلکان
- محاسبه‌ی شیب خط از طریق نقاط خط
- برقراری ارتباط بین شیب نمودار یک رابطه‌ی خطی و ویژگی خاص آن رابطه‌ی خطی
- ارائه‌ی مفهوم شیب منفی.

پیش‌نیازها

- رابطه‌ی خطی، نمودار رابطه‌ی خطی، شیب و فاصله‌ی دو نقطه روی یک محور.

ارتباط با سایر بخش‌ها

این بخش از طریق بخش‌های مربوط به نمودار رابطه‌های خطی و شیب طرح شده و در بخش‌های مربوط به معادله‌ی خط، حالات دو خط، و تانژانت زاویه‌های حاده استفاده می‌شود.

واژه‌های کلیدی

شیب، شیب خط، فاصله‌ی دو نقطه، و افزایش یا کاهش طول یا عرض نقاط.

نگاه کلّی به بخش

در کتاب با مشابهت برقرار کردن بین یک خط در صفحه و یک خیابان یا پلکان، مفهوم فیزیکی شیب به مفهوم ریاضی شیب خط‌ها تبدیل می‌شود. در این فرایند، مفهوم ریاضی شیب خط‌ها به دست می‌آید و فرمول محاسبه‌ی آن از طریق نقاط خط ساخته می‌شود.

سپس در یک تمرین در کلاس، مفهوم شیب در یک رابطه‌ی خطی به نمایش در می‌آید تا روشن شود، این مفهوم جدید (شیب خط) چه مشخصه‌ای از روابط خطی را نشان می‌دهد.

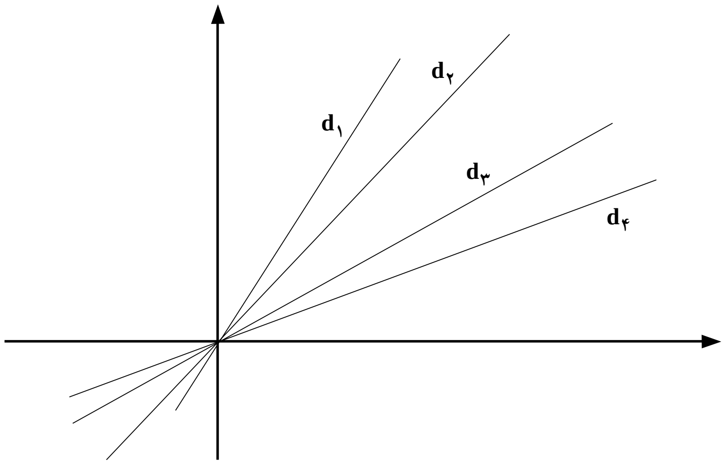
این تعریف در حالتی ارائه می‌شود که شیب خط مثبت است. برای رسیدن به حالتی که شیب خط منفی است از یک فعالیت استفاده شده است. در این فعالیت، دانش‌آموز شیب خط را طبق فرمول محاسبه می‌کند و عدد منفی به دست می‌آورد و از دانش‌آموز خواسته می‌شود علت منفی‌شدن شیب را توضیح دهد.

در این روش، مفهوم شیب منفی مستقیماً آموزش داده نمی‌شود و غیرمستقیم فرمول محاسبه‌ی شیب خط که فقط در حالت شیب مثبت توجیه شده است، برای شیب منفی هم مورد قبول فرض می‌شود.

برای توجیه بهتر شیب منفی، ابتدا باید یک مفهوم شهودی برای آن به دست آورد. وارد شدن اعداد منفی در محیط پیرامونی فقط در جایی رخ می‌دهد که یک جهت در آن وجود داشته باشد. برای حرکت در خیابان‌های شیبدار اگر یک جهت حرکت به عنوان جهت مثبت در نظر بگیریم و در این جهت حرکت کنیم، اگر حرکت رو به بالا باشد، شیب خیابان را همان مقدار مثبت که قبلاً تعریف شده در نظر می‌گیریم اما اگر حرکت رو به پایین باشد می‌توانیم شیب خیابان را منفی محسوب کنیم؛ بنابراین، شیب فقط مربوط به خیابان نیست و به جهت قراردادی مثبت برای حرکت بستگی دارد.

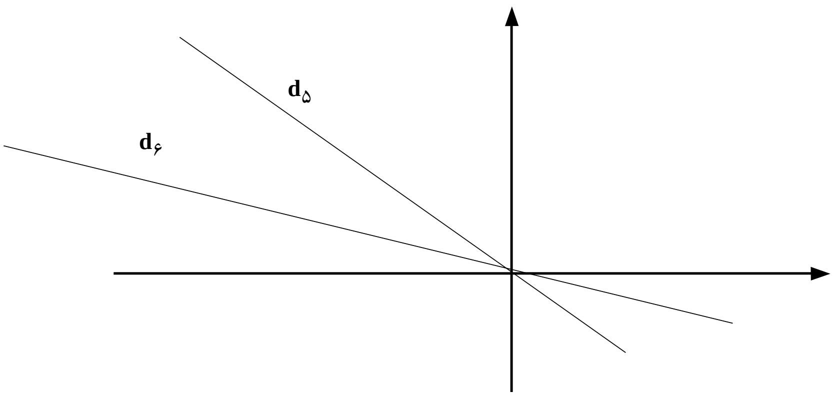
با این توصیف از شیب منفی، خط‌های شیب منفی مانند خیابان‌هایی هستند که با افزایش طول نقطه روی آن‌ها یک حرکت رو به پایین ایجاد می‌شود و خط‌های با شیب مثبت مانند خیابان‌هایی هستند که با افزایش طول نقطه یک حرکت رو به بالا در آن‌ها ایجاد می‌شود.

ورود به مطلب : با رسم خط‌های مختلفی که از مبدأ می‌گذرند، این سؤال را طرح کنید که چگونه می‌توان وضعیت این خط‌ها را از لحاظ نزدیک بودن به محور xها یا نزدیک‌بودن به محور yها تشخیص داد.



با مشابهت برقرارکردن بین این خط‌ها با خیابان‌های سربالایی که تصویر آن در اول بخش شیب هم آمده است، مفهوم شیب خیابان‌ها را به عنوان معیاری برای تشخیص وضعیت خط مطرح کنید. البته مناسب‌تر آن است که خود دانش‌آموزان به این مشابهت پی‌ببرند و خودشان مفهوم شیب خیابان‌ها را برای خط‌ها نیز پیشنهاد کنند و طیّ یک مباحثه، مفهوم شیب خط به همین صورت تعریف شود.

برای رسیدن به شیب منفی، مناسبت است مشابه خط‌هایی که در شکل بالا در ربع اوّل رسم شده‌اند، در ربع دوم هم رسم شوند و درباره‌ی مفهوم شیب خط در مورد این خط ها نیز پرسش کنیم.



تعریف‌های پیشنهاد شده را باید بررسی کرد و دانش‌آموزان را به یک تعریف مناسب رساند. تعریف مناسب باید تعمیمی از تعریف در حالت شیب‌های مثبت باشد و دقیقاً با همان فرمول حساب شود.

فعالیت آموزشی : پس از ورود به مطلب و ارتباط برقرار کردن بین مفهوم شیب خط و شیب خیابان، فرمول شیب خط از طریق نقاط خط استخراج و در مثال‌هایی محاسبه می‌شود.

تمرین در کلاس، صفحه‌ی ۱۲۱

بند ۱ : طبق شکل، وزن جعبه ۱۰ کیلوگرم است.

بند ۲ : طبق شکل با اندازه‌گیری طول پاره‌خط با خط‌کش و واحد به کار رفته، وزن جعبه ۱۲/۵ کیلوگرم می‌شود.

بند ۳ : طبق شکل برای صفر قوطی، وزن جعبه به دست می‌آید که برابر ۵ کیلوگرم است.

بند ۴ : شیب خطی که در شکل آمده است، طبق اندازه‌گیری طول پاره‌خط‌ها برابر ۱ است ولی باید توجه داشت که در رسم نمودار این رابطه‌ی خطی از چه واحدهایی استفاده کرده‌ایم. در این شکل اگر پاره خط واحد روی محور عمودی را برابر ۱ کیلوگرم گرفته باشیم، پاره‌خط واحد روی محور افقی معادل ۴ قوطی است.

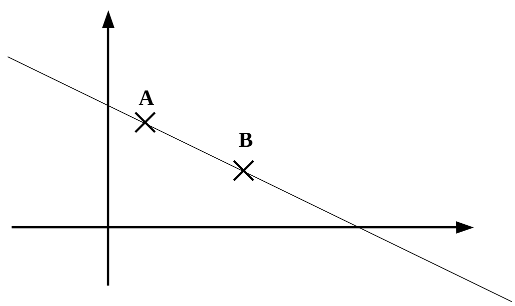
بنابراین، شیب خط که در این واحدهای اندازه‌گیری برابر ۱ شده است، به معنای آن است که به ازای هر ۴ قوطی، ۱ کیلوگرم وزن اضافه می‌شود.

بند ۵ : چون به ازای هر ۴ قوطی، یک کیلوگرم وزن اضافه می‌شود، هر قوطی $\frac{۱}{۴}$ کیلوگرم است و چون وزن جعبه‌ی خالی ۵ کیلوگرم است، پس $y=\frac{۱}{۴}x+۵$.

بند ۶ : با توجه به واحد اندازه‌گیری، شیب خطّ رسم شده برابر ۱ است و این مقدار شیب وزن ۴ قوطی را برحسب کیلوگرم نشان می‌دهد اما با رسم نمودار این رابطه به گونه‌ای که پاره‌خط واحد نشان دهنده‌ی یک قوطی باشد، خطی به دست می‌آید که شیب آن $\frac{۱}{۴}$ است و همان وزن یک قوطی را نشان خواهد داد.

فعالیت صفحه‌ی ۱۲۲

بند ۱ :



بند ۲ : نقطه‌ی B طول بیش‌تری دارد. نقطه‌ی A عرض بیش‌تری دارد.

بند ۳ : در این حرکت، طول نقاط افزایش اما عرض نقاط کاهش می‌یابد.

بند ۴ : طبق فرمول $m=\frac{۲-۳}{۴-۱}=-\frac{۱}{۳}$ ؛ علت منفی شدن آن است که صورت کسر منفی و مخرج کسر مثبت است؛ یعنی، عرض نقطه‌ی B از عرض نقطه‌ی A کم‌تر است ولی طول نقطه‌ی B از طول نقطه‌ی A بیش‌تر است و با حرکت از A و B اگرچه طول‌ها افزایش یافته ولی عرض‌ها کاهش می‌یابد.

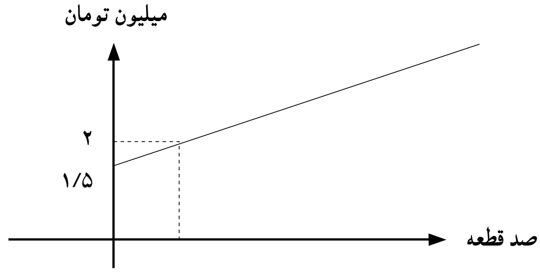
در کتاب در طیّ دو مثال، منفی شدن شیب با کاهشی بودن عرض نقاط وقتی طول نقاط افزایش می‌یابد، مرتبط می‌شود.

تمرین در کلاس، صفحه‌ی ۱۲۳ : در حلّ این تمرین، به محاسبه‌ی دقیق نیاز نیست؛ چون فقط علامت شیب را می‌خواهیم به دست آوریم. کافی است تشخیص داده شود با افزایش طول نقاط، عرض نقاط افزایش می‌یابد یا کاهش. با توجه به شطرنجی بودن صفحه‌ی مختصات می‌توانید به طور تقریبی و با ماشین حساب شیب این خط‌ها را به دست آورید.

مسائل صفحه‌ی ۱۲۴

مسئله‌ی ۱ : الف) $y = ۰/۵ x + ۱/۵$

ب)



پ) محلّ برخورد عدد ۱/۵ است که نشان‌دهنده‌ی هزینه‌ی ثابت است (برحسب میلیون تومان).

ت) این خط از نقاط $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱/۵ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ می‌گذرد؛ پس، شیب آن برابر $۰/۵ = \frac{۱/۵ - ۲}{۰ - ۱}$ است. این عدد نشان دهنده‌ی هزینه‌ی تولید هر بسته ۱۰۰ تایی قطعات برحسب میلیون تومان است. عدد ۰/۵ به صورت ضریب x در معادله دیده می‌شود.

ث) با کم یا زیاد شدن هزینه‌ی ثابت، عدد ۱/۵ در معادله کم یا زیاد می‌شود و نمودار رابطه، به بالا یا پایین تغییر مکان می‌دهد.

مسئله‌ی ۲ : الف)

$$\text{شیب خط } AB = \frac{۱ - ۲}{-۲ - ۱} = \frac{۱}{۳}$$

$$\text{شیب خط } AC = \frac{-۱ - ۲}{۰ - ۱} = ۳$$

$$\text{شیب خط } BC = \frac{-۱ - ۱}{۰ + ۲} = -۱$$

ب) در مسئله، به چگونگی تغییر نقطه‌ی C اشاره‌ای نشده است و برای سادگی شما می‌توانید این نقطه را روی محور yها تغییر دهید و مشاهده کنید که با حرکت به سمت پایین، شیب خط BC همواره منفی باقی می‌ماند و پاسخ مسئله در آن‌جا نیست. با حرکت رو به بالا، در جایی شیب خطّ BC صفر و سپس مثبت می‌شود و بقیه خط‌ها نیز شیب مثبت دارند تا جایی که عرض نقطه‌ی C از ۲ بیش‌تر شود؛ بنابراین، در یک محدوده‌ی کوچک می‌توانیم مکان مناسبی برای نقطه‌ی C بیابیم.

برای حلّ تحلیلی مسئله، مختص y نقطه‌ی C را عدد دلخواهی مانند p در نظر می‌گیریم و با انتخاب مناسب p سعی می‌کنیم شرط مثبت شیب اضلاع مثلث ABC را برآورده سازیم. شیب خطّ AB مثبت است و به مکان نقطه‌ی C بستگی ندارد.

$$\text{شیب خط } AC = \frac{p - ۲}{۰ - ۱} = ۲ - p$$

$$\text{شیب خط } BC = \frac{p - ۱}{۰ + ۲} = \frac{p - ۱}{۲}$$

برای مثبت بودن دو عدد بالا باید $۱ < p < ۲$؛ بنابراین، مثلاً $C = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱/۵ \end{bmatrix}$ یک پاسخ مسئله است.

پ) حلّ این قسمت هم مشابه قسمت «ب» است و اگر طول نقطه‌ی A را به طور ثابت ۱ در نظر بگیریم، با حرکت دادن آن به سمت پایین در برخی نقاط، شیب اضلاع این مثلث همگی منفی خواهند بود. برای حلّ تحلیلی، نقطه‌ی A را به صورت $A = \begin{bmatrix} ۱ \\ p \end{bmatrix}$

در نظر می‌گیریم. شیب خطّ BC به مکان نقطه‌ی A بستگی ندارد و منفی است و شیب دو خطّ دیگر به صورت زیر است :

$$\text{شیب خط } AB = \frac{۱-p}{-۲-۱} = \frac{p-۱}{۳}$$

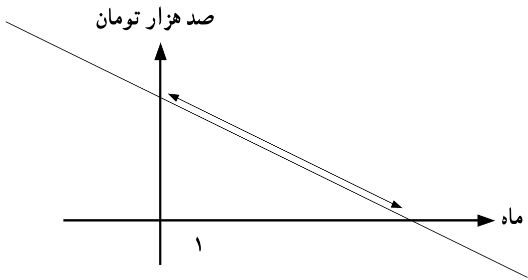
$$\text{شیب خط } AC = \frac{-۱-p}{۰-۱} = p+۱$$

برای منفی شدن دو مقدار بالا باید $p < ۱$ و $p < -۱$ ؛ یعنی، کافی است شرط $p < -۱$ برآورده شود و درستی این نتیجه را می‌توانید از روی شکل توضیح دهید؛ مثلاً $A = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۲ \end{bmatrix}$ یک پاسخ این مسئله است.

مسئله‌ی ۳ : الف) چون پس از x ماه به مقدار $۶۰۰۰۰x$ تومان پول پرداخته‌ایم، میزان بدهی باقی مانده $y = ۴۸۰,۰۰۰ - ۶۰,۰۰۰x$ خواهد بود. این رابطه برحسب واحد ۱۰۰,۰۰۰ تومان به شکل $y = ۴/۸ - ۰/۶x$ نوشته می‌شود.

ب) شیب معادله‌ی خط به دست آمده عدد $-۰/۶$ است که از لحاظ قدرمطلق قسط ماهیانه را برحسب واحد ۱۰۰,۰۰۰ تومان نشان می‌دهد و از لحاظ علامت، چون منفی است، کم شدن بدهی با افزایش زمان را نشان می‌دهد.

پ) آن قسمتی از این خط به رابطه مربوط است که ماه‌ها و بدهی‌ها مثبت باشند.



مسئله‌ی ۴ : $\frac{۲}{۳} = \frac{۲-۰}{۰-(-۳)} =$ شیب خط d و $-۱ = \frac{۱-۰}{۰-۱} =$ شیب خط d' .

مسئله‌ی ۵ : شیب مثلث کوچک برابر است با $۰/۰۹ \approx \frac{۲}{۲۲}$ و از ۰/۱ کم‌تر است؛ پس، مناسب نیست. شیب مثلث متوسط برابر است با $۰/۵۵ \approx \frac{۱۰}{۴۵}$ و از ۰/۵ بیش‌تر است؛ پس، مناسب نیست. شیب مثلث بزرگ برابر است با $۰/۱۶ = \frac{۲۰}{۱۲۵}$ که از ۰/۱ بیش‌تر و از ۰/۵ کم‌تر است؛ پس، مناسب است.

مسئله‌ی ۶ : اگر فاصله‌ی پای نردبان تا دیوار را برحسب متر x بنامیم باید داشته باشیم $\frac{۴}{۳} = \frac{۱۰}{x}$ ؛ بنابراین، $x = ۷/۵$ و باید پای نردبان را ۷/۵ متری دیوار قرار دهیم.

ارزیابی یادگیری : دانش‌آموز باید بتواند شیب خط‌های داده شده را از طریق نقاط آن حساب کند و منفی و مثبت شدن شیب خط‌ها را از طریق وضعیت خط‌ها تشخیص دهد و باید بتواند خط‌هایی با شیب معین داده شده، از نقطه داده شده رسم کند. در مورد هر رابطه‌ی خطی داده شده از طریق واحدهای اندازه‌گیری خواسته شده، دانش‌آموز باید بتواند معادله‌ی رابطه را بنویسد و نمودار آن را رسم کند و شیب خط نمودار را از طریق ویژگی‌های رابطه‌ی خطی تفسیر کند.

نکات مهم : معادله‌ی یک رابطه‌ی خطی بین دو کمیّت، به واحدهای اندازه‌گیری آن دو کمیّت وابسته است. با تغییر واحدها،

معادله نیز تغییر می‌کند؛ بنابراین، نمودار این رابطه‌ها نیز به واحدهای اندازه‌گیری انتخاب شده بستگی دارند و با تغییر واحدها، خط‌های متفاوتی به عنوان نمودار یک رابطه به دست می‌آیند و شیب این خط‌ها نیز تغییر می‌کنند. اگرچه خود رابطه تغییری نکرده است؛ بنابراین، شیب این خط‌ها نیز به واحدهای اندازه‌گیری انتخاب شده بستگی دارد.

شیب خطّ نمودار یک رابطه‌ی خطی نشان‌دهنده‌ی سرعت تغییرات یک کمیّت نسبت به کمیّت دیگر است؛ مثلاً در محاسبه‌ی سرعت یک ماشین که همان شیب خطّ نمودار رابطه‌ی بین مسافت طی شده و زمان سپری شده است، اگر مسافت را با کیلومتر و زمان را با ساعت بسنجیم، شیب عددی است که سرعت ماشین را برحسب کیلومتر بر ساعت به دست می‌دهد. اما اگر مسافت را با متر و زمان را با ثانیه بسنجیم، هم معادله و هم نمودار تغییر می‌کنند و شیب، سرعت ماشین را برحسب متر بر ثانیه به دست می‌دهد. این دو عدد با هم متفاوت‌اند ولی سرعت ماشین تغییری نکرده است. در واقع سرعت با واحدهای متفاوت اندازه‌گیری شده‌است.

تغییر شیب و تغییر معادله‌ی رابطه‌های خطی که در اثر تغییر واحدهای اندازه‌گیری رخ می‌دهند، مسئله‌ای غیرطبیعی نیست و مربوط به مقدارهای مختلف برای یک کمیّت است که با واحدهای مختلف اندازه‌گیری شده است.

بخش‌های معادله‌ی خط و خط‌های عمود بر هم

اهداف بخش

- تشخیص فرم کلّی معادله‌ی خط
- تشخیص شیب خط از طریق معادله‌ی آن
- به‌دست‌آوردن معادله‌ی خط با معلوم‌بودن یک نقطه و شیب آن
- آشنایی با معادله‌ی خط‌های خاص موازی محور xها و موازی محور yها.
- تشخیص حالات دو خط از لحاظ توازی و تعامد از طریق شیب آن‌ها.

پیش‌نیازها

- رابطه‌ی خطی، شیب خط، نمودار معادله، توازی و تعامد خط‌ها.

واژه‌های کلیدی

معادله‌ی خط و شیب خط.

نگاه کلّی به بخش

ابتدا معادله‌ی کلی یک رابطه‌ی خطی یادآوری می‌شود و در یک فعالیت، ارتباط بین نمودار رابطه و معادله‌ی رابطه بررسی می‌شود. سپس مفهوم عرض از مبدأ یک خط معرفی و با به دست‌آوردن دو نقطه از یک خط با معادله‌ی دلخواه، شیب آن خط حساب می‌شود. از این طریق می‌بینیم که شیب هر خط که معادله‌ی آن به‌صورت $y=mx+b$ است، ضریب x است.

با یک فعالیت دیگر به‌تدریج دانش‌آموزان به نوشتن معادله‌ی خطی، که یک نقطه و شیب آن معلوم است، راهنمایی می‌شوند. تشخیص توازی خط‌ها از طریق شیب آن‌ها از طریق یک مثال یادآوری می‌شود. در یک فعالیت، معادله‌ی خط‌هایی که موازی محور xها و yها هستند، توجیه می‌شوند.

در بخش خط‌های عمود بر هم از طریق تجربی و مثال، وضعیت خط‌های عمود بر هم از طریق شیب آن‌ها ارائه می‌شود.

ورود به مطلب : مناسب است که این بخش را با طرح این سؤال آغاز کنیم که شیب یک خط در معادله‌ی آن چه تأثیری می‌گذارد؟ سپس چند خطّ گذرنده از مبدأ رسم کنید و شیب و معادله‌ی این خط‌ها را بنویسید تا دانش‌آموزان به این حدس برسند که شیب خط به‌صورت ضریب x است. سپس دانش‌آموزان می‌توانند حدس خود را در معادله‌ی خط دلخواه $y = mx + b$ ثابت کنند.

قسمت بعدی این بخش مربوط به یافتن معادله‌ی خط است؛ وقتی که یک نقطه و شیب آن معلوم است. برای ورود به این مبحث می‌توان همانند کتاب عمل کرد و از مثال‌های عددی شروع کنید و کم کم به حالت دلخواه برسید.

برای ورود به بحث خط با معادله‌ی $x=c$ که جزء حالت کلی معادله‌ی خط به‌صورت $y = mx + b$ نیست می‌توانید کلیه‌ی خطوط به معادله‌ی $y = mx + b$ را ترسیم و دانش‌آموزان را متوجه این نکته کنید که خط‌های موازی محور yها جزء این خط‌ها قرار نمی‌گیرند و این سؤال را طرح کنید : «معادله ی این خط‌ها چگونه باید باشد؟»

این مطلب می‌تواند زمینه‌ی بحث مفیدی باشد که در آن، مفهوم معادله‌ی یک رابطه و نمودار آن به خوبی شکافته و از طریق آن، معادله‌ی این خط‌ها ارائه شود.

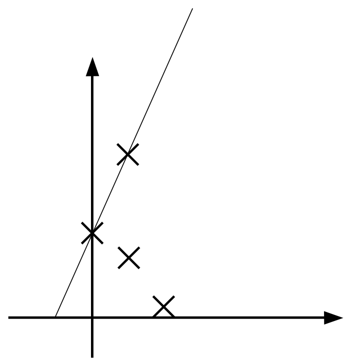
برای ورود به بحث خط‌های عمود بر هم و شیب آن‌ها، می‌توان حالت توازی خط‌ها را یادآوری کرد و این سؤال را طرح کرد که «آیا از طریق شیب خط‌ها می‌توان عمود بودن آن‌ها را بر هم تشخیص داد؟».

روش کتاب، کشف تجربی است ولی برای دانش‌آموزانی که آمادگی استدلال کردن و بحث‌های هندسی در مثلث‌های قائم‌الزاویه را دارند می‌توان این کشف تجربی را با استدلال به دست آورد.

فعالیت آموزشی : این بخش، پس از یادآوری معادله‌ی کلی رابطه‌ی خطی با فعالیت زیر دنبال می‌شود.

فعالیت صفحه‌ی ۱۲۶

بند ۱ : دو نقطه مانند $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۴ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۷ \end{bmatrix}$ را روی این خط در نظر می‌گیریم و با یافتن آن‌ها در صفحه، خط واصل بین آن‌ها را رسم می‌کنیم.



بند ۲ : از روی شکل دیده می‌شود که نقاط $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۴ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ \\ ۷ \end{bmatrix}$ روی خط قرار دارند ولی بقیه‌ی نقاط روی این خط نیستند.

بند ۳ : با جای‌گذاری مختصات نقاط $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۴ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ \\ ۷ \end{bmatrix}$ در معادله‌ی خط می‌بینیم که تساوی در معادله برقرار می‌شود و این نقاط روی خط قرار دارند. مختصات دو نقطه‌ی دیگر در معادله صدق نمی‌کند و روی خط قرار ندارند. می‌توان نتیجه گرفت نقاطی که روی خط قرار دارند، مختصات آن‌ها در معادله صدق می‌کنند و نقاطی که روی خط قرار ندارد، مختصات آن‌ها در معادله صدق نمی‌کنند.

در ادامه با محاسبه‌ی شیب خط با معادله‌ی دلخواه $y = mx + b$؛ در یک مثال، معادله‌ی خطی که شیب آن و یک نقطه‌ی آن معلوم

است، محاسبه می‌شود. در ادامه، در طی یک فعالیت معادله‌ی خطی با شیب m که از نقطه‌ی $\begin{bmatrix} x_{\circ} \\ y_{\circ} \end{bmatrix}$ می‌گذرد، محاسبه می‌شود.

فعالیت صفحه‌ی ۱۲۷

بند ۱ : معادله‌ی این خط به‌صورت $y = mx + b$ است و باید b را به نحو مناسب تعیین کنیم؛ چون این خط از نقطه‌ی $\begin{bmatrix} \circ \\ ۲ \end{bmatrix}$ می‌گذرد، داریم $۲ = m \times \circ + b$؛ پس، $b=۲$ و معادله‌ی خط $y = mx + ۲$ است.

بند ۲ : معادله‌ی این خط به‌صورت $y = mx+b$ است و باید b را به نحو مناسب تعیین کنیم؛ چون این خط از نقطه‌ی $\begin{bmatrix} ۲ \\ \circ \end{bmatrix}$ می‌گذرد، داریم $\circ=m\times۲+b$؛ پس، $b = -۲m$ و معادله‌ی خط $y = mx - ۲m$ است.

بند ۳ : مشابه بندهای (۱) و (۲) باید b را به نحو مناسب تعیین کنیم. داریم : $۳=m\times۲+b$؛ پس،$b=۲m-۳$ و معادله‌ی خط $y=mx+۲m-۳$ است.

بند ۴ : معادله‌ی این خط $y = mx + b$ است و باید b را به نحو مناسب تعیین کنیم؛ چون این خط از نقطه‌ی $\begin{bmatrix} x_{\circ} \\ y_{\circ} \end{bmatrix}$ می‌گذرد، داریم $y_{\circ} = m \times x_{\circ} + b$؛ پس، $b = y_{\circ} - mx_{\circ}$ و معادله‌ی خط عبارت است از $y = mx + y_{\circ} - mx_{\circ}$. می‌توان برای به ذهن سپردن آسان این رابطه، آن را به‌صورت زیر نوشت :

$$y-y_{\circ}=m(x-x_{\circ})$$

در دو مثال، این رابطه تمرین می‌شود.

تمرین در کلاس، صفحه‌ی ۱۲۸

الف) با درنظر گیری یک دستگاه مختصات، تمامی این خط‌ها را در آن دستگاه مختصات رسم می‌کنید.

ب) تمام این خط‌ها با هم موازی‌اند.

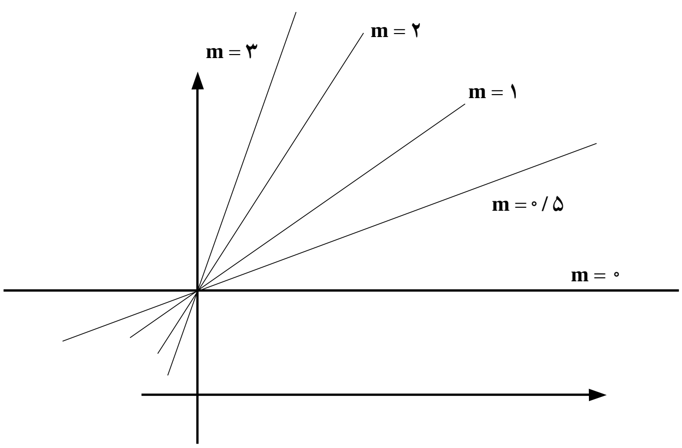
پ) شیب تمام این خط‌ها با هم مساوی است. با رسم خط‌های دیگر با همین شیب مجدداً خط‌هایی موازی با همین خط‌ها به‌دست می‌آیند؛ پس می‌توان حدس زد که خط‌های با شیب مساوی با هم موازی‌اند.

ت) با رسم خط‌های با شیب‌های مساوی، باز هم به خط‌های موازی می‌رسیم و می‌توان حدس زد در حالتِ کلی، دو خط با شیب یکسان موازی‌اند.

پس از این «تمرین در کلاس» ــ که یادآوری بوده است ــ به «فعالیت» صفحه‌ی ۱۲۸ می‌رسیم که در آن، معادله‌ی خط‌های به‌صورت x=c توجیه می‌شود.

فعالیت صفحه‌ی ۱۲۸

بند ۱ :



بند۲ : در خط‌های بالا هرچه شیب کم‌تر می‌شود، خطّ رسم شده به حالت افقی نزدیک می‌شود؛ پس با رسیدن شیب به صفر، خط باید افقی شود.

بند ۳ : نقاط به طول‌های مثلاً ۱− ، ۰،۲،۵،۱۰ را در نظر می‌گیریم.

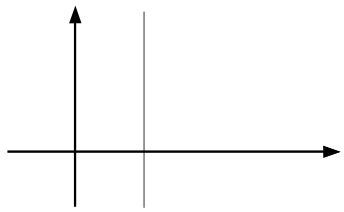
	A	B	C	D	E
x	−۱	۰	۲	۵	۱۰
y	۲	۲	۲	۲	۲

بند ۴ : تمام این نقاط، عرضی برابر ۲ دارند.

بند ۵ : خط y=b نیز به‌گونه‌ای است که موازی محور xهاست و عرض همه‌ی نقاط آن b است.

بند ۶ : مثلاً نقاط به عرض‌های ۲− ، ۰،۵،۷،۱۰ را در نظر می‌گیریم.

	A	B	C	D	E
x	۲	۲	۲	۲	۲
y	−۲	۰	۵	۷	۱۰



بند ۷ : تمامی این نقاط، طولی برابر ۲ دارند.

در پایان این فعالیت با تشابه با معادله‌ی y=b که نشان‌دهنده‌ی خطی موازی محور xهاست، نتیجه گرفته می‌شود که x=b نیز معادله‌ی خطی است موازی محور yها.

پس از این فعالیت، مبحث «بیندیشیم» قرار می‌گیرد که در ارتباط با مفهوم شیب برای خط‌های موازی محور yهاست. تعریف شیب خط برای این گونه خط‌ها قابل به‌کاربردن نیست؛ زیرا تقسیم بر صفر پیش می‌آید. روی این قسمت می‌توان در کلاس مباحثه کرد و با بررسی وضعیت خط‌های اطراف خط‌های موازی محور yها و بررسی چگونگی شیب آن‌ها، دلایل دیگری برای چرایی عدم تعریف شیب برای این خط‌ها به‌دست آورد.

در بخش بعدی، فعالیتی برای تشخیص عمود بر هم بودن خط‌ها از طریق شیب آن‌ها آمده است.

فعالیت صفحه‌ی ۱۳۰

بند ۱ : برای سادگی محاسبه‌ی شیب خط‌ها بهتر است در صورت امکان از نقاط محلّ برخورد این خط‌ها با محورها استفاده کنید. با به‌دست‌آوردن مقادیر تقریبی، جدول باید به شکل زیر کامل شود :

y=x−۳	$y=\frac{۱}{۳}x-۱$	y=−۲x+۲	y=۲x+۱	معادله‌ی خط
۱	$\frac{۱}{۳}$	−۲	۲	شیب خط
−۱	−۳	۰/۵	−۰/۵	شیب خطّ عمود

بند ۲ : اعداد سطر آخر به‌صورت معکوس اعداد سطر دوم که قرینه شده‌اند، هستند؛ بنابراین، می‌توان حدس زد که حاصل‌ضرب شیب خط‌های عمود بر هم، ۱- است.

مسائل صفحه‌ی ۱۳۱

مسئله‌ی ۱ : معادله به‌صورت $y-۲=۲(x-۱)$ است که پس از ساده‌سازی به شکل $y=۲x$ درمی‌آید.

مسئله‌ی ۲ : ابتدا شیب این خط را حساب می‌کنیم که برابر $m=\frac{۴-۲}{۳-۱}=۱$ است و معادله‌ی خط به‌صورت $y-۴=۱\times(x-۳)$ است که پس از ساده‌سازی به‌صورت $y=x+۱$ درمی‌آید.

مسئله‌ی ۳ : از آن‌جا که این خط با نیمساز ربع اوّل موازی است، شیب آن باید با شیب نیمساز ربع اوّل مساوی باشد؛ پس، شیب این خط ۱ بوده و معادله‌ی خط به‌صورت $y-۵=۱\times(x-۲)$ است و پس از ساده‌سازی به‌صورت $y=x+۳$ درمی‌آید.

مسئله‌ی ۴ : با نوشتن معادله‌ی این دو خط به‌صورت $y=-x+۱$, $y=-x+\frac{۵}{۲}$ ، معلوم می‌شود که شیب این خط‌ها مساوی هستند، پس با هم موازی‌اند.

مسئله‌ی ۵ : شیب خط $D_۲$ را می‌توانیم حساب کنیم؛ زیرا محلّ برخورد آن با محورها مشخص شده است.

$$D_۲ \text{ شیب خط } = \frac{-۳-۰}{۰-۲}=۱/۵$$

به دلیل موازی بودن شیب خط $D_۱$ نیز همین مقدار است و با داشتن یک نقطه و شیب این خط‌ها می‌توانیم معادله‌ی آن‌ها را بنویسیم.

معادله‌ی خط $D_۱$ به‌صورت $y-۰=۱/۵(x-۰)$ است که پس از ساده‌سازی به‌صورت $y=۱/۵x$ در می‌آید. معادله‌ی خط $D_۲$ به‌صورت $y-۰=۱/۵(x-۲)$ است که پس از ساده‌سازی به صورت $y=۱/۵x-۳$ درمی‌آید.

مسئله‌ی ۶ : شیب خط d' را می‌توانیم حساب کنیم : $m=\frac{۳-۰}{۰-۵}=-۰/۶$. به دلیل عمود بودن خطّ d بر خطّ d' ، شیب خط d برابر $\frac{۵}{۳}=\frac{۱۰}{۶}=-\frac{۱}{-۰/۶}$ است. حال با داشتن شیب این خط‌ها و یک نقطه از آن‌ها، معادله‌ی این خط‌ها را می‌نویسیم.

معادله‌ی خطّ d به‌صورت $y-۰=\frac{۵}{۳}(x-۰)$ است که پس از ساده‌سازی به‌صورت $۵x-۳y=۰$ درمی‌آید و معادله‌ی خط d' به‌صورت $y-۳=-۰/۶(x-۰)$ است که پس از ساده‌سازی به‌صورت $۳x+۵y=۱۵$ درمی‌آید.

ارزیابی یادگیری : با طرح سؤالات مناسب باید توانایی دانش‌آموز در موارد زیر سنجیده شود :

۱ــ از طریق معادله تشخیص دهد چه نقطه‌ای روی خط است یا نیست؟

۲ــ رابطه‌ی بین شیب خط و معادله‌ی خط را تشخیص می‌دهد یا نه؟

۳ــ توانایی نوشتن و به‌دست‌آوردن معادله‌ی خطی که شیب و یک نقطه‌ی آن معلوم است، دارد یا نه؟

۴ــ معادله‌ی خطی که دو نقطه‌ی آن معلوم است را می‌تواند بنویسد یا نه؟

۵ــ توازی خط‌ها و تعامد خط‌ها را از طریق شیب یا معادله‌ی آن‌ها می‌تواند تشخیص دهد یا نه؟

۶ــ تساوی‌های $y=b$ و $x=c$ را به‌عنوان معادله‌ی خط می‌تواند تفسیر کند یا نه؟

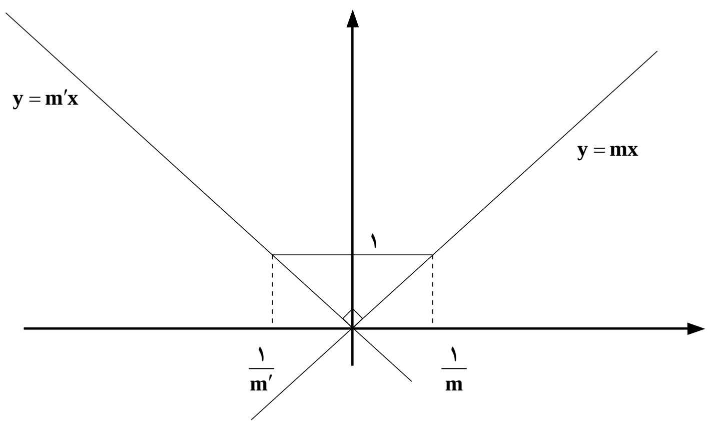
محدوده‌ی مطالب : در این بخش، فقط روش‌های محاسباتی مطرح‌اند و اثبات مطالب آن نیز از طریق محاسبه‌ی مستقیم انجام

می‌شوند و قسمت‌هایی بدون اثبات آمده‌اند؛ مانند شرط توازی و تعامد خط‌ها که مستقیماً و به‌طور تجربی توجیه می‌شوند. اثبات کامل این مطالب مطرح نیستند و فقط برای دانش‌آموزانی که توانایی آن را دارند، به‌طور اختیاری می‌تواند ارائه شود.

نکات مهم : در متن کتاب، فرمول کلّی خطی که دو نقطه‌ی داده شده می گذرد، نیامده است، اما دانش‌آموزان می‌توانند از طریق یافتن شیب خط، معادله‌ی این گونه خط‌ها را به‌دست آورند.

سطح بالاتر : در این بخش برخی مطالب بدون اثبات آمده‌اند که توصیه می‌شود برای دانش‌آموزان قوی‌تر اثبات آن‌ها آورده شود. معادله‌ی خطی که از دو نقطه‌ی داده‌شده می‌گذرد، می‌تواند به‌عنوان مسئله طرح و فرمول کلّی آن استخراج شود. در کتاب آمده است که دو خط با شیب یکسان موازی‌اند و بهتر است عکس آن نیز مطرح شود‌که دو خط موازی شیب یکسان دارند.

برای اثبات این که حاصل‌ضرب شیب دو خطّ بر هم عمود برابر ۱− است می‌توان از شکل زیر کمک گرفت :



در مورد شیب خط‌های موازی محور yها نیز می‌توان بحث کرد و حالت حدی خط‌هایی را که به یک خط موازی محور yها نزدیک می‌شوند، در نظر گرفت و به‌نوعی نتیجه گرفت که شیب خط‌های موازی محور yها را می‌توان ∞+ یا ∞− در نظر گرفت. البته ∞ ± جزء اعداد نیستند؛ بنابراین، شیب این خط‌ها تعریف نشده است.

هم‌چنین می‌توان حالت عمود بودن خط‌های موازی محور xها و محور yها را ملاحظه کرد و شرط ضرب شیب‌ها برابر ۱− بودن را بررسی کرد.

بخش دستگاه معادلات خطّی دو مجهولی

اهداف بخش

- آشنایی با دستگاه معادلات خطی دو معادله و دومجهولی
- آشنایی با روش‌های جبری حذفی و جای‌گزینی حلّ این دستگاه معادلات
- آشنایی با تعبیر هندسی دستگاه معادلات و حلّ هندسی آن‌ها.

پیش‌نیازها

- معادلات درجه‌ی اوّل، رابطه‌های خطی، و معادله‌ی خط.

واژه‌ی کلیدی

معادله‌ی خط، دستگاه معادله‌ی خطی، و برخورد دو خط.

نگاه کلّی به بخش

طیّ یک فعالیت، چگونگی رسیدن به یک دستگاه معادله و اهمیت بررسی این دستگاه معادلات توجیه می‌شود. در این فعالیت، چگونگی بررسی نموداری و هندسی دستگاه معادلات ارائه شده و با توضیح تقریبی بودن پاسخ‌های به‌دست آمده از روش هندسی، روش‌های جبری حلّ دستگاه معادلات بررسی می‌شود.

در ارائه‌ی روش حذفی برای حلّ دستگاه معادلات، ابتدا یک روش تصویری و سپس روش حذفی به‌طور جبری ارائه شده، بعد با چند مثال و تمرین در کلاس، آموزش این کامل می‌شود.

آموزش روش جای‌گزینی با انجام یک فعالیت شروع و سپس روش جای‌گزینی ارائه می‌شود. در این‌جا نیز با ذکر چند مثال، آموزش این درس کامل می‌شود.

ورود به مطلب: برای ورود به این بخش، بهتر است ابتدا مسئله‌ای که حلّ آن به تشکیل یک دستگاه معادله منجر می‌شود، طرح کنید. در این مسائل حداقل دو مجهول باید وجود داشته باشد. فعالیت ارائه‌شده در کتاب صفحه‌ی ۱۳۲، یکی ازاین نوع مسائل است که دارای دو متغیّر یعنی تعداد جلسات استفاده از باشگاه و هزینه‌ی آن است. برای طرح مثال‌های دیگر می‌توانید مسائل زیر را در نظر بگیرید.

«می‌خواهیم آلیاژی از آهن و مس به وزن ۵ کیلوگرم بسازیم که در آن، نسبت وزن آهن به وزن مس برابر $\frac{۳}{۷}$ شود. چه مقدار آهن و چه مقدار مس باید تهیه کنیم؟»

پاسخ: در این مسئله دو مجهول وجود دارد: وزن آهن و وزن مس. مقدار هریک را (برحسب کیلوگرم) به ترتیب با نمادهای x و y نشان می‌دهیم و طبق فرضیات مسئله داریم: $x+y=۵$ و $\frac{x}{y}=\frac{۳}{۷}$.

«می‌خواهیم با یک میله‌ی ۲۴ سانتی‌متری مستطیلی بسازیم که طول آن ۲ سانتی‌متر بیش‌تر از عرض آن باشد. این میله را به چه اندازه‌هایی باید ببریم؟»

پاسخ: اگر طول و عرض مستطیل مورد نظر را (برحسب سانتی‌متر) با x و y نشان دهیم، داریم: $۲x+۲y=۲۴$ و $x=y+۲$.

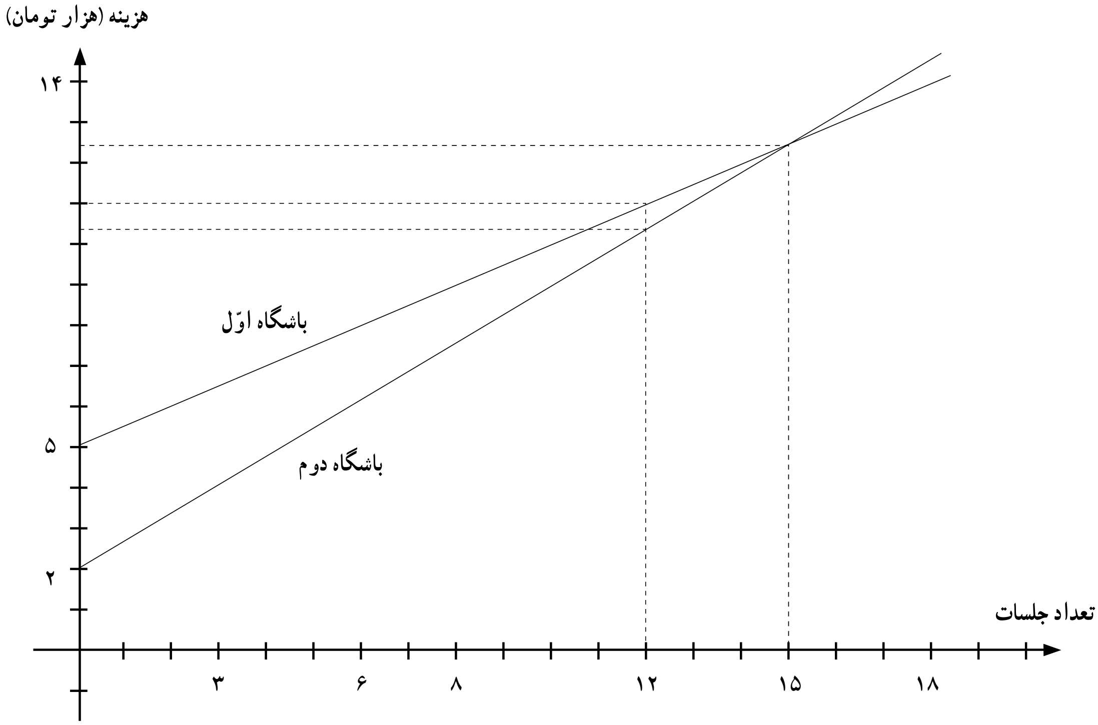
فعالیت آموزشی: پس از ورود به مطلب، فعالیت زیر مطرح می‌شود.

فعالیت صفحه‌ی ۱۳۲

بند ۱:

تعداد جلسات	۰	۱	۳	۸	۱۲	۱۸
هزینه کل باشگاه اول	۵۰۰۰	۵۵۰۰	۶۵۰۰	۹۰۰۰	۱۱۰۰۰	۱۴۰۰۰
هزینه کل باشگاه دوم	۲۰۰۰	۲۷۰۰	۴۱۰۰	۷۶۰۰	۱۰۴۰۰	۱۴۶۰۰

بند ۲: برای باشگاه اوّل داریم $y=۵۰۰x+۵۰۰۰$ و برای باشگاه دوم داریم $y=۷۰۰x+۲۰۰۰$. برای رسم مناسب نمودار این معادلات بهتر است هر واحد روی محور yها را برابر ۱۰۰۰ تومان در نظر بگیریم.



بند ۳ : روی محور xها نقطه‌ی متناظر ۱۲ جلسه را می‌یابیم و با رسم خطّ عمود بر محور xها، تحقیق می‌کنیم که روی کدام‌یک از این نمودارها، محلّ برخورد ۱۱۰۰۰ تومان را نشان می‌دهد (باشگاه اوّل).

بند ۴ : به‌ازای x=۱۲ در دو معادله حساب می‌کنیم که کدام یک مقدار ۱۱۰۰۰ ایجاد می‌کند که باشگاه اوّل است.

بند ۵ : از روی نمودار دیده می‌شود که در نقطه‌ی متناظر ۱۰ جلسه، نمودار باشگاه دوم زیر نمودار باشگاه اوّل است؛ پس، باشگاه دوم با صرفه‌تر است. از طریق معادله، هزینه‌ی این دو باشگاه نیز به‌ازای x =۱۰، مقدار هزینه‌ی باشگاه اوّل برابر ۱۰۰۰۰ و هزینه‌ی باشگاه دوم ۹۰۰۰ تومان به دست می‌آید، پس، باشگاه دوم به صرفه‌تر است.

بند ۶ : به‌ازای x=۱۵ هزینه‌ی هر دو باشگاه از طریق معادلات آن‌ها مقدار یکسان ۱۲۵۰۰۰ تومان می‌شود و نمودار این دو معادله در x=۱۵ همدیگر را قطع می‌کنند. در این تعداد جلسات، هزینه‌ی هر دو باشگاه یکی است.

پس از این فعالیت، با ذکر مثال‌هایی مفهوم دستگاه معادله توضیح داده و روش حلّ هندسی آن بیان شده است.

فعالیت صفحه‌ی ۱۳۴ : سطر اوّل، تصویر یک ساندویچ و یک نوشابه، سطر دوم تصویر سه ساندویچ و دو نوشابه و قیمت کلّی آن‌ها و سطر سوم، تصویر یک ساندویچ و یک نوشابه و قیمت کل آن‌ها را نشان می‌دهد و سطر چهارم، مشابه سطر سوم است که همه چیز دو برابر شده است.

سطر پنجم، از مقایسه‌ی سطر چهارم و دوم به دست آمده است که مقدارهای یکسان سطر چهارم از سطر دوم کم شده و هم‌زمان قیمت‌ها از هم کم شده‌اند. در سطر ششم، قیمت یک ساندویچ و با استفاده از سطر سوم، قیمت یک نوشابه به دست آمده است.

پس از این فعالیت، این نمایش تصویری به صورت نمادین بیان و با یک مثال، این روش تمرین شده است. هدف از این فعالیت آن است که دانش‌آموزان با بیان کلامی خود به تشریح موقعیت بپردازند. این تمرین باعث می‌شود که مدل‌سازی با نمادها آسان‌تر و هدفمند انجام شود.

تمرین در کلاس، صفحه‌ی ۱۳۵ : برای حذف x می‌توان معادله‌ی اوّل را در ۲ و معادله‌ی دوم را در ۳ ضرب کرد که نتیجه می‌شود :

$$\begin{cases} ۶x-۸y=۴۶ \\ -۶x+۲۱y=-۷۲ \end{cases}$$

با جمع این دو معادله نتیجه می‌شود $۱۳y=-۲۶$؛ پس : $y=-۲$ و $x=۵$. برای حلّ این دستگاه از طریق حذف y، می‌توان معادله‌ی اوّل را در ۷ و معادله‌ی دوم را در ۴ ضرب کرد که نتیجه می‌شود :

$$\begin{cases} ۲۱x-۲۸y=۱۶۱ \\ -۸x+۲۸y=-۹۶ \end{cases}$$

با جمع این دو معادله داریم $۱۳x=۶۵$؛ پس : $x=۵$ و $y=-۲$.

فعالیت صفحه‌ی ۱۳۶

بند ۱ : به‌ازای $y=۱۰۰۰$، معادله به صورت $۳x+۲\times۱۰۰۰=۵۰۰۰$ درمی‌آید و درنتیجه $x=۱۰۰۰$.

بند ۲ : به‌ازای $y=۱۷۵۰$، معادله به‌صورت $۳x+۲\times۱۷۵۰=۵۰۰۰$ درمی‌آید و درنتیجه $x=۵۰۰$.

بند ۳ : به‌ازای $y=۱۷۵۰-x$، معادله به‌صورت $۳x+۲(۱۷۵۰-x)=۵۰۰۰$ درمی‌آید و درنتیجه :

$x+۳۵۰۰=۵۰۰۰$

$x=۱۵۰۰$

فعالیت بالا مقدمه‌ی بیان روش جایگزینی است که در متن کتاب ارائه و در مثال‌هایی توضیح داده می‌شود.

در آخر این فصل، مسئله‌ای از کتاب «مفتاح‌المعاملات» آمده است که با روش زیر حل می‌شود. روی هم رفته ۵ نان بوده است و هر نفر $\frac{۵}{۳}$ نان خورده است آخری ۵ درهم داده است که یعنی قیمت $\frac{۵}{۳}$ نان برابر ۵ درهم است؛ پس، قیمت هر نان ۳ درهم است. اوّل ۳ نان آورده و $\frac{۵}{۳}$ نان خورده است؛ پس، ۹ درهم آورده و ۵ درهم آن را مصرف کرده است؛ پس ۴ درهم باید بگیرد. دومی ۶ درهم آورده و ۵ درهم آن را مصرف کرده است؛ پس باید ۱ درهم بگیرد؛ بنابراین از ۵ درهم، نفر سوم ۴ درهم به اوّلی و ۱ درهم به دومی باید بپردازد. بهتر است این مسئله را با درنظرگیری مجهولات و نوشتن معادلات هم حل کنید.

مسائل صفحه‌ی ۱۳۸

مسئله‌ی ۱ : الف) با قراردادن مقدار y از معادله‌ی اول در معادله‌ی دوم، داریم $۳x-۲(۵-۲x)=۱۷$ و با حل آن نتیجه می‌شود که $x=-۱$ و با استفاده از معادله‌ی اوّل $y=۷$.

ب) اوّلین معادله را در ۲– و دومین معادله را در ۳ ضرب می‌کنیم و حاصل را با هم جمع می‌کنیم. با این اعمال، مجهول x حذف می‌شود و داریم $۱۰y+۹y=-۲+۲۱$ که نتیجه می‌دهد $y=۱$. با استفاده از معادله اوّل یا دوم داریم $x=۲$.

مسئله‌ی ۲ : الف) $۴x+۳y=$ قیمت مخلوط A و $۳x+۵y=$ قیمت مخلوط B

ب) از آن‌جا که $۴x+۳y=۲۰۰$ و $۳x+۵y=۱۷۰$، با حل این دستگاه داریم $x=\frac{۴۹۰}{۱۱}\approx ۴۴/۵۴$ و $y=\frac{۸۰}{۱۱}\approx ۷/۲۷$.

پ) $۲۳۷/۲۷ \approx \frac{۲۶۱۰}{۱۱} = ۲\times\frac{۸۰}{۱۱}+۵\times\frac{۴۹۰}{۱۱}=$ قیمت مخلوط جدید

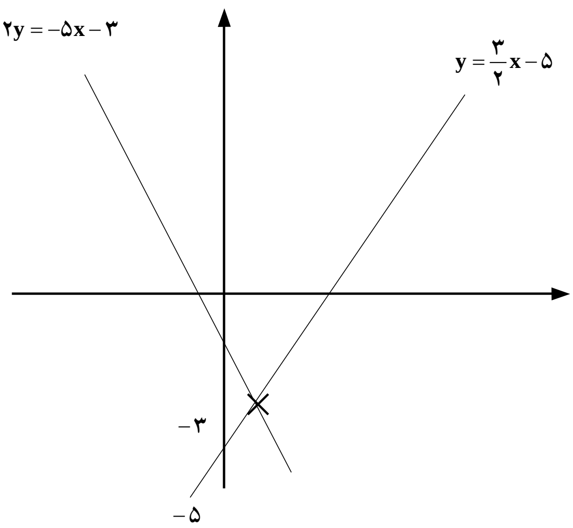
مسئله‌ی ۳ : این عمل فقط وقتی امکان‌پذیر است که عرض نقطه‌ی برخورد این دو خط ۱– باشد. با حل دستگاه حاصل از معادلات این خط‌ها، داریم $x=۳$ و $y=-۱$؛ پس می‌توانیم a را برابر ۳ انتخاب کنیم.

مسئله‌ی ۴ : ابتدا محلّ تقاطع این دو خط را با حلّ دستگاه متشکل از معادلات این دو خط به‌دست می‌آوریم. با حلّ این دستگاه داریم : $x=۰$ و $y=۳$. شیب خط $x-۲y=۱$ برابر $\frac{۱}{۲}$ است؛ پس، شیب خط‌های عمود بر آن برابر $۲-$ خواهد بود؛ پس، پاسخ معادله‌ی خط به‌صورت $y-۳=-۲(x-۰)$ است که پس از ساده‌سازی به‌صورت $y=-۲x+۳$ درمی‌آید.

مسئله‌ی ۵ : ابتدا محلّ تلاقی دو خط $x+۷y-۳=۰$ و $x-۷y=-۱$ را به دست می‌آوریم که پاسخ دستگاه $\begin{cases} x-۷y=-۱ \\ x+۷y=۳ \end{cases}$ است. با جمع معادلات این دستگاه نتیجه می‌شود $۲x=۲$ و درنتیجه $x=۱$ ، $y=\frac{۲}{۷}$.

پس محلّ تقاطع این خط نقطه‌ی $\begin{bmatrix} ۱ \\ \frac{۲}{۷} \end{bmatrix}$ است. موازی بودن با خط $۴x+y=۵$ به معنای آن است که شیب خطّ مورد نظر مسئله با شیب این خط مساوی است. با نوشتن معادله‌ی این خط به‌صورت $y=-۴x+۵$. معلوم می‌شود که شیب این خط$(۴-)$ است؛ پس باید معادله‌ی خطی را بنویسیم که شیب آن $(۴-)$ است و از نقطه‌ی $\begin{bmatrix} ۱ \\ \frac{۲}{۷} \end{bmatrix}$ می‌گذرد. معادله‌ی این خط برابر است با $y-\frac{۲}{۷}=-۴\times(x-۱)$ ، پس از ساده‌سازی، معادله‌ی این خط به‌صورت $۷y+۲۸x=۳۰$ درمی‌آید.

مسئله‌ی ۶ : نمودارهای این دو خط را رسم می‌کنیم :



محلّ برخورد این دو خط در ربع چهارم است.

با حلّ دستگاه زیر به‌طور دقیق، مختصات محلّ برخورد را به‌دست می‌آوریم :

$$\begin{cases} y=\frac{۳}{۲}x-۵ \\ ۲y=-۵x-۳ \end{cases}$$

معادله‌ی اوّل را در $۲-$ ضرب می‌کنیم و با معادله‌ی دوم جمع می‌کنیم. حاصل به‌صورت $-۸x+۷=۰$ است؛ پس : $x=\frac{۷}{۸}$ ، $y=-\frac{۵۹}{۱۶}$ ، نقطه‌ای با این مختصات در ربع چهارم واقع است.

اصولاً حلّ هندسی معادلات کمک می‌کند تا ما تصور بهتری از پاسخ داشته باشیم و میزان تقریبی آن را تشخیص دهیم که کنترل خوبی برای حلّ جبری دستگاه است.

ارزیابی یادگیری : طرح مسائلی در زمینه‌های واقعی که حلّ آن‌ها محتاج تشکیل دستگاه معادلات دومجهولی است و حلّ این دستگاه‌ها به‌طور جبری و تفسیر پاسخ‌ها در زمینه ی اصلی مسئله ارزیابی مناسبی از یادگیری دانش‌آموزان است. هم‌چنین، تفسیر نموداری این گونه دستگاه‌ها و دامنه‌هایی که این دستگاه‌ها اعتبار دارند، میزان یادگیری دانش‌آموز را از مفهوم دستگاه معادلات نشان می‌دهد.

محدوده‌ی مطالب : هدف از این قسمت، توانایی حلّ جبری دستگاه معادلات خطی دو معادله و دو مجهول و تفسیر نموداری و هندسی دستگاه‌هاست.

نکات مهم : در فرمول‌بندی مسائل واقعی که رابطه‌ای بین دو کمیّت برقرار می‌شود، معمولاً برقراری آن روابط در دامنه‌ی محدودی است. اگرچه معادله‌ی به‌دست آمده ممکن است به‌ازای همه‌ی مقادیر معنا داشته باشد. مثلاً معادله‌ی هزینه‌ی باشگاه‌ها به‌ازای مقادیر منفی نیز قابل محاسبه است ولی در این معادله مقادیر مثبت x معنادار است.

بنابراین، در حلّ مسائل واقعی و فرمول‌بندی آن‌ها همواره به دامنه‌ی برقراری آن روابط توجه کنید و اگر در حلّ ریاضی معادلات یا دستگاه معادلات پاسخی خارج از این دامنه به‌دست آمد، نباید آن را پذیرفت و باید تفسیر درستی از پاسخ پیدا کرد.

رسم نموداری معادلات به‌دست‌آمده و دامنه‌ی اعتبار این نمودارها و تفسیر پاسخ می‌تواند آموزش مناسبی از شیوه‌های صحیح به‌کارگیری ریاضی در حلّ مسائل واقعی ایجاد کند.

سطح بالاتر : در صورت قوی‌بودن دانش‌آموزان، مناسب است مسائلی طرح شوند که با فرمول‌بندی ریاضی آن به دستگاه‌هایی برسیم که پاسخ ریاضی آن‌ها خارج از دامنه‌ی درستی آن روابط باشند و از این طریق دانش‌آموزان را متوجه رابطه‌ی بین فرمول‌بندی ریاضی و مسئله‌ی واقعی و تفسیر درست پاسخ‌ها کرد.

در کتاب، درباره‌ی حالات خاص دستگاه‌هایی که پاسخ ندارند یا بی‌شمار جواب دارند، بحث نشده است و بهتر است برای دانش‌آموزان قوی‌تر، این حالات را با تناظر برقرارکردن بین حالات دو خط در صفحه که توازی و انطباق و متقاطع‌اند، تفسیر کرد.

سؤالات نمونه‌ی فصل پنجم

۱ــ حمید ۱۰۰ تومان پول دارد. علی با $\frac{۱}{۳}$ پول خود و تمام پول حمید روی هم یک کتاب به قیمت ۴۰۰ تومان خرید. علی هم‌اکنون (پس از خرید کتاب) چه‌قدر پول دارد. **پاسخ** : ۶۰۰

۲ــ پنج نفر شریک می‌خواهند کالایی را بخرند و هرکدام به مقدار مساوی پول داده‌اند. دو نفر دیگر به این جمع اضافه شدند؛ بنابراین، هر نفر پول کم‌تری باید پرداخت کند. افراد قبلی هر کدام ۲۰۰۰ تومان از پول خود را پس گرفتند. قیمت این کالا چه‌قدر بوده است؟

پاسخ : قیمت آن کالا را (برحسب تومان) با y و پول پرداختی توسط هرکدام از آن ۵ نفر را با x نشان می‌دهیم؛ پس $y=5x$. پس از ورود دو نفر جدید، پول پرداختی توسط هر نفر $x-2000$ است؛ پس قیمت کالا $7(x-2000)$ است؛ یعنی $y=7(x-2000)$. با حلّ دستگاه به‌دست‌آمده داریم $x=7000$ و $y=35000$، یعنی، قیمت آن کالا ۳۵۰۰۰ تومان بوده است.

۳ــ یک بار مبلغ ۲۵۰۰۰ تومان و بار دیگر مبلغ ۴۰۰۰۰ تومان پول را بین افراد خانواده‌ای به طور مساوی تقسیم کرده‌ایم. در دفعه‌ی دوم به هر نفر ۳۰۰۰ تومان بیش‌تر از دفعه‌ی اوّل رسیده است. این خانواده چند نفر دارد؟

پاسخ : تعداد نفرات را با n نشان می‌دهیم. دفعه‌ی اوّل به هر نفر $\frac{25000}{n}$ تومان و در دفعه‌ی دوم به هر نفر $\frac{40000}{n}$ تومان رسیده است؛ پس : $\frac{40000}{n}-\frac{25000}{n}=3000$. با حلّ این معادله داریم : $n=5$؛ یعنی، تعداد افراد خانواده ۵ نفر بوده است.

۴ــ پدری ۳۳ ساله فرزندی ۵ ساله دارد. پس از چند سال دیگر سنّ پدر ۲ برابر سنّ فرزندش می‌شود؟

پاسخ : اگر x تعداد سال‌هایی باشد که پس از آن سنّ پدر دو برابر سنّ فرزند می‌شود، داریم : $33+x=2(5+x)$. با حلّ این معادله داریم : $x=23$.

۵ــ ماشینی برای طیّ هر ۱۰۰ کیلومتر، ۸ لیتر بنزین مصرف می‌کند.

الف) اگر y مسافت طی شده توسط ماشین (برحسب کیلومتر) با مصرف x لیتر بنزین باشد، رابطه‌ی ریاضی بین y,x را بنویسید.

پاسخ : $y=12/5x$

ب) اگر این ماشین در لحظه‌ای ۲۵ لیتر بنزین داشته باشد و در آن لحظه، فاصله‌ی پمپ بنزین بعدی با او ۳۳۰ کیلومتر باشد، آیا این ماشین به پمپ بنزین بعدی خواهد رسید؟

پاسخ : خیر. زیرا فقط ۳۱۲/۵ کیلومتر می‌تواند طی کند.

پ) با تعیین مقیاس مناسب نمودار، این رابطه را رسم کنید.

پاسخ : مناسب است هر واحد روی محور yها را برابر ۱۰ کیلومتر انتخاب کنید تا معادله‌ی این رابطه به‌صورت $y=1/25x$ درآید.

۶ــ خانواده‌ای امسال ۱۰ میلیون تومان درآمد و ۸ میلیون تومان هزینه دارد. هر سال ۱ میلیون تومان به درآمد و ۱ میلیون و پانصد هزارتومان به هزینه‌ی این خانواده اضافه می‌شود.

الف) تا چند سال این خانواده می‌تواند پس‌انداز کند و تا آن زمان چه‌قدر پس‌انداز می‌کند؟

ب) با استفاده از پس‌انداز انجام شده، این خانواده تا چند سال می‌تواند بدون قرض‌کردن زندگی کند؟

پاسخ الف) اگر x تعداد سال‌های گذشته و y درآمد خانواده (برحسب میلیون تومان) پس از گذشت x سال باشد، داریم $y=x+۱۰$. اگر هزینه‌ی خانواده (برحسب میلیون تومان) پس از گذشت x سال را با z نشان دهیم؛ داریم $z=۱/۵x+۸$. با رسم جدول یا نمودار می‌توان مشاهده کرد که تا چه زمانی هزینه از درآمد کم تر است و در چه زمانی مساوی می‌شوند. تفاضل هزینه از درآمد برابر $-۰/۵x+۲$ است که به‌ازای $x=۴$ به صفر می‌رسد؛ یعنی، بعد از ۴ سال خانواده دیگر نمی‌تواند پس‌اندازی داشته باشد. مقدار عبارت$-۰/۵x+۲$ به‌ازای $x=۰,۱,۲,۳$ همان پس‌انداز در این سال‌ها را نشان می‌دهد که به ترتیب برابرند با ۰/۵,۱,۱/۵,۲ و جمع آن‌ها برابر ۵ است؛ یعنی تا این موقع ۵ میلیون تومان پس‌انداز می‌توانند داشته باشند.

پاسخ ب) : چون روند خطی است، دقیقاً به همین شکل کمبود درآمد به‌صورت ۰/۵,۱,۱/۵,۲ خواهد بود که با ۵ میلیون پس‌انداز می‌توان آن‌ها را جبران کرد؛ یعنی تا ۵ سال بعدی می‌توانند کمبود درآمد خود را از پس‌انداز جبران کنند.

۷ــ سه برادر به نام‌های کریم و جواد و مرتضی با هم در یک مسابقه‌ی دوی ۱۰۰۰ متر شرکت کردند. سرعت کریم دو برابر سرعت جواد و سرعت جواد دو برابر سرعت مرتضی است. کریم در مبدأ و جواد ۴۰۰ متر جلوتر و مرتضی، ۶۰۰ متر جلوتر ایستاده‌اند. با شروع مسابقه، ۸۰ ثانیه طول می‌کشد که مرتضی به خطّ پایان برسد.

الف) هرکدام از این برادرها در یک ثانیه چند متر طی می‌کنند؟

ب) در هر لحظه از زمان هریک از این برادرها تا مبدأ فاصله‌ای دارد. رابطه‌ی بین این فاصله و زمان را با نمادها بنویسید.

پ) نمودار این رابطه‌ها را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

ت) کدام‌یک از آن‌ها اوّل، کدام دوم و کدام سوم می‌شوند؟

ث) نفر اوّل در چه زمانی از نفر دوم و در چه زمانی از نفر سوم جلو می‌زند؟

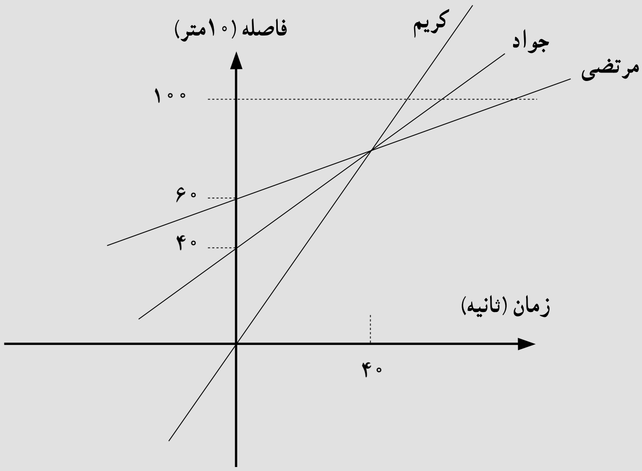
ج) نفر دوم در چه زمانی از نفر سوم جلو می‌زند؟

چ) نفر اوّل چند ثانیه زودتر از نفر دوم و نفر دوم چند ثانیه زودتر از نفر سوم به خطّ پایان می‌رسد؟

پاسخ الف) مرتضی ۴۰۰ متر باقی‌مانده تا آخر خطّ مسابقه را در ۸۰ ثانیه دویده است؛ پس، در هر ثانیه ۵ متر دویده است؛ یعنی، سرعت او ۵ متر در ثانیه است؛ پس، سرعت جواد ۱۰ متر بر ثانیه و سرعت کریم ۲۰ متر بر ثانیه است.

پاسخ ب) اگر زمان برحسب ثانیه را با t نشان دهیم و لحظه‌ی شروع مسابقه $t=۰$ باشد و در زمان t فاصله‌ی کریم، جواد و مرتضی تا مبدأ را به ترتیب با z،y و w نشان دهیم، داریم : $y=۲۰t$ ، $z=۱۰t+۴۰۰$ و $w=۵t+۶۰۰$.

پاسخ پ) هر واحد روی محور عرض‌ها را برابر ۱۰ متر می‌گیریم تا نمودارها بهتر رسم شوند. در این حالت، معادلات این رابطه به صورت $y=۲t$ ، $z=t+۴۰$ و $w=۰/۵t+۶۰$ درمی‌آیند.



پاسخ ت) نمودارهای بالا نشان می‌دهند که اوّل کریم ۱۰۰۰ متر را طی می‌کند، بعد جواد و سپس مرتضی.

پاسخ‌های ث، ج) نمودار نشان می‌دهد که هر سه نفر در ثانیه‌ی چهلم به هم می‌رسند و در این لحظه، نفراتِ سریع‌تر از نفراتِ کندتر جلو می‌زنند.

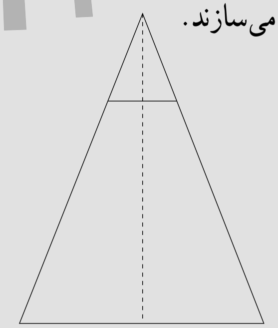
پاسخ چ) باید زمان رسیدن هر فرد را به خطّ پایان حساب کنیم. از روی معادلات به دست آمده به ازای w=z=y=۱۰۰۰، برای کریم زمان ۵۰ ثانیه و برای جواد زمان ۶۰ ثانیه و برای مرتضی زمان ۸۰ ثانیه (که در فرض مسئله هم بوده است) به دست می‌آید؛ پس، نفر اوّل ۱۰ ثانیه زودتر از نفر دوم و نفر دوم ۲۰ ثانیه زودتر نفر سوم به آخر خط می‌رسند.

۸ــ نقاش‌ها برای کار خود از نردبان‌هایی استفاده می‌کنند که به‌صورت دو نردبان هم‌اندازه‌اند که در نوک به هم وصل هستند. اگر طول هریک از این نردبان‌ها ۴ متر باشد و به فاصله‌ی یک‌متری از نوک آن‌ها، این دو نردبان با یک طناب نیم‌متری به هم وصل شده باشند تا این دو نردبان نتوانند به دلخواه از هم باز شوند:

الف) کم‌ترین شیبی که با این دو نردبان می‌توان ساخت چه‌قدر است؟

ب) اگر با این دو نردبان شیبی برابر ۴ ایجاد کنیم، فاصله‌ی دو پای نردبان ازهم چه‌قدر می‌شود؟

پاسخ الف) کم‌ترین شیب وقتی است که دو پای نردبان حداکثر فاصله را از هم پیدا کنند و این حالت وقتی است که طناب بین دو نردبان کاملاً مستقیم قرار گیرد. در این حالت، نردبان‌ها، طناب و زمین، مثلث‌های متساوی‌الساقینی به شکل زیر می‌سازند.



با توجه به اندازه‌های داده‌شده، ارتفاع مثلث متساوی‌الساقین کوچک برابر $\frac{\sqrt{۱۵}}{۴} = \sqrt{۱^۲ - (\frac{۱}{۴})^۲}$ است.

پس، کم‌ترین شیب نردبان برابر $\sqrt{۱۵} = \frac{\frac{\sqrt{۱۵}}{۴}}{\frac{۱}{۴}}$ است.

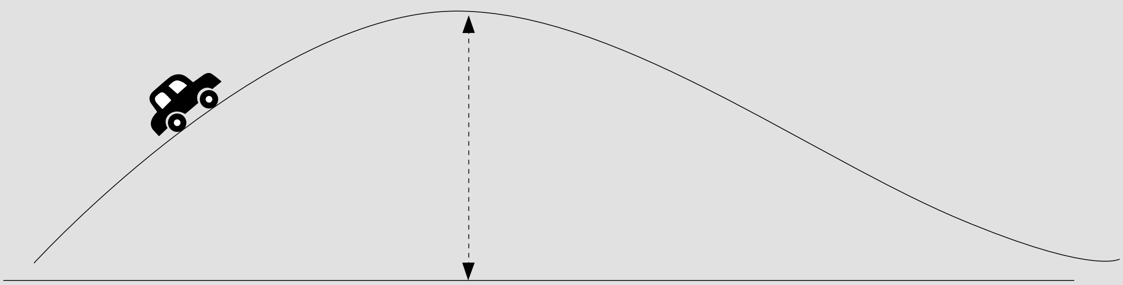
پاسخ ب) اگر فاصله‌ی دو پای نردبان را x بنامیم، ارتفاع مثلث متساوی‌الساقین بزرگ برابر $\frac{\sqrt{۶۴ - x^۲}}{۲} = \sqrt{۴^۲ - (\frac{x}{۲})^۲}$ است و اگر شیب برابر ۴ شده باشد، داریم $۴ = \frac{\frac{\sqrt{۶۴ - x^۲}}{۲}}{\frac{x}{۲}}$ که نتیجه می‌دهد

$۲x = \sqrt{۶۴ - x^۲}$ با توان رسانی داریم $۶۴-x^۲=۴x^۲$؛ پس $x = \frac{۸\sqrt{۵}}{۵}$.

۹ــ در یک جاده‌ی کوهستانی، ماشینی در جاده با شیب ۱۵٪ از پایین کوه رو به بالا می‌رود و ۲۰ کیلومتر مسیر را طی می‌کند. این ماشین تا چه ارتفاعی از کوه بالا رفته است؟

پاسخ : تقریباً ۳ کیلومتر

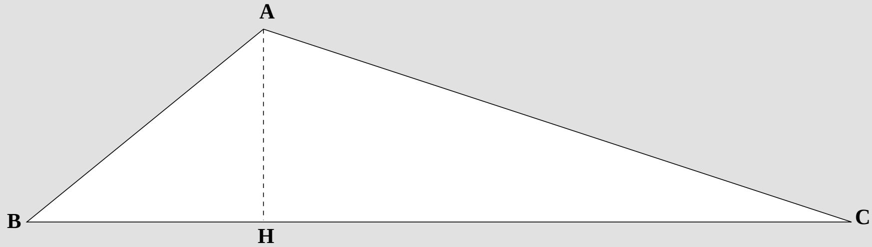
۱۰ــ ماشینی طبق شکل زیر از پایین تپه‌ای در یک جاده با شیب $\frac{۳}{۴}$ ازکوه بالا می‌رود و پس از رسیدن به بالای آن، از جاده‌ای به شیب $\frac{۵}{۱۲}$ از تپه پایین می‌آید تا مجدداً به پایین تپه برسد.



اگر روی هم رفته، این ماشین ۸ کیلومتر طی کرده باشد، ارتفاع تقریبی این تپه چه‌قدر است؟

نکات : مسیرهای بالا را خطّ مستقیم در نظر بگیرید و توجه داشته باشید که در این مسئله مفهوم شیب منفی وجود ندارد. شیب منفی فقط در جایی رخ می‌دهد که جهتی به‌عنوان جهت مثبت در نظر گرفته باشد. در این گونه مسائل جهتی به‌عنوان جهت حرکت مثبت قرارداد نشده است و بالا یا پایین‌رفتن از یک جاده به معنای مثبت یا منفی شدن شیب جاده نیست. البته اگر کلّ شکل بالا را در یک صفحه‌ی تحلیلی شده قرار دهیم که در آن جهت‌های قراردادی مثبت تعریف شده است، آن‌گاه خط‌های رسم شده، برخی شیب مثبت و برخی شیب منفی خواهند داشت که در این مسئله به آن مفاهیم اشاره‌ای نشده است.

پاسخ : در واقع، مثلثی شبیه مثلث زیر داریم و باید ارتفاع آن را حساب کنیم.



مجموع دو ضلع AB و AC برابر ۸ کیلومتر است و اگر ارتفاع را h بنامیم، چون شیب خطّ AB برابر $\frac{۳}{۴}$ است، داریم $\frac{h}{BH}=\frac{۳}{۴}$ ؛ یعنی $BH=\frac{۴h}{۳}$. با محاسبه‌ی مشابه $CH=\frac{۱۲h}{۵}$. با استفاده از رابطه‌ی فیثاغورس داریم :

$$AB=\sqrt{(\frac{۴h}{۳})^{۲}+h^{۲}}=\sqrt{\frac{۱۶h^{۲}+۹h^{۲}}{۹}}=\frac{۵h}{۳}$$

$$AC=\sqrt{(\frac{۱۲h}{۵})^{۲}+h^{۲}}=\sqrt{\frac{۱۴۴h^{۲}+۲۵h^{۲}}{۲۵}}=\frac{۱۳h}{۵}$$

با توجه به تساوی AB +AC=۸ داریم $\frac{۵h}{۳}+\frac{۱۳h}{۵}=۸$ که نتیجه می‌دهد h=۱/۸۷۵؛ یعنی، ارتفاع تپه ۱/۸۷۵ کیلومتر بوده است.

۱۱ــ معادله‌ی سه خطّ موازی با خط ۲y+x =−۱ بنویسید که عرض از مبدأ آن‌ها ۰، ۱−، ۴ باشد.

پاسخ : $y=-۰/۵x$ ، $y=-۰/۵x-۱$ ، $y=-۰/۵x+۴$

۱۲ــ از میان خط‌های زیر کدام‌یک با هم موازی و کدام‌یک بر هم عمودند.

$$۲y+x=۰ \quad ، \quad ۵y-۱۰x=۱ \quad ، \quad y=-\frac{۱}{۲}x+۱ \quad ، \quad -y+۲x+۵=۰$$

چهارضلعی ساخته شده با خط‌های بالا چگونه چهارضلعی است؟

پاسخ : از راست به چپ خط‌های اوّل و سوم شیب $-\frac{۱}{۲}$ و خط‌های دوم و چهارم شیب ۲ دارند؛ پس خط‌های اوّل و سوم با هم موازی‌اند و خط‌های دوم و چهارم نیز با هم موازی‌اند و این دو دست خط بر هم عمودند و یک مستطیل می‌سازند.

۱۳ــ با درنظرگرفتن خط y=x−۱، معادله‌ی دو خط دیگر را به دست آورید که با این خط یک مثلث قائم‌الزاویه بسازند و یک ضلع زاویه‌ی قائمه این خط باشد (جواب یکتا نیست).

پاسخ : مثلاً $y=-x$ ، $y=۱$.

۱۴ــ دو خط y=۲x+۱ , y=−x+۵ را در نظر بگیرید. معادله‌ی دو خط دیگر را بنویسید که با این دو خط یک متوازی‌الاضلاع بسازند (جواب یکتا نیست).

پاسخ : باید خط‌هایی ارائه کنیم که با خط‌های بالا موازی باشند و بر آن‌ها منطبق نشوند، مثلاً y=۲x , y=−x.

۱۵ــ نشان دهید نقاط $A=\begin{bmatrix}۱\\۱\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}-۱\\-۳\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}۲\\۰\end{bmatrix}$ رئوس یک مثلث قائم‌الزاویه‌اند. رأس قائمه کدام است؟

پاسخ : باید شیب اضلاع این مثلث را به‌دست آوریم. شیب AB برابر ۲ و شیب AC برابر ۱− و شیب BC برابر ۱ است؛ پس، AC بر BC عمود است و رأس قائمه C است.

۱۶ــ نقاط $A=\begin{bmatrix}۱۰\\۴\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}۵\\-۱\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}-۲\\۱\end{bmatrix}$ رئوس یک مثلث هستند. نشان دهید نقطه‌ی $E=\begin{bmatrix}۷\\۱\end{bmatrix}$ روی ضلع AB است. معادله‌ی خطی را که از E به موازات ضلع BC رسم می‌شود، بنویسید.

پاسخ : معادله‌ی خط گذرنده از A و B را می‌نویسیم و تحقیق می‌کنیم که E نقطه‌ای از این خط است. هم‌چنین، طول نقطه‌ی E بین طول نقاط A و B قرار دارد؛ پس، این نقطه روی ضلع AB است. با به‌دست‌آوردن شیب خطّ BC، معادله‌ی خط مورد نظر را بنویسید.

۱۷ــ معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $A=\begin{bmatrix}۱\\۲\end{bmatrix}$ می‌گذرد و بر خطّ ۲y−x=۵ عمود می‌شود.

پاسخ : y−۲=−۲(x−۱)

۱۸ــ طول و عرض مستطیلی را به‌دست آورید که طول آن یک واحد از دو برابر عرض آن بیش‌تر بوده و محیط آن ۲۰ واحد است.

پاسخ : طول مستطیل مورد نظر را با x و عرض آن را با y نشان می‌دهیم؛ پس : ۲x+۲y=۲۰ , x=۲y+۱ . با حل این دستگاه داریم : y=۳ , x=۷.

۱۹ــ علی ۵۰۰ تومان پول پس‌انداز دارد و هر روز ۲۰۰ تومان به آن اضافه می‌کند. حسن ۲۰۰۰ تومان پس‌انداز دارد و هر روز ۲۰۰ تومان آن را خرج می‌کند. تا چند روز پس‌انداز حسن بیش‌تر از پس‌انداز علی باقی می‌ماند؟

پاسخ : اگر تعداد روزهای گذشته را با x و پس‌اندازهای علی و حسن را به‌ترتیب با y و z نشان دهیم، داریم : y=۲۰۰x+۵۰۰ , z=−۲۰۰x+۲۰۰۰. با رسم نموداراین دو خط در یک دستگاه مختصات و یافتن نقطه‌ی تلاقی این دوخط، جایی که پس‌انداز این دو نفر مساوی می‌شوند، به‌دست می‌آید. این نقطه، پاسخ دستگاه زیر است :

$$\begin{cases}y=۲۰۰x+۵۰۰\\y=-۲۰۰x+۲۰۰۰\end{cases}$$

پاسخ : این دستگاه x=۳/۷۵ , y=۱۲۵۰ است. تفسیر درست این پاسخ، آن است که تا ۳ روز پس‌انداز حسن بیش‌تر است و در روز چهارم، پس‌انداز علی بیش‌تر می‌شود.

۲۰ــ طول ضلع‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع و یک مربع را به گونه‌ای تعیین کنید که محیط مثلث سه برابر محیط مربع باشد و مجموع محیط‌ها برابر ۱۲ شود.

پاسخ : اگر ضلع مثلث را با x و ضلع مربع را با y نشان دهیم، داریم : ۳x=۴×۴y , ۳x+۴y=۱۲. با حلّ این دستگاه داریم : x=۳/۲ , y=۰/۶.

۲۱ــ نشان دهید که خط‌های ۲y+x=۱ , y−۲x=۳ , y+۳x=۸ یک مثلث می‌سازند. مختصات رئوس این مثلث را تعیین کنید.

پاسخ : کافی است سه دستگاه حاصل از درنظرگیری دو به دوی این معادلات را حل کنید.

۲۲ــ دو دونده با یکدیگر مسابقه‌ی دوی ۱۰۰ متر می‌دهند. اولی هر ۵ متر را در یک ثانیه و دومی هر ۱۰ متر را در ۳ ثانیه می‌دود. دومی ۴۰ متر جلوتر می‌ایستد.

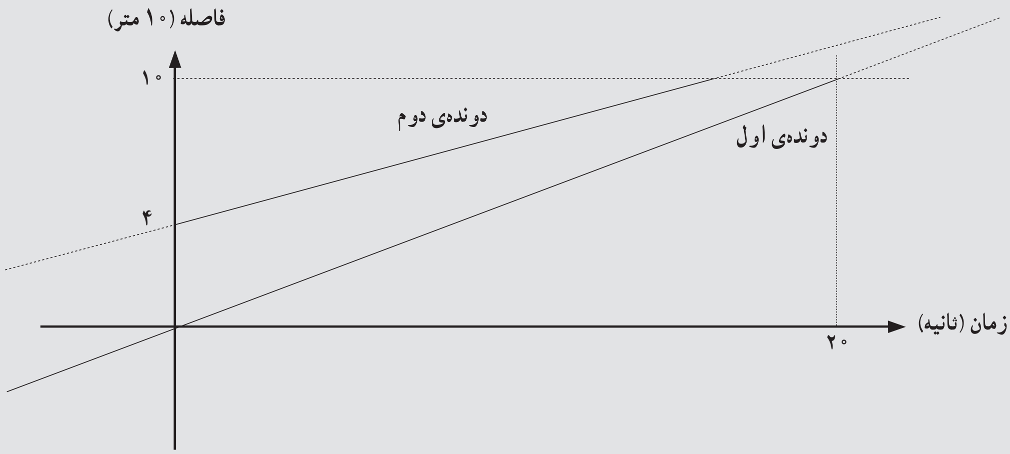
الف) معادله‌ی فاصله هرکدام از این دونده‌ها را تا مبدأ بنویسید.

ب) نمودار معادلات نوشته شده را در دامنه‌ی اعتبار خود رسم کرده و خارج از دامنه‌ی اعتبار به طور خط‌چین رسم کنید.

پ) با به‌دست‌آوردن محلّ برخورد این دو خط پاسخ دستگاه معادله‌ی حاصل از این دو خط را تفسیر کنید. کدام‌یک برنده می‌شوند؟ برنده چند ثانیه زودتر می‌رسد؟

پاسخ الف) اگر زمان را (برحسب ثانیه) با t و فاصله (برحسب متر) را با y نشان دهیم، معادله‌ی دونده‌ی اوّل $y=5t$ و معادله‌ی دونده‌ی دوم $y=\frac{10}{3}t+40$ است.

پاسخ ب) برای رسم بهتر، واحد طول را برحسب ۱۰ متر حساب می‌کنیم. معادلات این دو دونده به شکل $y=0/5t$ و $y=\frac{1}{3}t+4$ درمی‌آیند.



پاسخ پ) جواب دستگاه حاصل از این دو معادله محلّ برخورد این دو خط را نشان می‌دهد و عبارت است از : $y=32, t=64$؛ یعنی در صورت ادامه‌ی مسابقه، اگر دویدن با همان سرعت‌ها ادامه می‌یافت، پس از ۶۴ ثانیه این دو دونده به هم می‌رسیدند و در این لحظه با مبدأ مسابقه، ۳۲۰ متر فاصله می‌داشتند. این نشان می‌دهد که دونده‌ی دوم زودتر به پایان خطّ مسابقه رسیده و برنده شده است. از طریق معادلات معلوم می‌شود که دونده‌ی اول پس از ۲۰ ثانیه ۱۰۰ متر را طی می‌کند و دونده‌ی دوم بعد از ۱۸ ثانیه به خطّ پایان رسیده و دو ثانیه زودتر می‌رسد.

۲۳ــ اگر $x^2+xy=11$ ، $y^2+xy=5$ ، آن‌گاه $x+y$ و $x-y$ چه مقادیری می‌توانند داشته باشند.

پاسخ : با جمع طرفین این دو معادله، نتیجه می‌شود $(x+y)^2=16$؛ پس $x+y$ می‌تواند ±4 باشد. با تفریق این دو معادله از هم داریم $x^2-y^2=6$؛ پس : $(x+y)(x-y)=6$؛ درنتیجه $x-y$ می‌تواند مقادیر $\pm\frac{3}{2}$ را داشته باشد.

۲۴ــ خط $۲y-x=۵$ محورهای xها و yها را به ترتیب در نقاط B, A قطع می‌کند. فاصله‌ی A تا B چه‌قدر است؟

پاسخ : با به‌دست‌آوردن محلّ برخورد با محورها فاصله را حساب می‌کنیم که برابر $\sqrt{۳۱/۲۵}$ است.

۲۵ــ نشان دهید که چهار خط $y+x=۵$، $۲y+x=۱$، $۲y+۲x=۶$، $y+\frac{x}{۲}=۰$ یک متوازی‌الاضلاع می‌سازند. محیط این متوازی‌الاضلاع را حساب کنید.

پاسخ : کافی است شیب خط‌ها راحساب کنیم و دو به دو مساوی بودن شیب‌ها را تحقیق کنیم. با یافتن محلّ برخورد این خط‌ها و یافتن فاصله‌ی بین آن‌ها محیط به‌دست می‌آید.

۲۶ــ نقطه‌ای روی محور xها بیابید که فاصله‌ی آن تا نقطه‌ی $A=\begin{bmatrix}۲\\۱\end{bmatrix}$ برابر $\sqrt{۱۰}$ باشد. چند نقطه با این خاصیت وجود دارد؟ این مسئله را با رسم هندسی نیز حل کنید.

پاسخ : $\begin{bmatrix}۵\\۰\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-۱\\۰\end{bmatrix}$ جواب هستند. با استفاده از پرگار به مرکز A و شعاع $\sqrt{۱۰}$ دایره‌ای می‌زنیم که محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند که جواب‌های مسئله‌اند.