

# کتاب معانی عدوی

تالیف: دکتر مسعود نیکوکار-دکتر محمد تقی درویشی

بانگاه معنیان

فصل اول: خطاها

[www.sem-eng.com](http://www.sem-eng.com)

# محاسبات عددی

[www.sem-eng.com](http://www.sem-eng.com)

دکتر مسعود نیکوکار  
دکتر محمد تقی درویشی

مطبعی و مریایه

|           |                                                                            |    |
|-----------|----------------------------------------------------------------------------|----|
| ۱.۱       | مقدمه                                                                      | ۱  |
| ۲.۱       | خطای مطلق و نسبی                                                           | ۲  |
| ۳.۱       | منابع اصلی خطا                                                             | ۵  |
| ۴.۱       | خطای چهار عمل اصلی                                                         | ۷  |
| ۵.۱       | خطای محاسبه فرمولها و توابع                                                | ۱۱ |
| تصل دوم   | حل عددی معادلات $I(x) = 0$                                                 | ۱۹ |
| ۱.۲       | مقدمه                                                                      | ۱۹ |
| ۲.۲       | تعیین ریشه‌ها با دقت مورد نظر                                              | ۲۰ |
| ۳.۲       | روش‌های عددی حل معادله $I(x) = 0$                                          | ۲۲ |
| ۱.۳.۲     | روش دوبخشی یا روش تنصیف                                                    | ۲۲ |
| ۲.۳.۲     | روش نابجایی                                                                | ۲۷ |
| ۳.۳.۲     | روش نیوتن - رفسون                                                          | ۳۱ |
| ۴.۳.۲     | روش وتری                                                                   | ۳۷ |
| ۵.۳.۲     | روش تکرار ساده                                                             | ۴۰ |
| فصل سوم   | درونیابی و برونیابی                                                        | ۴۹ |
| ۱.۳       | مقدمه                                                                      | ۴۹ |
| ۲.۳       | درونیابی                                                                   | ۵۰ |
| ۱.۲.۳     | چند جمله‌ایهای لاگرانژ                                                     | ۵۱ |
| ۲.۲.۳     | چند جمله‌ای درونیاب بر حسب تفاضلات تقسیم‌شده نیوتن                         | ۵۵ |
| ۳.۲.۳     | تفاضلات متناهی و درونیابی یک تابع هرگاه نقاط درونیابی متساوی‌الفاصله باشند | ۶۲ |
| ۴.۲.۳     | شکل دترمینانی چند جمله‌ای درونیاب                                          | ۶۹ |
| ۳.۳       | خطای چند جمله‌ای درونیاب                                                   | ۷۰ |
| ۴.۳       | برونیابی                                                                   | ۷۳ |
| فصل چهارم | مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری عددی                                              | ۷۹ |
| ۱.۴       | مشتق‌گیری عددی                                                             | ۷۹ |

|                       |                                                                         |     |
|-----------------------|-------------------------------------------------------------------------|-----|
| ۱.۱.۴                 | دستورهای مشتق‌گیری براساس چند جمله‌ای درونیاب                           | ۸۲  |
| ۲.۱.۴                 | دستورات مشتق‌گیری با استفاده از بسط تیلور                               | ۸۶  |
| ۲.۴                   | خطای مشتق‌گیری عددی                                                     | ۸۸  |
| ۳.۴                   | انتگرال‌گیری عددی                                                       | ۸۹  |
| ۱.۳.۴                 | قاعده دوزنقه‌ای                                                         | ۹۱  |
| ۲.۳.۴                 | قاعده سیمپسون                                                           | ۹۴  |
| ۳.۳.۴                 | قاعده‌های دیگر انتگرال‌گیری                                             | ۹۴  |
| روش نیوتن - کاتس      |                                                                         | ۹۷  |
| روش گاوس              |                                                                         | ۹۹  |
| فرمول دوزنقه‌ای گاوس  |                                                                         | ۱۰۱ |
| فرمول سه نقطه‌ای گاوس |                                                                         | ۱۰۳ |
| ۴.۴                   | انتگرالهای منفرد                                                        | ۱۰۳ |
| ۱.۴.۴                 | قاعده نقطه میانی                                                        | ۱۰۶ |
| ۵.۴                   | خطای روشهای انتگرال‌گیری                                                | ۱۰۷ |
| ۱.۵.۴                 | خطای روش دوزنقه                                                         | ۱۱۲ |
| ۲.۵.۴                 | خطای سایر روشهای انتگرال‌گیری                                           | ۱۱۹ |
| فصل پنجم              | روشهای عددی حل معادلات دیفرانسیل معمولی                                 | ۱۱۹ |
| ۱.۵                   | مقدمه                                                                   | ۱۲۰ |
| ۲.۵                   | روش بسط تیلور                                                           | ۱۲۲ |
| ۱.۲.۵                 | الگوریتم روش تیلور از مرتبه $k$                                         | ۱۲۳ |
| ۳.۵                   | روش اویلر                                                               | ۱۲۵ |
| ۴.۵                   | روش رونگه - کوتا                                                        | ۱۲۶ |
| ۱.۴.۵                 | روش رونگه - کوتای مرتبه دو                                              | ۲۸  |
| ۲.۴.۵                 | روش رونگه - کوتای مرتبه چهار                                            | ۳۱  |
| ۵.۵                   | دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول                                      | ۳۲  |
| ۱.۵.۵                 | روش رونگه - کوتای مرتبه چهار برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول | ۳۵  |
| ۶.۵                   | معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم                                             | ۴۱  |
| فصل ششم               | ماتریسها و حل دستگاههای معادلات خطی و غیرخطی                            | ۴۱  |
| ۱.۶                   | مقدمه                                                                   | ۴۱  |
| ۱.۱.۶                 | ماتریسها و بردارها                                                      | ۴۱  |

## فصل اول

### خطاها

#### ۱. مقدمه

هدف محاسبات عددی، حل مسائل عددی پیچیده، تنها با استفاده از اعمال ساده حساب به منظور توسعه و ارزیابی روشها برای محاسبه نتایج عددی از اطلاعات معلوم است. روشهای محاسبه، الگوریتم نامیده می‌شوند. به خاطر اهداف این کتاب، الگوریتم را به عنوان توصیفی کامل و بدون ابهام از روش ساختن جواب یک مسئله ریاضی تعریف می‌کنیم. هدف ما جستجوی الگوریتمهای محاسباتی است. در حالی که بعضی مسائل دارای چندین الگوریتم برای حل هستند، مسائلی یافت می‌شوند که هنوز الگوریتم رضایت بخشی برای حل ندارند.

هرگاه یک مسئله الگوریتمهای متفاوتی برای حل داشته باشد، دلایل متفاوتی برای انتخاب یکی از آنها به عنوان الگوریتم بهتر وجود دارد. دو دلیل عمده این انتخاب سرعت و دقت الگوریتم است. پیشرفتهای سریع در طراحی کامپیوترهای رقمی تأثیر فراوانی در محاسبات عددی داشته است. هم‌انک کامپیوترها میلیونها عمل محاسباتی را در کمتر از یک ثانیه انجام می‌دهند. این بدان

|       |                                                                 |     |
|-------|-----------------------------------------------------------------|-----|
| ۲.۶   | دستگاههای معادلات خطی                                           | ۱۵۰ |
| ۱.۲.۶ | روشهای مستقیم حل دستگاههای معادلات خطی                          | ۱۵۲ |
| ۲.۲.۶ | روشهای تکراری حل دستگاههای معادلات خطی                          | ۱۶۳ |
| ۳.۶   | دستگاههای معادلات غیرخطی                                        | ۱۷۰ |
| ۴.۶   | به دست آوردن وارون یک ماتریس نامتقارن                           | ۱۷۶ |
| ۱۸۷   | فصل هفتم تعیین مقادیر ویژه ماتریسها                             |     |
| ۱.۷   | مقدمه                                                           | ۱۸۷ |
| ۲.۷   | مقادیر ویژه و بردارهای ویژه                                     | ۱۸۷ |
| ۳.۷   | تعیین چندجمله‌ای مشخصه یک ماتریس                                | ۱۹۰ |
| ۱.۳.۷ | روش ضرایب نامعین برای به دست آوردن چندجمله‌ای مشخصه ماتریس A    | ۱۹۰ |
| ۲.۳.۷ | روش لوری برای به دست آوردن چندجمله‌ای مشخصه ماتریس A            | ۱۹۳ |
| ۳.۳.۷ | روش لوری برای به دست آوردن چندجمله‌ای مشخصه ماتریس A            | ۱۹۵ |
| ۴.۷   | تعیین بردار ویژه نظیر یک مقدار ویژه مشخص                        | ۱۹۷ |
| ۵.۷   | به دست آوردن وارون یک ماتریس با استفاده از قضیه کیلی - هامبلتون | ۱۹۹ |
| ۶.۷   | روشهای تکراری برای تعیین مقادیر ویژه                            | ۲۰۱ |
| ۲۰۷   | فصل هشتم روش حداقل مربعات                                       |     |
| ۱.۸   | مقدمه                                                           | ۲۰۷ |
| ۲.۸   | خط حداقل مربعات                                                 | ۲۰۸ |
| ۳.۸   | چندجمله‌ای حداقل مربعات                                         | ۲۱۴ |
| ۴.۸   | انواع دیگری از تقریبهای حداقل مربعات                            | ۲۱۷ |
| ۱.۴.۸ | حالت نمایی                                                      | ۲۱۸ |
| ۲.۴.۸ | حالت هذلولی                                                     | ۲۲۰ |
| ۳.۴.۸ | حالت مثلثاتی                                                    | ۲۲۱ |
| ۲۲۸   | پیوست برنامه‌های کامپیوتری                                      |     |
| ۲۴۷   | پیوست مسائل چهارگزینه‌ای                                        |     |
| ۲۴۸   | قسمت اول (مسائل چهارگزینه‌ای حل شده)                            |     |
| ۲۸۱   | قسمت دوم (آزمونهای کارشناسی ارشد با حل تشریحی)                  |     |
| ۳۱۰   | قسمت سوم (مسائل چهارگزینه‌ای حل نشده)                           |     |
| ۳۲۱   | قسمت چهارم (حل مسائل قسمت سوم)                                  |     |

۲.۱ خطای مطلق عدد تقریبی  $a$  با عنوان یک تقریب  $A$  (یا  $a$  با  $A$  نشان داده و به زیر تعریف می‌کنیم:

$$e(a) = |A - a| \quad (۱)$$

۱ برای عدد  $A$  دو حالت وجود دارد:

عدد  $A$  معلوم است. در این صورت خطای مطلق  $e(a)$  از فرمول (۱) بدست می‌آید.

عدد  $A$  معلوم نیست. که اغلب چنین است. بنابراین خطای مطلق  $e(a)$  از فرمول (۱) قابل استفاده نخواهد بود.

اکثر روشها پس از محاسبه  $a$  یک عدد برای خطای مطلق قابل محاسبه است.

تعریف ۳.۱ خطای مطلق حدی یک عدد تقریبی  $a$  عددی است که از خطای مطلق آن کوچکتر شد و آن را با  $e_a$  نشان می‌دهیم. بنابراین

$$e(a) \leq e_a$$

خطای نسبی

$e_a$  منحصر به فرد نیست در حالی که  $e(a)$  منحصر به فرد است.

خطای مطلق حدی را به دست آورید. برای  $A = \frac{2}{3}$  یک تقریب اضافی، یک تقریب نقصانی، خطای مطلق این تقریها و یک

الف)  $A = \frac{2}{3}$ ,  $a = 0.67$ ,  $e(a) = \left| \frac{2}{3} - \frac{67}{100} \right| = \frac{1}{300}$ ,  $e_a = 0.004$

$a = 0.67$  یک تقریب اضافی  $A$  است.

ب)  $A = \frac{2}{3}$ ,  $a = 0.66$ ,  $e(a) = \left| \frac{2}{3} - \frac{66}{100} \right| = \frac{2}{300}$ ,  $e_a = 0.01$

$a = 0.66$  یک تقریب نقصانی  $A$  است.

مثال ۱ اگر  $A = \sqrt{2}$  آن گاه  $1.41$  تقریبی نقصانی و  $1.42$  تقریبی اضافی از  $A$  است، واضح است که  $|A - 1.41|$  و  $|A - 1.42|$  هر دو اصم هستند، بنابراین خطای مطلق به سادگی قابل

معنی است که انجام محاسبات طولانی و پیچیده امکانپذیر شده، اما در عوض امکان وجود خطا نیز افزایش یافته است. کسانی که الگوریتمهای محاسباتی را طرح و از آنها استفاده می‌کنند، باید در مورد بهتر به کار گرفتن کامپیوترهای رقمی برای انجام محاسبات، اطلاعاتی داشته باشند.

برنامه‌نویسی کامپیوتر اساساً به مسأله به رمز در آوردن الگوریتمها به شکلی مناسب برای کامپیوتر مربوط می‌شود. با توجه به این که روشهای عددی شامل محاسبات زیاد روی اعداد است و انجام این محاسبات با دست امکانپذیر نیست، لازم است محاسبات توسط یک ابزار محاسباتی صورت گیرد. در ماشین حساب و کامپیوتر، اعداد، علی‌الخصوص اعداد اصم و اعداد گویایی که دارای بسط اعشاری متناهی نیستند، مانند  $\frac{1}{3} = 0.333\ldots$  به صورت تقریبی ذخیره می‌شوند. با انجام محاسبه روی این اعداد تقریبی، خطاهای موجود در آنها روی جواب نهایی اثر می‌گذرد. به همین که گاهی اوقات نتایج عددی بسیار دور از مقدار واقعی و در نتیجه بی‌فایده هستند.

## ۲.۱ خطای مطلق و نسبی

عدد تقریبی  $a$  عددی است که مقدار کمی با عدد دقیق  $A$  تفاوت داشته و به جای آن در محاسبات به کار برده می‌شود.

تعریف ۱.۱ اگر  $a < A$  آن گاه  $a$  را تقریب نقصانی (کوچکتر)  $A$  و چنانچه  $a > A$  در آن صورت  $a$  را تقریب اضافی (بزرگتر)  $A$  می‌نامیم.

مثال ۱. در مورد عدد  $\sqrt{2}$  داریم

$$1.41 < \sqrt{2} < 1.42$$

لذا عدد  $1.41$  یک تقریب نقصانی و عدد  $1.42$  یک تقریب اضافی  $\sqrt{2}$  می‌باشد. توجه: هرگاه  $a$  یک مقدار تقریبی برای عدد  $A$  باشد در آن صورت می‌نویسیم:

$$|a \approx A|$$

محاسبه نیست، اما داریم :

$$|\sqrt{2} - 1,41| < 0,0005, \quad e_a = 0,0005$$

$$|\sqrt{2} - 1,42| < 0,0006, \quad e_a = 0,0006$$

توجه : هرگاه  $e_a$  خطای مطلق  $a$  به عنوان تقریبی از عدد  $A$  باشد، آن گاه

$$|A - a| \leq e_a$$

بنابراین

$$a - e_a \leq A \leq a + e_a$$

بنابر قرارداد، نامسای اخیر را منحصرأ به صورت زیر می نویسیم :

$$A = a \pm e_a$$

مثال ۴ : اگر  $A = 1,324 \pm 0,003$  در این صورت  $1,321 \leq A \leq 1,327$

توجه : نامسای  $1,321 \leq A \leq 1,327$  در مثال ۴ نشان می دهد که در اسنپ اعشاری  $A$

حتماً  $1,32$  موجود است، ولی رقم سوم اعشار یکی از ارقام ۱ تا ۷ می باشد. لذا رقم ۴ مشکوک

است.

معمولأ خطای مطلق حدی و حتی خطای مطلق برای نشان دادن دقت یک عدد تقریبی کفایت

نمی کند.

✓ مثال ۵ : هرگاه در اندازه گیری دو طول برحسب سانتیمتر داشته باشیم :

$$\begin{cases} L_1 = 235,8 \pm 0,1 \Rightarrow |L_1 - 235,8| \leq 0,1 \\ L_2 = 3,2 \pm 0,1 \Rightarrow |L_2 - 3,2| \leq 0,1 \end{cases}$$

### ۳.۱ منابع اصلی خطا

علیرغم اینکه خطای مطلق حدی در هر دو مورد با هم برابرند ولی اندازه گیری اول بهتر از اندازه گیری دوم است زیرا در محاسبه  $L_1$  طول بزرگتری اندازه گیری شده است، لذا در اندازه گیری  $(L_1)$  دقت بیشتری انجام گرفته است. بنابراین آنچه تقریب را مشخص می کند، خطا در واحد آن کمتر است.

تعریف ۴.۱ هرگاه  $a$  تقریبی از عدد  $A \neq 0$  باشد کمیت زیر را خطای نسبی  $a$  می نامیم :

$$\delta(a) = \frac{|A - a|}{|A|} = \frac{e(a)}{|A|} \quad (2) \quad \delta(a)$$

✓ مثال ۶ : هرگاه  $A = \frac{2}{3}$  و  $a = 0,67$  تقریبی از آن باشد، مطابق آنچه که در مثال ۲ بدست آمد،

داریم :

$$\delta(a) = \frac{e(a)}{A} = \frac{1}{200}$$

$$1 \leq \frac{e_a}{|A|}$$

$$1) \leq \frac{e_a}{|a|}$$

### ۳.۱ منابع اصلی خطا

خطاهایی را که در مسائل ریاضی با آنها مواجه می شویم عمدتأ به پنج گروه تقسیم می شوند:

خطاهایی که در نحوه بیان مسائل وجود دارند. عبارات ریاضی بندرت تصویر دقیقی از پدیده های واقعی ارائه داده و در بیشتر موارد صرفأ میلتهایی ایده آل هستند. در مطالعه پدیده های طبیعی می بایست به عنوان یک قاعده، شرایطی را قبول کنیم که باعث ساده شدن مسأله گردند. این خود یکی از منابع خطاست. گاهی اوقات حل مسأله ای که دقیقاً فرمول بندی شده است، بسیار مشکل و یا حتی غیر ممکن می باشد. در چنین حالتی یک مسأله تقریبی به جای آن در نظر گرفته می شود که تا حدودی همان نتایج را به همراه دارد. این خود خطایی را به وجود می آورد که خطای میل نامیده می شود.

خطاهایی که از وجود عملیات نامتناهی ناشی می شوند. توابع به کار رفته در روابط ریاضی معمولاً

به صورت دنباله‌ها یا سریهای نامتناهی بیان می‌گردند، مثلاً

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

به علاوه بسیاری از مسائل ریاضی را تنها می‌توان با تعداد نامتناهی عملیات حل نمود که حل آنها جواب مسأله می‌باشد. به طور کلی از آنجا که یک فرآیند نامتناهی را نمی‌توان طی مراحل متناهی انجام داد، لازم است که دنباله عملیات را در مرحله‌ای قطع کرده و به یک جواب تقریبی مسأله مورد نظر بسنده نماییم. این قطع عملیات در یک مرحله باعث بروز خطا می‌گردد. این خطا را **خطای باقیمانده** و یا **خطای برشی** می‌نامیم.

۴۳ خطای پارامترهای عددی (مربوط به روابط) که مقادیر آنها از طریق اندازه‌گیری به دست می‌آیند. لذا مقادیر آنها را تنها می‌توان به طور تقریبی یافت. همانند همه شبیه‌های فیزیکی، این نوع خطا، **خطای نویزی** یا **خطای داده‌ای** نامیده می‌شود.

۴۴ به خاطر محدودیت در ذخیره ارقام بسط (اعشاری) اعداد، تقریباً تمام اعداد اعشاری در وسایل محاسباتی با خطا ذخیره می‌شوند. این خطا، **خطای تعایش** نامیده می‌شود. هنگام اجرای محاسبات با اعداد تقریبی، خطاهای مربوط به داده‌های اولیه به نتیجه نهایی منتقل می‌گردند. این نوع خطا، **خطای عملیات** نامیده می‌شود. به عنوان مثال عدد  $\pi$  خود دارای مقدار تقریبی است لذا در محاسبه عبارتی نظیر  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$  (زمان تناوب یک آونگ فیزیکی) خطای ناشی از مقدار  $\pi$  به نتیجه نهایی منتقل می‌گردد.

طبیعی است که در یک مسأله خاص بعضی از خطاها حذف شده و برخی دیگر اثری ناچیز در نتیجه نهایی داشته باشند. ولی به طور کلی یک تحلیل کامل بایستی هر نوع خطایی را شامل گردد. در ادامه بحث خطاهای مربوط به عملیات را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

**نویس:** خطای نمایش اعداد گاهی **خطای گرد کردن** نامیده می‌شود. روشهای متفاوتی برای گرد کردن اعداد اعشاری وجود دارد. در اینجا روش زیر که روش مورد استفاده در ماشین‌های محاسباتی

می‌باشد توضیح داده می‌شود. هرگاه بخواهیم یک عدد را تا  $n$  رقم اعشار گرد کنیم:

۱ اگر رقم  $(n+1)$  ام اعشار این عدد کمتر از ۵ باشد، در این صورت رقم  $(n+1)$  ام اعشار و تمام ارقام بعد از آن را حذف می‌کنیم. اما هرگاه رقم  $(n+1)$  ام اعشار بیشتر یا مساوی ۵ باشد یک واحد به رقم  $n$  ام اعشار اضافه نموده و رقم  $(n+1)$  ام و ارقام بعد از آن را حذف می‌نماییم. بتایر این قانون، **خطای گرد کردن همواره کمتر یا مساوی  $10^{-n} \times \frac{1}{2}$  می‌باشد.**

مثال ۶: عدد ۲٫۳۷۴۹ را در نظر بگیرید، در این صورت گرد شده این عدد تا دو رقم اعشار عبارت است از ۲٫۳۷ و گرد شده آن تا سه رقم اعشار برابر است با ۲٫۳۷۵.

توجه: معمولاً تعداد ارقام اعشار یک عدد را با حرف  $D$  که تعداد ارقام اعشار عدد قبل از آن آمده است نشان می‌دهیم.

مثال ۷: عبارت  $2.732(3/2)$  یعنی ۲٫۷۳۲ دارای سه رقم اعشار است.

## ۴.۱ خطای چهار عمل اصلی

الف. خطای حاصل جمع

هرگاه  $a$  و  $b$  تقریبهایی از  $A$  و  $B$  و این اعداد همگی مثبت باشند و  $e_a$  و  $e_b$  به ترتیب خطاهای مطلق حدی  $a$  و  $b$  باشند و هرگاه  $c$  خطای مطلق حدی عدد  $C = A + B$  باشد، در این صورت

$$|e_c| \leq e_a + e_b$$

ب. خطای تفاضل

با مفروضات قسمت «الف» هرگاه  $C = A - B$  در این صورت

$$|e_c| \leq e_a + e_b$$

یعنی  $e_a + e_b$  یک کران بالا برای خطای مطلق حدی  $C$  (در هر دو حالت) می‌باشد

$$\begin{cases} e_1 \leq 10^{-2} \\ 1,7274 - 10^{-2} \leq \pi - \sqrt{2} \leq 1,7274 + 10^{-2} \\ 1,7272 \leq \pi - \sqrt{2} \leq 1,7275 \end{cases}$$

خطای حاصل ضرب

مفروضات قسمت «الف» هرگاه  $C = AB$  در این صورت

$$e_c \leq ae_b + be_a \quad (3)$$

مثال ۲: در عمل تقسیم معمولاً به گونه‌ای عمل می‌شود که تقسیم تبدیل به عمل ضرب گردد، مثال نشان دهید چنین مطلب می‌باشد.

مثال ۳: مقدار  $\pi\sqrt{2}$  را با چهار رقم اعشار محاسبه نموده و حداکثر خطای این حاصل ضرب نیز به دست آورید.

حل: داریم:

$$\pi = 3,1416 + e_1$$

$$\sqrt{2} = 1,4142 + e_2$$

در آن مانند مثال ۱ داریم:

$$e_1 \leq \frac{1}{2} \times 10^{-2}, \quad e_2 \leq \frac{1}{2} \times 10^{-2}$$

$$\pi\sqrt{2} = (3,1416 \times 1,4142) + e_3$$

مثال ۴: هرگاه اعداد  $\sqrt{5}$  و  $\sqrt{17}$  را تا سه رقم اعشار گرد کنیم، مطلوب است محاسبه  $\sqrt{17} \pm \sqrt{5}$  و محاسبه حداکثر خطای حاصل جمع و تفاضل.

$$\sqrt{17} = 4,123 + e_1, \quad \sqrt{5} = 2,236 + e_2$$

منظور از  $e_1$  و  $e_2$  خطای مرتکب شده در نمایش  $\sqrt{17}$  و  $\sqrt{5}$  می‌باشد. چون اعداد تا سه رقم اعشار گرد شده‌اند، پس

$$e_1 \leq \frac{1}{2} \times 10^{-2}, \quad e_2 \leq \frac{1}{2} \times 10^{-2}$$

$$\sqrt{17} + \sqrt{5} = (4,123 + 2,236) + e_3 = 6,359 + e_3$$

و چون  $e_3 \leq 10^{-2}$  لذا در نتیجه

$$6,359 - 10^{-2} \leq \sqrt{17} + \sqrt{5} \leq 6,359 + 10^{-2}$$

همچنین  $\sqrt{17} - \sqrt{5} = 1,887 + e_4$  که در اینجا نیز

$$e_4 \leq e_1 + e_2 \leq 10^{-2}$$

$$1,887 - 10^{-2} \leq \sqrt{17} - \sqrt{5} \leq 1,887 + 10^{-2}$$

بنابراین هرگاه اعداد  $\pi$  و  $\sqrt{2}$  را تا چهار رقم اعشار گرد کنیم، مطلوب است محاسبه  $\pi \pm \sqrt{2}$  و محاسبه حداکثر خطای حاصل جمع و تفاضل.

$$\pi = 3,1416 + e_1, \quad \sqrt{2} = 1,4142 + e_2$$

چون اعداد تا چهار رقم اعشار گرد شده‌اند، پس

$$e_1 \leq \frac{1}{2} \times 10^{-2}, \quad e_2 \leq \frac{1}{2} \times 10^{-2}$$

$$\pi + \sqrt{2} = (3,1416 + 1,4142) + e_3 = 4,5558 + e_3$$

$$e_3 \leq e_1 + e_2 \Rightarrow e_3 \leq 10^{-2}$$

در نتیجه  $4,5558 - 10^{-2} \leq \pi + \sqrt{2} \leq 4,5558 + 10^{-2}$  و به طور مشابه

$$\pi - \sqrt{2} = 1,7274 \pm e_4$$

که بنا به رابطه (۳) برای  $e_r$  داریم:

$$e_r \leq 3,1416e_1 + 1,4142e_1$$

$$e_r \leq \frac{1}{4} \times 10^{-2} (3,1416 + 1,4142)$$

$$e_r \leq 0,5 \times 10^{-2} (4,5558) = 2,2779 \times 10^{-2}$$

اما

$$\pi\sqrt{2} = 4,4429 + e'_r$$

\* چون حاصل ضرب اعداد  $3,1416$  و  $1,4142$  در محاسبه  $\pi\sqrt{2}$  بیشتر از  $\frac{1}{4}$  رقم اعشار دارد، هنگام نمایش حاصل ضرب دو عدد مذکور یا چهار رقم اعشاری دیگر مرنک شده‌ایم و خطای حدی کل را با  $e'_r$  نشان داده‌ایم. برای  $e'_r$  داریم:

$$e'_r \leq \frac{1}{4} \times 10^{-2} + e_r$$

$$e'_r \leq 0,5 \times 10^{-2} + 2,2779 \times 10^{-2} = 2,7779 \times 10^{-2}$$

لذا:

$$4,4429 - 2,7779 \times 10^{-2} \leq \pi\sqrt{2} \leq 4,4429 + 2,7779 \times 10^{-2}$$

$$4,4426 \leq \pi\sqrt{2} \leq 4,4432$$

همانطور که مثال ۱۰ نشان می‌دهد، حاصل ضرب دو عدد تقریبی دارای خطای بیشتر از حاصل  $\frac{1}{4}$  یا  $\frac{1}{2}$  رقم اعشار تقریبی است. رابطه (۳) نشان می‌دهد که این خطا برای  $a$  و  $b$  بزرگ، می‌تواند مقداری قابل توجه باشد. اما هرگاه اعداد تقریبی که در هم ضرب می‌شوند کمتر یا مساوی یک باشند، خطای حاصل ضرب آنها در حد قابل قبول قرار خواهد داشت.

\* حداکثر خطا در حاصل ضرب سه عدد تقریبی:

هرگاه  $a$  و  $b$  و  $c$  تقریبهای از  $A$  و  $B$  و  $C$  بوده و این اعداد همگی مثبت باشند، رابطه زیر برای خطای مطلق حدی حاصل ضرب  $(abc)$  به عنوان تقریبی از مقدار  $ABC$  بیان می‌شود:

$$e_{abc} \leq (abc)_1 + (abc)_2 + (abc)_3 \quad (4)$$

روابط مشابه برای حاصل ضرب بیشتر از سه عدد تقریبی به راحتی قابل نوشتن است.

مثال ۱۱. هرگاه اعداد را تا سه رقم اعشار گرد کنیم، عبارت  $\frac{\pi}{3\sqrt{5}}$  را محاسبه نموده و یک خطای مطلق حدی برای این محاسبه بیان نمایید.

حل: قرار می‌دهیم  $x = \frac{\pi}{3\sqrt{5}}$ ، لذا

$$\begin{aligned} x &= \pi \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \pi \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \\ &= \pi \cdot \frac{1}{3} \cdot (0,2) \sqrt{5} = (0,2) \pi \cdot \frac{1}{3} \sqrt{5} \end{aligned}$$

مقدار  $(0,2)$  به طور دقیق مشخص است، چون اعداد را تا سه رقم اعشار نمایش می‌دهیم؛ خواهیم داشت:

$$\pi = 3,142 + e_1 \quad e_1 \leq \frac{1}{4} \times 10^{-2}$$

$$\sqrt{5} = 2,236 + e_2 \quad e_2 \leq \frac{1}{4} \times 10^{-2}$$

$$\frac{1}{3} = 0,333 + e_3 \quad e_3 \leq \frac{1}{4} \times 10^{-2}$$

و از آن‌ها داریم:

$$\begin{aligned} x &= (0,2) 3,142 \times 2,236 \times 0,333 + e_x \\ x &= 0,468 + e'_x \end{aligned}$$

توجه داشته باشید که چون حاصل ضرب اعداد فوق (بیشتر از سه رقم) اعشار دارد، هنگام نمایش این حاصل ضرب‌ها با سه رقم اعشار، خطای دیگری مرنک می‌شویم که خطای حدی کل را با  $e'_x$

در رابطه (۵) منظور از  $n$  بردار مقادیر تقریبی  $a_i$  یعنی  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  می باشد، همچنین

به معنی محاسبه مقدار تابع  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  به ازای بردار  $a$  است.

حجم کروی به شعاع  $\frac{5}{3}$  متر را حساب کرده و حداکثر خطای این محاسبه را به دست

آورید. اعداد را تا چهار رقم اعشار گرد کنید.

حل: داریم:  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$  و یا  $V = xyz^2$  که در آن

$$x = \frac{4}{3} = 1.3333 + e_x, \quad e_x \leq \frac{1}{3} \times 10^{-2}$$

$$y = \pi = 3.1416 + e_y, \quad e_y \leq \frac{1}{3} \times 10^{-2}$$

$$z = \frac{5}{3} = 1.6667 + e_z, \quad e_z \leq \frac{1}{3} \times 10^{-2}$$

بنابراین

$$V = (1.3333)(3.1416)(1.6667)^2 + e_v$$

$$V = 11.3223 + (e_v)$$

که در آن مشابه مثال ۱۱ داریم:

$$e_v \leq \frac{1}{3} \times 10^{-2} + e_v$$

$$e_v \leq e_x \frac{\partial V}{\partial x} + e_y \frac{\partial V}{\partial y} + e_z \frac{\partial V}{\partial z}$$

که عبارت سمت راست را بایستی در  $(1.3333, 3.1416, 1.6667)$  محاسبه کرد. لذا

$$e_v \leq \frac{1}{3} \times 10^{-2} \{ (yz^2) + xz^2 + 2xyz \}$$

مقدار سمت راست به ازای  $x = 1.3333$ ,  $y = 3.1416$  و  $z = 1.6667$  به صورت زیر

$$e_v' \leq 1.7774 \times 10^{-2}$$

$e_v'$  نشان داده ایم در واقع داریم:

$$e_v' \leq \frac{1}{3} \times 10^{-2} + e_v \quad \checkmark$$

بنا به رابطه (۴) برای  $e_v$  داریم:

$$\checkmark e_v \leq 0.2 [2.7226 \times 0.222e_x + 3.142 \times 0.222e_{\sqrt{z}} + 3.142 \times 2.7226e_{\frac{1}{3}}]$$

$$\checkmark e_v \leq 0.2 \times \frac{1}{3} \times 10^{-2} \times 8.816$$

$$\checkmark e_v < 8.816 \times 10^{-4}$$

لذا

$$e_v' \leq \frac{1}{3} \times 10^{-2} + 8.816 \times 10^{-4}$$

$$\checkmark e_v' \leq 1.382 \times 10^{-2}$$

## ۵.۱ خطای محاسبه فرمولها و توابع

الف. خطای محاسبه فرمولها

\* هرگاه تابعی  $n$  متغیره به صورت  $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  داشته باشیم و بخواهیم مقدار

این تابع را در نقاط  $A_i = a_i + e_{a_i}$  برای  $i = 1, \dots, n$  حساب کنیم، در این صورت خواهیم

داشت:

$$f(A_1, A_2, \dots, A_n) = f(a_1, a_2, \dots, a_n) + e_f$$

که در آن

$$(e_f) \approx e_{a_1} \frac{\partial f}{\partial x_1} \bigg|_a + e_{a_2} \frac{\partial f}{\partial x_2} \bigg|_a + \dots + e_{a_n} \frac{\partial f}{\partial x_n} \bigg|_a \quad (5)$$

آن همی (مقدار)  $x = \frac{1}{3}$  را به ازای  $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$  حساب می‌کنیم اما در عمل به  $e^{1/3}$  تقریبی از آن را استفاده می‌کنیم که به فرم اعشاری دارای تعدادی متناهی (رقم) است. مثلاً اگر  $|E_n(x)| \leq \frac{1}{4} \times 10^{-2}$  حساب کنیم، قرار می‌دهیم:  $x = \frac{1}{3}$  به ضرب  $\frac{1}{3}$  در سمت راست عبارت فوق توجه نمایید، چون مجبوریم  $x = \frac{1}{3}$  را به صورت  $\frac{1}{3}$  بنویسیم که آن هم دارای خطای  $\frac{1}{4} \times 10^{-2}$  می‌باشد.

برای محاسبه  $n$ ، معمولاً از اولین جمله  $E_n(x)$  استفاده می‌شود یعنی قرار می‌دهیم

$$E_n(x) \approx \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

بنابراین برای محاسبه  $e^{1/3}$  با خطای کمتر از  $10^{-2}$  قرار می‌دهیم

$$\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{1}{4} \times 10^{-2} = 5 \times 10^{-3}$$

برای  $n=3$  نامساوی فوق برقرار نیست، اما برای  $(n \geq 4)$  نامساوی برقرار است. لذا باید مقدار زیر را حساب کنیم:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24}$$

خطای محاسبه این مجموع باید چنان کم باشد که در مقایسه با خطای برشی، قابل اغماض باشد. حداکثر در حدود آن باشد. لذا لازم است قرار دهیم  $\frac{1}{4} = 0.25$  (4D) و عبارت فوق را محاسبه کنیم. پس از انجام محاسبات داریم:

$$e^{1/3} \approx 1 + 0.3333 + 0.0556 + 0.0062 + 0.0005 \\ = 1.3956$$

بنابراین با ۴ اعشار خواهیم داشت:

$$e^{1/3} \approx 1.396 \text{ (3D)}$$

خواهد بود:

$$e_v \leq 5 \times 10^{-5} \{14.5453 + 6.1731 + 34.9072\}$$

$$e_v \leq 0.0028$$

$$e_v \leq \frac{1}{4} \times 10^{-2} + 0.0028$$

$$e_v \leq 5 \times 10^{-5} + 0.0028$$

$$e_v \leq 0.00285$$

$$V = 19.3933 \pm 0.00285$$

ب. خطای محاسبه توابع

در اکثر مسائل محاسبات عددی، نیاز به محاسبه توابعی مانند  $\sin x$  و  $\sqrt{x}$  و  $\ln x$  و ... در دامنه تعریف آنها پیش می‌آید. در محاسبه این توابع علاوه بر خطای موجود در نمایش  $x$  به شکل اعشاری و با تعدادی متناهی رقم، خطای دیگری نیز وارد می‌شود که ذیل آن را بررسی می‌کنیم. فرض کنید می‌خواهیم مقدار  $e^{1/3}$  را حساب کنیم، می‌دانیم

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

مقدار  $e^{1/3}$  یعنی مقدار سری واقع در سمت راست تساوی بالا به ازای  $x = \frac{1}{3}$ ، چون محاسبه حاصل جمع بینهایتی جمله (عدد) عملاً امکانپذیر نیست، معمولاً تعدادی متناهی از جملات نخست این سری، متناسب با دقت لازم، انتخاب و به ازای  $x = \frac{1}{3}$  یا تقریب مناسبی از  $\frac{1}{3}$ ، محاسبه می‌شود. در واقع می‌نویسیم:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + E_n(x)$$

که در آن  $E_n(x)$  عبارتست از:

$$E_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \dots$$

یا  $E_n(x)$  باقیمانده سری یا خطای برشی در  $x$  نامیده می‌شود، بنابراین برای محاسبه  $e^{1/3}$  تقریبی

توجه: همان گونه که در بالا دیده می شود، هر چند که نتیجه  $e^{1/2}$  را با  $\pi$  رقم اعشار می خواهیم اما محاسبات میانی را با  $\pi$  رقم اعشار انجام داده ایم که این مطلب را در حالت کلی به صورت قاعده زیر بیان می کنیم:

قاعده: هرگاه نتیجه یک عبارت را تا  $n$  رقم اعشار بخواهیم، محاسبات میانی را با  $(n+1)$  رقم اعشار انجام داده و نتیجه نهایی را در آخر کار با  $n$  رقم اعشار ارائه می نمایم.

مثال ۱۴. مقدار تقریبی تابع  $\sin x$  را به ازای  $x = \frac{\pi}{4}$  و با خطای کمتر از  $10^{-3}$  حساب کنید. حل: داریم

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \pm \dots$$

$$|E_n(x)| = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

در اینجا قرار می دهیم

$$x = \frac{\pi}{4} = \pi \frac{1}{4} = 3.1416 \times 0.1429 = 0.4489$$

بنابراین بایستی  $n$  را طوری تعیین کنیم که

$$\frac{(0.4489)^{2n+1}}{(2n+1)!} \leq \frac{1}{2} \times 10^{-2} = 5 \times 10^{-3}$$

برای  $n=2$  نامساوی فوق برقرار می باشد، در نتیجه

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{4} &\approx 0.4489 - \frac{(0.4489)^3}{3!} + \frac{(0.4489)^5}{5!} \\ &= 0.4489 - 0.0151 + 0.0002 \\ &= 0.4340 \quad (4D) \end{aligned}$$

لذا با سه رقم اعشار خواهیم داشت:

$$\sin \frac{\pi}{4} \approx 0.4340 (4D)$$

مجموعه مسائل فصل اول.

۱- هرگاه  $a$  تقریبی از  $A$  باشد، خطای مطلق  $a$  را به عنوان تقریب  $A$  در حالتهای زیر حساب کنید.

الف.  $A = \frac{1}{300}$  و  $a = 0.003$

ب.  $A = 2,5475$  و  $a = 2,548$

پ.  $A = 2,100007$  و  $a = 2,100$

ت.  $A = \frac{1}{3}$  و  $a = 0.33$

جواب. الف.  $\frac{1}{3000}$  ب.  $0.0005$  پ.  $7 \times 10^{-6}$  ت.  $\frac{1}{300}$

۲- یک کران خطای حدی را برای تقریب  $a$  از عدد  $A$  در هر یک از حالت های مسأله ۱ ارائه نماید.

جواب. الف.  $5 \times 10^{-2}$  ب.  $5 \times 10^{-2}$  پ.  $5 \times 10^{-5}$  ت.  $10^{-2}$

۳- هرگاه  $\pi$  و  $\sqrt{5}$  را تا سه رقم اعشار گرد کرده باشیم، مطلوبست محاسبه  $\pi\sqrt{5}$  و  $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$

محاسبه حداکثر خطای مرکب شده در هر حالت.

جواب.  $\pi\sqrt{5} \approx 7.026$  با حداکثر خطای  $0.0022$

$\frac{\pi}{\sqrt{5}} \approx 1.405$  با حداکثر خطای  $0.0023$

۴- هرگاه  $x$  و  $y$  را تا چهار رقم اعشار گرد کرده باشیم، مطلوبست محاسبه حداکثر خطای مرئی

شده در  $x \pm y$  و  $xy$  که  $x = \sqrt{11}$  و  $y = \pi$

جواب.  $10^{-2}$  برای جمع و تفریق و  $4 \times 10^{-4}$  برای ضرب

۵- حجم کره ای به شعاع  $\frac{1}{3}$  متر را حساب کرده و حداکثر خطای آن را بنویسید. (با سه رقم اعشار)

جواب.  $V = 53.184$  و حداکثر خطا  $0.063$

۶- مقدار تقریبی توابع زیر را به ازای  $x$  های داده شده و با تقریب داده شده  $\epsilon$  حساب کنید.

۱۸

الف.

$$x = \frac{\pi}{\delta}, \quad x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \epsilon = 10^{-2}$$

ب.

$$x = \frac{\pi}{11}, \quad x = \frac{\sqrt{2}}{\delta}, \quad \epsilon = 10^{-2}$$

پ.

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x = \frac{\sqrt{2}}{\delta}, \quad \epsilon = 10^{-2}$$

ت.

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x = -\frac{\sqrt{2}}{\delta}, \quad \epsilon = 10^{-2}$$

ث.

$$x = \frac{1}{\delta}, \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \epsilon = 10^{-2}$$

ثابت کنید  $\delta(a) \leq \frac{e(a)}{|a| - e_a}$  و از آنجا نتیجه بگیرید اگر  $e_a$  در مقایسه با  $|a|$  کوچک باشد آن گاه

$$\delta(a) \leq \frac{e(a)}{|a|}$$

اگر  $a_i$  ها  $(1 \leq i \leq n)$  همگی اعدادی مثبت باشند نشان دهید

الف.

$$e\left(\sum_{i=1}^n a_i\right) \leq \sum_{i=1}^n e(a_i)$$

ب.

$$e\left(\sum_{i=1}^n a_i\right) \leq \max\{\delta(a_1), \dots, \delta(a_n)\}$$

اگر  $a$  و  $b$  به ترتیب تقریب‌هایی از  $A$  و  $B$  و این اعداد همگی مثبت باشند ثابت کنید:  $e_{ab} \leq ae_b + be_a$

فرض کنید  $f$  تابعی  $n$  متغیره به صورت  $f = f(x_1, \dots, x_n)$  باشد. نشان دهید هرگاه نقاط  $x = a_i + e_{a_i}$

$(1 \leq i \leq n)$  را در تابع قرار دهیم، داریم

$$e_f \leq \sum_{i=1}^n e_{a_i} \cdot \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| (a_1, \dots, a_n)$$

مقدار  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}$  را برای  $x$  های بزرگ با  $D$  به دست آورید و آن را با مقدار

$f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x}$  مقایسه کنید و از آن نتیجه بگیرید که تفریق دو عدد نزدیک به هم می‌تواند با خطای زیاد توأم باشد.

۱۲- با یک برنامه کامپیوتری مناسب کوچکترین مقدار مثبت  $\epsilon$  را برای یک کامپیوتر به دست آورید به طوری که

هرگاه با عددی مانند ۱ جمع شود حاصل بیشتر از یک باشد، این عدد را اپسیلون ماشین یا eps می‌نامند (یعنی

$1 + \text{eps} > 1$  و اگر  $\alpha < \text{eps} < 0$  آن گاه  $1 + \alpha \neq 1$ ).