

سیستم‌های دینامیکی و کنترل

تألیف
دکتر علی غفاری

چاپ اول
انتشارات دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
تهران - ۱۳۷۴

« سیاست‌گذاری »

نگارنده سپاس و تشکر خود را به حضور کلیه سبزوهرانی که در مراحل مختلف تألیف و انتشار این اثر سهیم بوده‌اند تقدیم می‌دارد و از خداوند متعال برای آنها توفیق و سعادت آرزو می‌کند. به ویژه بر خود فرض می‌داند از عزیزان زیر قدردانی نماید.

۱ - دوست و همکار ارجمند جناب آقای دکتر میرطاهری که با هدف اعتلای دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی بر امر انتشارات دانشگاه نیز نظارت می‌نمایند و در انتشار کتاب حاضر توجه خاص مبذول داشتند.

۲ - دوست عزیز آقای مهندس محمدرضا زمانی به خاطر زحمات ارزنده ایشان در ویراستاری کتاب و تلاش و همیاری و نظارت بی‌وقفه در مراحل مختلف تألیف و نقش عمده و اساسی در تهیه و تدوین پیوستهای اثر.

۳ - دوست گرامی آقای مهندس فرشید مقامی اصل به خاطر همکاری مؤثر در تهیه اشکال و مسایل کتاب.

۴ - همکار ارجمند آقای علی نیک فلاح سرپرست محترم انتشارات دانشگاه به خاطر پیگیریهای مستمر در آماده سازی اثر و تلاش مجددانه در چاپ و نشر هر چه بهتر آن.

۵ - سرکار خانم محبوبه شریلو همکار محترم دانشگاه به خاطر تلاش شبانه‌روزی در مراحل مختلف تایپ و حروفچینی و اصلاح کتاب و آقای شهرام فسانیان به خاطر همکاریهای مستمر.

۶ - آقایان مهندس اسماعیل اسماعیلی طاهری و مهندس محمدرضا نعمت‌الهی به نمایندگی از طرف کلیه دانشجویان عزیز دانشکده مکانیک که تهیه و آماده سازی شکلها و جدولها و فرمولها به عهده آنان بوده است.

علی غفاری



« پیشگفتار »

هدف علم کنترل تدوین تئوریه‌ها و اصول و قواعد لازم برای تنظیم رفتار سیستم‌های دینامیکی است. شاخه مهندسی کنترل از زمان پیدایش و در طی نیم قرن گذشته نقش بسیار بارزی در پیشرفتهای تکنولوژیک معاصر داشته است. دستاوردهای عظیم فضایی و هوایی، کیفیت مطلوب عملکرد فرآیندهای صنعتی، دقت بالای ماشینهای ابزار اتوماتیک و CNC ها و هر سیستمی که به نحوی رفتارش به نظم در می‌آید همه مرهون پیشرفتهای حاصله در عرصه علم کنترل است.

امروزه کنترل تنها به مباحث مهندسی محدود نمی‌شود. کاربرد تئوریهای کنترل در سیستمهای اقتصادی، سیاسی، مدیریتی و امثالهم نتایج بسیار ارزشمندی را از نظر تجزیه و تحلیل و تنظیم رفتار اینگونه سیستمها به همراه داشته است. در سالهای اخیر سیستمهای بیولوژیکی نظیر سیستم بدن انسان به عنوان مجموعه‌های بسیار ظریف و زیبا و اعجاب انگیز و در عین حال پیچیده کنترلی مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. هر چه قدر مطالعه و بررسی در مورد سیستمهایی نظیر بدن انسان بیشتر می‌شود زیبایی مکانیزمهای مختلف موجود در بدن بیشتر آشکار می‌گردد و تدبیر و تحسین نسبت به خالق متعال فزونی می‌یابد (تبارک اله احسن الخالقین).

اهمیت و کاربرد علم کنترل در شاخه‌های مختلف مهندسی و علوم باعث شده است که جهان علم توجه خاصی به این رشته مبذول دارد. امروزه نه تنها در دپارتمانهای برق و مکانیک و شیمی دانشکده‌های مهندسی بلکه در برخی از دانشکده‌های اقتصاد و علوم سیاسی نیز تئوریهای کنترلی تدریس می‌شوند و پژوهشهای مربوط به سیستمهای کنترلی به اجراء در می‌آیند.

کتاب حاضر در سطح دوره‌های کارشناسی رشته‌های مختلف مهندسی تألیف شده است و می‌تواند مورد استفاده مهندسين کنترل که مایلند با مبانی کنترل مدرن آشنا شوند نیز قرار گیرد علیرغم آنکه موضوعات این کتاب از حجم هر يك از دروس معمول کنترل دوره‌های کارشناسی رشته‌های مختلف مهندسی بیشتر است ولی تجربه مؤلف در طی ده سال گذشته نشان داده است که دانشجویان با علاقه بسیار و در طی يك درس ۲ واحدی همه مطالب این کتاب را می‌آموزند. به نظر مؤلف دانشجویان رشته‌های مهندسی و علوم، برای درك عمیق مفاهیم کنترلی باید ابتدا مفاهیم اساسی سیستمهای دینامیکی را آموخته باشند. در این کتاب توجه خاصی به این امر شده است. در فصل اول کتاب، مفاهیم اولیه و تعاریف مربوط به سیستمهای دینامیکی و کنترل ارائه می‌شود. فصول دوم و سوم کتاب



به نمایش ریاضی و ترسیمی سیستمهای دینامیکی اختصاص دارد. گرچه در این دو فصل تنها "سیستمهای پیوسته خطی با پارامترهای مجزا"^۱ مورد بررسی قرار گرفتهاند ولی هدف اصلی مؤلف آن است که خواننده اصول مدلسازی سیستمهای دینامیکی را بیاموزد. در فصل دوم کتاب مدلسازی سیستمهای دینامیکی از طریق مدلسازی اجزاء تشکیل دهنده آنها و سپس تلفیق این اجزاء و تعیین مدل کل سیستم انجام شده است. انواع سیستمهای انرژی دار الکتریکی، مکانیکی، سیالاتی و حرارتی در این فصل مورد بررسی قرار میگیرند و نحوه مدل سازی و تبدیل سیستمهای معادل آنها ارائه می شوند. همچنین سیستمهایی که یک نوع انرژی را به نوع دیگری تبدیل می کنند (ترانسیدوسرها) و سیستمهایی که سطح سیگنالهای ورودی و خروجی را تغییر می دهند (ترانسفورمرها) در انواع ایده آل و واقعی معرفی و مورد مطالعه قرار می گیرند.

در فصل سوم انواع نمایشهای ریاضی و ترسیمی سیستمهای دینامیکی ارائه شده است. در این فصل نمایش ریاضی در فضای حالت^۲ و معادلات برداری حالت^۳ ارائه شده و نحوه تعیین انواع نمایشهای ریاضی (معادلات دیفرانسیل، معادلات برداری حالت و توابع تبدیل) از یکدیگر بیان شده است. نمایش ترسیمی سیستمهای دینامیکی نیز به دو صورت دیاگرام جعبه ای^۴ و دیاگرام جریانی^۵ ارائه شده است.

فصل چهارم به تحلیل رفتار سیستمهای دینامیکی می پردازد و با حل معادلات دیفرانسیل برداری حالت، اهمیت نقش مقادیر ویژه و بردارهای ویژه را در رفتار سیستمهای دینامیکی مورد بررسی قرار می دهد. همچنین حل معادلات دینامیکی سیستم در فضای لاپلاس و ارتباط آن با حل در فضای متغیرهای حالت بررسی می شود. فصل پنجم به پایداری سیستمهای دینامیکی اختصاص دارد. به منظور ایجاد شالوده محکمی در تفهیم پایداری، ابتدا مسیر حرکت^۶ سیستمهای دینامیکی تشریح می شود و سپس تعاریف مربوط به پایداری لیاپانوف و پایداری از دیدگاه ورودی و خروجی^۷ ارائه می شود. گرچه قضایای پایداری لیاپانوف در این کتاب ذکر نمی شوند ولی نتایج مربوط به پایداری سیستمهای خطی و روشهای تعیین پایداری این سیستمها مورد بررسی قرار می گیرند.

عنوان فصل ششم کتاب، کنترل فیدبک است. به نظر مؤلف قبل از آنکه خواننده با مفاهیم سیستمهای دینامیکی

1 . Linear Continuous Systems With Lumped Parameters

2 . State Space

3 . State Vector Equations

4 . Block Diagram

5 . Signal Flow Diagram

6 . Trajectory

7 . Input - Output Stability

آشنایی کامل پیدا کند و رفتار سیستمهای دینامیکی را بشناسد و پیش از آنکه مفهوم پایداری را درک کرده باشد، مفاهیم و خواص سیستمهای کنترل فیدبک را نمی تواند به خوبی درک نماید. به این خاطر است که پنج فصل اول این کتاب به سیستمهای دینامیکی اختصاص یافته است و در فصول ششم و هفتم به مباحث مربوط به کنترل فیدبک پرداخته می شود.

در فصل ششم ابتدا خواص مربوط به سیستمهای کنترل مدار بسته و مزایای آنها نسبت به سیستمهای کنترل مدار باز ارائه می شوند. سپس معادلات دینامیکی سیستمهای کنترلی مدار بسته و مشخصات رفتاری این سیستمها با توجه به اعمال کنترل کلاسیک بررسی می شوند. سپس روش مکان هندسی ریشه ها به عنوان ابزار مناسبی جهت تحلیل مشخصات دینامیکی سیستمهای مدار بسته بیان می گردد. در این فصل انواع کنترلهای خطی و خواص آنها مورد مطالعه قرار می گیرند. همچنین تنظیم پارامتر کنترلهای خطی در فرآیندهای صنعتی ارائه می شود.

فصل هفتم به روش عکس العمل فرکانسی اختصاص دارد. در این فصل سیستمهای دینامیکی از طریق بررسی عکس العمل فرکانسی حالت ماندگار آنها و به کمک دیاگرامهای نایکویست و بود مورد تجزیه تحلیل قرار می گیرند. روش عکس العمل فرکانسی از یکسو با هدف شناسایی سیستمها و از سوی دیگر به منظور طراحی سیستمهای کنترلی مدار بسته مورد استفاده قرار می گیرند. در این فصل همچنین روش پایداری نایکویست و معیار طراحی کنترلهای در سیستمهای مختلف صنعتی ارائه می شوند. فصل هفتم با معرفی اصلاح کننده های مختلف و بررسی تأثیر آنها در رفتار سیستمهای کنترلی مدار بسته خاتمه می یابد.

این کتاب با تشریح و توضیح کافی در موضوعات مختلف و با مثالها و مسائل متنوع سعی کرده است نیاز دانشجویان دوره های کارشناسی و علاقمندان مباحث مهندسی کنترل کلاسیک را مرتفع نماید و امید است مورد استفاده دانشجویان و اصلاح و انتقاد استادان ارجمند و مدرسین گرامی دروس کنترل قرار گیرد. دو کتاب دیگر مؤلف تحت عناوین کنترل مدرن و تفکر فازی که جهت استفاده دانشجویان کارشناسی ارشد و دکترا مهندسی تدوین گردیده و با دیدگاه کاربردی می تواند مورد استفاده مهندسین شاغل در مراکز کنترل صنعتی پیشرفته واقع شود به زودی آماده خواهد شد. امید است خوانندگان محترم مؤلف را با راهنماییها و انتقادات ارزنده خود در رفع نواقص کتاب یاری فرمایند تا در چاپهای بعدی ملحوظ گردد.

و من ... التوفیق

علی غفاری

پاییز ۱۳۷۴

● فصل اول

مفاهیم اولیه سیستمهای دینامیکی و کنترل

مقدمه	۱
۱-۱ تعریف سیستم	۱
۲-۱ متغیرهای حالت	۵
۳-۱ ورودی سیستم و خروجی سیستم	۶
۴-۱ سیستم دینامیکی	۷
۵-۱ سیستمهای خطی و غیرخطی	۸
۶-۱ سیستم با پارامترهای مجزا و غیرمجزا	۹
۷-۱ سیستم با پارامترهای ثابت و پارامترهای متغیر نسبت به زمان	۱۰
۸-۱ مفهوم کنترل، انواع سیستمهای کنترل کلاسیک و	
نحوه تشخیص اجزای یک سیستم کنترلی	۱۱
پوششها	۱۴

● فصل دوم

نمایش اجزاء سیستم

مقدمه	۱۶
۱-۲ سیستمهای انرژی دار و اجزاء آنها	۱۷
۱-۱-۲ اجزاء سیستمهای انرژی دار الکتریکی	۱۸
۲-۱-۲ ترکیب اجزاء سیستمهای انرژی دار الکتریکی	۲۶
الف مدار سری	۲۶
ب مدار موازی	۳۲
۳-۱-۲ اجزاء سیستمهای انرژی دار مکانیکی	۳۹
الف انتخاب اول برای معادلسازی سیستمها (نیرو معادل پتانسیل - سرعت معادل جریان)	۳۹

۴۷	ب انتخاب دوم برای معادلسازی سیستمها (نیرو معادل جریان - سرعت معادل پتانسیل)
۴۹	۲-۱-۲ ترکیب اجزاء سیستمهای انرژی دار مکانیکی
۵۵	۵-۱-۲ اجزاء سیستمهای انرژی دار در سیالات
۶۰	۶-۱-۲ ترکیب اجزاء انرژی دار در سیالات
۶۵	۷-۱-۲ اجزاء سیستمهای انرژی دار حرارتی
۶۸	۲-۲ سایر سیستمهای انرژی دار
۷۲	۱-۲-۲ ترانس دیوسرها و ترانسفورمرها
۷۳	۲-۲-۲ ترانس دیوسرها
۷۶	۳-۲-۲ ترانسفورمرها
۷۹	مسائل

● فصل سوم

نمایش سیستمهای دینامیکی

۸۷	مقدمه
۸۹	۱-۳ نمایش ریاضی سیستمهای خطی پیوسته
۸۹	۱-۱-۳ معادله برداری حالت
۸۹	الف - معادله برداری حالت برای سیستم با یک ورودی و خروجی
۹۶	ب - معادله برداری حالت برای سیستم با چند ورودی و چند خروجی
۱۰۰	۲-۱-۳ تبدیل لاپلاس
۱۰۷	۳-۱-۳ تابع تبدیل
۱۰۹	الف - تابع تبدیل از معادله حالت برای سیستم با یک ورودی و یک خروجی
۱۱۴	ب - قطبها و صفرهای سیستم
۱۱۵	ج - تابع تبدیل از معادله حالت برای سیستم با چند ورودی و چند خروجی
۱۱۷	۲-۳ نمایش ترسیمی سیستمهای خطی پیوسته
۱۱۸	۱-۲-۳ نمایش ترسیمی یک سیستم خطی رسته یک
۱۲۲	۲-۲-۳ نمایش ترسیمی سیستم رسته π با یک ورودی و یک خروجی
۱۲۹	۳-۲-۳ ساده کردن نمایش ترسیمی



۱۳۳	۲-۲-۳ معادلات برداری حالت از تابع تبدیل
۱۳۸	انتخاب نوع اول
۱۳۸	انتخاب نوع دوم
۱۴۰	۳-۳ سیستمهای دینامیکی غیر خطی
۱۴۳	مسائل

● فصل چهارم

رفتار سیستمهای خطی

۱۵۱	مقدمه
۱۵۳	۱-۴ رفتار سیستم آزاد
۱۵۳	۱-۱-۲ رفتار آزاد سیستم رسته یک
۱۵۵	۲-۱-۲ رفتار آزاد سیستم رسته II
۱۶۴	۳-۱-۴ حل سیستم آزاد با استفاده از تبدیل معکوس لاپلاس
۱۶۹	۲-۱-۴ حل سیستم آزاد به روش قطری کردن
۱۷۹	۵-۱-۲ مقادیر ویژه در صفحه مختلط و رفتار مربوط به هر مقدار ویژه
۱۸۰	۲-۴ رفتار سیستم با اعمال ورودی
۱۸۰	۱-۲-۲ رفتار سیستم رسته یک با ورودی
۱۸۸	۲-۲-۲ تفسیر انتگرال کانولوشن
۱۹۲	۳-۲-۲ رفتار سیستم رسته II با ورودی
۱۹۴	۲-۳-۳ حل معادلات سیستم از طریق تبدیل معکوس لاپلاس
۱۹۵	۵-۲-۲ قضایای "مقدار اولیه" و "مقدار نهایی"
۲۰۲	۶-۲-۲ حل کامپیوتری معادلات سیستم
۲۰۴	۷-۲-۲ نمایش عکس العمل سیستم
۲۱۰	الف - بسط تابع تبدیل $G(s)$ فاقد قطب تکراری
۲۱۰	ب - بسط تابع تبدیل $G(s)$ دارای قطبهای تکراری
۲۱۶	مسائل



● فصل پنجم

پایداری سیستمهای خطی

۲۲۷	مقدمه
۲۲۷	۱-۵ مسیر حرکت سیستم در فضای متغیرهای حالت
۲۴۳	۲-۵ پایداری حول نقطه تعادل
۲۴۹	۳-۵ پایداری سیستم با ورودی
۲۵۰	۴-۵ پایداری سیستمهای خطی
۲۵۲	۵-۵ تعیین پایداری سیستم خطی با استفاده از روش راوث
۲۶۲	مسائل

● فصل ششم

کنترل فیدبک

۲۷۰	مقدمه
۲۷۳	۱-۶ نمایش و ساختمان یک سیستم کنترل فیدبک
۲۷۷	الف - بررسی سیستم کنترل "مدار باز" و "مدار بسته" با "ورودی مزاحم"
۲۷۸	ب - بررسی سیستم کنترلی "مدار باز" و "مدار بسته" با "تغییر در پارامترها"
۲۹۲	۲-۶ عکس العمل یا رفتار سیستم فیدبک
۲۹۶	۱-۲-۶ خطای حالت ماندگار (e_{ss})
۳۰۲	۳-۶ کنترلرهای خطی
۳۱۳	۴-۶ روش مکان هندسی ریشه‌ها
۳۱۸	۱-۲-۶ رسم مکان هندسی ریشه‌ها
۳۲۲	۵-۶ تحلیل کیفی مکان هندسی ریشه‌ها
۳۲۶	۶-۶ تأثیر اضافه کردن "قطب" یا "صفر" در پایداری و رفتار سیستم
۳۲۹	۷-۶ ترمیم مکان هندسی ریشه‌ها
۳۲۹	۸-۶ کنترل فرآیندها (تنظیم پارامترهای کنترلر)
۳۳۳	۱-۸-۶ روشهای "زیگلر و نیکولز" برای تعیین پارامترهای کنترلر
۳۳۳	الف - دوش اول (روش عکس العمل حالت گذرا)



۳۳۵	ب - روش دوم (روش حساسیت مقدار نهائی)
۳۳۷	مسائل

● فصل هفتم

عکس العمل فرکانسی

۳۴۵	مقدمه
۳۴۶	۱-۷ ورودی و خروجی سینوسی
۳۵۲	۲-۷ رسم عکس العمل فرکانسی
۳۵۲	۱-۲-۷ نمودار نایکویست
۳۵۵	۲-۲-۷ نمودار "بود"
۳۷۴	۳-۷ قضیه پایداری نایکویست
۳۹۱	۴-۷ کاربرد قضیه پایداری نایکویست در مسائل مهندسی
۳۹۱	الف - پایداری سیستم مدار بسته
۳۹۱	ب - مرز پایداری در سیستم مدار بسته
۳۹۲	ج - ناپایداری سیستم مدار بسته
۳۹۳	۵-۷ طراحی سیستم کنترلی با استفاده از عکس العمل فرکانسی سیستم مدار باز
۳۹۹	۶-۷ جبران کننده ها یا ترمیم کننده ها
۳۹۹	۱-۶-۷ مدارهای تقدم فاز
۴۰۸	۲-۶-۷ مدارهای تأخیر فاز
۴۱۱	مسائل

● پیوستها

۴۲۱	پیوست ۱ روشهای حل عددی معادلات دیفرانسیل خطی
۴۴۱	پیوست ۲ ماتریسها و عملیات ماتریسی
۴۸۵	پیوست ۳ مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

فصل اول

مفاهیم اولیه سیستمهای دینامیکی و کنترل

مقدمه :

مباحث مختلف کنترل کلاسیک حاوی اصطلاحات کلی و مشترکی است که ارائه تعاریف صریح و مرزبندی شده برای هر یک از آنها، تشریح و فهم مسائل پیچیده را سهولت و سرعت خاصی می بخشد. لذا در این فصل ابتدا به ارائه برخی از تعاریف و اصطلاحات کلی متداول در کنترل پرداخته شده است. سپس مفهوم کنترل و کاربرد آن (در شاخه های مختلف دانش امروز) به همراه یک مثال تشریح گردیده که ضمن آن نحوه تشخیص اجزای یک سیستم کنترلی و پارامترهای سیستم نیز مورد بحث قرار گرفته است.

قابل ذکر است که در این فصل سعی بر آن بوده که تعاریف اولیه به ساده ترین بیان و بی نیاز از مفاهیم دقیق ریاضی بمنظور فهم سریع آنها ارائه گردد تا در فصول بعد به ارائه تعاریف جامعتری از این مفاهیم پرداخته شود.

(۱-۱) - تعریف سیستم :

طبق تعریف "سیستم عبارت است از مجموعه ای با مشخصات و رفتار معین که بوسیله حدود فرضی (مرز) از محیط اطراف خود مجزا می گردد."

مطابق بیان فوق، علاوه بر «مشخصات ظاهری یک مجموعه مورد نظر»، تعریف سیستم

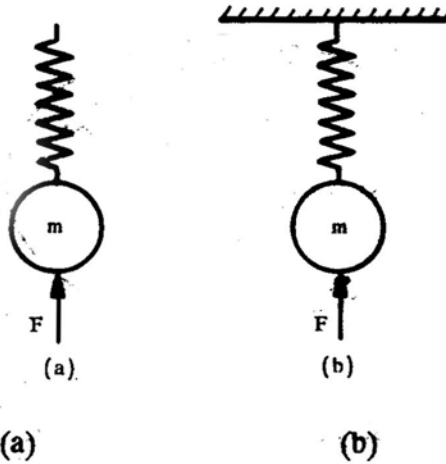
بطور اساسی بستگی به هدفی دارد که از بررسی آن مجموعه دنبال می‌شود. برای روشن شدن مطلب، مجموعه فنر و وزنه شکل (۱-۱) را در نظر بگیرید که در آن جرم m تحت تأثیر نیروی خارجی ثابت F قرار داشته و مطالعه حرکت جرم m در این مجموعه مد نظر می‌باشد. در شکل (۱-۱-a) که انتهای فنر آزاد است سیستم، همانند «جسم صلبی است که تحت تأثیر نیروی ثابت F قرار گرفته است» در اینصورت تمام اجزاء آن دارای شتاب یکسان و ثابتی بوده و سیستم با سرعت خطی تند شونده‌ای به حرکت مستقیم الخط خود در جهت نیرو ادامه می‌دهد.

از طرف دیگر چنانچه مطابق شکل (۱-۱-b) انتهای فنر به جایی محکم شده باشد، این مجموعه یک «سیستم ارتعاشی» و رفتار آن نوسانی خواهد بود. بعنوان مثالی دیگر یک ساختمان مسکونی را در نظر می‌گیریم. در این مورد هم قبل از آنکه مشخص شود از چه نقطه نظر می‌خواهیم مجموعه را مورد مطالعه و بررسی قرار دهیم نمی‌توانیم نوع سیستم را تعیین کنیم. یعنی بدون مشخص کردن هدف، سیستم قابل تعریف نخواهد بود. در اینجا اگر بررسی مسئله لرزش ساختمان در مقابل زلزله مد نظر باشد این مجموعه عبارت از یک «سیستم ارتعاشی» است که در آن نیروی زلزله بعنوان عامل محرک^۱ و حرکت ارتعاشی ساختمان بعنوان رفتار سیستم^۲، مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در حالیکه اگر هدف از بررسی، تنظیم درجه حرارت داخل ساختمان باشد با یک «سیستم حرارتی» روبرو هستیم که دبی حرارتی ورودی (ارسال شده توسط سیستم گرمایش) بعنوان عامل محرک و درجه حرارت ساختمان بعنوان رفتار سیستم مورد بررسی قرار می‌گیرد.

واژه «سیستم» یک اصطلاح کلی است که تعریف آن تنها به مجموعه‌های فیزیکی محدود نمی‌شود. اقتصاد یک کشور «سیستم اقتصادی» آن کشور را بیان می‌کند. مجموعه موجودات میکروسکوپی مورد مطالعه در یک آزمایشگاه نمونه‌ای از یک «سیستم بیولوژیکی» است. یک پالایشگاه با فرآورده‌های مختلف آن می‌تواند بعنوان یک «سیستم شیمیایی» مورد مطالعه قرار

۱- Actuator

۲-Response of System



شکل (۱-۱). مجموعه فنر و وزنه بعنوان سیستم تحت تأثیر نیروی F .
(a) مجموعه آزاد (b) مجموعه مقید

گیرد. در ادامه این قسمت برای روشن شدن تعریف سیستم و تصریح نیاز به اصطلاحات دیگری که بعداً اشاره خواهد شد به تشریح یک مثال جامع می‌پردازیم.

از جمله بررسیهای انجام شده در سالهای اخیر در مورد وضعیت آینده جهان، تحقیقاتی است که توسط "کلوپ رم" انجام شده است. هدف از این بررسیها تعیین چگونگی کیفیت زندگی انسان در قرن آینده می‌باشد که این کار با مطالعه در مورد عواملی که شرایط زندگی انسان در روی کره زمین بطور اساسی به آنها ارتباط دارد و بررسی در مورد تغییراتی که این عوامل در آینده خواهند داشت صورت می‌گیرد. در این تحقیق "سیستم مورد نظر" کل جهان (شامل همه کشورهای دنیا) در نظر گرفته شده که در این سیستم جهانی از بین عوامل مختلف، پنج عامل اصلی ذیل که کیفیت زندگی انسان به آنها ارتباط دارد مورد مطالعه قرار گرفته‌اند:

- جمعیت جهان

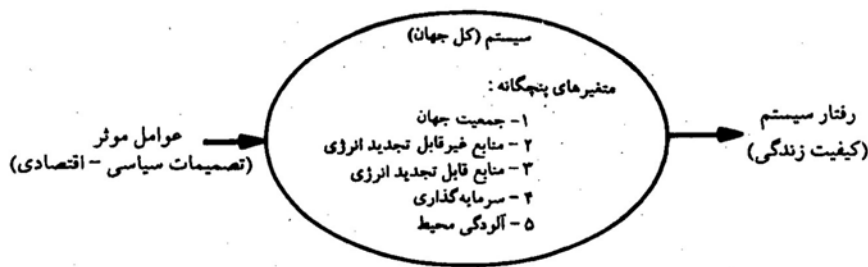
- منابع غیر قابل تجدید انرژی جهان (مثل نفت)

- منابع قابل تجدید انرژی جهان (مثل گندم)

- سرمایه‌گذاری در جهان

- آلودگی محیط زیست

گرچه عوامل متعدد دیگری را نیز به این متغیرها می‌توان اضافه نمود، با این وجود اگر این پنج



شکل (۲-۱). نمایش سیستم تعیین کیفیت زندگی انسان در جهان.

عامل را به عنوان عوامل اساسی بپذیریم، می‌توان گفت که:

در هر زمان با دانستن مقدار هر یک از متغیرهای مذکور اطلاعات لازم در مورد سیستم را در آن زمان بدست آورده‌ایم. از طرفی با توجه به اینکه کیفیت زندگی را تابعی از این متغیرها در نظر گرفته‌ایم لذا با تعیین مقادیر این متغیرها برای زمانهای آینده قادر خواهیم بود کیفیت زندگی در آینده را پیش‌بینی نمائیم. به‌رحال بدون وارد شدن به جزئیات مسأله نیز نفس ارتباط کیفیت زندگی با متغیرهای پنجه‌گانه مذکور بسادگی قابل فهم است. مثلاً هر چه آلودگی محیط کمتر و انرژی موجود بازاء هر فرد بیشتر باشد کیفیت زندگی بالاتر خواهد بود. بنابراین کیفیت زندگی با آلودگی محیط نسبت عکس و با انرژی قابل دسترسی نسبت مستقیم دارد. شکل (۲-۱) چنین سیستمی را نشان می‌دهد که در آن عامل محرک یا مؤثر بر متغیرهای فوق تصمیمات سیاسی - اقتصادی کشورهای جهان می‌باشد.

واضح است که برای تعیین کیفیت زندگی در آینده باید اطلاعات مربوط به زمانهای آینده را به سیستم ارائه نمود. همچنین در اینجا فرض شده است که سیاستهای آینده جهانی منطبق با روند کنونی آن بوده و عبارتی عوامل مؤثر بر سیستم، یعنی تصمیمات سیاسی - اقتصادی کشورهای جهان، با آهنگی که در حال حاضر جریان دارد ادامه یابد.

(۱-۲) - متغیرهای حالت^۱:

وضعیت هر سیستم معمولاً بوسیله یک سری متغیرهای دینامیکی که "متغیرهای وضعیت" نامیده می‌شوند مشخص می‌گردد. بدلیل منحصر بفرد نبودن این متغیرها و وجود روشهای مختلف برای انتخاب آنها تعریف کلی زیر برای آنها ارائه می‌گردد:

متغیرهایی که با دانستن مقادیر آنها در هر لحظه مشخص، بتوان وضعیت و رفتار سیستم را در آن لحظه معین نمود "متغیرهای وضعیت" نامیده می‌شوند.

برای مثال بار دیگر سیستم فنر و وزنه شکل (۱-۱-a) را در نظر می‌گیریم. در این سیستم اگر هدف مطالعه حرکت جرم m تحت تأثیر نیروی ثابت F باشد، از قانون دوم نیوتن داریم:

$$F = m\ddot{x} \quad (1-1)$$

که در آن F نیروی وارد به جرم m ، x تغییر مکان جرم m و $\ddot{x}$ نمایش شتاب جرم m می‌باشد. برای بدست آوردن تغییر مکان $x(t)$ از معادله دیفرانسیل مرتبه دوم (۱-۱) این سؤال را مطرح می‌کنیم که چه اطلاعاتی از سیستم مورد نیاز است تا بتوان $x(t)$ را در هر لحظه تعیین نمود. همچنین از قبل می‌دانیم که برای تعیین x در هر لحظه باید مقدار تغییر مکان و سرعت در یک زمان معین قبل از این لحظه مشخص باشد (معمولاً می‌گوئیم که باید تغییر مکان اولیه یا مقدار x را در زمان $t=0$ و مقدار سرعت را در زمان $t=0$ بدانیم). اگر این مقادیر را بترتیب با x_0 و $\dot{x}_0$ نمایش دهیم مقدار x در هر زمانی (مانند t) از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$x(t) = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2 + \dot{x}_0 t + x_0 \quad (2-1)$$

بنابر این در مورد سیستم فوق متغیرهای حالت عبارت از تغییر مکان x و سرعت $\dot{x}$ می‌باشند. بعنوان مثالی دیگر سیستم فنر و وزنه شکل (۱-۱-b) را در نظر می‌گیریم. در اینجا فرض می‌کنیم که نیروی خارجی F میسایوی صفر بوده و سیستم را با یک جابجائی اولیه به نوسان درآوریم در این صورت اگر ضریب ثابت فنر مساوی k در نظر گرفته شود معادله دیفرانسیل

تغییر مکان x جرم m طبق قانون دوم نیوتن بصورت زیر خواهد شد:

$$m\ddot{x} + Kx = 0 \quad (3-1)$$

و حل این معادله عبارت است از:

$$x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (4-1)$$

که در آن $\omega = \sqrt{k/m}$ و A و B مقادیر ثابت می‌باشند. واضح است برای دانستن مقدار $x(t)$ در هر لحظه باید مقادیر ثابت A و B را تعیین نمود. از طرفی می‌دانیم که برای تعیین A و B باید سرعت اولیه و تغییر مکان اولیه را (بعنوان شرایط اولیه) داشته باشیم. پس با داشتن تغییر مکان و سرعت در یک لحظه معین مثلاً در $t=0$ مقدار $x(t)$ تعیین می‌شود و عبارتی (در مورد این سیستم) اگر مقادیر x و $\dot{x}$ را در هر لحظه بدانیم وضعیت سیستم کاملاً مشخص خواهد بود. بنابراین تغییر مکان و سرعت را می‌توان بعنوان متغیرهای وضعیت این سیستم در نظر گرفت. در مثال شکل (۲-۱) متغیرهای پنجگانه‌ای که ذکر شده‌اند متغیرهای وضعیت سیستم هستند. در یک سیستم اقتصادی عواملی نظیر تورم، بیکاری، درآمد سرانه و غیره برخی از متغیرهای وضعیت سیستم بشمار می‌آیند. حال ضمن توصیه مرور مجدد مفهوم متغیر وضعیت و مثالهای ارائه شده پاسخ تمرین ذیل به دانشجویان واگذار می‌گردد.

تمرین:

- (۱) در یک پالایشگاه که ماده تولیدی آن بنزین است پنج متغیر وضعیت را نام ببرید.
- (۲) در یک کارخانه تولیدی شش متغیر وضعیت را نام ببرید.
- (۳) آیا می‌توان در مورد سیستمهای شکل (۱-۱) و (۱-۱) علاوه بر تغییر مکان و سرعت، کمیت شتاب را نیز بعنوان متغیر وضعیت در نظر گرفت و در این صورت آیا این سیستمها دارای سه متغیر وضعیت بشرح فوق هستند؟

(۳-۱) ورودی سیستم و خروجی سیستم^۱:

بعنوان تعریف:

آنچه از خارج یک سیستم بر آن اثر می‌گذارد و باعث تغییر در "متغیرهای وضعیت"

سیستم می‌گردد ورودی یا علت^۱ نامیده می‌شود.

در مثال شکل (۱-۱) نیروی F ورودی به سیستمهای شکل (a) و (b) می‌باشد که باعث تغییر در متغیرهای وضعیت (یعنی تغییر مکان و سرعت جرم m) می‌گردد. در مثال شکل (۲-۱) ورودی یا علت، عبارت از تصمیمات سیاسی و اقتصادی کشورها می‌باشد.

آنچه را که تعیین تغییرات^۲ در یک سیستم مورد توجه باشد خروجی یا معلول^۳ می‌نامند. در مثال فتر و وزنه شکل (۱-۱) اگر هدف تعیین تغییر مکان جرم m باشد خروجی هر کدام از سیستمهای (a) و (b) "تغییر مکان جرم m " خواهد بود و اگر هدف، تعیین سرعت جرم m باشد خروجی سیستم عبارت از "سرعت جرم m " خواهد بود. در مثال شکل (۱-۲) نیز طبق هدف مورد نظر، "کیفیت زندگی" خروجی سیستم می‌باشد. گاهی ممکن است که در یک سیستم معین دو یا چند عامل مختلف مورد توجه باشد در این صورت براساس تعریف فوق، سیستم دارای چند خروجی خواهد بود. مثلاً در یک سیستم اقتصادی که متغیرهای وضعیت شامل تورم، بیکاری، درآمد سرافه، تولید ناخالص ملی، دولمد ارزی و غیره می‌باشد اگر هدف کنترل تورم باشد خروجی سیستم "تورم" خواهد بود و اگر هدف کنترل تورم و کنترل میزان بیکاری باشد سیستم دارای دو خروجی "تورم" و "درصد بیکاری" خواهد بود. قابل ذکر است که متناسب با هدف مورد نظر، ممکن است بتوان یک یا چند متغیر وضعیت را بعنوان خروجی سیستم معرفی نمود و یا یک ترکیب خطی از متغیرهای حالت را بعنوان خروجی سیستم مورد مطالعه قرار داد. مثال شکل (۲-۹) سیستمی است که در آن کیفیت زندگی را (بعنوان خروجی) بصورت عاملی که به متغیرهای وضعیت پنجگانه مورد بحث بستگی خطی دارد نشان می‌دهد. خروجی سیستم را عکس‌العمل یا رفتار^۴ سیستم نیز می‌نامند.

(۱-۴) - سیستم دینامیکی :

عنوان فوق این سؤال منطقی را در ذهن خواننده ایجاد می‌نماید که سیستم دینامیکی چه نوع سیستمی است و چه تفاوتی با سیستم استاتیکی دارد؟ در یک تعریف کلی می‌توان گفت

۱- Input or Cause

۲- Output or Effect

۳- Response

۴- Dynamic System

که:

سیستم دینامیکی سیستمی است که دارای حافظه بوده و عبارتی گذشته خود را همواره بخاطر داشته باشد.

برای روشن شدن تعریف فوق، ایده استاتیکی یا دینامیکی بودن یک سیستم را با طرح یک مثال پی می گیریم. دو دماسنج از دو نوع مختلف را که ابتدا هر دو دمای 10°C را نشان می دهند در نظر گرفته و هر دو را بطور همزمان وارد محیطی که درجه حرارت آن 20°C است می نماییم. در این آزمایش فرض می کنیم یکی از دو دماسنج بلافاصله عدد 20°C را نشان داده ولی درجه دماسنج دوم بتدریج بالا رفته و پس از چند دقیقه به نزدیک 20°C رسیده باشد. لذا مطابق تعریف، دماسنج اول یک سیستم استاتیکی و دماسنج دوم یک سیستم دینامیکی است. چراکه رفتار دماسنج اول گویای آن است که در این دماسنج دمای جدید (یعنی عدد 20°C را که دماسنج بلافاصله پس از ورود به محیط با دمای 20°C نشان داده است) بستگی به درجه حرارت محیط قبلی (که 10°C بوده) نداشته در حالیکه دماسنج دوم در لحظه ورود به اتاق هنوز دمای 10°C را نشان می داده و یک دقیقه بعد دمای آن مثلاً به 14°C رسیده و دقیقه بعد به 17°C و با روند افزایشی خاصی به 20°C نزدیک شده است. یعنی وضعیت دماسنج دوم در هر لحظه به وضعیت آن در گذشته بستگی داشته و به عبارتی این دماسنج دارای حافظه بوده و گذشته خود را بیاد می آورده است.

فتر و وزنه شکلهای (a-1-1) و (b-1-1) نیز نمایش سیستم دینامیکی هستند زیرا همانطور که از معادلات (1-2) و (1-4) پیداست مقدار $x(t)$ در هر لحظه بستگی به تغییر مکان اولیه x_0 و سرعت اولیه $\dot{x}_0$ سیستم دارد. یعنی این سیستمها نیز دارای حافظه بوده و گذشته خود را بیاد می آورند لذا از نوع سیستم دینامیکی بشمار می آیند. برخلاف سیستم دینامیکی، در سیستم استاتیکی وضعیت سیستم در هر لحظه ارتباطی به زمانهای ماقبل آن ندارد.

(۵-۱) - سیستمهای خطی و غیرخطی^۱:

در بسیاری موارد، تغییرات پارامترهای سیستم در طول زمان ناچهارخطی و غیرخطی است. بررسی سیستم بشمار می آید و تنظیم راجع به اینکه آیا می توان سیستم را خطی فرض نمود یا نه، بسیار اساسی است. در سیستم فنر و وزنه شکل (۱-۳-۱) رابطه بین نیروی $u(t)$ و تغییر مکان $x(t)$ در صورتی خطی است که $x(t)$ حاصل از اعمال مجموع نیروهای $u_1(t)$ و $u_2(t)$ [یعنی $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$] برابر با مجموع تغییر مکانهای $x_1(t)$ و $x_2(t)$ که بترتیب از اعمال $u_1(t)$ و $u_2(t)$ حاصل می شوند] باشد. درحالیکه در یک سیستم غیرخطی این خاصیت صادق نخواهد بود. مثلاً اگر ضریب فنریت K در سیستم فنر و وزنه شکل (۱-۳-۱) تابعی از تغییر مکان x باشد سیستم، غیرخطی است. در مورد سیستمهای خطی و غیرخطی در فصل سوم، به تفصیل بحث خواهد شد.

(۱-۶) - سیستم با پارامترهای مجزا و غیرمجزا^۲:

یکی دیگر از روشهای تقسیم بندی سیستمها سعی در مجزاکردن پارامترهای آنها بمنظور یافتن مدل ریاضی مناسب است. مثلاً در سیستم فنر و وزنه برای جرم می توان خاصیت الاستیسیته در نظر گرفت و فنر را نیز اصولاً دارای جرم فرض نمود که در نتیجه اینرسی آن در حرکت سیستم مؤثر خواهد بود. فرآیند تفکیک این خواص در یک سیستم و ترکیب سیستم از اجزاء و المانهای ایده آل مانند جرم ایده آل (بدون خاصیت الاستیسیته) و فنر ایده آل (بدون جرم) را تجزیه^۳ پارامترها می نامند. از اینرو سیستمی را که دارای چنین خاصیتی باشد سیستم با پارامترهای مجزا^۴ نامیده و اگر نتوان این خواص را در سیستم یافت آن را سیستم با پارامترهای غیرمجزا^۵ می نامند. در شکل (۱-۳-۱) مثال این نوع سیستم دیده می شود.

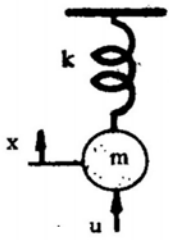
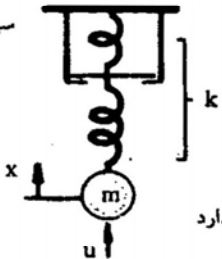
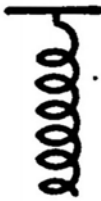
1. Linear systems & Nonlinear systems

۲. Lumped Parameter Systems & Distributed Parameter Systems

۳- Lumping

۴- Lumped Parameter System

۵- Distributed Parameter System

(a)		
(b)		
(c)		

شکل (۳-۱) - تقسیم‌بندی سیستم‌های مختلف برای تعیین مدل مناسب.

(a) - سیستم‌های "خطی و غیر خطی".

(b) - سیستم‌های با "پارامترهای مجزا و غیر مجزا".

(c) - سیستم‌های با "پارامترهای ثابت و متغیر نسبت به زمان".

(۷-۱) - سیستم با پارامترهای ثابت و پارامترهای متغیر نسبت به زمان^۱:

پارامترهای یک سیستم ممکن است با زمان تغییر کنند. مطابق شکل (۳-۱) (c) سوراخ بودن سطل موجب تغییر جرم محتویات آن در طی زمان گردیده از اینرو این نوع سیستم را

سیستم با پارامترهای تابع زمان^۱ می نامند.

همچنین در صورتیکه پارامترهای سیستم با زمان تغییر نکنند آن را سیستم با پارامترهای مستقل از زمان^۲ می نامند.

(۱-۸) - مفهوم کنترل، انواع سیستمهای کنترل کلاسیک و نحوه تشخیص اجزای یک سیستم کنترلی :

سیستم کنترلی بصورت ذیل تعریف می شود:

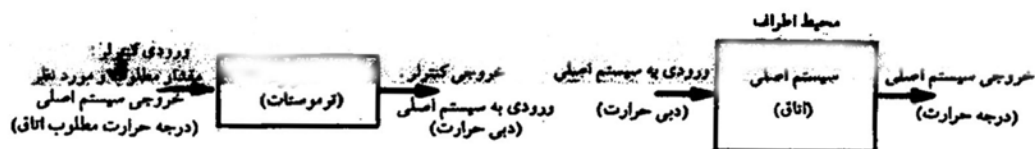
"سیستم کنترلی سیستمی است که عکس العمل مطلوب و مورد نظری را ایجاد نماید."

برای روشن شدن مطلب یک اتاق را بعنوان سیستم حرارتی مورد بررسی قرار می دهیم. در این سیستم اگر کنترل درجه حرارت اتاق مد نظر باشد، اتاق را سیستم اصلی^۳ می نامیم که در آن ظرفیت حرارتی اتاق و مقاومت دیوارها در مقابل انتقال حرارت بعنوان پارامترهای سیستم شناخته می شوند. همچنین درجه حرارت اتاق بعنوان عکس العمل یا رفتار یا خروجی سیستم، و دبی حرارتی (ایجاد شده توسط منابع حرارتی نظیر هیتر برقی، رادیاتور شوفاژ یا بخاری) نیز ورودی سیستم بشمار می آید. واضح است که در این سیستم برای بالابردن درجه حرارت اتاق، باید مقدار دبی حرارتی (ورودی) به اتاق را افزایش داده و برای کم کردن درجه حرارت نیز باید دبی حرارتی را کاهش داد. شکل (۱-۴-۱) بیان فوق را تصریح می نماید. اگر مقاومت دیوارها (در مقابل انتقال حرارت به محیط اطراف)، ظرفیت حرارتی اتاق و درجه حرارت محیط اطراف ثابت باشند برای آنکه درجه حرارت اتاق در درجه حرارت مطلوب و مورد نظری ثابت باقی بماند باید دبی حرارتی ورودی به اتاق مقدار مشخص و ثابتی باشد که از بررسی دینامیکی این سیستم می توان این مقدار را بدست آورد. ممکن است بدلالی نظیر تغییر درجه حرارت محیط اطراف اتاق یا تغییر پارامترهای اتاق (مثلا تغییر ظرفیت حرارتی و تغییر مقاومت دیوارها در اثر باز شدن پنجره اتاق)، درجه حرارت اتاق تغییر نماید و برای آنکه این درجه حرارت بحالت مطلوب خود بازگردد باید دبی حرارتی ورودی به اتاق را تغییر داد.

۱- "Nonstationary System" or "Time Variant System"

۲- "Stationary System" or "Time Invariant System"

۳- Plant



(a) - سیستم اصلی (b) - سیستم کنترلر

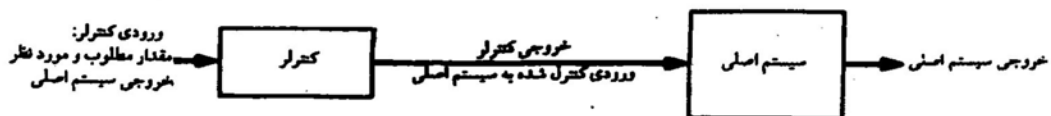
شکل (۴-۱) - نمایش یک سیستم حرارتی و معرفی اجزاء و متغیرها.

بنابراین بطور کلی می توان گفت "وقتی از کنترلر سیستم صحبت می کنیم منظور آن است که عکس العمل یا رفتار سیستم به شکل مطلوب و مورد نظری درآید".
(در مورد مثال یاد شده درجه حرارت اتاق باید مساوی مقدار مطلوب و مورد نظری باشد) و برای رسیدن به این منظور یعنی برای دست یابی به عکس العمل مطلوب و مورد نظر باید ورودی به سیستم به گونه ای تنظیم و کنترل گردد که خروجی مطلوب حاصل شود. بعبارت دیگر:

"کنترلر سیستم یعنی به نظم درآوردن رفتار یا خروجی* سیستم که راه رسیدن به این خواسته نیز صرفاً تنظیم و کنترل ورودی به آن سیستم می باشد."

تنظیم و کنترل ورودی به یک سیستم بوسیله کنترلر^۱ صورت می گیرد. کنترلر عبارت از مکانیزمی است که با توجه به میزان مطلوب و مورد نظر خروجی در سیستم اصلی، مقدار ورودی به آن را معین می کند. در مثال فوق ترموستات را می توان بعنوان کنترلر سیستم در نظر گرفت که با تنظیم آن در درجه حرارت مطلوب، دبی حرارتی (ورودی) به اتاق تنظیم می شود. بنابراین کنترلر نیز خود یک "سیستم" است که ورودی آن "مقدار مطلوب و مورد نظر خروجی سیستم اصلی" و خروجی آن "ورودی به سیستم اصلی" می باشد. شکل (۴-۱) (b) شماتیک کنترلر را بعنوان یک سیستم نمایش می دهد.

* عبارات "رفتار"، "عکس العمل" و "خروجی" که معادل response و output می باشند در کلیه مباحث این کتاب دارای مفهوم یکسان می باشند.



شکل (۵-۱)- نمایش ساده یک "سیستم کنترلی" مدار باز شامل "سیستم اصلی و کنترلر".*

از ادغام سیستم کنترلر و سیستم اصلی یک سیستم کنترلی^۱ بدست می‌آید که نمایش آن در شکل (۵-۱) ارائه شده است.



*- اصطلاح مدار باز در فصول بعد تشریح می‌گردد.

پرسشها

(۱-۱) - جسمی به جرم m را که تحت تأثیر نیروی F (ورودی) قرار می‌گیرد بعنوان یک سیستم در نظر گرفته، برای هر یک از حالات ذیل «استاتیکی یا دینامیکی» بودن این سیستم را با بیان علت مشخص نمایید:

الف - اگر خروجی سیستم، شتاب جرم m در نظر گرفته شود.

ب - اگر خروجی سیستم، تغییر مکان یا سرعت جرم m در نظر گرفته شود.

(۲-۱) - برای یک کارخانه تولیدی (نظیر کفش ملی) با در نظر گرفتن یک سیستم مشخص، ۳ خروجی و ۵ متغیر حالت را معرفی نمایید.

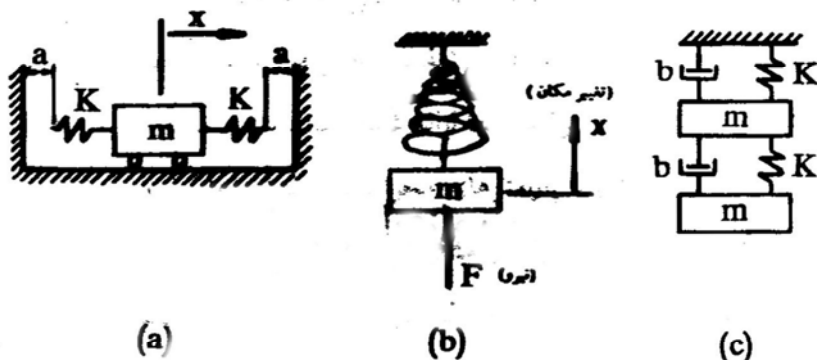
(۳-۱) - در یک مبدل حرارتی نظیر یک واحد استریلیزه مواد غذایی، اگر هدف کنترل و تنظیم دمای ماده غذایی باشد آیا این سیستم دارای پارامترهای مجزاست یا به عنوان سیستم با پارامترهای پیوسته باید مورد بررسی قرار گیرد؟

(۴-۱) - در یک سیستم اقتصادی نظیر سیستم اقتصادی کشورمان، ۶ متغیر حالت مهم و اساسی، ۳ ورودی کنترل شده و ۳ ورودی اغتشاشی را بیان نمایید.

(۵-۱) - سیستمی با معادله $\frac{d}{dt}x = ax + bu$ که غیر خطی است را سیستم دو خطی^۱

می نامند زیرا اگر x (و یا u) مقدار ثابتی باشد سیستم خطی می شود. آیا می توان این سیستم را در اطراف $x=0$ و $u=0$ خطی نمود؟ جواب خود را با استدلال ارائه نمایید.

(۶-۱) - کدام یک از سیستم های شکل (پ-۱-۶) خطی و کدامیک غیرخطی هستند؟



شکل (پ-۱-۶) - نمایش چند نمونه از سیستم های خطی و غیرخطی.

فصل دوم

نمایش اجزاء سیستم

مقدمه :

در این فصل سیستمهای دینامیکی از طریق بررسی اجزاء آنها مورد تجزیه و تحلیل قرار می گیرند. وقتی از نمایش یک سیستم دینامیکی بحث می شود، در مرحله اول، هدف بدست آوردن مدل یا "نمایش ریاضی" مناسبی است که رفتار یا پاسخ این مدل ریاضی (حل معادلات مدل ریاضی) نظیر رفتار یا پاسخ سیستم اصلی یا بسیار نزدیک به آن باشد. بدست آوردن مدل ریاضی مناسب برای مسائل و سیستمهای غیر مهندسی و غیر تکنیکی (مانند بدست آوردن مدل ریاضی برای آلودگی محیط زیست، جمعیت و یا مسائل اقتصادی) بسیار پیچیده بوده و هیچ روش حل عمومی و کلی برای آن وجود ندارد.

در مورد سیستمهای مهندسی و فیزیکی بدست آوردن مدل ریاضی مناسب عموماً به پیچیدگی سیستمهای غیر تکنیکی نبوده با این وجود میزان پیچیدگی آن بستگی به هدف و منظور از بررسی سیستم دارد. مثلاً در مورد یک ساختمان و بنا اگر هدف، بررسی لرزش یا ارتعاشات آن در مقابل عوامل نظیر زلزله و باد و غیره باشد این مجموعه عبارت از یک سیستم ارتعاشی است و مدل ریاضی آن با مدل ریاضی همان ساختمان و تکیه مثلاً از نقطه

نظر حرارتی و تبادل گرمائی مورد بررسی قرار گیرد کاملاً متفاوت خواهد بود. یک روش متداول برای یافتن مدل ریاضی سیستمهای دینامیکی مهندسی آن است که ابتدا اجزاء تشکیل دهنده این سیستمها را شناسایی نموده و روابط ریاضی مربوطه به این اجزاء را بدست آورد. سپس از ترکیب روابط ریاضی اجزاء، مدل یا نمایش ریاضی سیستم متشکل از این اجزاء را مشخص نمود. در تعقیب روش فوق، در این فصل نمایش ریاضی اجزاء سیستمهای دینامیکی و ترکیب آنها ارائه شده است. سیستمهای مورد مطالعه در این فصل شامل انواع سیستمهای با پارامترهای مجزا^۱، پیوسته^۲، خطی^۳، و با پارامترهای ثابت نسبت به زمان^۴ می باشند که تعاریف و مثالهایی از این نوع سیستمها در فصل اول نیز ارائه شده است. سیستمهای دینامیکی مورد مطالعه در این فصل شامل سیستمهای انرژی دار (یعنی سیستمهایی که بنحوی انرژی را در خود ذخیره یا مستهلک می کنند) و همچنین شامل سیستمهایی که بنحوی انرژی را منتقل و یا از نوعی بنوع دیگر تبدیل می کنند می باشد.

سیستمهای انرژی دار مورد مطالعه شامل سیستمهای الکتریکی، مکانیکی، سیالاتی و حرارتی می باشند که به تفصیل در مورد آنها بحث خواهد شد. همچنین انواع دیگری از سیستمهای انرژی دار نیز مورد بررسی اجمالی قرار خواهند گرفت.

(۱-۲) - سیستمهای انرژی دار و اجزاء آنها^۵:

سیستمهای انرژی دار، برحسب تعریف، سیستمهایی هستند که بنحوی انرژی را در خود ذخیره و یا مستهلک می کنند. با عنایت به کاربرد وسیع سیستمهای انرژی دار، در اینجا به تشریح اجزاء انواع الکتریکی، مکانیکی، هیدرولیکی و حرارتی این نوع سیستمها پرداخته

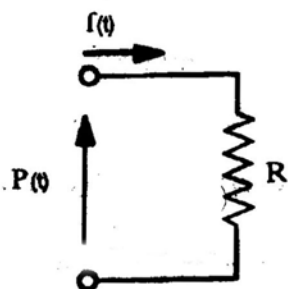
۱. Lumped Parameter Systems

۲. Continuous Systems

۳. Linear Systems

۴. Time Invariant Systems

۵. Energetic Systems and their elements



شکل (۱-۳) - سیستم الکتریکی شامل یک مقاومت R

شده که ضمن آن با ترکیب این اجزاء نیز آشنا می‌شویم.

(۱-۱-۲) - اجزاء سیستم‌های انرژی دار الکتریکی :

اجزاء اساسی سیستم‌های انرژی دار الکتریکی عبارت از "مقاومت، خازن و سولونوئید" می‌باشند که برای ارائه مدل ریاضی روابط مربوط به این اجزاء، باید رابطه بین ولتاژ و شدت جریان را بدست آورد. در اینجا مناسب است که متناسب با مفاهیم فیزیکی اصطلاحات مشترکی بین این اجزاء در سیستم‌های مختلف الکتریکی، مکانیکی و غیره تعریف نمائیم تا به کمک آنها بتوانیم معادل اجزاء را در سیستم‌های مختلف نسبت به هم بدست آوریم. از اینرو در سیستم الکتریکی ولتاژ را "پتانسیل" نامیده و با $p(t)$ نمایش می‌دهیم. همچنین شدت جریان را "جریان" نامیده و با $f(t)$ نمایش می‌دهیم. پس :

$$p(t) = \text{ولتاژ در سیستم الکتریکی} = \text{پتانسیل} \quad (۱-۲)$$

$$f(t) = \text{شدت جریان در سیستم الکتریکی} = \text{جریان}$$

با این تعریف برای سیستم شامل یک مقاومت R مطابق شکل (۱-۲) داریم:

$$P(t) = Rf(t) \quad (۲-۲)$$

$$f(t) = \frac{1}{R} P(t) \quad (۳-۲)$$



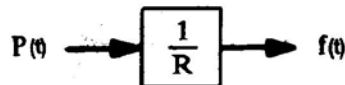
شکل (۲-۲) - نمایش ترسیمی سیستم شامل مقاومت R با ورودی جریان $f(t)$.

شکل (۱-۲) نمایش فیزیکی این سیستم و معادلات (۲-۲) و (۳-۲) نیز نمایش ریاضی این سیستم می باشد. مطابق تعاریف اولیه کنترل، نمایش ترسیمی معادله (۲-۲) را می توان بصورت شکل (۲-۲) ارائه نمود.

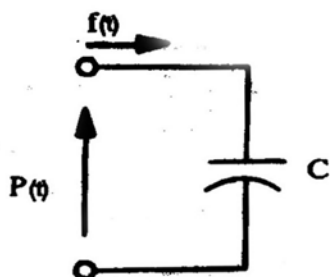
شکل (۲-۲) ساده ترین فرم "نمایش ترسیمی" سیستم الکتریکی فوق می باشد که در مباحث کنترل دیاگرام جعبه ای^۱ نامیده میشود. در این شکل، $f(t)$ ورودی و $p(t)$ خروجی سیستم می باشد. با توجه به تعریفی که از مفهوم ورودی (یا علت) و خروجی (یا معلول) در فصل اول ارائه گردید، معادله (۲-۲) و شکل (۲-۲) مفهوم زیر را بیان می کنند.

"اگر از مقاومت R جریان $f(t)$ عبور کند در دو سر آن پتانسیل $p(t)$ ایجاد می شود". معادله (۳-۲) را نیز می توان بصورت نمایش ترسیمی شکل (۳-۲) بیان نمود. معادله (۳-۲) و شکل (۳-۲) نیز مفهوم زیر را بیان می کنند:

"اگر دو سر مقاومت R به پتانسیل $p(t)$ وصل شود جریان $f(t)$ از آن عبور می کند". عبارت دیگر فلشهای نشان داده شده در شکل های (۲-۲) و (۳-۲) بیان کننده علت و معلول هستند. در شکل (۲-۲) علت جریان $f(t)$ و معلول پتانسیل $p(t)$ بوده در حالیکه در شکل (۳-۲) علت پتانسیل $p(t)$ و معلول جریان $f(t)$ می باشد. نتیجه گیری دیگر آن است که در یک سیستم الکتریکی که تنها شامل مقاومت باشد می توان جای علت و معلول را تغییر داد:



شکل (۳-۲) - نمایش ترسیمی سیستم با مقاومت R و ورودی پتانسیل $p(t)$.



شکل (۴-۲) - سیستم الکتریکی شامل یک خازن به ظرفیت C (برحسب فاراد) .

جزء دیگر انرژی دار سیستم الکتریکی یک خازن مطابق شکل (۴-۲) می باشد که در آن ضریب ثابت خازن برحسب فاراد با C نمایش داده شده است. رابطه بین پتانسیل $p(t)$ و جریان $f(t)$ در این خازن عبارت است از:

$$C \frac{d}{dt} P(t) = f(t) \quad (۴-۲)$$

با تعریف عملگر D بصورت :

$$D = \frac{d}{dt} \quad (۵-۲)$$

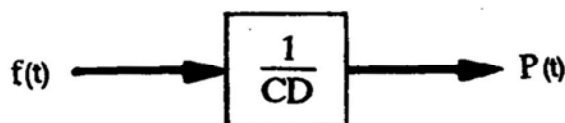
معادله (۴-۲) خواهد شد:

$$CDP(t) = f(t) \quad (۶-۲)$$

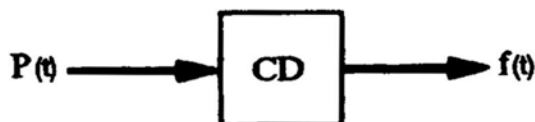
و یا:

$$p(t) = \frac{1}{CD} f(t) \quad (۷-۲)$$

نمایش ترسیمی مربوط به این سیستم را می توان به یکی از دو صورت a و b مطابق شکل (۵-۲) نشان داد. شکل (۵-۲a) مبین این مفهوم است که ورودی به خازن جریان و خروجی آن پتانسیل است بعبارتی نمایش فوق گویای آن است که ما می توانیم از یک خازن جریان الکتریکی معینی عبور دهیم (علت) که با این عمل در دو سر خازن اختلاف پتانسیل ایجاد می شود (معلول). برعکس، شکل (۵-۲b) مبین این مفهوم است که ورودی به خازن



(a)



(b)

شکل (۵-۲) - نمایش دیاگرام جعبه‌ای یک خازن :

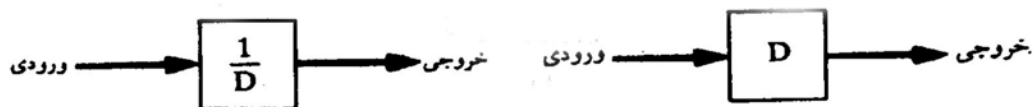
- (a) - در حالت منطقی (ورودی به خازن جریان و خروجی آن پتانسیل می‌باشد) .
 (b) - در حالت غیر منطقی (ورودی به خازن پتانسیل و خروجی آن جریان می‌باشد) .

پتانسیل و خروجی آن جریان است یعنی ما می‌توانیم دو سر یک خازن را به یک اختلاف پتانسیل وصل کنیم (علت) و با این عمل خازن ایجاد جریان الکتریکی می‌نماید (معلول). از بین دو مفهوم فوق در مورد رابطه علت و معلول در یک خازن، شکل (۵-۲) دارای مفهومی منطقی است درحالی‌که شکل (۵-۲) مفهومی غیر منطقی دارد. برای روشن شدن مطلب و قبل از ادامه بحث در مورد اجزاء سیستم‌های الکتریکی، بحث مختصری را در مورد عملگرهای D و $\frac{1}{D}$ و رابطه علت و معلول پیرامون آنها ارائه می‌نمائیم.

شکل (۶-۲) دیاگرام جعبه‌ای سیستم شامل عملگر $\frac{1}{D}$ و عملگر D را نشان می‌دهد. عملگر $\frac{1}{D}$ در شکل (۶-۲) نمایش یک انتگرال گیرنده است و به عبارتی این شکل حاکی از آن است که خروجی سیستم، انتگرال ورودی به سیستم نسبت به زمان می‌باشد. از طرفی انتگرال نسبت به زمان هر تابع به معنای حاصل جمع اطلاعات گذشته مربوط به آن تابع بوده و از نظر ریاضی این انتگرال نیز عبارت از سطح زیر منحنی تابع ورودی از زمان صفر تا زمان مورد نظر می‌باشد.

فرض می‌کنیم ورودی به سیستم شکل (۶-۲) تابع دلخواهی نظیر تابع شکل (۷-۲) باشد، در این صورت خروجی آن در هر لحظه سطح زیر منحنی تابع ورودی بوده و منحنی نظیر تابع شکل (۸-۲) را نتیجه می‌دهد.

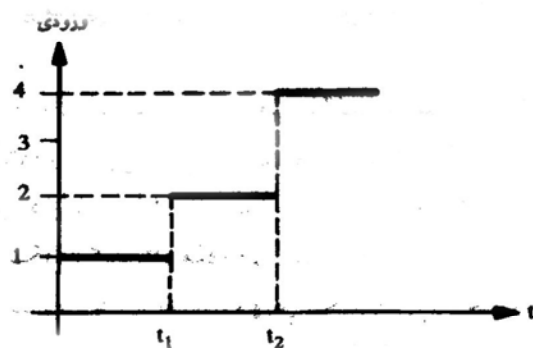
بنابر این اگر ورودی به سیستم شکل (۶-۲) تابعی نظیر تابع شکل (۷-۲) باشد خروجی سیستم یک تابع پیوسته و معین نظیر شکل (۸-۲) خواهد شد. جعبه انتگرال گیرنده نظیر



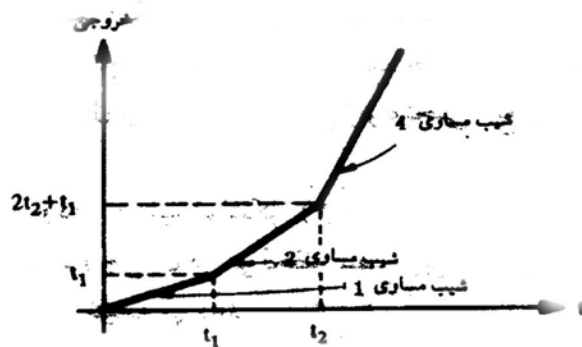
(a) - دیاگرام جعبه‌ای اپراتور $\frac{1}{D}$
(انتگرال گیرنده).

(b) - دیاگرام جعبه‌ای اپراتور D
(مشتق گیرنده).

شکل (۶-۲) - نمایش عملکردهای D و $\frac{1}{D}$.



شکل (۷-۲) - ورودی به سیستم شکل (۶-۲) (a).



شکل (۸-۲) - خروجی مربوط به ورودی شکل (۷-۲).

شکل (۲-۶-۵) بسادگی قابل ساخت می‌باشد. از آنجا که پتانسیل دو سر خازن برابر با حاصلضرب انتگرال جریان الکتریکی در ضریب ثابت $1/c$ می‌باشد [به شکل (۲-۵-۵) توجه شود] لذا خازن در سیستم الکتریکی یک جزء انتگرال گیرنده بشمار می‌آید. در واقع خازن الکتریکی یک منبع ذخیره انرژی الکتریکی است که در آن عمل ذخیره‌سازی از طریق افزایش پتانسیل دو سر خازن انجام می‌شود. اختلاف پتانسیل دو سر خازن در حالت دشارژ (یا تخلیه) برابر صفر بوده و با عبور دادن جریان الکتریکی از خازن این اختلاف پتانسیل بتدریج افزایش یافته و خازن را به حالت شارژ می‌رساند. در سیستم هیدرولیکی، یک مخزن مایع نمایش یک انتگرال گیرنده است و نشان خواهیم داد که ارتفاع مایع داخل مخزن، انتگرال دبی ورودی به مخزن است که در ضریب ثابت «سطح مقطع مخزن» ضرب می‌شود. به همین ترتیب در سیستم مکانیکی نشان خواهیم داد که یک وزنه نقش یک انتگرال گیرنده را ایفا می‌کند و ورودی به سیستمی که شامل یک جرم ثابت است نیرو و خروجی آن می‌تواند سرعت باشد که در اینصورت سرعت جرم عبارت از انتگرال ورودی یا انتگرال نیروی وارد به جرم است. نتیجه گیری کلی آنکه:

مکانیزمی نظیر شکل (۲-۶-۵) که معرف یک انتگرال گیرنده است، هم از نظر فیزیکی قابل ساخت بوده و هم دارای مفهوم ریاضی می‌باشد.

ازسوی دیگر سیستم شکل (۲-۶-۵) نمایش یک مشتق گیرنده بوده و نشان می‌دهد که خروجی سیستم برابر مشتق ورودی نسبت به زمان است. چنین سیستمی "غیر واقعی" است چرا که:

اولاً اگر ورودی به این سیستم تابعی نظیر تابع شکل (۲-۷) باشد در اینصورت خروجی (که مشتق ورودی است) یک تابع معین و پیوسته نخواهد بود زیرا در فاصله زمانی صفر تا t_1 که ورودی ثابت و مساوی واحد است مشتق آن یعنی خروجی مساوی صفر خواهد بود و به همین ترتیب در زمان t_1 خروجی ∞ می‌شود. زیرا بطور کلی مشتق مساوی شیب تابع ورودی است و در زمان t_1 نیز شیب ∞ است. مجدداً در فاصله $t_1 < t < t_2$ نیز خروجی برابر صفر شده و دوباره در زمان t_2 مساوی ∞ می‌شود. بنابراین خروجی تابعی ناپیوسته و نامعین خواهد بود.

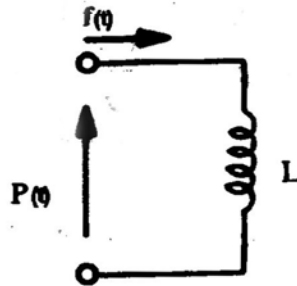
ثانیاً از نقطه نظر فیزیکی نیز ساختن مکانیزمی که مشتق نسبت به زمان را بتواند تعیین کند

مقدور نیست زیرا همانطور که از مثال فوق پیداست خروجی این سیستم باید بتواند از صفر تا ∞ حساسیت داشته باشد. یعنی علیرغم آنکه ورودی به آن یک تابع معین و پیوسته نظیر شکل (۷-۲) می باشد خروجی (که مشتق ورودی است) باید بتواند در یک محدوده صفر تا ∞ فعالیت داشته باشد.

عدم توانائی تکنیک عصر حاضر در ساختن دستگاه مشتق گیرنده از آنجا آشکار می شود که علیرغم پیشرفتهای فوق العاده ای که امروزه در ساختن دستگاههای حساس و دقیق اندازه گیری حاصل گردیده، هنوز "سرعت سنج خطی" ساخته نشده است. یعنی دستگاه و مکانیزمی که بتواند سرعت خطی یک وسیله متحرک را با داشتن تغییر مکان خطی آن بسنجد وجود ندارد. مثلاً در یک فنر و وزنه (سیستم ارتعاشی میرا یا غیرمیرا) ما می توانیم بسادگی حرکت خطی وزنه را بوسیله یک پتانسیومتر حس کننده حرکت خطی بررسی و اندازه گیری نمائیم. ولی هیچ دستگاه و وسیله ای^۱ برای اندازه گیری سرعت خطی وزنه براساس مشتق گیری از حرکت خطی آن وجود ندارد.

همچنین از نقطه نظر ریاضی نیز برخلاف دستگاه انتگرال گیرنده که عملاً اطلاعات مربوط به گذشته تابع ورودی را با هم جمع می کند، در یک دستگاه مشتق گیرنده اطلاعات مربوط به آینده تابع مورد نیاز می باشد و از آنجا که پیش بینی دقیق وقایع آینده از حیطة قدرت بشر خارج است پس دستگاه ساختهء بشر نمی تواند دارای چنین خاصیتی بوده و منظور فوق را تأمین نماید. البته در مباحث تئوری کنترل، مکانیزمهایی بعنوان مشتق گیرنده معرفی می گردند ولی همانطور که خواهیم دید این مکانیزمها "اطلاعات تقریبی" به ما می دهند و یا بعبارتی مشتق گیرنده دقیق نبوده بلکه "تقریباً مشتق می گیرند".

با نتیجه گیری منطقی فوق دوباره به بحث نمایش ترسیمی یک خازن می پردازیم. با توجه به مطالب گفته شده، از مقایسه شکلهای (۵-۲) و (۵-۲) واضح است که شکل (۵-۲) رابطه منطقی علت و معلول را در یک خازن بیان می کند و جعبه مربوطه نمایش یک انتگرال گیرنده است. در صورتیکه شکل (۵-۲) یک رابطه غیر منطقی را نشان می دهد. در شکل (۵-۲) ورودی سیستم پتانسیل و خروجی آن جریان می باشد. یعنی این شکل گویای آن



شکل (۹-۲). سیستم الکتریکی شامل سولونوئید L .

است که ما مجاز هستیم دو سر یک خازن را به یک پتانسیل معین وصل کنیم تا از آن جریان عبور نماید. ولی از نظر فیزیکی می‌دانیم که اگر دو سر خازن به یک اختلاف پتانسیل معین وصل شود، در اثر ایجاد جریان الکتریکی فوق‌العاده زیاد، خازن جرقه زده و احتمالاً می‌سوزد. بنابراین الزاماً در خازن ورودی عبارت از جریان $f(t)$ و خروجی پتانسیل $p(t)$ می‌باشد. جزء دیگر انرژی‌دار سیستم الکتریکی سولونوئید^۱ است که در شکل (۹-۲) نشان داده شده و L (ضریب سولونوئید برحسب هانری) معرف عمومی آن می‌باشد. در این سیستم رابطه بین پتانسیل و جریان عبارت است از:

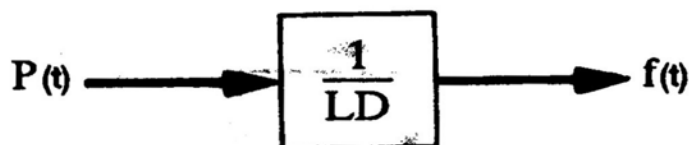
$$L \frac{d}{dt} f(t) = P(t) \quad (۸-۲)$$

$$LDf(t) = P(t) \quad (۹-۲)$$

از رابطه (۹-۲) نتیجه می‌شود:

$$f(t) = \frac{1}{LD} P(t) \quad (۱۰-۲)$$

با توجه به آنچه که راجع به منطقی بودن سیستمهای انتگرال گیرنده (نسبت به سیستمهای



شکل (۲-۱۰) - دیاگرام جعبه‌ای سیستم الکتریکی شامل سولنوئید.

مشتق‌گیرنده) گفته شد، نمایش ترسیمی این سیستم بصورت دیاگرام شکل (۲-۱۰) خواهد بود.

دیاگرام شکل (۲-۱۰) مبین آن است که در سولنوئید، ورودی پتانسیل و خروجی جریان است و یا بعبارتی به دو سر سولنوئید باید یک اختلاف پتانسیل $P(t)$ وصل نمود تا از آن جریان $f(t)$ عبور نماید. نتیجه دیگری که از این دیاگرام حاصل می‌شود آن است که اگر دو سر سولنوئید به یک پتانسیل ثابت وصل شود در ابتدا جریان عبوری از آن صفر و بتدریج مرتباً افزایش می‌یابد.

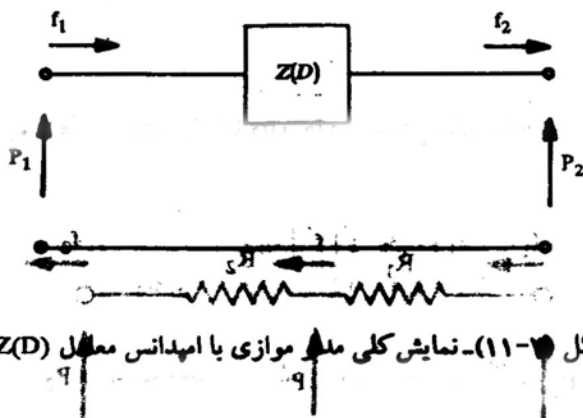
(۲-۱-۲) ترکیب اجزاء سیستم‌های انرژی دار الکتریکی:

حالات ترکیبی اجزاء سیستم‌های انرژی دار الکتریکی عموماً در مدارهای سری، موازی یا مختلط (ترکیب سری و موازی) مورد استفاده زیادی قرار می‌گیرند لذا در اینجا ضمن بحث اجمالی راجع به هر یک از این حالات، با ارائه مثالهایی به بررسی و تصریح آنها می‌پردازیم. قابل ذکر است که پتانسیل و جریان در نقاط مختلف یک مدار الکتریکی را با p و f نشان داده و موقعیت نقاط را بصورت عدد یا حروف مشخص می‌کنیم. مثلاً p_1 و f_1 مشخص کننده پتانسیل و جریان در نقطه ۱ از مدار الکتریکی شکل (۲-۱۱) می‌باشد.

الف) - مدار سری:

اگر مجموعه‌ای از اجزاء الکتریکی بصورت سری در مدار شکل زیر قرار گیرند بطوریکه امپدانس^۱ معادل این مجموعه $Z(D)$ باشد می‌توان رابطه پتانسیل و جریان را در دو سر این امپدانس بدست آورد.

^۱ Impedance



از آنجا که در مدار سری جریان f_1 مساوی جریان f_2 می باشد یعنی:

$$(۱۱-۲)$$

و اختلاف پتانسیل دو نقطه ۱ و ۲ (یعنی $P_1 - P_2$) برابر است با حاصلضرب امپدانس در جریان f_1 (یا f_2)، یعنی:

$$P_1 - P_2 = Z(D)f_1 = Z(D)f_2 \quad (۱۲-۲)$$

لذا روابط (۱۱-۲) و (۱۲-۲) را می توان بصورت ماتریسی زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z(D) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (۱۳-۲)$$

رابطه (۱۳-۲) ارتباط P_1 و f_1 را با P_2 و f_2 بیان می کند. با توجه به روابط (۲-۲)، (۷-۲) و

(۱۰-۲) یساذگی می توان نشان داد که امپدانس $Z(D)$ برای مقاومت مساوی R ، برای خازن

مساوی $\frac{1}{CD}$ و برای سولونوئید مساوی LD می شود، یعنی:

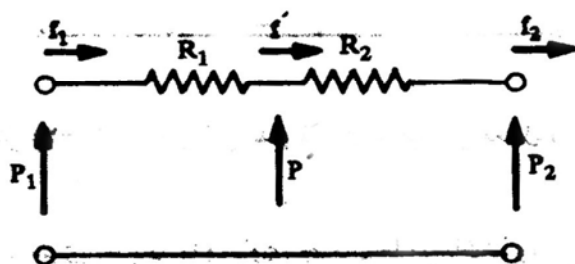
$$R = \text{امپدانس معادل مقاومت}$$

$$\frac{1}{CD} = \text{امپدانس معادل خازن} \quad (۱۴-۲)$$

$$LD = \text{امپدانس معادل سولونوئید}$$

مثال (۱-۲):

می‌خواهیم رابطه بین P_1 و f_1 را با P_2 و f_2 در سیستم شکل (۲-۱۳) بدست آوریم:



شکل (۲-۱۳). مدار سری شامل مقاومتهای R_1 و R_2 .

امپدانس معادل دو مقاومت R_1 و R_2 که بطور سری بهم وصل شده‌اند عبارت است از:

$$Z(D) = R_1 + R_2 \quad (a)$$

بنابر این با استفاده از رابطه (۲-۱۳) داریم:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z(D) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

که با قراردادن $Z(D)$ از رابطه (a) در آن حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R_1 + R_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (۲-۱۵)$$

همین نتیجه را می‌توانستیم مستقیماً و بدون استفاده از امپدانس معادل دو مقاومت بدست آوریم. برای این منظور ابتدا بین نقطه ۱ و نقطه‌ای که با "پریم" مشخص شده است داریم:

$$\begin{aligned} f_1 &= f' \\ p' - p_1 &= R_1 f' \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} P_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (b)$$

همچنین بین نقطه "پریم" و نقطه ۲ داریم:

$$\begin{aligned} f' &= f_2 \\ p' - p_2 &= R_2 f_2 \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} p' \\ f' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (c)$$

با جایگزینی $\begin{bmatrix} p' \\ f' \end{bmatrix}$ از رابطه (c) در رابطه (b) نتیجه می‌شود:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & R_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R_1 + R_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

و این همان نتیجه‌ای است که قبلاً نیز بدست آوردیم.

مثال (۲-۲):

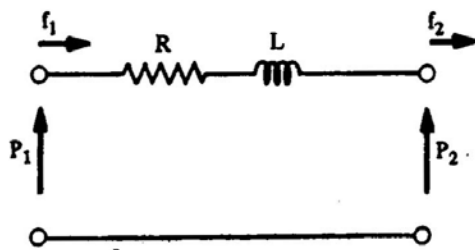
می‌خواهیم رابطه بین p_1 و f_1 را با p_2 و f_2 در سیستم شکل (۲-۱۳) بدست آوریم.

امپدانس معادل این مدار عبارت است از:

$$Z(D) = R + LD$$

با قرار دادن امپدانس فوق در رابطه (۲-۱۳) داریم:

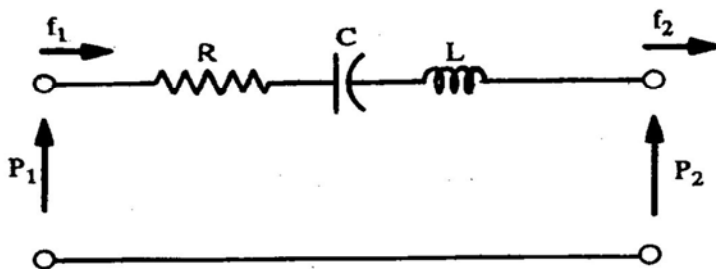
$$\begin{bmatrix} p_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R + LD \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (۲-۱۶)$$



شکل (۲-۱۳). مدار سری شامل مقاومت R و سولونوئید بیا.

مثال (۳-۲):

می‌خواهیم رابطه بین P_1 و f_1 را با P_2 و f_2 در سیستم شکل (۱۴-۲) بدست آوریم.



شکل (۱۴-۲) - مدار سری شامل مقاومت R ، سولنوئید L و خازن C (مدار RLC).

امپدانس معادل این مدار عبارت است از:

$$Z(D) = R + \frac{1}{CD} + LD$$

با قراردادن امپدانس فوق در رابطه (۱۳-۲) داریم:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R + \frac{1}{CD} + LD \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (۱۷-۲)$$

مثال (۴-۲):

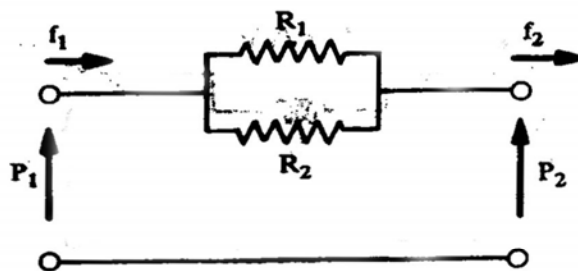
می‌خواهیم رابطه P_1 و f_1 را با P_2 و f_2 در سیستم شکل (۱۵-۲) بدست آوریم.

امپدانس معادل دو مقاومت موازی از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\frac{1}{Z(D)} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$$

و یا:

$$Z(D) = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$



شکل (۲-۱۵). مدار موازی شامل مقاومتهای R_1 و R_2

با قراردادن این رابطه در معادله (۲-۱۳) داریم:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (۲-۱۸)$$

مثال (۲-۵):

می‌خواهیم رابطه بین P_1 و f_1 را با P_2 و f_2 در مدار شکل (۲-۱۶) بدست آوریم.

امپدانس معادل مدار فوق از رابطه زیر بدست می‌آید:

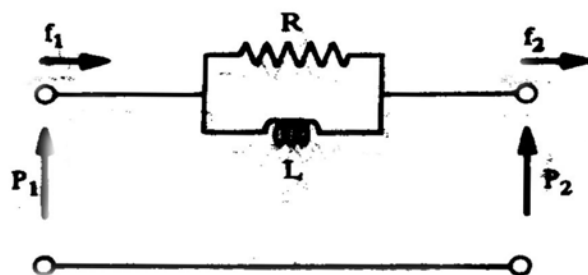
$$\frac{1}{Z(D)} = \frac{1}{R} + \frac{1}{LD} = \frac{R + LD}{RLD}$$

و یا:

$$Z(D) = \frac{RLD}{R + LD}$$

با قراردادن در معادله (۲-۱۳) داریم:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{RLD}{R + LD} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (۲-۱۹)$$



شکل (۲-۱۶). مدار موازی شامل مقاومت R و سولنوئید L .

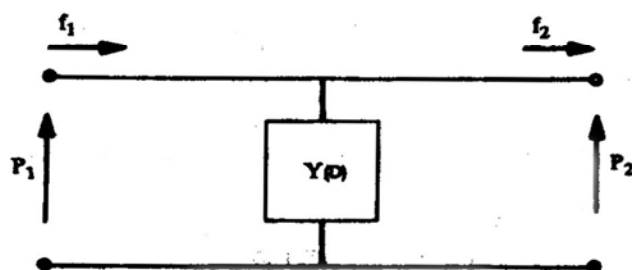
ب) - مدار موازی:

اگر مجموعه‌ای از اجزاء الکتریکی بصورت موازی در مدار شکل زیر قرار گیرند بطوری که ادمیتانس^۱ معادل این مجموعه $Y(D)$ باشد رابطه پتانسیل و جریان را در دو سر این ادمیتانس به کمک شکل (۲-۱۷) می‌توان بدست آورد. پتانسیل P_1 در دو سر ادمیتانس با پتانسیل P_2 مساوی است، یعنی:

$$P_1 = P_2 \quad (20-2)$$

از طرفی جریان f_1 با f_2 مساوی نبوده بلکه تفاوت آنها یعنی $f_1 - f_2$ از ادمیتانس عبور می‌کند بطوریکه داریم:

$$f_1 - f_2 = Y(D)P_1 = Y(D)P_2 \quad (21-2)$$



شکل (۲-۱۷). نمایش کلی مدار موازی با ادمیتانس $Y(D)$.

روابط (۲۰-۲) و (۲۱-۲) را می توان بصورت ماتریسی زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y(D) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (22-2)$$

معادله ماتریسی فوق ارتباط P_1 و f_1 را با P_2 و f_2 در مدار موازی بیان می کند. با توجه به روابط (۳-۲) یا (۲-۲)، (۷-۲) و (۱۰-۲) بسادگی می توان نشان داد که ادمیتانس $Y(D)$ برای مقاومت مساوی $\frac{1}{R}$ ، برای خازن برابر CD و برای سولنوئید مساوی $\frac{1}{LD}$ می شود. همچنین با توجه به اینکه ادمیتانس $Y(D)$ عکس امپدانس $Z(D)$ است همین نتیجه را می توانستیم با معکوس کردن مقادیر معادل مقاومت و خازن و سولنوئید در رابطه (۱۴-۲) نیز بدست آوریم یعنی:

$$\begin{aligned} \text{ادمیتانس معادل مقاومت} &= \frac{1}{R} \\ \text{ادمیتانس معادل خازن} &= CD \\ \text{ادمیتانس معادل سولنوئید} &= \frac{1}{LD} \end{aligned} \quad (23-2)$$

مثال (۶-۲):

می خواهیم رابطه بین P_1 و f_1 را با P_2 و f_2 در مدار موازی شکل (۱۸-۲) بدست آوریم.

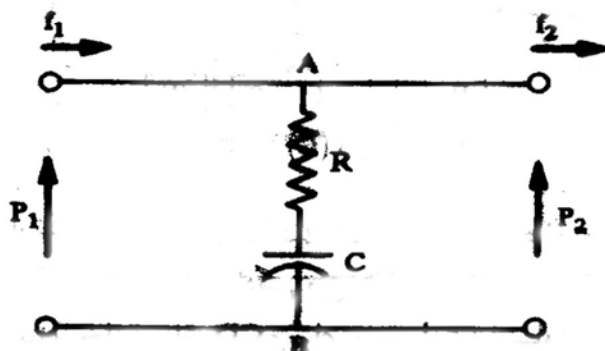
برای بدست آوردن ادمیتانس $Y(D)$ و قرار دادن آن در معادله (۲۲-۲) ابتدا امپدانس معادل مقاومت و خازن را که نسبت به هم بطور سری قرار گرفته اند بدست آورده که با معکوس کردن امپدانس، ادمیتانس حاصل می شود.

امپدانس مدار فوق عبارت است از:

$$Z(D) = R + \frac{1}{CD} = \frac{RCD + 1}{CD}$$

بنابر این ادمیتانس خواهد شد:

$$Y(D) = \frac{CD}{RCD + 1} \quad (24-2)$$



شکل (۲-۱۸) - مدار موازی شامل مقاومت R و خازن C و R نسبت به هم سری هستند.

با قرار دادن در معادله (۲-۲۲) داریم:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{CD}{RCD+1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (2-25)$$

همین نتیجه را می‌توانستیم مستقیماً از طریق معادلات (۲-۲) تا (۲-۱۰) نیز بدست آوریم. اگر جریان عبورکننده از مقاومت و خازن یعنی $f_1 - f_2$ را با f' نشان دهیم داریم:

$$f' = f_1 - f_2 \quad (a)$$

$$P_1 = P_2 \quad (b)$$

همچنین داریم:

اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت R برابر است با:

$$\text{اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت} = f'R$$

و اختلاف پتانسیل دو سر خازن نیز عبارت است از:

$$\text{اختلاف پتانسیل دو سر خازن} = f' \frac{1}{CD}$$

و جمع این دو اختلاف پتانسیل مساوی P_1 یا P_2 خواهد بود، یعنی:

$$P_1 = P_2 = f' R + f' \frac{1}{CD}$$

و یا:

$$P_2 = f' \left(R + \frac{1}{CD} \right) = f' \left(\frac{RCD + 1}{CD} \right)$$

از این رابطه f' چنین بدست می‌آید:

$$f' = \frac{CD}{RCD + 1} P_2 \quad (c)$$

با قراردادن از رابطه (a) در رابطه (c) نتیجه می‌شود:

$$f_1 - f_2 = \frac{CD}{RCD + 1} P_2 \quad (d)$$

و یا

$$f_1 = \frac{CD}{RCD + 1} P_2 + f_2$$

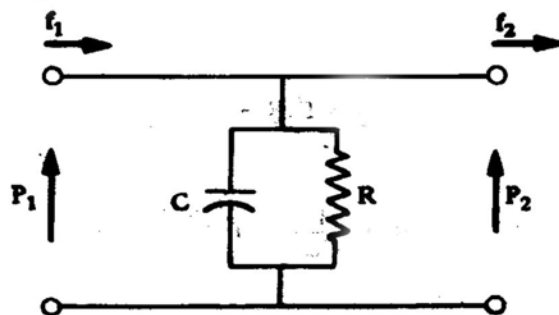
از روابط (b) و (d) بسادگی فرم ماتریسی آنها یعنی رابطه (۲-۲۵) بدست می‌آید.

مثال (۲-۷):

می‌خواهیم رابطه بین P_1 و f_1 را با P_2 و f_2 در مدار موازی شکل (۲-۱۹) بدست آوریم.

در این مدار مقاومت R و خازن C نسبت به هم بطور موازی قرار دارند لذا ادمیتانس معادل $Y(D)$ از جمع آنها بدست می‌آید. ادمیتانس معادل مقاومت $\frac{1}{R}$ و ادمیتانس خازن CD است لذا ادمیتانس معادل مدار چنین خواهد بود:

$$Y(D) = \frac{1}{R} + CD = \frac{RCD + 1}{R}$$



شکل (۲-۱۹). مدار موازی شامل مقاومت R و خازن C و C نسبت به هم موازی هستند.

با قراردادن در معادله (۲-۲۲) داریم:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{CD}{RCD+1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (2-26)$$

به کمک روابط بین اجزاء سیستمهای الکتریکی و روابط ماتریسی (۲-۱۳) و (۲-۲۲) می‌توان معادلات دیفرانسیل مربوط به این سیستمها را بدست آورد.

مثال (۲-۸):

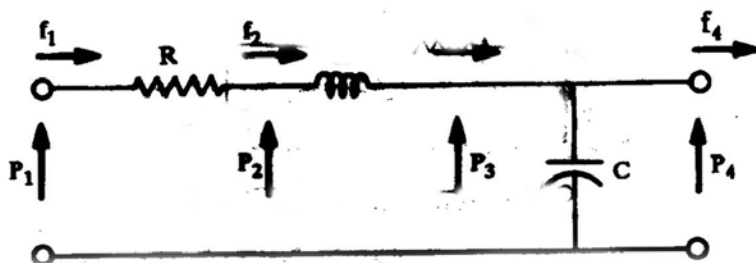
سیستم شکل (۲-۲۰) متشکل از مقاومت و خازن و سولنوئید را در نظر گرفته، می‌خواهیم رابطه بین پتانسیل p_1 و جریان f_1 با پتانسیل و جریان p_4 و f_4 را بدست آوریم.

مطابق رابطه (۲-۱۳) ارتباط بین p_1 و f_1 با p_2 و f_2 چنین خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (a)$$

بطریق مشابه رابطه بین p_2 و f_2 با p_3 و f_3 می‌شود:

$$\begin{bmatrix} p_2 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & LD \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_3 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad (b)$$



شکل (۲۰-۲). مدار مختلط شامل مقاومت R ، سولنوئید L و خازن C با R و L سری و موازی با C موازی هستند.

همچنین رابطه P_3 و f_3 با P_4 و f_4 با توجه به معادله (۲۲-۲) می شود:

$$\begin{bmatrix} P_3 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ CD & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_4 \\ f_4 \end{bmatrix} \quad (c)$$

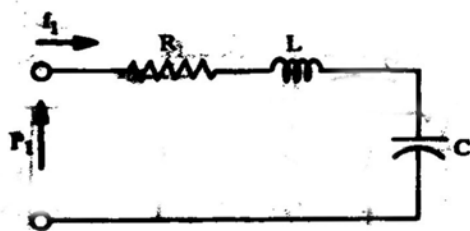
از ضرب این سه رابطه (جایگزینی از b در a و از c در b) نتیجه می شود:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & LD \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ CD & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_4 \\ f_4 \end{bmatrix} \quad (d)$$

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+RCD+LCD^2 & R+LD \\ CD & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_4 \\ f_4 \end{bmatrix} \quad (۲۷-۲)$$

حال می خواهیم با استفاده از نتایج مثال اخیر، معادله دیفرانسیل تغییرات جریان f_1 را به ازاء تغییرات P_1 در مدار شکل (۲۱-۲) بدست آوریم.

برای بدست آوردن معادله دیفرانسیل مربوط به سیستم شکل (۲۱-۲) کافی است این شکل را با شکل (۲۰-۲) مقایسه نماییم. در شکل (۲۰-۲) اگر جریان $f_4=0$ باشد، مدار شکل



شکل (۲۱-۲). مدار RLC سری برای بررسی تأثیر تغییرات پتانسیل p_1 بر جریان f_1 .

(۲۰-۲) به مدار شکل (۲۱-۲) تبدیل می‌شود. پس برای جداسازی آوردن رابطه بین f_1 و p_1 کافی است در معادله (۲۷-۲) مقدار f_4 را مساوی صفر قرار داده تا نتیجه ذیل حاصل شود:

$$P_1 = (1 + RCD + LCD^2)p_4 \quad (f)$$

$$f_1 = CDp_4 \quad (g)$$

اگر از معادله (g) مقدار p_4 را به دست آورده و در معادله (f) قرار دهیم رابطه بین f_1 و p_1 چنین حاصل خواهد شد:

$$p_1 = (1 + RCD + LCD^2) \frac{1}{CD} f_1 \quad (h)$$

$$p_1 = (R + \frac{1}{CD} + LD)f_1 \quad (i)$$

بنابراین معادله دیفرانسیل از معادله (h) بصورت زیر درمی آید:

$$LC\ddot{f}_1 + RC\dot{f}_1 + f_1 = C\dot{p}_1 \quad (۲۸-۲)$$

(۲-۱-۳)- اجزاء سیستمهای انرژی دار مکانیکی:

اجزاء انرژی دار یک سیستم مکانیکی در حرکت خطی عبارت از جرم، فنر و مستهلک کننده می باشند. جرم را با m ، ضریب فنر را با k و ضریب مستهلک کننده را با b نشان می دهیم. همانند سیستم الکتریکی در سیستم مکانیکی نیز باید علت و معلول یا ورودی و خروجی را برای اجزاء آن مشخص کنیم. در مورد سیستم الکتریکی گفته شد که علت و معلول "پتانسیل و جریان" و یا "جریان و پتانسیل" هستند. همچنین "حاصلضرب پتانسیل و جریان" در سیستم الکتریکی معرف "قدرت یا توان" الکتریکی می باشد. در سیستم مکانیکی علت و معلول را "نیرو و سرعت" (و یا برعکس) انتخاب می کنیم. علت این انتخاب آن است که اولاً "حاصلضرب نیرو در سرعت" در سیستم مکانیکی نیز معرف "توان یا قدرت مکانیکی" می باشد. ثانیاً با این انتخاب، یعنی تعیین نیرو و سرعت بعنوان معادل پتانسیل و جریان (یا برعکس)، هر یک از اجزاء سیستم مکانیکی تشابه مناسبی با یکی از اجزاء سیستم الکتریکی پیدا می کنند. در نتیجه می توان مدارهای مکانیکی را به مدارهای معادل الکتریکی آنها تبدیل نمود. در سیستم مکانیکی می توان نیرو را معادل پتانسیل و سرعت را معادل جریان انتخاب نمود. همچنین می توان نیرو را معادل جریان و سرعت را معادل پتانسیل فرض نمود. ما این دو انتخاب را در ادامه این قسمت بطور جداگانه مورد بررسی قرار می دهیم.

الف)- انتخاب اول برای معادلسازی سیستمها (نیرو معادل پتانسیل - سرعت معادل جریان):
در این حالت فرض می شود که:

$$\text{نیرو (F)} \equiv \text{پتانسیل الکتریکی (p)}$$

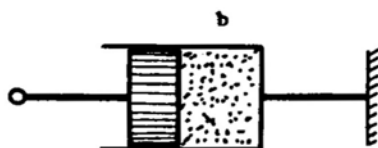
$$\text{سرعت (V)} \equiv \text{جریان الکتریکی (f)}$$

باشد. حال با این مقدمات و انتخاب فوق روابط مربوط به هر یک از اجزاء سیستم مکانیکی را بدست می آوریم.

الف - (۱) - مستهلک کننده b :

در مورد مستهلک کننده شکل (۲-۲۲)، رابطه بین نیروی F و سرعت V عبارت است از:

$$F(t) = bv(t) \quad (2-29)$$

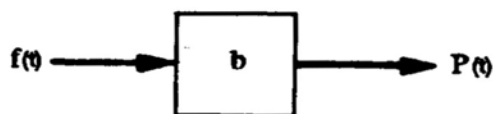


شکل (۲-۲۲) - نمایش مستهلک کننده با ضریب b .

با توجه به اینکه نیروی F معادل پتانسیل $p(t)$ و سرعت v معادل جریان $f(t)$ است داریم:

$$P(t) = bf(t) \quad (2-30)$$

رابطه (۲-۳۰) را می توان بصورت ترسیمی شکل (۲-۲۳) نمایش داد. از مقایسه شکل (۲-۲۳) با شکل (۲-۲) در سیستم الکتریکی نتیجه می شود که معادل مکانیکی مقاومت R مستهلک کننده ای با ضریب b می باشد. واضح است همانگونه که در سیستم الکتریکی، مقاومت انرژی را مستهلک می کند در سیستم مکانیکی نیز دمپر (مستهلک کننده) باعث استهلاک انرژی می شود.



شکل (۲-۲۳) - نمایش ترسیمی رابطه (۲-۳۰) بین ورودی و خروجی در یک مستهلک کننده.

الف - (۲) - جرم m :

جزء دیگر سیستم مکانیکی جرم m است [شکل (۲-۲۴)]. اگر تغییر مکان جرم m در اثر



شکل (۲-۲۴) - نمایش جرم m .

اعمال نیروی F با x و سرعت آن با $\dot{V}$ نمایش داده شود داریم:

$$F(t) = m\ddot{x} \quad (۲-۳۱)$$

$$F(t) = mD\dot{V}(t)$$

مطابق انتخاب فوق بجای نیرو و سرعت، معادل آنها یعنی به ترتیب پتانسیل $p(t)$ و جریان $f(t)$ را در معادله (۲-۳۱) قرار می دهیم:

$$P(t) = mD f(t) \quad (۲-۳۲)$$

و یا*:

$$f(t) = \frac{1}{mD} P(t) \quad (۲-۳۳)$$

معادله (۲-۳۳) را می توان بصورت دیاگرام جعبه ای شکل (۲-۲۵) نمایش داد. دیاگرام شکل (۲-۲۵) رابطه علت و معلول را در مورد جرم نشان می دهد. مطابق این دیاگرام ورودی سیستم (علت) پتانسیل و خروجی آن (معلول) جریان است. عبارت دیگر نیرو علت و سرعت معلول می باشد. بعنوان مثال اگر نیرو (ورودی) نظیر شکل (۲-۷) باشد، سرعت (خروجی) نظیر شکل (۲-۸) با ضرب $\frac{1}{mD}$ بدست می آید. در حالیکه اگر برای جرم، ورودی را

*- مطابق توضیحات بخش (۱-۱-۲) پیرومون عملگرهای D و $\frac{1}{D}$ برای مقایسه سیستمها از فرم متناظر معادلات آنها (فرم مشتق یا فرم انتگرال) باید استفاده نماییم.



شکل (۲-۲۵). دیاگرام جعبه‌ای رابطه‌ی علت و معلول (نیرو و سرعت) برای جرم m [نمایش ترسیمی رابطه (۲-۳۳)].

سرعت در نظر بگیریم خروجی که در اینجا حاصلضرب جرم m در مشتق سرعت است، برای یک ورودی پله‌ای مساوی ∞ می‌شود. یعنی برای آنکه جرم m یک تغییر سرعت ناگهانی پیدا کند، برای این کار نیروی ∞ لازم است که این امر عملاً غیر ممکن بوده و منطقی نیست. از مقایسه شکل (۲-۲۵) با دیاگرام معادل آن در سیستم الکتریکی شکل (۲-۱۰) نتیجه می‌شود که معادل مکانیکی سولونوئید L ، جرم m است. بنابراین:

جرم m در سیستم مکانیکی معادل سولونوئید L در سیستم الکتریکی با رابطه $L=m$ می‌باشد.

الف (۳-). فنر K :

جزء دیگر سیستم مکانیکی فنر با ضریب K می‌باشد [شکل (۲-۲۶)]. رابطه نیرو و تغییر مکان x در فنر عبارت است از:

$$F(t) = K x(t) \quad (۲-۳۴)$$

برای رسیدن به فرم انتگرالی ($\frac{1}{D}$) رابطه فوق، از آنجا که تغییر مکان، انتگرال سرعت است، یعنی:

$$x(t) = \frac{1}{D} V(t) \quad (۲-۳۵)$$



شکل (۲-۲۶). نمایش فنر مکانیکی.

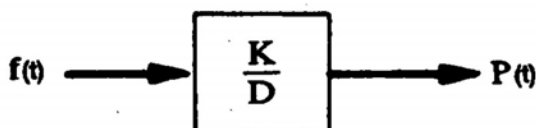
لذا با قراردادن از (۲-۳۵) در معادله (۲-۳۴) داریم:

$$F(t) = \frac{K}{D} V(t) \quad (2-36)$$

مطابق انتخاب اول بجای نیرو و سرعت معادل آنها (پتانسیل و جریان) را در معادله فوق قرار می دهیم:

$$P(t) = \frac{K}{D} f(t) \quad (2-37)$$

معادله (۲-۳۷) را می توان بصورت دیاگرام جعبه ای شکل (۲-۲۷) نمایش داد.



شکل (۲-۲۷) - نمایش ترسیمی رابطه (۲-۳۷).

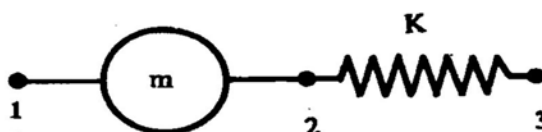
از دیاگرام شکل (۲-۲۷) نتیجه می شود که در مورد فنر، ورودی طبیعی جریان یا سرعت و خروجی آن نیز پتانسیل یا نیروست.

از مقایسه دیاگرام شکل (۲-۲۷) با دیاگرام معادل آن در سیستم الکتریکی شکل (۲-۶-۲) نتیجه می شود* که معادل مکانیکی خازن C فتری با ضریب $\frac{1}{K}$ می باشد. بنابراین:
 فنر با ضریب K در سیستم مکانیکی معادل خازن با ظرفیت C در سیستم الکتریکی با رابطه $C = \frac{1}{K}$ می باشد.

* دقت کنید که همواره برای مقایسه معادل سیستمها از فرم مشابه معادلات آنها (فرم انتگرالی یا فرم مشتق) استفاده نمایید. در اینجا ما ترجیح داده ایم که همواره فرم انتگرالی آنها را برای تشخیص اجزای معادل سیستمها نسبت به یکدیگر مورد مقایسه قرار دهیم (بدیهی است با مقایسه فرم مشتق نیز نتایج یکسان حاصل می شود).

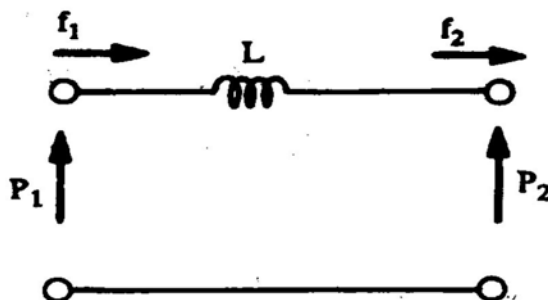
مثال (۲-۹):

می‌خواهیم رابطه بین نیرو و سرعت در نقطه ۱ سیستم شکل (۲-۲۸a) را با نیرو و سرعت در نقطه ۳ تعیین نموده و مدار معادل الکتریکی سیستم فوق را بدست آوریم.



شکل (۲-۲۸a) - سیستم مکانیکی شامل جرم m و فنر K .

با استفاده از انتخاب اول (یعنی نیرو معادل پتانسیل و سرعت معادل جریان)، نیرو را با $p(t)$ و سرعت را با $f(t)$ نمایش می‌دهیم. چون جرم m معادل سولونوئید L است، در مدار الکتریکی بجای جرم m سولونوئید L را بکار می‌بریم و چون بین نقاط ۱ و ۲ سرعت ثابت است و نیرو تغییر می‌کند لذا در مدار معادل الکتریکی باید جریان نقطه ۱ با جریان نقطه ۲ برابر ولی پتانسیل دو نقطه متفاوت باشد یعنی سولونوئید بطور سری در مدار قرار می‌گیرد. بنابراین بین نقطه ۱ و ۲ مدار معادل الکتریکی بصورت شکل (۲-۲۸b) در می‌آید.

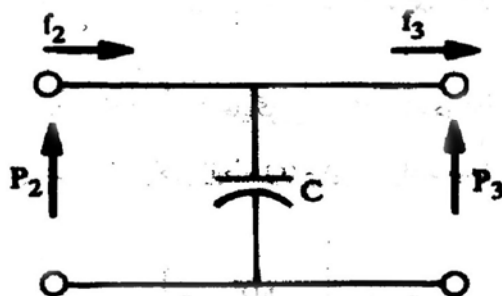


شکل (۲-۲۸b) - مدار الکتریکی معادل برای جرم m از مدار شکل قبل.

در نتیجه خواهیم داشت [با استفاده از معادلات (۲-۱۳) و (۲-۱۴)]:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & LD \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (a)$$

به همین ترتیب بین نقاط ۲ و ۳ نیز بجای فنر K معادل آن خازن C را داریم. چون بین نقاط ۲ و ۳ نیرو یا پتانسیل ثابت و سرعت یا جریان تغییر می‌کند خازن در مدار معادل الکتریکی بطور موازی قرار می‌گیرد [شکل (۲-۲۸c)].



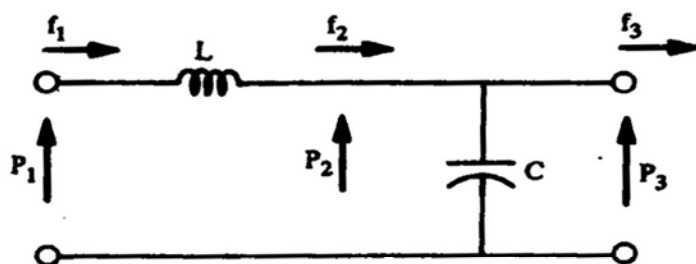
شکل (۲-۲۸c). مدار الکتریکی معادل برای فنر K از مدار شکل (۲-۲۸a).

با استفاده از معادلات (۲-۲۲) و (۲-۲۳) داریم:

$$\begin{bmatrix} P_2 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ CD & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_3 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad (b)$$

با قراردادن از معادلات (b) در (a) نتیجه می‌شود:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & LD \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ CD & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_3 \\ f_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+LCD^2 & LD \\ CD & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_3 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad (c)$$



شکل (۲-۲۹). مدار الکتریکی معادل مدار مکانیکی شکل (۲-۲۸a).

حال عناصر معادل سیستم مکانیکی را جایگزین می‌کنیم که در این حالت داریم $L \equiv m$ و $C \equiv \frac{1}{K}$ بنابراین برای مدار الکتریکی رابطه (c) چنین خواهد شد:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{mD^2}{K} & mD \\ \frac{D}{K} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_3 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad (2-38)$$

معادله (۲-۳۸) رابطه P_1 و f_1 (نیرو و سرعت) را در نقطه ۱ از سیستم شکل (۲-۲۸) با P_3 و f_3 (نیرو و سرعت) در نقطه ۳ از این سیستم نشان می‌دهد. نهایتاً مدار معادل الکتریکی سیستم مکانیکی شکل (۲-۲۸a) بصورت شکل (۲-۲۹) خواهد بود. نتایج بدست آمده در این مثال، مانند معادله (۲-۳۸)، را می‌توانستیم بدون استفاده از مدار معادل الکتریکی و با استفاده از معادلات (۲-۳۳) و (۲-۳۷) نیز بدست آوریم.

هرگاه در سیستم مکانیکی نیرو معادل جریان و سرعت معادل پتانسیل (عکس انتخاب اول) در نظر گرفته شود نیز می‌توان به نتایج مشابهی که در قسمت بعد مختصراً توضیح داده می‌شود دست یافت.

ب) - انتخاب دوم برای معادلسازی سیستمها (نیرو معادل جریان - سرعت معادل پتانسیل):

در این حالت با فرض:

نیرو $(F) \equiv$ جریان الکتریکی (f)

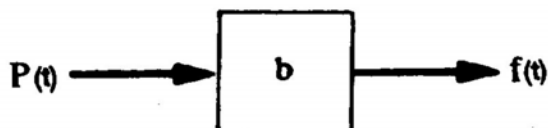
سرعت $(V) \equiv$ پتانسیل الکتریکی (p)

به بررسی نحوه معادلسازی هر یک از عناصر مکانیکی (مستهلك کننده، جرم و فنر) بشرح ذیل پرداخته می شود:

ب-۱) - مستهلك کننده b :

در مورد مستهلك کننده، مطابق انتخاب فوق معادله $(2-29)$ بصورت زیر در می آید:

$$f(t) = bp(t) \quad (2-39)$$



شکل $(2-30)$ - دیاگرام جعبه‌ای رابطه علت و معلولی برای مستهلك کننده مطابق "انتخاب دوم".

و دیاگرام جعبه‌ای آن نیز مطابق شکل $(2-30)$ خواهد بود.

از مقایسه شکل $(2-30)$ با دیاگرام معادل آن در سیستم الکتریکی [شکل $(2-3)$] نتیجه می شود که:

دمپربا ضریب b در سیستم مکانیکی معادل مقاومت R در سیستم الکتریکی با رابطه $R \equiv \frac{1}{b}$ است.

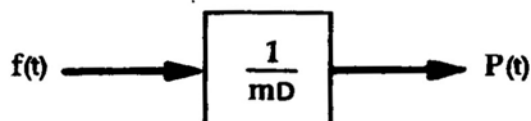
ب-۲- جرم m :

در مورد جرم m با توجه به اینکه نیروی F معادل جریان $f(t)$ و سرعت V معادل پتانسیل $p(t)$ است معادله (۳۱-۲) بصورت زیر خواهد شد:

$$f(t) = m D p(t)$$

و یا:

$$p(t) = \frac{1}{mD} f(t) \quad (۴۰-۲)$$



شکل (۳۱-۲) - دیاگرام جعبه‌ای رابطه علت و معلولی برای جرم m مطابق "انتخاب دوم".

دیاگرام جعبه‌ای رابطه اخیر بصورت شکل (۳۱-۲) درمی‌آید که شبیه شکل (۲۹-۲) می‌باشد.

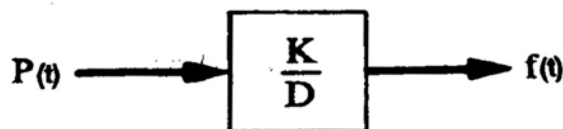
از مقایسه شکل (۲۹-۲) با دیاگرام معادل آن در سیستم الکتریکی [شکل (۲-۵-۵)] نتیجه می‌شود:

جرم m در سیستم مکانیکی معادل خازن با ظرفیت c در سیستم الکتریکی با رابطه $c \equiv m$ می‌باشد.

ب-۳- فنر k :

در مورد فنر k ، با توجه به اینکه در این حالت نیروی F معادل جریان $f(t)$ و سرعت V معادل پتانسیل $p(t)$ است معادله (۳۶-۲) بصورت زیر درمی‌آید:

$$f(t) = \frac{K}{D} p(t) \quad (۴۱-۲)$$



شکل (۲-۳۲). دیاگرام جعبه‌ای رابطه علت و معلولی برای فنر k مطابق "انتخاب دوم".

که دیاگرام جعبه‌ای رابطه فوق بصورت شکل (۲-۳۲) حاصل می‌شود. از مقایسه شکل (۲-۳۲) با مدار معادل الکتریکی آن [شکل (۲-۱۰)] نتیجه می‌شود: فنر K در سیستم مکانیکی معادل سولونوئید بظرفیت L در سیستم الکتریکی با رابطه $L = \frac{1}{K}$ می‌باشد.

از مقایسه دیاگرامهای بدست آمده در انتخاب اول (پتانسیل معادل نیرو و جریان معادل سرعت) و انتخاب دوم (پتانسیل معادل سرعت و جریان معادل نیرو) برای فنر و وزنه ملاحظه می‌شود که در هر دو انتخاب در مورد وزنه، ورودی نیرو و خروجی سرعت است. همچنین در هر دو انتخاب در مورد فنر، ورودی سرعت و خروجی نیرو می‌باشد. برای مقایسه کلی سیستمهای مختلف و معادل الکتریکی آنها در جدول (۲-۱) انتهای این فصل ارائه شده است.

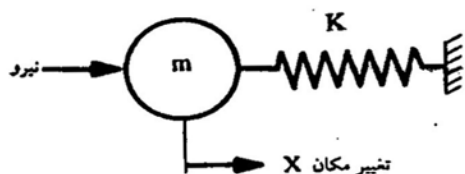
(۲-۱-۴). ترکیب اجزاء سیستمهای انرژی دار مکانیکی:

در یک سیستم مکانیکی متشکل از اجزاء فنر، وزنه و مستهلک‌کننده می‌توان نظیر سیستمهای الکتریکی با نوشتن روابط مربوط به اجزاء و ادغام کردن این روابط در یکدیگر رابطه نیرو و سرعت را در نقاط مختلف بدست آورد و سپس معادلات دیفرانسیل مربوط به سیستم مکانیکی را از آنها نتیجه‌گیری نمود که در این قسمت با ارائه مثالهایی به بررسی ترکیب سیستمهای انرژی دار مکانیکی پرداخته می‌شود.

مثال (۲-۱۰):

در مثال (۲-۹) یک مورد ساده از چنین کاربردی ارائه شده است. معادله (۲-۳۸)

نیز رابطه بین نیرو و سرعت در نقطه ۱ با نیرو و سرعت در نقطه ۳ از سیستم شکل



شکل (۲-۳۳) - سیستم مکانیکی متشکل از فنر k و جرم m .

(۲-۲۸) را بیان می‌کند. هر گاه بخواهیم معادله دیفرانسیل تغییرات تغییر مکان در سیستم شکل (۲-۳۳) را بدست آوریم، کافی است توجه کنیم که اگر در سیستم شکل (۲-۲۸) از مثال (۲-۹) سرعت نقطه ۳ مساوی صفر در نظر گرفته شود سیستم شکل (۲-۳۳) از آن نتیجه می‌شود. در نتیجه کافی است در معادله (۲-۳۸) جریان f_3 را که معادل سرعت در نقطه ۳ است مساوی صفر قرار داده و ابتدا رابطه p_1 را با f_1 بدست آوریم. اگر در معادله (۲-۳۸)، $f_3=0$ باشد داریم:

$$P_1 = \left(1 + \frac{mD^2}{K}\right) P_3 \quad (a)$$

$$f_1 = \frac{D}{K} P_3 \quad (b)$$

بجای p_3 از معادله (b) در (a) قرار می‌دهیم:

$$p_1 = \left(1 + \frac{mD^2}{K}\right) \frac{K}{D} f_1$$

و یا:

$$p_1 = (mD^2 + K) \frac{f_1}{D}$$

رابطه $\frac{f_1}{D}$ (یعنی انتگرال سرعت در نقطه ۱) از شکل (۲-۲۸) همان تغییر مکان جرم m در شکل (۲-۳۳) می‌باشد که آنرا با x نشان می‌دهیم و p_1 نیز نیروی وارده به جرم m در

شکل (۲-۳۳) می‌باشد. پس:

$$P_1 = (mD^2 + k)x$$

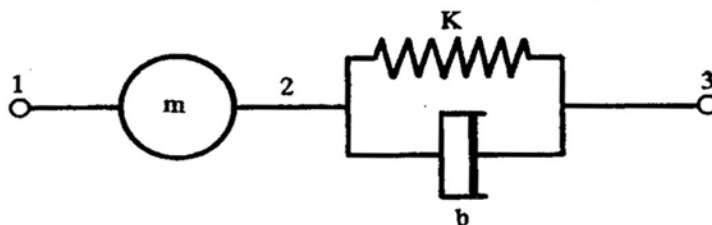
و یا:

$$p_1 = m\ddot{x} + kx \quad (2-42)$$

رابطه (۲-۴۲) معادله دیفرانسیل تغییرات x در سیستم فنر و وزنه شکل (۲-۳۱) است.

مثال (۲-۱۱):

در سیستم شکل (۲-۳۴) که شامل فنر و وزنه و مستهلک‌کننده می‌باشد، می‌خواهیم رابطه پتانسیل و سرعت در نقاط ۱ و ۳ را بدست آوریم. در این مثال مطابق انتخاب دوم معادلسازی فرض می‌کنیم که «نیرو معادل جریان $f(t)$ و سرعت معادل پتانسیل $p(t)$ باشد».



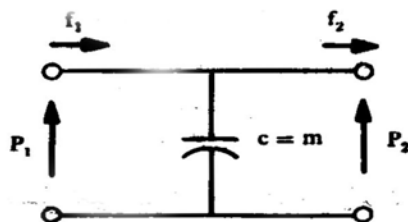
شکل (۲-۳۴) - سیستم مکانیکی متشکل از جرم m فنر k و دمپر b .

- بررسی مدار بین نقاط ۱ و ۲:

با این فرضها ابتدا رابطه P_1 و f_1 را با P_2 و f_2 بدست می‌آوریم. بین نقاط ۱ و ۲ سرعتها برابرند یعنی $P_1 = P_2$ می‌باشد. همچنین داریم:

$$f_1 - f_2 = mDP_2 \quad \text{پس:}$$

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ mD & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (a)$$



شکل (۲-۳۵). مدار الکتریکی معادل برای رابطه (a).

و مدار معادل الکتریکی رابطه فوق نیز مطابق شکل (۲-۳۵) بدست می‌آید.

- بررسی مدار بین نقاط ۲ و ۳:

بین نقاط ۲ و ۳ نیروها برابرند یعنی $f_2 = f_3$ بوده ولی سرعت نقطه ۲ (یعنی p_2) با سرعت نقطه ۳ (یعنی p_3) مساوی نیست. نیروی f_2 یا f_3 برابر است با مجموع نیروی فنر و نیروی مستهلک‌کننده، یعنی:

$$f_2 = f_3 = \text{نیروی فنر} + \text{نیروی مستهلک‌کننده}$$

$$= K(x_2 - x_3) + b(p_2 - p_3)$$

$$= \frac{K}{D}(p_2 - p_3) + b(p_2 - p_3)$$

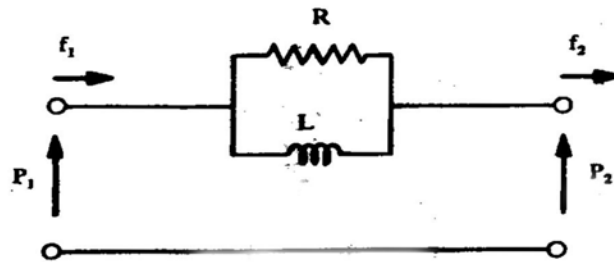
$$= (b + \frac{K}{D})(p_2 - p_3)$$

x_2 و x_3 تغییر مکان این نقاط را نشان می‌دهند که انتگرال سرعت‌های p_2 و p_3 هستند. از رابطه فوق نتیجه می‌شود:

$$p_2 - p_3 = (\frac{1}{b + \frac{K}{D}})f_3 = (\frac{D}{K + bD})f_3$$

در نتیجه بین نقاط ۲ و ۳ داریم:

$$\begin{bmatrix} p_2 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{D}{K + bD} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_3 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad (b)$$



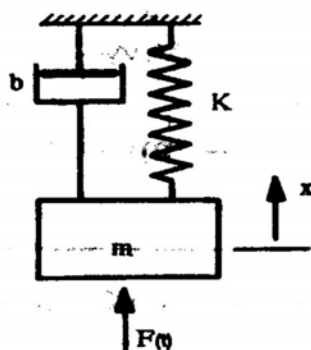
شکل (۲-۳۶) - مدار الکتریکی معادل برای رابطه (b).

رابطه (b) را می‌توانستیم از مدار معادل الکتریکی آن نیز بدست آوریم. چون جریانهای f_2 و f_3 با هم برابر (تساوی نیروها) و پتانسیلهای P_2 و P_3 متفاوتند (تفاوت سرعتها در 2 و 3) پس مدار معادل الکتریکی رابطه (b) بصورت شکل (۲-۳۶) خواهد شد. علت آنکه مقاومت معادل دمپر و سولونوئید معادل فنر را موازی قرار داده‌ایم آنست که در سیستم مکانیکی نیروی دو سرفرنیانیروی دو سر دمپر مساوی نیست و در مدار الکتریکی نیز باید جریان عبورکننده از مقاومت و سولونوئید برابر نباشند. همچنین در سیستم مکانیکی تفاضل سرعت دوانتهای فنر و دو انتهای دمپر با یکدیگر مساوی و برابر $P_2 - P_3$ می‌باشد. پس در سیستم الکتریکی معادل نیز باید اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت و دو سر سولونوئید با هم برابر باشند. برای این مدار الکتریکی با نوشتن رابطه (۲-۱۹) و با جایگزینی بجای R و L در آن رابطه (b) فوق بدست می‌آید.

- بررسی مدار بین نقاط 1 و 3:

بهر حال برای بدست آوردن رابطه بین نقاط 1 و 3 از معادلات (a) و (b) نتیجه می‌شود:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{D}{bD+K} \\ mD & \frac{mD^2}{bD+K} + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_3 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad (c)$$



شکل (۲-۳۷). سیستم مکانیکی متشکل از جرم - فنر - دمپر .

مثال (۲-۱۲):

می‌خواهیم معادله دیفرانسیل تغییرات x به ازاء نیروی ورودی F در سیستم شکل (۲-۳۷) را به دست آوریم.

بدین منظور کافیهست توجه کنیم که اگر در سیستم مثال (۲-۱۱) سرعت نقطه ۳ مساوی صفر در نظر گرفته شود سیستم شکل فوق نتیجه می‌شود. پس کافی است در معادله (c) مربوط به مثال (۲-۱۱) مقدار سرعت در نقطه ۳ یعنی p_3 را برابر صفر قرار دهیم که در اینصورت داریم:

$$p_1 = \frac{D}{bD + K} f_3$$

$$f_1 = \left(\frac{mD^2}{bD + K} + 1 \right) f_3$$

با قراردادن بجای f_3 از معادله اول در معادله دوم نتیجه می‌شود:

$$f_1 = \left(\frac{mD^2}{bD + K} + 1 \right) \frac{bD + K}{D} p_1$$

و یا:

$$f_1 = (mD^2 + bD + K) \frac{p_1}{D}$$

$\frac{P_1}{D}$ تغییر مکان نقطه 1 یعنی همان x است لذا معادله دیفرانسیل مطلوب چنین خواهد شد:

$$(mD^2 + bD + K)x = f_1 = F \quad (a) \quad \text{و یا:}$$

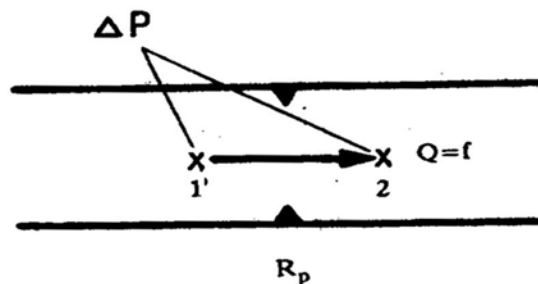
$$m\ddot{x} + b\dot{x} + Kx = F$$

(۲-۱-۵) - اجزاء سیستمهای انرژی دار در سیالات:

یک انتخاب مناسب برای پتانسیل P و جریان f در سیستم سیال، "فشار و دبی" است. از آنجا که در سیالات فشار هیدرواستاتیک معمولاً بر حسب ارتفاع سیال سنجیده می شود لذا بجای فشار می توانیم ارتفاع سیال را بعنوان معرف پتانسیل در نظر بگیریم. یعنی:

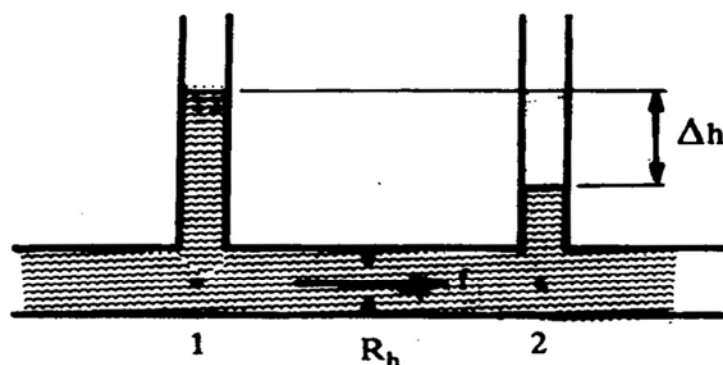
$$\begin{aligned} \text{فشار (یا ارتفاع)} &\equiv \text{پتانسیل الکتریکی (P)} \\ \text{دبی حجمی}^* &\equiv \text{جریان الکتریکی (f)} \end{aligned} \quad (۲-۴۳)$$

در سیستم سیال معمولاً بخاطر ناصافی جدارها در یک لوله (ولذا ایجاد اصطکاک) یا بخاطر وجود موانع در طول مسیر (تظیر شیر و زانویی و سوراخ و غیره) "مقاومت" نیز ایجاد می شود. گرچه این مقاومتها اغلب بصورت روابط غیر خطی بین فشار و دبی و معمولاً بصورت توان دوم ظاهر می شوند ولی ما در اینجا روابط خطی شده آنها را در نظر می گیریم. در شکل (۲-۳۸) مقاومت در مسیر سیال با R_p نمایش داده شده که باعث ایجاد اختلاف



شکل (۲-۳۸) - سیستم سیالاتی برای نمایش مشخصه های فشار، دبی و مقاومت.

* - در اینجا منظور از سیال، مایعات می باشند که در زمره سیالات تراکم ناپذیر بشمار آمده و تغییرات دانسیته آنها بسیار ناچیز و قابل اغماض می باشد (تغییر حجم اغلب مایعات با تقریب بسیار خوبی معادل صفر است)، از اینرو دبی حجمی را برای آنها در نظر می گیریم. اما برای گازها به علت قابلیت تراکم آنها، دبی جرمی را در نظر می گیریم (به بخش (۲-۲) مراجعه شود).



شکل (۳۹-۲). سیستم سیالاتی برای نمایش ارتفاع (فشار)، دبی و مقاومت.

فشار p در دو طرف مقاومت گردیده است. دبی عبورکننده از مسیر نیز با f نمایش داده شده است. در شکل (۳۹-۲) مقاومت در مسیر سیال با R_h نمایش داده شده که باعث اختلاف ارتفاع Δh گردیده است.

برای هر یک از شکل‌های (۳۸-۲) و (۳۹-۲) رابطه پتانسیل (فشار یا ارتفاع) و دبی عبارت است از:

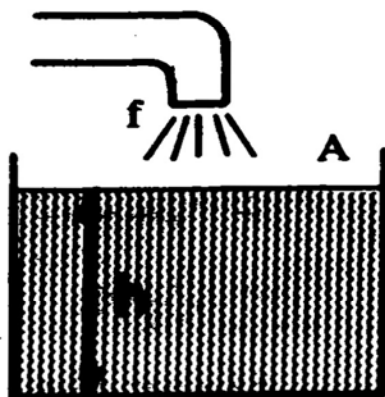
$$\Delta P = P_1 - P_2 = Rf \quad (۴۴-۲)$$

برای شکل (۳۸-۲)، Δp نمایش اختلاف فشار و p_1 و p_2 فشار در نقاط ۱ و ۲ هستند و برای شکل (۳۹-۲)، Δp نمایش اختلاف ارتفاع Δh و p_1 و p_2 بترتیب معرف ارتفاع h_1 و h_2 در نقاط ۱ و ۲ می‌باشند. مقاومت R برای سیستم شکل (۳۸-۲) برابر R_p و برای سیستم شکل (۳۹-۲) برابر R_h است. جریان f (دبی) در نقاط ۱ و ۲ از هر دو شکل برابر است یعنی:

$$f = f_1 = f_2 \quad (۴۵-۲)$$

از روابط (۴۴-۲) و (۴۵-۲) نتیجه می‌شود:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (۴۶-۲)$$



شکل (۲-۴۰) - سیستم سیالاتی مخزن مایع .

با توجه به اینکه فشار و ارتفاع با هم بصورت (ارتفاع) $\times (\rho g) =$ فشار، رابطه دارند (که در آن ρg وزن مخصوص سیال و ρ جرم مخصوص سیال است) بسادگی نتیجه می شود که بین مقاومت R_p و R_h نیز رابطه زیر برقرار است:

$$R_p = \rho g R_h \quad (2-47)$$

از مقایسه رابطه (۲-۴۶) با روابط (۲-۱۳) و (۲-۱۴) نتیجه می شود که مقاومت R در سیستم سیال معادل مقاومت R در مدار سری الکتریکی است. لازم به تذکر است که دیمانسینوهای R_p و R_h بترتیب $\frac{M}{L^4 T}$ و $\frac{T}{L^2}$ (جرم، M طول و T زمان است) می باشد. برای یافتن معادل خازن در سیستم سیال، مخزنی با سطح مقطع A را مطابق شکل (۲-۴۰) در نظر می گیریم.

در این سیستم تغییرات حجم مایع نسبت به زمان یعنی $\frac{d}{dt}(Ah)$ برابر است با دبی ورودی f :

$$\frac{d}{dt}(Ah) = f$$

و چون سطح مقطع ثابت است لذا:

$$A \frac{d}{dt} h = f \quad (2-48)$$

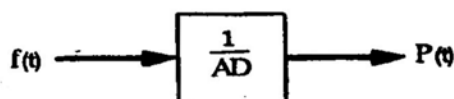
اگر ارتفاع معادل پتانسیل و دبی معادل جریان باشد، داریم:

$$\begin{aligned} A \frac{d}{dt} P &= f \\ ADP &= f \end{aligned} \quad (۴۹-۲)$$

و یا:

$$P(t) = \frac{1}{AD} f(t)$$

که نمایش ترسیمی آن بصورت دیاگرام جعبه‌ای شکل (۴۱-۲) در می‌آید.



شکل (۴۱-۲) - دیاگرام جعبه‌ای برای نمایش رابطه (۴۹-۲).

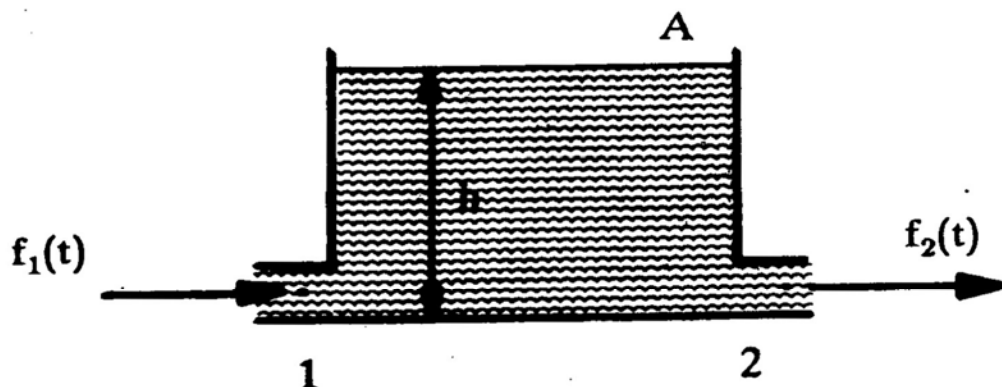
از مقایسه این دیاگرام با دیاگرام شکل (۵-۲) در سیستم الکتریکی نتیجه می‌شود که: کمیت A یعنی سطح مقطع مخزن در سیستم سیال، معادل ظرفیت C خازن در سیستم الکتریکی با رابطه $C \equiv A$ می‌باشد.

اگر مخزن شکل (۴۰-۲) را بصورت شکل (۴۲-۲) نمایش دهیم در اینجا نیز رابطه (۴۸-۲) با شرط $f = f_1 - f_2$ صادق است و ارتفاع h همان پتانسیل P می‌باشد و داریم:

$$P = P_1 = P_2 \quad (۵۰-۲)$$

بنابر این برای یک مخزن می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ AD & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (۵۱-۲)$$

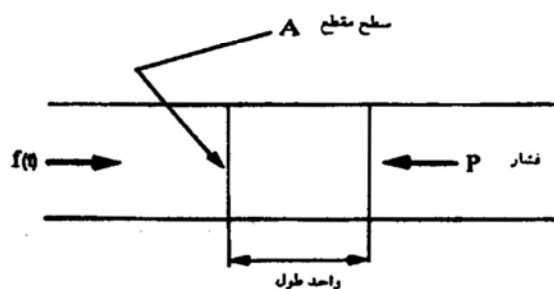


شکل (۲-۴۲) - سیستم سیالاتی مخزن مایع.

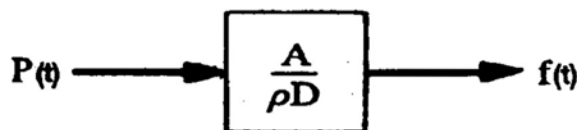
بسادگی می توان نشان داد که اگر بجای ارتفاع، فشار را معادل پتانسیل در نظر بگیریم، $\frac{A}{\rho g}$ معادل ظرفیت C خازن در سیستم الکتریکی می شود (زیرا $h = \frac{P}{\gamma} = \frac{P}{\rho g}$).
 برای سیالات معمولاً معادل سولونوئید در سیستم الکتریکی معرفی نمی شود زیرا در سیستم سیال معادل سولونوئید به اثر اینرسی بستگی دارد که برای سیستمهای مورد بحث ما قابل صرف نظر کردن است. بهر حال با در نظر گرفتن اثر اینرسی می توان معادل سولونوئید در سیال را به ترتیب زیر محاسبه نمود.

فرض می کنیم یک سیال غیر قابل تراکم در لوله شکل (۲-۴۳) در جریان باشد. دبی سیال $f(t)$ ، سطح مقطع لوله A و جرم مخصوص سیال ρ در نظر گرفته شده است. برای مقطعی از سیال به طول واحد رابطه تعادل نیروها را می نویسیم یعنی:

تغییر اندازه حرکت در واحد زمان (نرخ تغییرات ممنتوم) = برآیند نیروها



شکل (۲-۴۳) - لوله عبور سیال برای بررسی اثر اینرسی سیال (معادل سولونوئید الکتریکی).



شکل (۲-۴۴)- دیاگرام جعبه‌ای برای نمایش رابطه (۲-۵۲).

در اینجا:

$$P.A = \rho \frac{d}{dt} f(t)$$

و یا:

$$\frac{d}{dt} f(t) = \frac{A}{\rho} P(t)$$

(۲-۵۲)

$$f(t) = \frac{A}{\rho D} P(t)$$

رابطه (۲-۵۲) را می‌توان بصورت دیاگرام جعبه‌ای شکل (۲-۴۴) نمایش داد. از مقایسه دیاگرام شکل (۲-۴۴) با دیاگرام شکل (۲-۱۰) نتیجه می‌شود که در سیستم سیال $\frac{\rho}{A}$ معادل سولونوئید در سیستم الکتریکی است. اگر بجای واحد طول، مقطعی به طول L از لوله شکل (۲-۴۳) را در نظر بگیریم معادل سولونوئید عبارت از $\frac{\rho L}{A}$ خواهد بود. باید توجه داشت که در سیستم سیال نمی‌توان اثر سولونوئید (اینرسی) را از اثر خازن (سطح مقطع) از هم مجزا در نظر گرفت^۱ و از آنجا که سیستمهای مورد بررسی ما تنها سیستمهای با پارامترهای مجزا^۲ را شامل می‌شود و از طرفی اثر اینرسی نیز در سیالات کوچک است (سیالات غیرقابل تراکم) لذا ما معمولاً در این نوع سیالات عنصر معادل اینرسی (سولونوئید) را "قابل اغماض" فرض می‌کنیم.

(۲-۱-۶)- ترکیب اجزاء انرژی‌دار در سیالات:

برای بدست آوردن رابطه پتانسیل (فشار یا ارتفاع) و دبی یا جریان در نقاط مختلف یک سیستم سیال بمنظور رسیدن به معادلات دیفرانسیل آنها به ذکر چند مثال می‌پردازیم. لازم به تذکر است که در فصل سوم خواهیم دید که در مورد سیستمهای سیالاتی و حرارتی معادلات

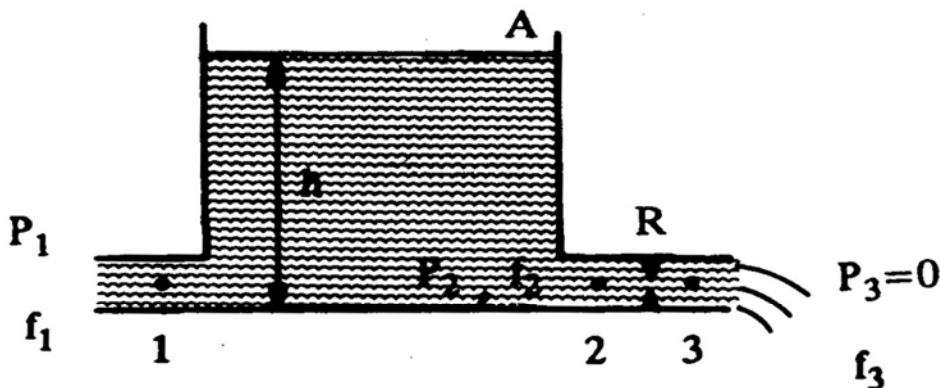
۱. Macroscopic Appearance of Inductance

۲. Lumped Parameter Systems

مربوط به این سیستمها بسادگی از روش ریاضی معادله وضعیت بدست می آیند.

مثال (۲-۱۳):

در سیستم شکل (۲-۴۵) می خواهیم رابطه بین P_1 و f_1 را بدست آوریم. نشان خواهیم داد که این رابطه بصورت یک معادله دیفرانسیل مرتبه یک می باشد.



شکل (۲-۴۵). سیستم سیالاتی مخزن مایع.

برای این منظور ابتدا رابطه بین P_1 و f_1 را با P_3 و f_3 بدست می آوریم و چون نقطه محل ورود سیال به اتمسفر است، پتانسیل P_3 مساوی صفر می باشد (زیرا فشار یا ارتفاع سیال در اتمسفر برابر صفر می باشد). اگر ارتفاع را بعنوان پتانسیل در نظر بگیریم با استفاده از معادله (۲-۵۱) رابطه بین P_1 و f_1 با P_2 و f_2 چنین نوشته می شود:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ AD & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (a)$$

همچنین رابطه بین P_2 و f_2 با P_3 و f_3 از معادله (۲-۴۶) بصورت زیر بدست می آید:

$$\begin{bmatrix} P_2 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_3 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad (b)$$

با قراردادن بجای P_2 و f_2 از معادله (b) در (a) نتیجه می شود:

(c)

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ AD & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_3 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R \\ AD & RAD + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_3 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

ولی در اینجا $P_3 = 0$ است، بنابراین:

$$P_1 = Rf_3, \quad f_1 = (RAD + 1)f_3, \quad P_1 = P_2$$

$$P_1 = P_2 = \frac{R}{RAD + 1} f_1 \quad (53-2)$$

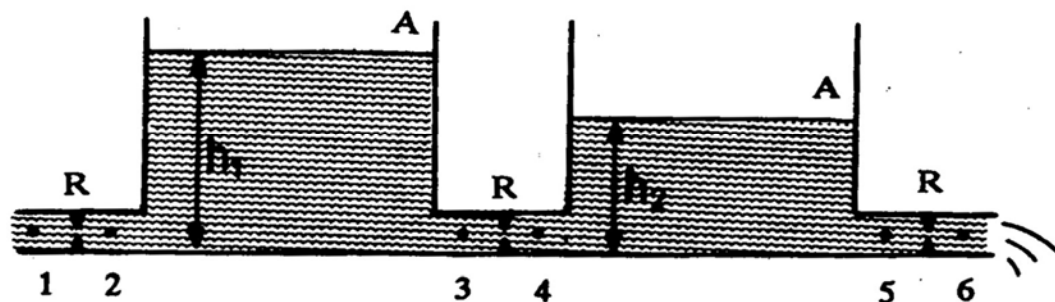
و یا:

$$RADP_1 + P_1 = Rf_1 \quad (54-2)$$

مثال (۲-۱۴):

برای سیستم شکل (۲-۴۶) می‌خواهیم رابطه بین ارتفاع h_1 و h_2 در دو ظرف را با فشار ورودی $p = P_1$ بدست می‌آوریم. سطح مقطع هر دو ظرف برابر و مساوی A و همه مقاومتها برابر R هستند.

با استفاده از معادلات (۲-۴۶) و (۲-۵۱) رابطه بین فشار (پتانسیل) و دبی (جریان) را بطور متوالی می‌توان بین نقاط ۱ تا ۶ نوشت. قابل ذکر است که چون پتانسیل معادل



شکل (۲-۴۶). سیستم سیالاتی متشکل از مخزنهای مرتبط.

فشار در نظر گرفته شده است در روابط زیر $C = \frac{A}{\rho g}$ می‌باشد.

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (a)$$

$$\begin{bmatrix} p_2 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ CD & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_3 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad (b)$$

$$\begin{bmatrix} p_3 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_4 \\ f_4 \end{bmatrix} \quad (c)$$

$$\begin{bmatrix} p_4 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ CD & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_5 \\ f_5 \end{bmatrix} \quad (d)$$

$$\begin{bmatrix} p_5 \\ f_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_6 \\ f_6 \end{bmatrix} \quad (e)$$

از روابط (a) تا (e) نتیجه می‌شود:

(f)

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+RCD)^2 + RCD & R(1+RCD)(3+RCD) \\ CD(2+RCD) & (1+RCD)^2 + RCD \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_6 \\ f_6 \end{bmatrix}$$

چون $p_6=0$ است لذا:

$$p_1 = R(1+RCD)(3+RCD)f_6 \quad (g)$$

$$f_1 = [(1+RCD)^2 + RCD]f_6 \quad (h)$$

از تقسیم دو رابطه بر هم داریم:

$$f_1 = \frac{(1+RCD)^2 + RCD}{R(1+RCD)(3+RCD)} p_1 \quad (i)$$

از طرفی با توجه به این که $p_6=0$ است از معادله c نتیجه می‌شود:

$$p_5 = Rf_6 \quad (j)$$

با قراردادن از (j) در (g) رابطه ذیل بدست می‌آید:

$$p_1 = (1+RCD)(3+RCD)p_5 \quad (k)$$

$$p_5 = \frac{1}{(1+RCD)(3+RCD)} p_1 \quad \text{و یا:}$$

با توجه به معادله (b) بسادگی نتیجه می‌شود که فشارهای p_2 و p_3 مساوی هستند. از

طرفی این فشارها با ارتفاع h_1 بصورت زیر بستگی دارند:

$$P_2 = P_3 = \rho g h_1 \quad (l)$$

همچنین از (d) نتیجه می شود:

$$P_4 = P_5 = \rho g h_2 \quad (m)$$

با قراردادن بجای P_5 از (m) در (k) و با توجه به اینکه P_1 همان فشار ورودی P می باشد رابطه زیر حاصل می شود:

$$P_2 = \frac{2 + RCD}{(1 + RCD)(3 + RCD)} \frac{P}{\rho g} \quad (n)$$

از طرفی از رابطه (a) داریم:

$$P_2 = P_1 - Rf_1 \quad (o)$$

از رابطه (i) مقدار f_1 را در رابطه (o) قرار می دهیم و با توجه به اینکه $P_1 = P$ است خواهیم داشت:

$$h_1 = \frac{2 + RCD}{(1 + RCD)(3 + RCD)} \frac{P}{\rho g} \quad (p)$$

و با استفاده از رابطه (l) نتیجه می شود:

$$h_1 = \frac{2 + RCD}{(1 + RCD)(3 + RCD)} \frac{P}{\rho g} \quad (q)$$

روابط (n) و (q) که ارتباط بین h_1 و h_2 را با P_1 (بمبارتی p) مشخص می کنند همان روابط مورد نظر هستند.

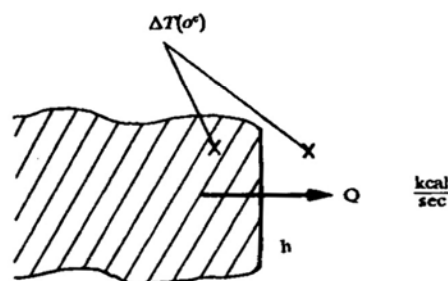
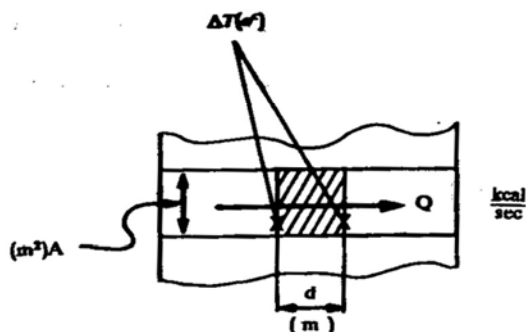
(۲-۱-۷) - اجزاء سیستمهای انرژی دار حرارتی:

در سیستمهای حرارتی درجه حرارت T معادل پتانسیل P و دبی حرارتی Q معادل جریان f در نظر گرفته می شود یعنی:

دما (T) $\equiv$ پتانسیل الکتریکی (P)

دبی حرارتی (Q) $\equiv$ جریان الکتریکی (f)

با این انتخاب، همانند قبل معادل خازن و مقاومت الکتریکی را از سیستم حرارتی نیز می توان بدست آورد، ولی المانی معادل سولونوئید در این سیستم (حرارتی) وجود ندارد. از طرفی با انتخاب فوق حاصل ضرب پتانسیل در جریان (یعنی $T \times Q$) معادل قدرت یا توان حرارتی نخواهد بود بلکه متغیرهایی که حاصل ضرب آنها قدرت را در سیستم حرارتی بیان می کند درجه حرارت (T) و آنروپی (S) می باشد. اما از آنجا که انتخاب آنروپی بعنوان پتانسیل هیچ کمکی به تحلیل سیستم نمی نماید، لذا درجه حرارت و دبی حرارتی بعنوان پتانسیل و جریان در نظر گرفته شده اند. برای پیدا کردن معادل مقاومت در سیستم حرارتی دو حالت انتقال حرارت از طریق کنوکسیون^۱ و هدایت^۲ را که بترتیب در اشکال (۲-۴۷-۲) و (۲-۴۷-۲b) نمایش



(b) - هدایت حرارت (در یک محیط) (a) کنوکسیون (انتقال حرارت از یک محیط به محیط دیگر)

شکل (۲-۴۷) - نمایش سیستم حرارتی در حالات کنوکسیون و هدایت حرارت.

داده شده اند مورد بررسی قرار می دهیم.

۱. Convection

۲. Conduction

اگر انتقال حرارت از طریق سطحی به مساحت A و با ضریب انتقال حرارت h سطحی Q یک محیط به محیط دیگر انجام شود و دبی حرارتی منتقله Q باعث اختلاف درجه حرارت ΔT گردد داریم:

$$Q = h \cdot A \cdot \Delta T \quad (55-2)$$

و یا:

$$f(t) = h \cdot A \cdot P(t) \quad (56-2)$$

از مقایسه این معادله با رابطه (۲-۲) یا (۳-۲) نتیجه می‌شود:

$$R = \frac{1}{h \cdot A} \quad (57-2)$$

همچنین در مورد هدایت حرارت در یک جسم [شکل (۲-۴۷-b)] با سطح مقطع A و به ضخامت d و با ضریب هدایت k ، رابطه دبی حرارتی و اختلاف درجه حرارت دو نقطه مشخص شده عبارت است از:

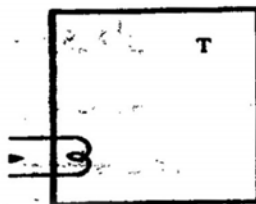
$$Q = k \cdot A \cdot \frac{1}{d} \cdot \Delta T \quad (58-2)$$

و یا:

$$f(t) = \frac{k \cdot A}{d} \cdot P(t) \quad (59-2)$$

از مقایسه این رابطه با روابط (۲-۲) و (۳-۲) نتیجه می‌شود:

$$R = \frac{d}{k \cdot A} \quad (60-2)$$



شکل (۲-۴۸). سیستم حرارتی معادل خازن الکتریکی C.

برای پیدا کردن معادل حرارتی خازن، شکل (۲-۴۸) را در نظر می‌گیریم. با فرض اینکه درجه حرارت در محیط یکنواخت و نشت حرارتی نیز وجود نداشته باشد، رابطه تعادل حرارتی این سیستم عبارت است از:

$$Q = MC \frac{dT}{dt} \quad (۲-۶۱)$$

که در آن M جرم سیال داخل مخزن، C گرمای ویژه سیال* و حاصلضرب MC نیز ظرفیت حرارتی مخزن است. با استفاده از معادله‌های الکتریکی رابطه (۲-۶۱) را می‌توان چنین نوشت:

$$f(t) = M.C \frac{d}{dt} P(t)$$

و یا:

$$P(t) = \frac{1}{M.C.D} f(t) \quad (۲-۶۲)$$

از مقایسه رابطه (۲-۶۲) با معادله (۲-۷) نتیجه می‌شود که:

ظرفیت حرارتی MC در سیستم حرارتی معادل ظرفیت C در خازن الکتریکی با رابطه $C = MC$ می‌باشد. همانند سیستمهای مکانیکی و سیالاتی در سیستمهای حرارتی نیز می‌توان ترکیب اجزاء را مورد بررسی قرارداد و معادلات این نوع سیستمهای ترکیبی را بدست آورد. از آنجا که این معادلات از طریق معادله وضعیت که در فصل سوم بیان خواهد شد با سهولت بیشتری (از نظر محاسباتی) بدست می‌آیند، لذا مجموعه یا ترکیب اجزاء سیستمهای حرارتی در فصل بعد مورد بررسی قرار می‌گیرد.

* - دقت شود که C معرف گرمای ویژه سیال و C معرف ظرفیت خازن می‌باشد.

(۲-۲) - سایر سیستم‌های انرژی دار:

علاوه بر سیستم‌های انرژی داری که در بخش (۱-۲) بتفصیل مورد بررسی قرار گرفته‌اند، سیستم‌های انرژی دار دیگری نظیر سیستم‌های جریان گاز و سیستم‌هایی که در آن سیال عامل حرارت را منتقل می‌کند وجود دارند که در این قسمت به بررسی آنها پرداخته می‌شود.

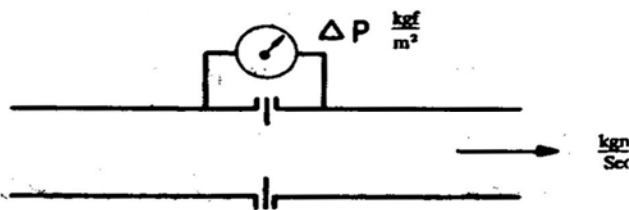
در سیستم‌های گازی همانند سیستم‌های سیالاتی فشار را معادل پتانسیل $p(t)$ در نظر می‌گیریم ولی از آنجا که در گازها دانسیته سیال تغییر می‌کند بجای دبی حجمی، دبی جرمی را معادل جریان $f(t)$ در نظر می‌گیریم*. همچنین در بررسی سیستم‌های گازی اهمیت تأثیر عوامل ترمودینامیکی را همواره باید مد نظر داشت. این عوامل غالباً سیستم را از حالت خطی آن خارج می‌کنند. گرچه روابط بین اختلاف فشار Δp و دبی جرمی $f(t)$ معمولاً خطی نیستند، ولی برای تغییرات کوچک دبی، امکان خطی کردن آنها وجود دارد. قابل ذکر است که در شکل (۲-۴۹)، سوراخ معادل یک مقاومت سری است.

مخزن شکل (۲-۵۰) معادل یک خازن موازی است و رابطه بین پتانسیل و جریان در نقاط ۱ و ۲ را برای آن می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ CD & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (۲-۶۳)$$

که در آن فشار p مخزن مساوی فشارهای P_1 و P_2 است.

$$P_1 = P_2 = P \quad (۲-۶۴)$$



شکل (۲-۴۹) - نمایش سیستم گازی برای بیان مشخصه‌های فشار p و دبی جرمی Q .



شکل (۲-۵۰). سیستم گازی (مخزن گازی).

برای بدست آوردن معادل c (ظرفیت گرمایی ویژه) به ترتیب زیر روابط مربوطه را می نویسیم. تغییرات جرم مخزن عبارت است از:

$$\frac{dm}{dt} = f_1 - f_2 \quad (۲-۶۵)$$

اگر حجم مخزن V و حجم مخصوص گاز^۱ باشد داریم:

$$m = \frac{V}{v}$$

با قراردادن این رابطه در معادله (۲-۶۵) و با توجه به اینکه $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dp} \cdot \frac{dp}{dt}$ می باشد داریم:

$$\frac{d}{dt} m = \frac{d}{dt} \left(\frac{V}{v} \right) = -\frac{V}{v^2} \cdot \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dp}{dt} = f_1 - f_2 \quad (۲-۶۶)$$

از طرفی برای سیال پلی تروپیک^۱ رابطه (مقدار ثابت $pv^n =$) برقرار است که از آن مقدار $\frac{dv}{dp}$ بدست می آید:

$$v^n dP + n P v^{n-1} dv = 0$$

و یا:

$$\frac{dv}{dP} = \frac{-v}{nP}$$

که با قراردادن آن در معادله (۲-۶۶) رابطه ذیل حاصل می شود:

$$\frac{VdP}{nvPdt} = f_1 - f_2 \quad (۶۷-۲)$$

همچنین از معادلات (۶۳-۲) و (۶۴-۲) نیز داریم:

$$f_1 - f_2 = CDP = C \frac{d}{dt} P$$

که از مقایسه این رابطه با معادله (۶۷-۲) نتیجه می‌شود:

$$C = \frac{V}{nvP}$$

از طرفی بین فشار مطلق p و حجم مخصوص v در یک گاز ایده‌آل رابطه زیر برقرار است:

$$Pv = R_g T$$

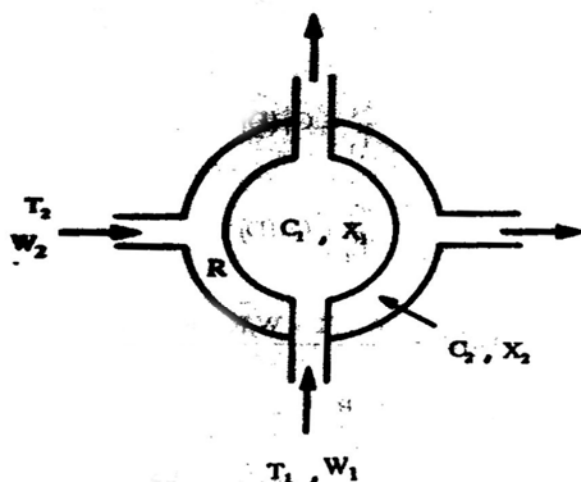
که در آن R_g مقدار ثابت گاز و T درجه حرارت است بنابراین خواهیم داشت:

$$C = \frac{V}{nR_g T}$$

اگر فرآیند همدم (دما ثابت) ^۱ باشد، در اینصورت $n=1$ و مقدار T نیز ثابت بوده و لذا خازن C خطی خواهد بود. در غیراینصورت بدلیل تغییرات درجه حرارت، خازن C خطی نخواهد بود. در مورد مبدل‌های حرارتی تنها به ذکر یک مثال اکتفا می‌کنیم.

مثال (۱۵-۲):

در شکل (۵۱-۲) شماتیک نوعی مبدل حرارتی (با جریان جدا از هم سیالات گرم و سرد) نشان داده شده است. با فرض اختلاط کامل هر سیال هنگام عبور از مسیر خود در داخل مبدل و ثابت و یکنواخت بودن درجه حرارت، مجموعه مبدل را به دو مخزن



شکل (۲-۵۱). سیستم حرارتی (مبدل حرارتی نوع جریانهای مجزا).

مجزا (و مجاور) هم در نظر می‌گیریم. ظرفیت حرارتی هر یک از مخازن سیال داخلی و خارجی را به ترتیب با C_1 و C_2 و مقاومت کل سطح حرارتی را با R نشان می‌دهیم. همچنین W_1 و W_2 نیز به ترتیب معرف حاصلضرب دبی جرمی در ظرفیت حرارتی (یعنی به ترتیب برابر $m_1 c_1$ و $m_2 c_2$) هر یک از جریانهاست. اگر دماهای ورودی جریانها به ترتیب T_1 و T_2 باشند، معادلات تعادل حرارتی سیال عبوری از هر مخزن به ترتیب ذیل خواهد بود.

$$C_1 \frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{R} (x_2 - x_1) + W_1 (T_1 - x_1)$$

$$C_2 \frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{R} (x_1 - x_2) + W_2 (T_2 - x_2)$$

اگر خروجی این سیستم x_1 (درجه حرارت مخزن یک) در نظر گرفته شود، با ساده کردن روابط (۵) و (۶) می‌توان نشان داد که نسبت خروجی x_1 به هر یک از ورودیهای

T_1 و T_2 عبارت است از:

$$\frac{x_1}{T_1} = G_1(D)$$

که در آن :

$$\frac{x_2}{T_2} = G_2(D)$$

$$G_1(D) = \frac{W_1 R(1 + W_2 R + R C_2 D)}{\Delta}$$

و همچنین :

$$G_2(D) = \frac{W_2 R}{\Delta}$$

بوده که Δ نیز معرف عبارت ذیل می باشد:

$$\Delta = C_1 C_2 R^2 D^2 + [(C_1 + C_2)R + (C_1 W_2 + C_2 W_1)R^2] D + (W_1 R + W_2 R + W_1 W_2 R^2)$$

(۱-۲-۲) - ترانس دیوسرها و ترانسفورمرها :

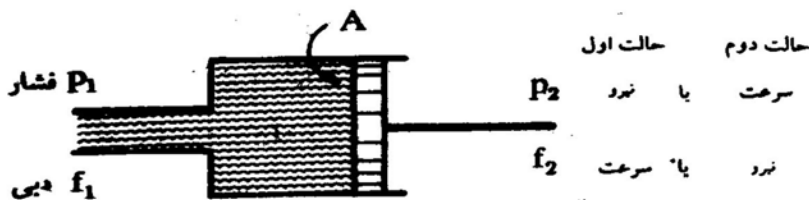
ترانس دیوسر وسیله‌ای است که یک نوع انرژی را به نوع دیگری (مثلاً انرژی مکانیکی را به انرژی هیدرولیکی) تبدیل می‌کند. در یک ترانس دیوسر ایده‌آل اتلاف انرژی وجود ندارد در نتیجه قدرت یا توان در یک طرف ترانس دیوسر (اولیه) با قدرت یا توان در طرف دیگر آن (ثانویه) برابر است. متغیرهای اولیه و ثانویه ترانس دیوسر را با اندیسهای 1 و 2 نشان می‌دهیم. چون در سیستمهای مکانیکی، الکتریکی و هیدرولیکی حاصلضرب "پتانسیل در جریان" نشاندهنده قدرت است، در ترانس دیوسرهائی که انرژی اینگونه سیستمها را به هم تبدیل می‌کنند حاصلضرب فوق در دو طرف ترانس دیوسر برابر خواهد بود. یعنی:

ترانسفورمر وسیله‌ای است که اساساً انتقال انرژی را (بدون تغییر آن از نوعی به نوع دیگر) بعهده دارد که در عین حال ضمن ثابت نگه داشتن مقدار کل انرژی، موجب کاهش یا افزایش اجزای انرژی (یعنی پتانسیل یا جریان) می‌گردد بطوریکه حاصلضرب آنها همواره مقدار ثابتی باقی می‌ماند. بعنوان مثال اگر مقدار پتانسیل در ثانویه نسبت به مقدار آن در اولیه

کاهش یابد جریان در ثانویه نسبت به اولیه افزایش یافته و بعکس، اگر پتانسیل ثانویه افزایش یابد جریان آن کاهش می یابد بطوری که همانند ترانس دیوسر، در یک ترانسفورمر ایده آل نیز رابطه $P_1 f_1 = P_2 f_2$ همواره برقرار می باشد. بررسی تحلیلی هر یک از دو سیستم مذکور به تفکیک در دو قسمت بعدی ارائه شده است.

(۲-۲-۲) - ترانس دیوسرها:

شکل (۲-۵۲) مثالی ساده از یک سیستم تبدیل انرژی از نوع سیالاتی به نوع مکانیکی (یا بالعکس) را نشان می دهد. این وسیله متناسب با استفاده از آن می تواند بعنوان یک موتور هیدرولیکی یا یک پمپ مورد بررسی قرار گیرد.



شکل (۲-۵۲) - موتور هیدرولیکی ایده آل بعنوان نمونه ای از یک ترانس دیوسر.

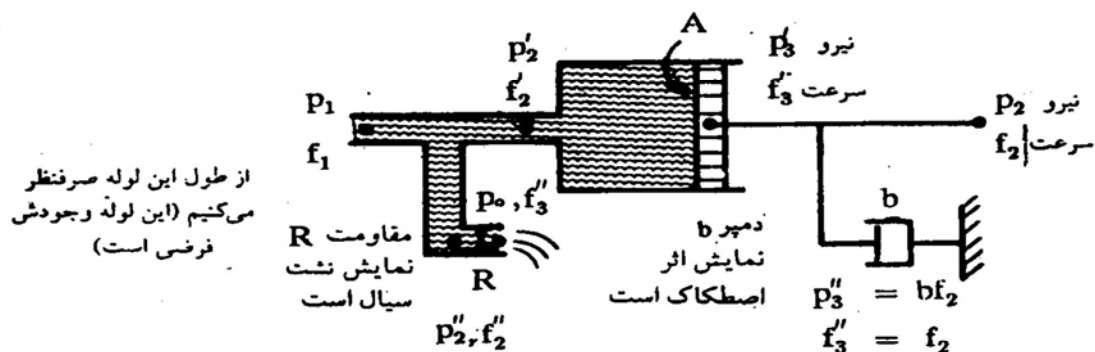
اگر P_1 فشار و f_1 دبی و P_2 نیرو و f_2 سرعت باشد داریم:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{P_2}{A} \\ A f_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} P_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{A} & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (۲-۶۸)$$

ولی اگر P_2 سرعت و f_2 نیرو باشد نتیجه می شود:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{f_2}{A} \\ A P_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} P_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{A} \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (۲-۶۹)$$

عوامل متعددی نظیر نشت سیال یا اصطکاک پیستون و غیره می توانند موتور هیدرولیکی را



شکل (۵۳-۲) - نمایش ساده‌ای از موتور هیدرولیکی به همراه نشت سیال بر اثر اصطکاک.

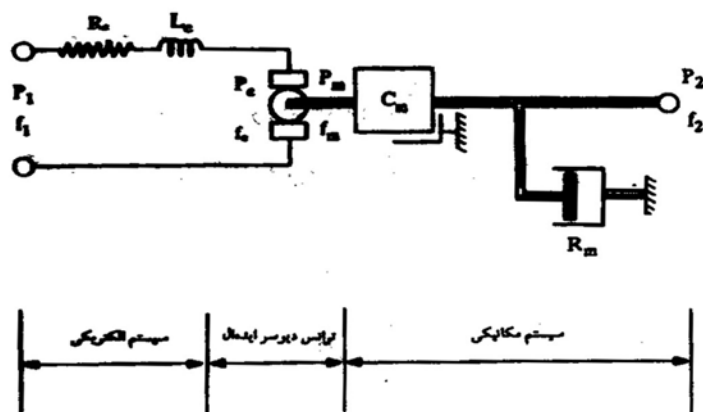
از حالت یک ترانس دیوسر ایده‌آل خارج نمایند. شکل (۵۳-۲) نمایش ساده‌ای از یک موتور هیدرولیکی است که در آن نشت سیال با مقاومت R و اثر اصطکاک با دمپر b نشان داده شده است. در این صورت اگر P_2 نیرو و f_2 سرعت باشد در این سیستم غیر ایده‌آل، رابطه بین P_1 و f_1 با P_2 و f_2 بصورت زیر درمی‌آید.

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{A} & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (۷۰-۲)$$

مثالهای دیگری از ترانس دیوسرها را در شکل (۵۴-۲) ملاحظه می‌نمائید. ترانس دیوسر مبدل انرژی الکتریکی به انرژی مکانیکی دورانی را "موتور" و ترانس دیوسر مبدل انرژی مکانیکی به انرژی الکتریکی را "ژنراتور" می‌نامند.



شکل (۵۴-۲) - نمایش کلی موتور و ژنراتور بعنوان ترانس دیوسر.



شکل (۲-۵۵). نمایش موتور DC بعنوان یک ترانس دیوسر الکترومکانیک.

حال برای روشن شدن مطلب به ذکر مثالی می‌پردازیم. شکل (۲-۵۵) یک ترانس دیوسر الکترومکانیک یا یک موتور DC را نشان می‌دهد. در اینجا سیستم به یک ترانس دیوسر ایده‌آل و بخشهای دینامیکی و اتلاف انرژی آن تقسیم شده است. یعنی سیستم الکتریکی، ترانس دیوسر ایده‌آل و سیستم مکانیکی مجموعاً معرف یک موتور DC به عنوان یک ترانس دیوسر واقعی در تبدیل انرژی الکتریکی به مکانیکی می‌باشند. پتانسیل P_1 و جریان f_1 بترتیب ولتاژ و شدت جریان را در نقطه ۱ نشان می‌دهند. P_c و f_c بترتیب نشاندهنده اختلاف پتانسیل و شدت جریان آرمیچر و P_m نیز عبارت از سرعت دورانی روتور می‌باشد. همچنین f_m عبارت از گشتاور حاصله و C_m نیز معرف اینرسی روتور و معادل خازن الکتریکی است. R_m نیز نمایش اصطکاک و معادل مقاومت در سیستم مشابه الکتریکی است. بنابراین رابطه بین P_1 و f_1 با P_2 و f_2 برای این سیستم عبارت است از:

(۲-۷۱)

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R_c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & L_c D \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ C_m D & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R_m} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

(۳-۲-۲) - ترانسفورمرها:

چند نمونه از انواع ساده ترانسفورمرها در شکل (۵۶-۲) نشان داده شده است. مثلاً در شکل (۵۶-۲) که یک اهم را نشان می‌دهد، اگر اهم بدون حجم در نظر گرفته شود با نوشتن معادله تعادل ممتوم داریم:

$$f_1 a = f_2 b \quad (۷۲-۲)$$

همچنین با توجه به برابری سرعت زاویه‌ای در کلیه نقاط میله نتیجه می‌شود:

$$\frac{P_1}{a} = \frac{P_2}{b} \quad (۷۳-۲)$$

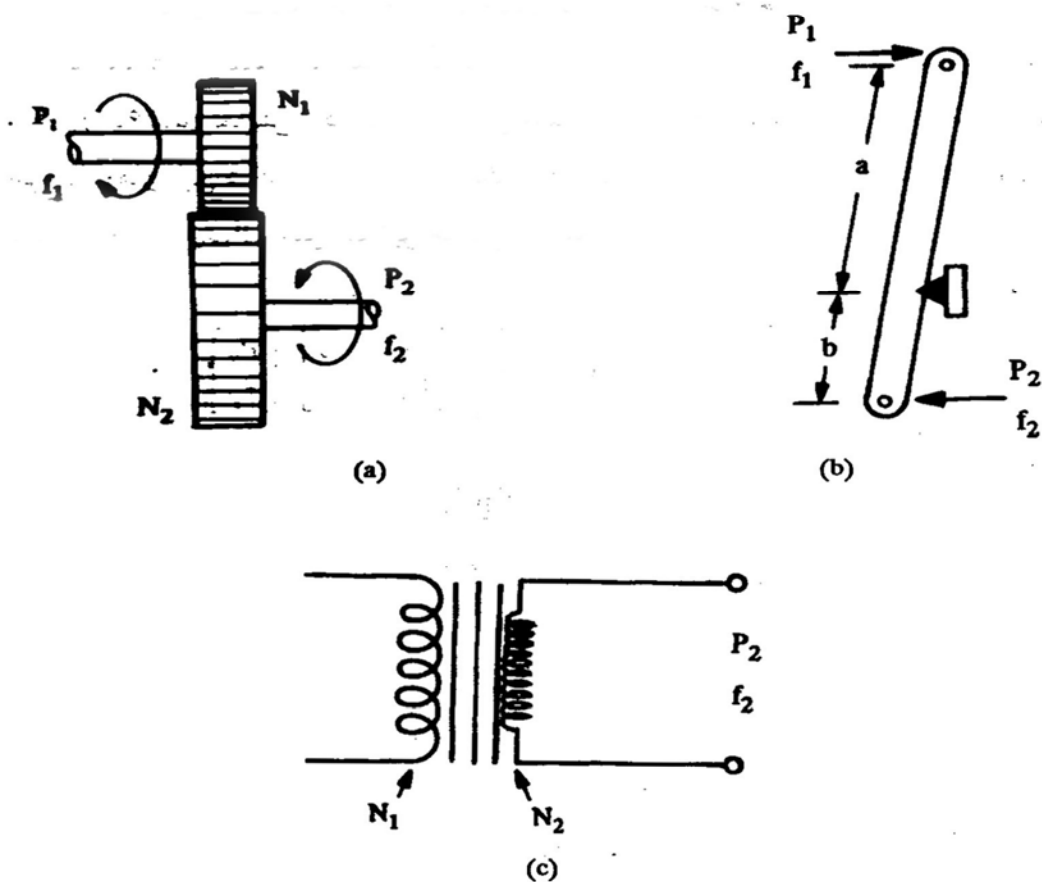
$$P_1 = \frac{a}{b} P_2 \quad \text{وینا:}$$

از معادلات (۷۲-۲) و (۷۳-۲) رابطه ماتریسی مربوط به این اهم بعنوان یک ترانسفورمر چنین بدست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a}{b} & 0 \\ 0 & \frac{b}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (۷۴-۲)$$

ماتریس مربع طرف دوم معادله (۷۴-۲) که در مورد یک ترانسفورمر ایده‌آل بکار می‌رود بطور کلی بصورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$[M] = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix} \quad (۷۵-۲)$$



شکل (۲-۵۶) - مثالهایی از ترانسفورمرهای ایده آل.

در این رابطه r معمولاً ضریب دوران^۱ نامیده می‌شود. در هر یک از شکل‌های (۲-۵۶، b, c) قدرت در اولیه برابر قدرت در ثانویه است، یعنی:

$$P_1 f_1 = P_2 f_2$$

واضح است که این رابطه در مورد هر ترانسفورمر ایده‌آل، که ماتریس M مربوط به آن بصورت ماتریس مربع (۲-۷۵) می‌باشد، صادق است. مثلاً در مورد چرخ‌دنده‌های شکل (۲-۵۶، a)

۱. Turn Ratio

برای ایده‌آل‌سازی سیستم، چنانچه از اثر ممان اینرسی و یا جرم چرخ‌دنده‌ها صرف‌نظر شود این سیستم نمایش ترانسفورمر ایده‌آل می‌باشد. ولی با در نظر گرفتن اثر ممان اینرسی، سیستم شکل (۲-۵۶) نمایش یک ترانسفورمر غیر ایده‌آل خواهد بود. اگر ممان اینرسی چرخ‌دنده‌های این شکل با J_1 و J_2 نمایش داده شود رابطه بین p_1 و f_1 با p_2 و f_2 در این ترانسفورمر غیرایده‌آل بصورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j_1 D & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j_2 D & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

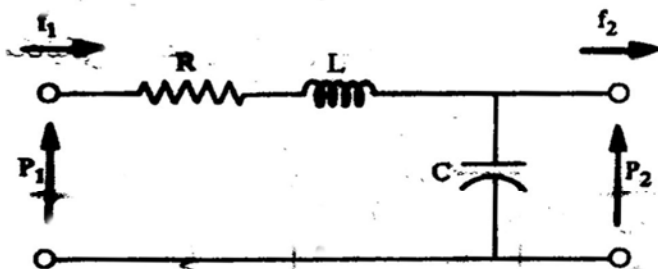
$$= \begin{bmatrix} r & 0 \\ (rj_1 + \frac{j_2}{r}) D & \frac{1}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ f_2 \end{bmatrix}$$



مسائل

(۱-۲) - در سیستم شکل (م-۱-۲)، P_1 و P_2 پتانسیل یا ولتاژ و f_1 و f_2 جریان الکتریکی می‌باشند.

اولاً: رابطه بین P_1 و f_1 را با P_2 و f_2 بصورت یک ماتریس 2×2 بدست آورید.
ثانیاً: با مساوی صفر قراردادن P_2 رابطه P_1 و f_1 را بصورت دیاگرام جبهه‌ای نشان دهید.



شکل (م-۱-۲)

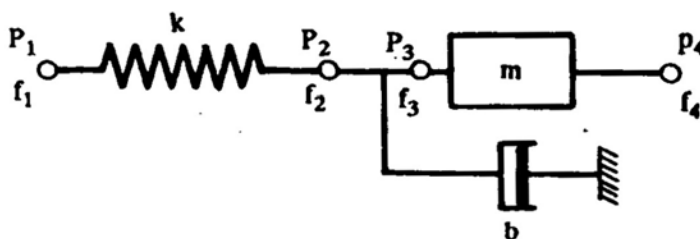
(۲-۲) - یک سیستم فنر و وزنه و دمپر در شکل (م-۲-۲) نمایش داده شده که در آن k ثابت فنر و b ضریب مستهلک‌کننده و m معرف جرم می‌باشد.

اولاً: با فرض معادل بودن "سرعت با پتانسیل"، معادل الکتریکی سیستم را رسم کنید.

ثانیاً: رابطه بین P_1 و f_1 را با P_4 و f_4 بصورت یک ماتریس 2×2 بدست آورید.

ثالثاً: سرعت نقطه ۴ را مساوی صفر در نظر بگیرید (نقطه ۴ ساکن فرض شود) و رابطه بین P_1 و f_1 را بصورت یک معادله دیفرانسیل بدست آورید.

رابعاً: سرعت نقطه ۱ را مساوی صفر در نظر بگیرید و رابطه بین P_4 و f_4 را بدست آورید.



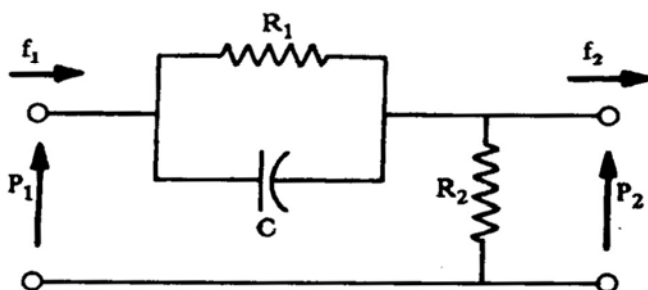
شکل (م-۲-۲)

(۳-۲) - مدار شکل (م-۲-۳)، مدار تقدم فاز^۱ نامیده می شود.

اولاً: رابطه بین P_1 و f_1 با P_2 و f_2 را بصورت یک ماتریس 2×2 بدست آورید.

ثانیاً: از روی رابطه ذیل که با فرض $f_2 = 0$ بین P_2 و P_1 بدست آمده است، پارامترهای a و T را برحسب R_1 ، R_2 و C بدست آورید.

ثالثاً: معادل مکانیکی سیستم را با فرض «نیرو معادل پتانسیل» بدست آورید.



شکل (م-۲-۳)

(۴-۲) - سیستم شکل (م-۲-۴) معادل مکانیکی یک مدار تأخیر فاز^۲ است.

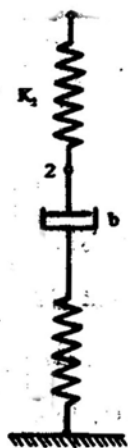
اولاً: معادل الکتریکی سیستم را با فرض «نیرو معادل پتانسیل» بدست آورید.

ثانیاً: رابطه بین نیرو و سرعت در نقطه ۱ را با نیرو و سرعت در نقطه ۲ بدست آورید.

ثالثاً: نسبت تغییر مکان در نقطه ۱ به تغییر مکان در نقطه ۲ را بدست آورید.

۱- Lead Network

۲- Lag Network



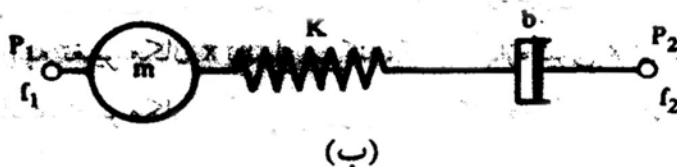
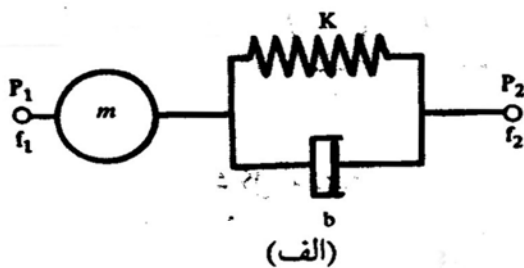
شکل (م-۲-۴)

(۵-۲) - برای هر یک از سیستمهای شکل (م-۲-۵):

اولاً: معادل الکتریکی را با فرض "نیروی معادل سرعت" مشخص نمایید.

ثانیاً: سرعت نقطه ۲ را با فرض صفر در نظر گرفته، رابطه بین P_1 و f_1 را بصورت یک

معادله دیفرانسیل بدست آورید.



شکل (م-۲-۵)

(۶-۲) - روتور توربین دو مرحله‌ای نشان داده شده در شکل (م ۶-۲) دارای مقادیر ثابت زیر است.

$$J_1 = J_2 = J_3 = 1 \quad \text{- ممان های اینرسی:}$$

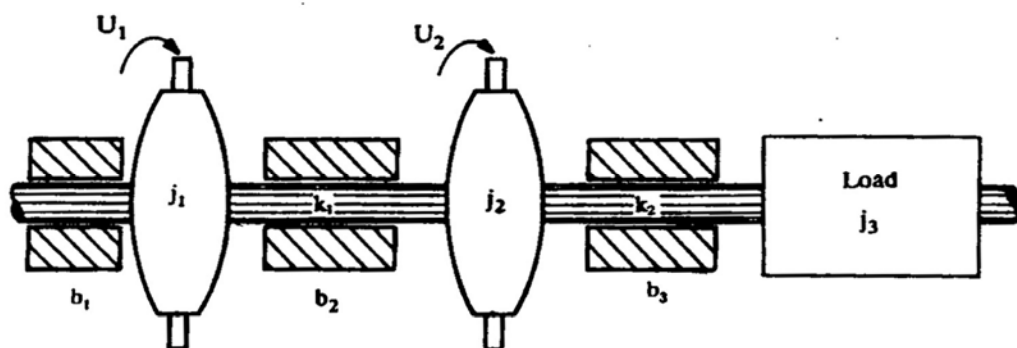
$$b_1 = b_2 = b_3 = 1 \quad \text{- مقاومتهای خطی:}$$

$$k_1 = k_2 = 1 \quad \text{- ثابتهای فنری (مربوط به ضریب الاستیسیته شافتها):}$$

اگر را در u_1 و u_2 عبارت از گشتاورهای اعمال شده در هر مرحله بوده و شافت دارای سرعت زاویه‌ای Ω باشد توابع $G_1(D)$ و $G_2(D)$ رابطه زیر محاسبه نمایید.

$$\Omega = G_1(D)U_1 + G_2(D)U_2$$

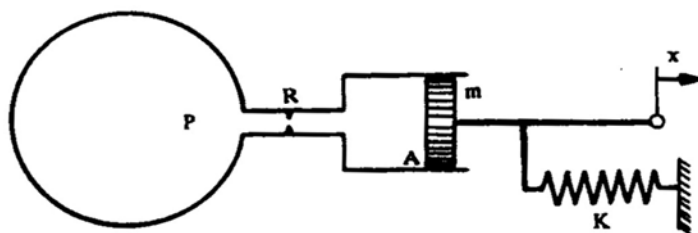
در اینجا فرض کنید که ثابتهای خطی استهلاک b_1 ، b_2 و b_3 به نسبت مساوی و بترتیب بین J_1 ، J_2 و J_3 تقسیم شده‌اند.



شکل (م ۶-۲)

(۷-۲) - سیستم شکل (م ۷-۲) مکانیزم یک دستگاه اندازه‌گیری فشار را نشان می‌دهد. این مکانیزم فشار p را به تغییر مکان x تبدیل می‌کند، که با اندازه‌گیری x توسط یک سنسور^۱ (حساسه) اندازه‌گیری تغییر مکان (نظیر پتانسیومتر حس‌کننده حرکت خطی) باید بتوانیم فشار

را p تعیین نماییم. این امر خود مستلزم دانستن رابطه بین x و p می باشد. لذا نسبت $\frac{x(D)}{p(D)}$ را برای طراحی چنین سیستمی بدست آورید.



شکل (م-۷-۲)

(۸-۲) - سیستم شکل (م-۷-۲) نمایش ساده شده سیستم ضربه گیر اتومبیل است. m_1 ، b_1 و k_1 بترتیب معرف جرم، ضریب مستهلک کننده و ضریب ارتجاعی مربوط به لاستیک اتومبیل و قسمتهای اتصال دهنده لاستیک به فنر و کمک فنر اتومبیل می باشند. همچنین m_2 نمایش جرم بدنه اصلی اتومبیل، k_2 ضریب الاستیسیته فنرها و b_2 ضریب دمپر یا کمک فنر اتومبیل است. پتانسیل و جریان (p و f) را می توان بترتیب معادل نیرو و سرعت و یا سرعت و نیرو در نظر گرفت. این سیستم تغییرات (جابجائی و نوسانات) عمودی اتومبیل را نشان می دهد. ورودی سیستم عبارت از سرعت در نقطه 1 (ناشی از تغییرات سطح مسیر حرکت یعنی پستی و بلندی جاده) بوده و مطلوب آن است که خروجی یعنی سرعت در نقطه 2 مینیمم باشد. با توجه به توضیحات فوق :

اولاً : ماتریس انتقال بین p_1 و f_1 با p_2 و f_2 را بدست آورید.

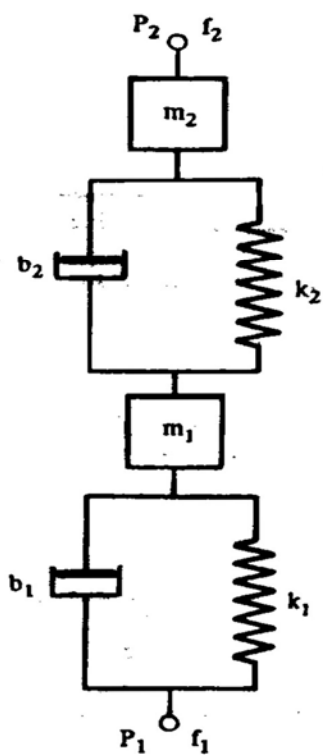
ثانیاً: معادل الکتریکی سیستم فوق را رسم کنید.

(۹-۲) - برای سیستم سیال با مخزن جانبی مطابق شکل (م-۹-۲)، مطلوبست:

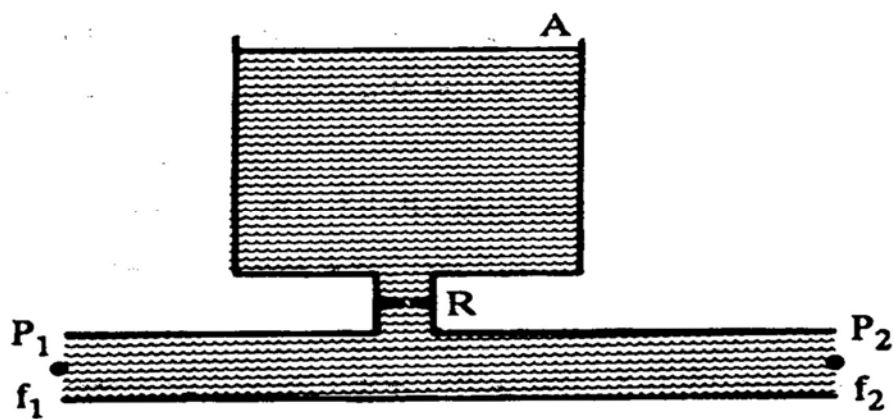
اولاً : ماتریس انتقال بین p_1 و f_1 با p_2 و f_2 .

ثانیاً: دیاگرام جعبه ای.

ثالثاً: مدار معادل الکتریکی.



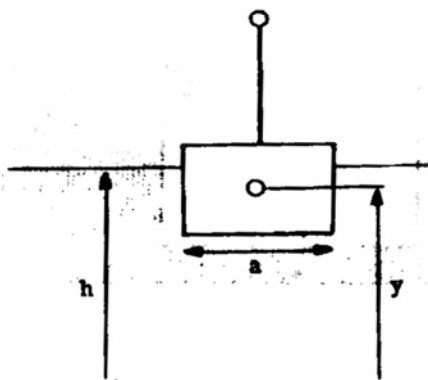
شکل (م-۲-۸)



شکل (م-۲-۹)

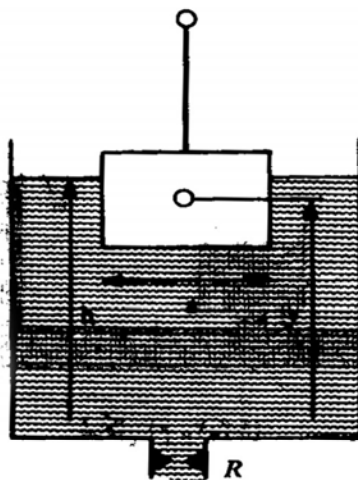
(۲-۱۰) ارتفاع h یک مخزن بوسیله یک شناور اندازه گیری می شود. اگر جرم شناور m و سطح مقطع آن a و دانسیته سیال ρ و موقعیت مرکز ثقل شناور با ارتفاع y مشخص گردد:

اولاً: مطابق شکل (م-۲-۱۰-الف) با فرض نامحدود بودن سطح مقطع مخزن، نسبت $\frac{y}{h}$ را بدست آورید.



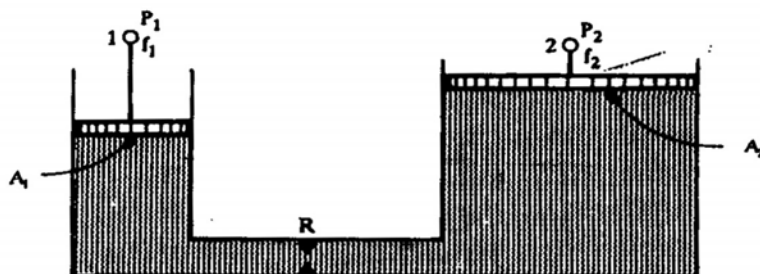
شکل (م-۲-۱۰-الف)

ثانیاً: مطابق شکل (م-۲-۱۰-ب) اگر سطح مقطع مخزن برابر A و دبی سیال ورودی f باشد دیاگرام جعبه ای سیستم را بدست آورید (f را ورودی و y را خروجی در نظر بگیرید).



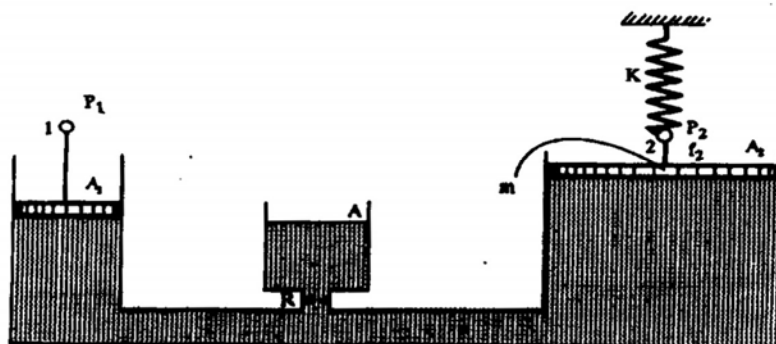
شکل (م-۲-۱۰-ب)

(۱۱-۲) - شکل (م-۱۱-۲) نمای شماتیک و ساده شده یک جک هیدرولیکی را (بعنوان یک ترانسفورمر مکانیکی) نشان می‌دهد. در این سیستم نیرو باعث ایجاد فشار روغن می‌شود. P_1 و f_1 به ترتیب معرف نیرو و سرعت در نقطه ۱ و P_2 و f_2 نیز معرف نیرو و سرعت در نقطه ۲ می‌باشند. با فرض آنکه دانسیته روغن مساوی ρ و جرم پیستونها نیز قابل اغماض باشد، ماتریس انتقال بین P_1 و f_1 با P_2 و f_2 را بدست آورید.



شکل (م-۱۱-۲)

(۱۲-۲) - با انجام تغییراتی در سیستم مساله (۱۱-۲) از طریق افزودن مخزن اطمینان در قسمت هیدرولیکی و سیستم فنر و وزنه در سمت خروجی سیستم، مطابق شکل (م-۱۲-۲)، رابطه بین P_1 و f_1 با P_2 و f_2 را بدست آورید.



شکل (م-۱۲-۲)

فصل سوم

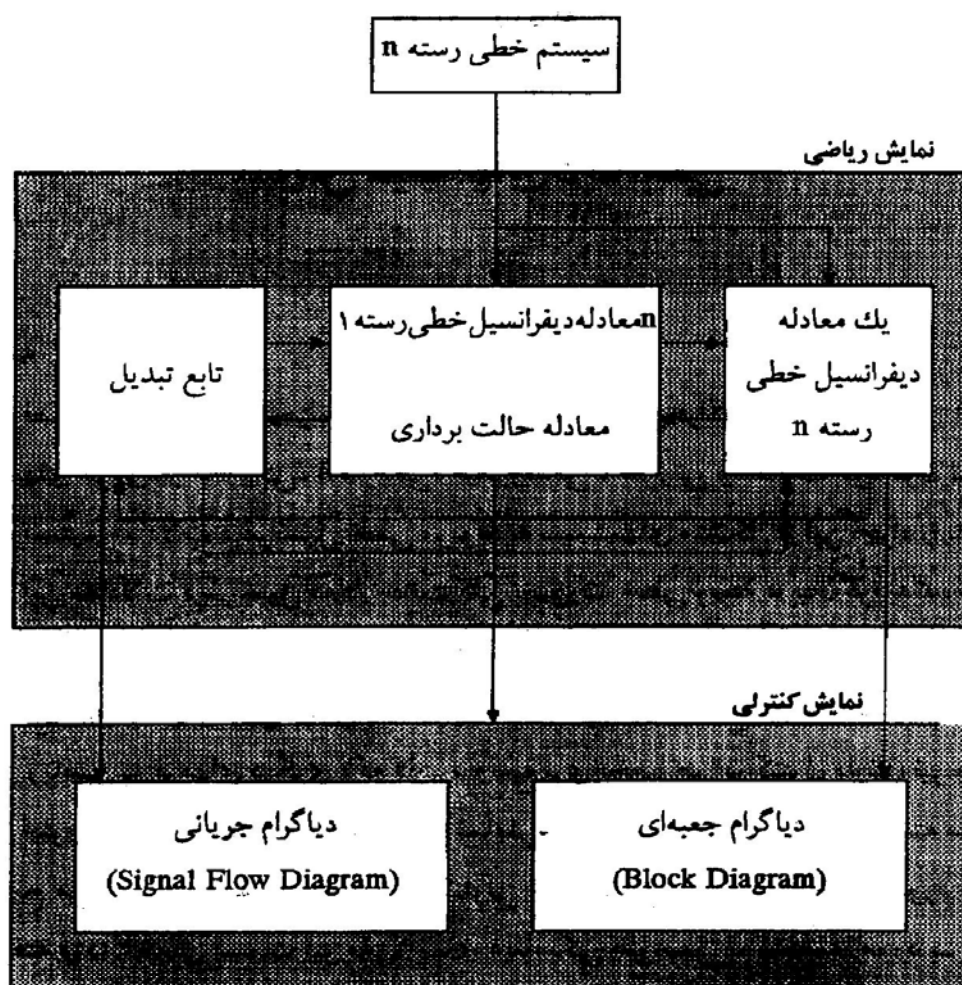
نمایش سیستمهای دینامیکی

مقدمه :

در فصل قبل با نمایش اجزاء سیستم آشنا شدیم و ضمن فراگیری نحوه نمایش اجزاء سیستمهای انرژی دار مکانیکی، الکتریکی، هیدرولیکی، حرارتی و حالات گوناگون ترکیب آنها، توانستیم معادلات دیفرانسیل خطی مربوط به سیستمهای متشکل از این اجزاء را بدست آوریم. این معادلات دیفرانسیل که در حالت کلی بصورت خطی رسته n بیان گردیدند، نوعی نمایش یا مدل ریاضی سیستمهای یاد شده هستند. با این وجود نمایش ریاضی یک سیستم تنها به یک معادله دیفرانسیل خطی رسته n خلاصه نمی شود. بلکه برای یک سیستم خطی، نمایش ریاضی به فرمهای دیگری (که کاربرد وسیع تری بخصوص در کنترل دارند) نیز وجود دارد. از اینرو در اولین قسمت این فصل انواع نمایش ریاضی سیستمهای خطی پیوسته معرفی و تشریح می گردد. در قسمت بعد نمایش کنترلی یا ترسیمی سیستمهای خطی مورد بحث قرار گرفته و در آخرین قسمت نیز سیستمهای دینامیکی غیرخطی به اختصار مورد بررسی قرار می گیرند.

شکل (۱-۳) نحوه کلی نمایش ریاضی و ترسیمی یک سیستم خطی رسته n پیوسته را نشان می دهد. بر طبق این شکل سه نوع نمایش ریاضی و دو نوع نمایش ترسیمی معرفی شده است. خطوط رابطی که در شکل مذکور هر یک از انواع مختلف نمایش های ترسیمی و

ریاضی را به یکدیگر متصل می‌نمایند، نشان دهنده امکان به دست آوردن یک نوع نمایش از نوع دیگر است. مثلاً این شکل نشان می‌دهد که تابع تبدیل را می‌توان از انواع دیگر نمایش به دست آورد در حالیکه از مدل فیزیکی نمی‌توان آنرا به دست آورد. در این فصل، نحوه تعیین انواع مختلف نمایش‌های ریاضی و ترسیمی از یکدیگر نیز مورد بررسی قرار می‌گیرد.



شکل (۱-۳) نحوه کلی نمایش ریاضی و ترسیمی یک سیستم خطی رسته n پیوسته.

(۳-۱) - نمایش ریاضی سیستمهای خطی پیوسته:

با در دست داشتن سیستم فیزیکی می توان نمایش ریاضی یا مدل ریاضی مناسب آنرا بدست آورد (مطالعات ما در این فصل به مسائل مهندسی محدود می شود). در این مقوله سه نوع نمایش ریاضی برای یک سیستم خطی پیوسته مطرح می باشد که عبارتند از:

- معادله دیفرانسیل خطی رسته^۱.

- معادله برداری حالت^۲.

- تابع تبدیل^۳.

با توجه به اینکه نحوه بدست آوردن معادله دیفرانسیل خطی رسته^۱ برای یک سیستم فیزیکی در فصل قبل مورد بحث قرار گرفته است، لذا در این قسمت بحث را با تشریح معادله برداری حالت شروع می کنیم.

(۳-۱-۱) - معادله برداری حالت :

معادله برداری حالت نوعی نمایش یا مدل ریاضی برای یک سیستم است که در آن بجای نمایش سیستم بوسیله یک معادله دیفرانسیل رسته^۱، سیستم را با "n معادله دیفرانسیل خطی رسته یک" و یا "یک معادله دیفرانسیل خطی رسته یک برداری"^۴ نمایش می دهند. برای روشن شدن مطلب ابتدا معادله دیفرانسیل برداری را برای سیستمهای خطی با یک ورودی و یک خروجی بدست آورده و بدنبال آن حالت کلی معادله دیفرانسیل برداری برای سیستم با چند ورودی و چند خروجی را مورد بحث قرار می دهیم.

الف) - معادله برداری حالت برای سیستم "با یک ورودی و یک خروجی":

با طرح دو مثال ذیل نحوه بدست آوردن معادله برداری حالت برای سیستم با "یک ورودی و یک خروجی" تصریح می گردد.

۱- nth Order Differential Equation

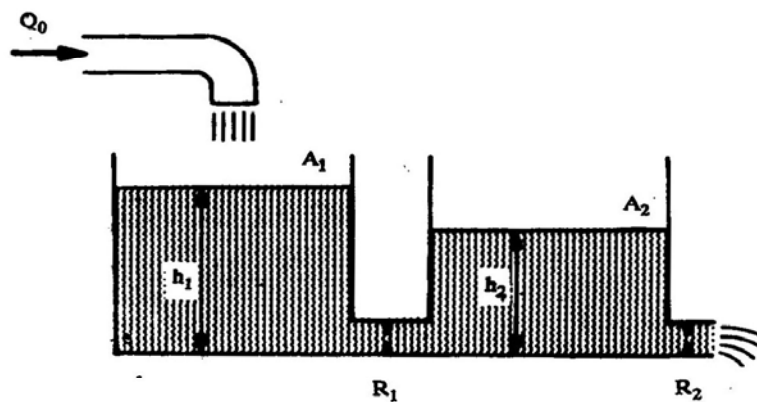
۲- State Vector Differential Equation

۳- Transfer Function

۴- First Order Vector Differential Equation

مثال (۳-۱):

در سیستم شکل (۳-۲) دبی ورودی به سیستم با Q_0 و ارتفاع مایع در ظروف 1 و 2 به ترتیب با h_1 و h_2 نمایش داده شده و خروجی سیستم نیز دبی Q_1 (که از ظرف 1 به 2 وارد می شود) می باشد. سطح مقطع ظروف به ترتیب با A_1 و A_2 و مقاومت بین ظرف اول و دوم با R_1 و بین ظرف دوم و محیط خارج با R_2 نمایش داده شده است.



شکل (۳-۲) - سیستم سیالاتی مخازن مرتبط بهم (با یک ورودی و یک خروجی).

حال با توجه به شکل فوق در مورد هر کدام از ظروف می توان نوشت:

دبی خروجی - دبی ورودی = تغییرات حجم مایع نسبت به زمان

بنابراین معادلات دیفرانسیل برای هر یک از ظروف بصورت زیر خواهد بود:

برای ظرف اول:

$$A_1 \frac{d}{dt} h_1 = Q_0 - \frac{h_1 - h_2}{R_1}$$

و برای ظرف دوم:

$$A_2 \frac{d}{dt} h_2 = \frac{h_1 - h_2}{R_1} - \frac{h_2}{R_2}$$

باتقسیم طرفین معادله اول بر A_1 و معادله دوم بر A_2 داریم:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}h_1 &= \frac{1}{R_1 A_1}h_1 + \frac{1}{R_1 A_1}h_2 + \frac{1}{A}Q_0 \\ \frac{d}{dt}h_2 &= \frac{1}{R_1 A_2}h_1 - \left(\frac{1}{R_1 A_2} + \frac{1}{R_2 A_2}\right)h_2\end{aligned}\quad (۱-۳)$$

معادلات (۱-۳) را می‌توان بصورت ماتریسی زیر نوشت:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{R_1 A_1} & \frac{1}{R_1 A_1} \\ \frac{1}{R_1 A_2} & -\left(\frac{1}{R_1 A_2} + \frac{1}{R_2 A_2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \end{bmatrix} Q_0 \quad (۲-۳)$$

با توجه به اینکه اندازه‌گیری دبی خروجی از ظرف اول به ظرف دوم مورد نظر می‌باشد داریم:

$$Q_1 = \frac{h_1 - h_2}{R_1} = \frac{h_1}{R_1} - \frac{h_2}{R_1}$$

این معادله را می‌توان بصورت ماتریسی زیر نوشت:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + 0 Q_0 \quad (۳-۳)$$

معادلات (۲-۳) و (۳-۳) را می‌توان بصورت زیر خلاصه نمود:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{h} &= \mathbf{A}\mathbf{h} + \mathbf{b}Q_0 \\ Q_1 &= \mathbf{c}\mathbf{h} + \mathbf{d}Q_0\end{aligned}\quad (۴-۳)$$

که در آن A ، h ، b ، c و d عبارتند از:

$$h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 A_1} & \frac{1}{R_1 A_1} \\ \frac{1}{R_1 A_2} & -(\frac{1}{R_1 A_2} + \frac{1}{R_2 A_2}) \end{bmatrix} \quad (5-3)$$

$$b = \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} \end{bmatrix}, d = 0$$

در رابطه فوق بردار $h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$ را بردار حالت^۱ و معادلات (۳-۴) را معادلات دیفرانسیل برداری حالت^۲ یا بطور خلاصه معادله حالت^۳ می نامند. همچنین مقدار دبی Q_0 ورودی و مقدار دبی مورد نظر یعنی Q_1 ، خروجی نامیده می شود. همانطور که از معادلات (۲-۳) و (۳-۳) ملاحظه می شود، معادله حالت در مورد این سیستم که دارای دو متغیر حالت h_1 و h_2 می باشد شامل دو معادله دیفرانسیل خطی رسته یک است که در رابطه (۴-۳) بصورت یک معادله دیفرانسیل برداری رسته یک نمایش داده شده است.

روابط بیان شده در این مثال را می توان به سیستمهای با رسته بالاتر و بطور کلی به سیستم خطی رسته n تعمیم داد. برای یک سیستم خطی رسته n با پارامترهای مجزا، می توان n متغیر حالت^۴ بصورت $x_1, x_2, \dots, x_n$ در نظر گرفت. معمولاً n متغیر حالت فوق را بصورت یک بردار ستونی X که بردار حالت نامیده می شود نمایش می دهند. یعنی:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (6-3)$$

۱- State Vector

۲- State Vector Differential Equation

۳- State Equation

۴- State Variable

حال می‌خواهیم "معادلات دیفرانسیل برداری" را برای سیستم با n متغیر حالت که دارای یک ورودی اسکالر u و یک خروجی اسکالر y باشد بدست آوریم. برای چنین سیستمی معادله حالت شامل n معادله دیفرانسیل خطی رسته یک بر حسب متغیرهای حالت است که فرم کلی نمایش آن بصورت ذیل می‌باشد:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_1u \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_2u \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_nu\end{aligned}\quad (۷-۳)$$

در این معادله پارامترهای a_{ij} ($i=1,2,\dots,n$ و $j=1,2,\dots,n$) و همچنین پارامترهای b_i ($i=1,2,\dots,n$) مقادیر ثابت هستند. همچنین خروجی اسکالر y سیستم بطور کلی، ترکیب خطی از n متغیر حالت (x_1 تا x_n) و ورودی u می‌باشد. یعنی:

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + du \quad (۸-۳)$$

که در آن c_i ($i=1,2,\dots,n$) و d مقادیر ثابت هستند. معادلات (۷-۳) و (۸-۳) را می‌توان بصورت برداری (ماتریسی) زیر نوشت:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} X &= AX + bu \\ y &= cX + du\end{aligned}\quad (۹-۳)$$

که در آن A ماتریس مربع $n \times n$ بصورت:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (۱۰-۳)$$

و b نیز ماتریس ستونی $n \times 1$ بصورت زیر می باشد:

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (۱۱-۳)$$

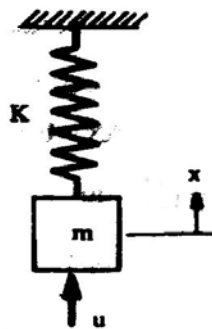
همچنین c یک ماتریس سطری $n \times 1$ بصورت ذیل و d نیز عددی اسکالر است.

$$c = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n] \quad (۱۲-۳)$$

معادله دیفرانسیل برداری (۹-۳) را معادله برداری حالت یا بطور خلاصه "معادله حالت" برای سیستم خطی رسته n با یک ورودی u و یک خروجی y می نامند.

مثال (۲-۳):

می خواهیم برای سیستم متشکل از فنر و وزنه شکل (۳-۳) که تحت تأثیر ورودی نیروی u می باشد و عکس العمل یا خروجی این سیستم تغییر مکان جرم m در نظر گرفته شده است، معادلات برداری حالت را بدست آوریم.



شکل (۳-۳) - سیستم مکانیکی متشکل از فنر k و جرم m (با یک ورودی و یک خروجی).

در این مثال معادله حالت را با استفاده از معادله دیفرانسیل خطی رسته دو این سیستم بدست می آوریم. این معادله دیفرانسیل رسته دو که در مثال (۲-۱۰) فصل قبل بصورت معادله (۲-۴۲) بیان شده عبارت است از:

$$m\ddot{x} + kx = u(t) \quad (a)$$

ابتدا باید متغیرهای حالت را برای این سیستم معرفی کنیم. با توجه به تعریف متغیرهای حالت در فصل اول، برای این سیستم "تغییر مکان و سرعت" جرم m را

بعنوان دو متغیر حالت در نظر می گیریم، یعنی:

$$\begin{aligned} x_1 &= x && \text{تغییر مکان جرم } m \\ x_2 &= \dot{x} && \text{سرعت جرم } m \end{aligned} \quad (۱۳-۳)$$

علت انتخاب "تغییر مکان" و "سرعت" جرم m بعنوان متغیرهای حالت، آن است که با دانستن این دو متغیر، رفتار سیستم کاملاً مشخص می شود. برای بدست آوردن دو معادله دیفرانسیل رسته یک، اولین معادله را (با توجه به اینکه x_2 سرعت جرم m و x_1 تغییر مکان آن است) می توان بصورت زیر نوشت:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (۱۴-۳)$$

دومین معادله دیفرانسیل رسته یک را با استفاده از معادله (a) بدست می آوریم. این معادله را می توان چنین نوشت:

$$\begin{aligned} m\dot{x}_2 + kx_1 &= u(t) \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_1 + \frac{1}{m}u \end{aligned} \quad (۱۵-۳)$$

با توجه به اینکه عکس العمل یا خروجی سیستم همان تغییر مکان جرم m در نظر گرفته شده داریم:

$$y = x_1 \quad (۱۶-۳)$$

حال معادلات (۳-۱۴) تا (۳-۱۶) را دوباره می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{K}{m}x_1 + \frac{1}{m}u \\ y &= x_1\end{aligned}\quad (3-17)$$

با استفاده از فرم کلی معادله حالت برای سیستم با یک ورودی و یک خروجی [یعنی معادله (۳-۹)] از معادله (۳-۱۷)، معادله حالت سیستم مورد بحث را می‌توان بصورت زیر نتیجه‌گیری نمود.

$$\begin{aligned}\dot{X} &= AX + bu \\ y &= cX + du\end{aligned}\quad (3-18)$$

که در آن X ، A ، b ، c و d عبارتند از:

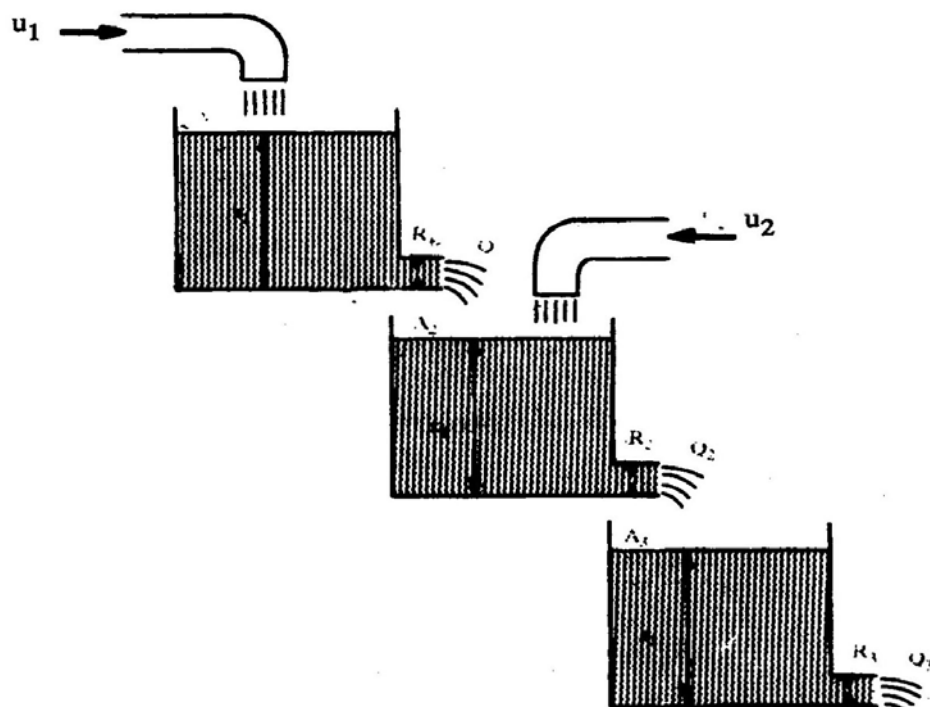
$$\begin{aligned}x &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix} \\ b &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}, \quad c = [1 \quad 0], \quad d = 0\end{aligned}\quad (3-19)$$

(ب) - معادله برداری حالت برای سیستم "با چند ورودی و چند خروجی":

نحوه بدست آوردن معادله برداری حالت در سیستمهای خطی با چند ورودی و چند خروجی با طرح یک مثال در این قسمت تشریح می‌گردد.

مثال (۳-۳):

سیستم شکل (۳-۴) از سه مخزن با سطح مقطع‌های A_1 ، A_2 و A_3 تشکیل گردیده، همچنین مقاومت سوراخهای خروجی مابین R_1 ، R_2 و R_3 و سیستم



شکل (۳-۴) - سیستم سیالاتی مخازن مرتبط بهم (با دو ورودی و سه خروجی).

دارای دو ورودی (دبی u_1 به ظرف اول و دبی u_2 به ظرف دوم) و سه خروجی (دبی‌های Q_1 و Q_2 و Q_3) می‌باشد.

در این سیستم، ارتفاع مایع هر یک از ظروف (یعنی x_1 ، x_2 و x_3) را بعنوان یک متغیر حالت در نظر گرفته و می‌خواهیم معادله برداری حالت را برای این سیستم بنویسیم.

با توجه به مثال (۳-۱) معادله دیفرانسیل تغییرات x برای هر یک از ظروف بصورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} A_1 \dot{x}_1 &= u_1 - \frac{x_1}{R_1} \\ A_2 \dot{x}_2 &= u_2 + \frac{x_1}{R_1} - \frac{x_2}{R_2} \\ A_3 \dot{x}_3 &= \frac{x_2}{R_2} - \frac{x_3}{R_3} \end{aligned} \quad (۳-۲۰)$$

و خروجی‌ها عبارتند از:

$$\begin{aligned} y_1 &= Q_1 = \frac{x_1}{R_1} \\ y_2 &= Q_2 = \frac{x_2}{R_2} \\ y_3 &= Q_3 = \frac{x_3}{R_3} \end{aligned} \quad (21-3)$$

در این سیستم سه متغیر حالت، دو ورودی و سه خروجی وجود دارد. معادله (۲۰-۳) را بصورت زیر می‌نویسیم:

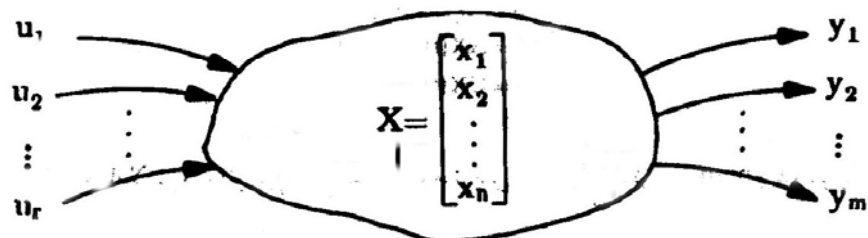
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{1}{R_1 A_1} x_1 + \frac{1}{A_1} u_1 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{R_1 A_2} x_1 - \frac{1}{R_2 A_2} x_2 + \frac{1}{A_2} u_2 \\ \dot{x}_3 &= \frac{1}{R_2 A_3} x_2 - \frac{1}{R_3 A_3} x_3 \end{aligned} \quad (22-3)$$

با ارائه تعاریف ذیل:

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ U &= \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ Y &= \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (23-3)$$

از معادلات (۲۲-۳) و (۲۳-۳) معادله حالت این سیستم بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= AX(t) + BU(t) \\ Y(t) &= CX(t) + DU(t) \end{aligned} \quad (24-3)$$



شکل (۵-۳). نمایش کلی سیستم خطی با n متغیر حالت و r ورودی و m خروجی.

که در آن $X(t)$ و $U(t)$ و $Y(t)$ در معادلات (۲۳-۳) معرفی گردیده و ماتریسهای A ، B ، C و D نیز عبارتند از:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-1}{R_1 A_1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{R_1 A_2} & \frac{-1}{R_2 A_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2 A_2} & \frac{-1}{R_3 A_3} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3} \end{bmatrix}, \quad D = 0 \quad (۲۵-۳)$$

بطورکلی مطابق شکل (۵-۳) برای یک سیستم خطی با n متغیر حالت و r ورودی و m خروجی داریم:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad U(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix}, \quad Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix} \quad (۲۶-۳)$$

همچنین معادله برداری حالت برای چنین سیستمی عبارت است از:

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= AX(t) + BU(t) \\ Y(t) &= CX(t) + DU(t)\end{aligned}\quad (27-3)$$

در این معادلات A ماتریس مربع $n \times n$ ، B ماتریس $n \times r$ و C ماتریس $m \times n$ و D نیز یک ماتریس $m \times r$ می باشد. یعنی:

$$\begin{aligned}A &: (n \times n) \text{ ماتریس} \\ B &: (n \times r) \text{ ماتریس} \\ C &: (m \times n) \text{ ماتریس} \\ D &: (m \times r) \text{ ماتریس}\end{aligned}\quad (28-3)$$

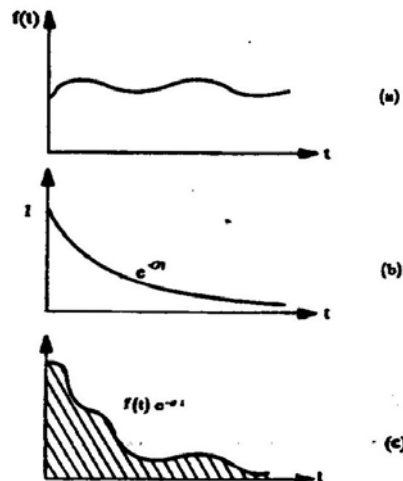
(۲-۱-۳) - تبدیل لاپلاس (یادآوری):^۱

برای آنکه تابعی مانند $f(t)$ در میدان زمان را بتوان به تابع نظیر آن در میدان لاپلاس تبدیل نمود، این تابع بازاء یک مقدار σ حقیقی و مثبت باید شرط زیر را ارضاء نماید.

$$\int_0^{\infty} |f(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty \quad (29-3)$$

مثلاً اگر تابع $f(t)$ بصورت شکل (۳-۶-۲) باشد، از آنجا که نمایش ترسیمی تابع $e^{-\sigma t}$ بصورت شکل (۳-۶-۲) می باشد لذا حاصلضرب آنها مطابق شکل (۳-۶-۳) خواهد بود. رابطه (۲۹-۳) مبین آن است که تابع $f(t)$ در صورتی دارای تبدیل لاپلاس خواهد بود که سطح زیر منحنی شکل (۳-۶-۳) که با هاشور مشخص شده محدود بوده و ∞ نشود. تبدیل لاپلاس $F(s)$ از یک تابع $f(t)$ (که شرط فوق را داراست) بصورت ذیل تعریف می شود.

$$F(s) = \mathcal{L}f(t) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (30-3)$$



شکل (۳-۶) - نمایش ترسیمی تابع دلخواه $f(t)$ و حاصلضرب آنها $e^{-\sigma t}$.

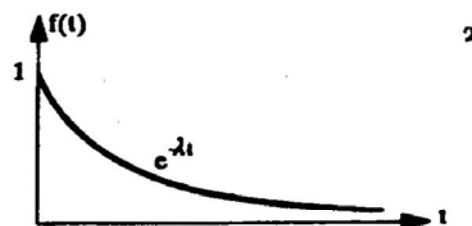
در ادامه بحث با ارائه چند مثال به یادآوری روابط و خواص تبدیل لاپلاس می‌پردازیم.

الف - تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = e^{-\lambda t}$:

نمایش ترسیمی این تابع در شکل (۳-۷) آورده شده و تبدیل لاپلاس آن نیز بصورت ذیل محاسبه می‌شود.

(۳۱-۳)

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(\lambda + s)t} dt = -\frac{1}{s + \lambda} e^{-(s + \lambda)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s + \lambda}$$

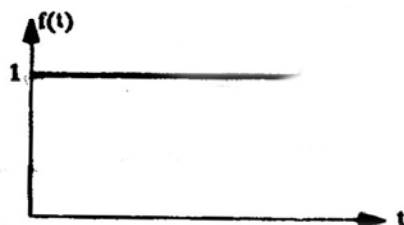


شکل (۳-۷) - نمایش ترسیمی تابع $e^{-\lambda t}$.

(ب) - تبدیل لاپلاس تابع پله‌ای واحد^۱:

تابع پله‌ای واحد بصورت ذیل تعریف می‌شود که نمایش ترسیمی آن نیز در شکل (۳-۸) ارائه شده است.

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 & t < 0 \\ f(t) &= 1 & t > 0 \end{aligned}$$



شکل (۳-۸) - نمایش تابع پله‌ای واحد.

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s} \quad (۳-۳۲)$$

این نتیجه را می‌توان با صفر قرار دادن 1 در مثال قبلی نیز بدست آورد.

(ج) - تبدیل لاپلاس تابع ضربه‌ای واحد^۲:

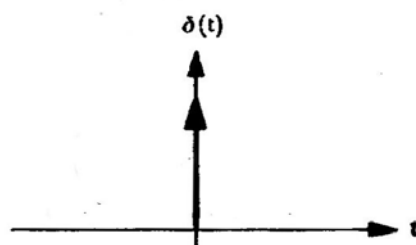
شکل (۳-۹) تابع ضربه‌ای واحد را نشان می‌دهد. این تابع به صورت ذیل تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \delta(t) &= 0 & t \neq 0 \\ \delta(t) &= \infty & t = 0 \end{aligned} \quad (۳-۳۳)$$

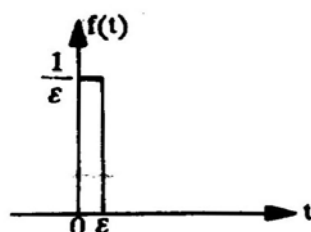
$$\int_0^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

۱-Unit Step Function

۲- "Unit Impulse Function" or "Dirac Delta Function"



شکل (۳-۹). نمایش تابع ضربه‌ای واحد.



شکل (۳-۱۰). نمایش دیگری از تابع ضربه‌ای واحد.

برای روشن‌تر شدن مفهوم این تابع، آنرا می‌توان بصورت شکل (۳-۱۰) و رابطه (۳-۳۴) هم نمایش داد.

$$\begin{cases} \delta(t) = 0 & t \leq 0 \\ \delta(t) = 0 & t \geq \varepsilon \\ \delta(t) = \frac{1}{\varepsilon} & 0 < t < \varepsilon \end{cases} \quad (3-34)$$

در این رابطه ε زمان بسیار کوچکی است که اگر به سمت صفر میل کند معادلات (۳-۳۴) به معادلات (۳-۳۳) تبدیل می‌شوند.

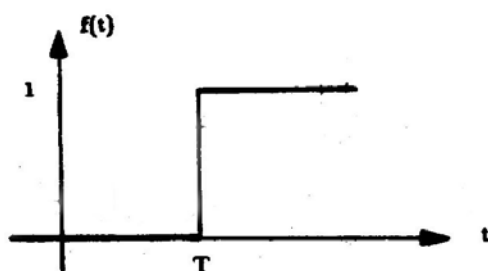
حال تبدیل لاپلاس تابع ضربه‌ای واحد را بدست می‌آوریم:

$$F(s) = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = \int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} e^{-st} dt + \int_{\varepsilon}^{\infty} 0 e^{-st} dt = 1 \quad (3-35)$$

باید توجه داشت که e^{-st} در فاصله 0 تا ϵ بخاطر کوچکی زمان ϵ مساوی واحد در نظر گرفته شده است.

(د) - تبدیل لاپلاس تابع پله‌ای واحد با تأخیر زمانی:
تابع $f(t)$ با تأخیر زمانی که در شکل (۱۱-۳) نشان داده شده بصورت ذیل تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} f(t)=0 & t < T \\ f(t)=1 & t > T \end{cases}$$



شکل (۱۱-۳) - نمایش تابع پله‌ای واحد با تأخیر زمانی.

و تبدیل لاپلاس آن نیز چنین محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_0^T f(t) e^{-st} dt \\ &= \int_T^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \end{aligned} \quad (۳۶-۳)$$

$$F(s) = \frac{e^{-sT}}{s}$$

بنابراین تبدیل لاپلاس تابع پله‌ای واحد با تأخیر زمانی عبارت است از:

بنابراین از مقایسه معادلات (۳۲-۳) با (۳۶-۳) نتیجه می‌شود که اگر تابع پله‌ای واحد باندازه T انتقال داده شود تبدیل لاپلاس آن در e^{-sT} ضرب می‌شود.

(ه) تبدیل لاپلاس مشتق یک تابع:

اگر تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ با $F(s)$ نمایش داده شود تبدیل لاپلاس $\frac{d}{dt}f(t)$ بصورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \frac{d}{dt} f(t) &= \int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} dt \\ &= f(t) e^{-st} \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (a-37-3) \\ &= -f(0) + sF(s)\end{aligned}$$

بنابراین:

$$\mathcal{L} \frac{d}{dt} f(t) = \mathcal{L} f'(t) = sF(s) - f(0) \quad (b-37-3)$$

و به همین ترتیب برای مشتق دوم می‌توان نشان داد:

$$\mathcal{L} f''(t) = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0) \quad (38-3)$$

و بطور کلی تبدیل لاپلاس مشتق n ام تابع $f(t)$ چنین خواهد شد:

$$\mathcal{L} f^{(n)}(t) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \quad (39-3)$$

(و) - تبدیل لاپلاس انتگرال یک تابع:

اگر انتگرال تابع $f(t)$ را با $f^{(-1)}(t)$ نشان دهیم، یعنی:

$$f^{(-1)}(t) = \int_0^t f(\xi) d\xi$$

در اینصورت تبدیل لاپلاس $f^{(-1)}(t)$ بصورت زیر نتیجه می‌شود:

$$\mathcal{L}[f^{(-1)}(t)] = \frac{1}{s} F(s) + \frac{1}{s} f^{(-1)}(0) \quad (۴۰-۳)$$

یکی از موارد مهم استفاده از تبدیل لاپلاس آن‌هاست که وقتی معادلات دیفرانسیل خطی از میدان زمان به میدان لاپلاس تبدیل شوند این معادلات بصورت معادلات جبری در می‌آیند. برای روشن شدن این مطلب از مثال (۲-۳) در مورد سیستم فنر و وزنه، معادله دیفرانسیل (۱۳-۳) را در نظر می‌گیریم:

$$m\ddot{x} + kx = u(t)$$

اگر تبدیل لاپلاس $x(t)$ با $X(s)$ و تبدیل لاپلاس $u(t)$ با $U(s)$ نمایش داده شود با تبدیل لاپلاس گرفتن از طرفین معادله فوق نتیجه می‌شود:

$$\mathcal{L}[f^{(-1)}(t)] = \frac{1}{s} F(s) + \frac{1}{s} f^{(-1)}(0)$$

که در آن $x(0)$ تغییر مکان اولیه و $\dot{x}(0)$ سرعت اولیه جرم m است. با مرتبه کردن معادله فوق داریم:

$$(ms^2 + k)X(s) = U(s) + msx(0) + m\dot{x}(0)$$

و یا:

$$X(s) = \frac{1}{ms^2 + k} U(s) + \frac{ms}{ms^2 + k} x(0) + \frac{m}{ms^2 + k} \dot{x}(0)$$

که با داشتن شرایط اولیه و انجام تبدیل معکوس لاپلاس روی معادله فوق، $x(t)$ یا عکس العمل سیستم مشخص می شود. اگر شرایط اولیه یعنی $x(0)$ و $\dot{x}(0)$ ، برابر صفر باشند معادله فوق بصورت زیر خواهد شد:

$$X(s) = \frac{1}{ms^2 + k} U(s)$$

با تقسیم طرفین معادله فوق بر $U(s)$ نتیجه می شود:

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2 + k} \quad (3-41)$$

معادله (3-41) را "تابع تبدیل" بین ورودی $U(s)$ و خروجی $X(s)$ برای سیستم فنر و وزنه مثال (3-2) می نامند که در قسمت بعد به آن پرداخته می شود.

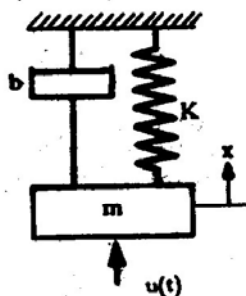
(3-1-3) - تابع تبدیل^۱:

تابع تبدیل، شکل دیگری از نمایش یا مدل «ریاضی» یک سیستم خطی می باشد. اگر نمایش ریاضی یک سیستم بصورت معادله دیفرانسیل خطی رسته n و یا بصورت معادله برداری حالت در دست باشد می توان تابع تبدیل آن سیستم را بدست آورد. عبارت دیگر تابع تبدیل بعنوان فرمی از نمایش ریاضی یک سیستم در میدان لاپلاس است که با در دست داشتن فرم ریاضی سیستم در میدان زمان بدست می آید و بصورت زیر تعریف می شود.

برای سیستمی با یک ورودی و یک خروجی، "تابع تبدیل" عبارت است از نسبت تبدیل لاپلاس خروجی سیستم به تبدیل لاپلاس ورودی آن وقتی که تمامی شرایط اولیه سیستم مساوی صفر در نظر گرفته شود و آن را با $G(s)$ نمایش می دهند.

مثال (۳-۲):

می‌خواهیم تابع تبدیل را در مورد سیستم فنر و وزنه و مستهلک کننده شکل (۱۲-۳) بدست آوریم. ورودی به سیستم نیروی $u(t)$ و خروجی سیستم $y(t)=x(t)$ یعنی حرکت جرم m است.



شکل (۱۲-۳). سیستم مکانیکی فنر، وزنه و دمپر.

معادله دیفرانسیل تغییرات x برای این سیستم عبارت است از [معادله (a) در مثال (۱۲-۲) فصل قبل]:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = u(t) \quad (a)$$

اگر تبدیل لاپلاس $x(t)$ با $X(s)$ و تبدیل لاپلاس $u(t)$ با $U(s)$ و تبدیل لاپلاس $y(t)$ با $Y(s)$ نمایش داده شود و همچنین تغییر مکان اولیه $x(0)$ و سرعت اولیه نیز $\dot{x}(0)$ باشد، تبدیل لاپلاس معادله فوق چنین خواهد شد:

$$m[s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)] + b[sX(s) - x(0)] + kX(s) = U(s)$$

$$[ms^2 + bs + k]X(s) = msx(0) + m\dot{x}(0) + bx(0) + U(s)$$

مطابق تعریف تبدیل لاپلاس، اگر شرایط اولیه $x(0)$ و $\dot{x}(0)$ را مساوی صفر قرار دهیم نتیجه می‌شود:

$$(ms^2 + bs + k)X(s) = U(s)$$

چون $x(t)$ مساوی خروجی $y(t)$ در نظر گرفته شده پس $Y(s)=X(s)$ می باشد لذا داریم:

$$(ms^2 + bs + k) Y(s) = U(s)$$

و یا:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + k} \quad (42-3)$$

و این معادله معرف تابع تبدیل سیستم فوق می باشد.

الف) - تابع تبدیل از معادله حالت (سیستم با یک ورودی و یک خروجی):

ابتدا تابع تبدیل را از معادله حالت برای سیستمی با یک ورودی و یک خروجی بدست می آوریم. معادله حالت چنین سیستمی که قبلاً مورد مطالعه قرار گرفت [معادله (۳-۹)] عبارت است از:

$$\frac{d}{dt} X(t) = AX(t) + bu(t)$$

$$y(t) = cX(t) + du(t)$$

اگر تبدیل لاپلاس $X(t)$ را با $X(s)$ و تبدیل لاپلاس $u(t)$ و $y(t)$ را بترتیب با $U(s)$ و $Y(s)$ نشان دهیم، تبدیل لاپلاس معادلات فوق بصورت زیر خواهد بود:

$$sX(s) - X(0) = AX(s) + bU(s) \quad (43-3)$$

$$Y(s) = cX(s) + dU(s) \quad (44-3)$$

که در آن:

$$Y(s) = \mathcal{L}y(t), \quad U(s) = \mathcal{L}u(t), \quad X(s) = \mathcal{L}X(t)$$

و مقدار متغیر $X(0)$ عبارت از شرایط اولیه یا بردار حالت بازاء $t=0$ می باشد. معادلات

(۴۳-۳) و (۴۴-۳) را با توجه به قواعد ماتریسی می توان چنین نوشت:

$$X(s) = (sI - A)^{-1} [X(0) + bU(s)] \quad (۴۵-۳)$$

$$Y(s) = c(sI - A)^{-1} [X(0) + bU(s)] + dU(s) \quad (۴۶-۳)$$

در این رابطه I ماتریس مربع واحد و $(sI - A)^{-1}$ نیز معکوس ماتریس مربع $(sI - A)$ می باشد. از آنجا که مطابق تعریف تابع تبدیل، شرایط اولیه باید صفر باشند لذا از معادله (۴۶-۳) با شرط $x(0) = 0$ داریم:

$$Y(s) = [c(sI - A)^{-1}b + d] U(s) \quad (۴۷-۳)$$

و یا:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = c(sI - A)^{-1}b + d \quad (۴۸-۳)$$

رابطه (۴۸-۳) را تابع تبدیل بین ورودی $U(s)$ و خروجی $Y(s)$ می نامند. از معادلات (۴۵-۳) تا (۴۸-۳) مشاهده می شود که ماتریس معکوس $(sI - A)^{-1}$ نقش عمده ای در حل معادلات یک سیستم در میدان s دارد. همانطور که بعداً خواهیم دید از این ماتریس، "معادله مشخصه" سیستم را بدست می آوریم و از آنجا که رفتار و عکس العمل سیستم بستگی تام به "معادله مشخصه" سیستم دارد، بررسی این ماتریس از اهمیت ویژه ای برخوردار است. معکوس یک ماتریس مربع M را با M^{-1} نشان می دهند بطوریکه حاصلضرب هر ماتریس در معکوس خود، ماتریس واحد I را نتیجه می دهد، یعنی:

$$MM^{-1} = I$$

و معکوس M یعنی M^{-1} از رابطه زیر بدست می آید*:

$$M^{-1} = \frac{\text{adj } M}{\det M} \quad (49-3)$$

در نتیجه معکوس ماتریس $(SI-A)$ عبارت است از:

$$(SI-A)^{-1} = \frac{\text{adj}(SI-A)}{\det(SI-A)}$$

در رابطه فوق ملاحظه می شود که دترمینان $(SI-A)$ در مخرج تابع تبدیل سیستم [معادله (48-3)] ظاهر می شود. واضح است که چون A یک ماتریس $n \times n$ می باشد لذا $\det(SI-A)$ و یا مخرج تابع تبدیل یک چند جمله ای بر حسب S از درجه n خواهد بود. بهر حال معادله زیر را معادله مشخصه سیستم می نامند.

$$\det(SI-A) = 0 \quad (50-3)$$

ریشه های مخرج تابع تبدیل را که "قطب های" سیستم نامیده می شوند از حل معادله فوق می توان بدست آورد.

مثال (5-3):

می خواهیم تابع تبدیل مربوط به سیستم فنر و وزنه مثال (2-3) را از طریق معادله حالت آن بدست آوریم.

معادله حالت این سیستم قبلاً بدست آمده است [معادله (18-3)] و پارامترها نیز

در معادله (19-3) تعیین شده اند. لذا کافی است در معادله (48-3) بجای A ، b ، c

*- به پیوست (2) مراجعه شود.

و d از معادله (۳-۱۹) مقدار قرار دهیم:

$$G(s) = c(sI - A)^{-1}b + d$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{k}{m} & s \end{bmatrix}, \quad (sI - A)^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -\frac{k}{m} & s \end{bmatrix}$$

که Δ عبارت است از:

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{k}{m} & s \end{bmatrix} = s^2 + \frac{k}{m}$$

بنابراین تابع تبدیل سیستم می‌شود:

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -\frac{k}{m} & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} = \frac{1}{ms^2 + k}$$

که همان معادله (۳-۴۱) می‌باشد.

مثال (۳-۶):

می‌خواهیم تابع تبدیل سیستم مثال (۳-۴) را از معادله حالت آن بدست آوریم.
معادله حالت برای سیستم مثال (۳-۴) با در نظر گرفتن
بصورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + bu \\ y &= cX + du \end{aligned} \quad (a)$$

که ضرایب رابطه (a) عبارتند از:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}, \quad c = [1 \ 0], \quad d = 0$$

برای بدست آوردن تابع تبدیل کافی است مقادیر A , b , c و d از روابط فوق را در معادله (۴۸-۳) قرار دهیم

$$SI - A = \begin{bmatrix} S & -1 \\ \frac{k}{m} & S + \frac{b}{m} \end{bmatrix}, \quad (SI - A)^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} S + \frac{b}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & S \end{bmatrix}$$

که Δ عبارت است از:

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} S & -1 \\ \frac{k}{m} & S + \frac{b}{m} \end{bmatrix} = S^2 + \frac{b}{m}S + \frac{k}{m}$$

بنابراین تابع تبدیل این سیستم بصورت ذیل حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} G(s) &= [1 \ 0] \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} S + \frac{b}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{ms^2 + bs + K} \end{aligned}$$

نتیجه فوق همان معادله (۴۲-۳) می‌باشد که در مثال (۴-۳) آنرا بدست آوردیم.

ب)- قطبها^۱ و صفرهای^۲ سیستم:

رابطه (۳-۴۸) را که معرف تابع تبدیل سیستم می باشد، می توان بصورت زیر نوشت:

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (a-50-3)$$

در این رابطه $B(s)$ و $A(s)$ چند جمله ای هایی برحسب s هستند. از مقایسه این معادله با رابطه (۳-۴۸) بسادگی نتیجه می شود که مخرج کسر یعنی $A(s)$ مساوی $\det(sI-A)$ می باشد و از آنجا که این دترمینان یک چند جمله ای از مرتبه n (برحسب s) است، نتیجه می شود که برای سیستم رسته n ، $A(s)$ یا مخرج تابع تبدیل از رسته n (برحسب s) می باشد. چنانچه در معادله (۳-۴۸) مقدار d مخالف صفر باشد، صورت کسر معادله نیز از رسته n خواهد بود. ولی از آنجا که در اکثر سیستمهای مهندسی در معادله حالت $d=0$ می باشد، صورت کسر یعنی $B(s)$ از رسته m خواهد بود که $m < n$ می باشد [این مطلب را می توان بسادگی از تعریف معکوس ماتریس $(sI-A)$ در معادله (۳-۴۸) نتیجه گرفت. زیرا المانهای ماتریس $(sI-A)^{-1}$ عبارت از المانهای ماتریس $\text{adj}(sI-A)$ تقسیم بر $\det(sI-A)$ بوده و از طرفی اجزاء ماتریس $\text{adj}(sI-A)$ نیز حداکثر می توانند از درجه $n-1$ باشند].

برحسب تعریف در معادله (۳-۵۰a) هر مقدار s که صورت کسر را صفر کند، یعنی ریشه های معادله:

$$B(s) = 0 \quad (b-50-3)$$

را "صفرهای" سیستم می نامند. بنابراین صفرهای سیستم مقادیری هستند که بازاء آنها تابع تبدیل $G(s)=0$ می شود. همچنین در معادله (۳-۵۰a) هر مقدار s که مخرج کسر را صفر نماید "قطب های" سیستم نامیده می شود. لذا قطب های سیستم ریشه های معادله:

$$A(s) = 0 \quad (c-50-3)$$

می باشند. بنابراین قطب های سیستم مقادیری هستند که بازاء آنها مخرج کسر $G(s)$ مساوی صفر و یا $G(s)$ مساوی ∞ می شود.

از مقایسه معادلات (۳-۴۸)، (۳-۵۰a) و (۳-۵۰c) بوضوح نتیجه می شود که $A(s)$ مساوی $\det(sI - A)$ می باشد. پس معادله (۳-۵۰c) همان معادله مشخصه سیستم می باشد. بنابراین: "قطب های سیستم مقادیر ویژه ماتریس A می باشند". باید توجه داشت که هر قطب سیستم یک مقدار ویژه سیستم است و عکس این مساله (یعنی اینکه هر مقدار ویژه، یک قطب سیستم باشد) وقتی صحیح است که سیستم قابل کنترل^۱ و قابل مشاهده^۲ باشد. در اینجا قصد تشریح این مباحث را نداریم با این وجود ارائه تعاریف اجمالی آنها مناسب بنظر می رسد:

سیستم وقتی قابل کنترل (کنترل پذیر) است که ورودی بر همه متغیرهای حالت سیستم تأثیر بگذارد. همچنین سیستم وقتی قابل مشاهده (مشاهده پذیر) است که خروجی از همه متغیرهای حالت تأثیر بپذیرد*.

ج- تابع تبدیل از معادله حالت برای سیستم با چند ورودی و چند خروجی:

برای یک سیستم خطی با n متغیر حالت (x_1 تا x_n) و r ورودی (u_1 تا u_r) و m خروجی (y_1 تا y_m) معادلات حالت بصورت معادلات (۳-۲۶) تا (۳-۲۸) نمایش داده شده اند. با تبدیل معادله (۳-۲۷) از میدان زمان به میدان لاپلاس داریم:

$$\begin{cases} SX(s) - X(0) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases} \quad (۳-۵۱)$$

که در آن:

۱- Controlable

۲- Observable

*- برای آشنائی بیشتر با این مباحث به مجلد "سیستمهای کنترلی" مؤلف مراجعه شود.

$$\begin{cases} X(s) = \mathcal{Z}[X(t)] \\ U(s) = \mathcal{Z}[U(t)] \\ Y(s) = \mathcal{Z}[Y(t)] \end{cases}$$

می باشد. معادلات (۵۱-۳) را می توان بصورت زیر نوشت:

$$X(s) = (sI - A)^{-1}(X_0 + BU(s)) \quad (52-3)$$

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}(X_0 + BU(s)) + DU(s)$$

برای این سیستم تابع تبدیل از معادله ماتریسی زیر با فرض $X(0)=0$ تعریف می شود:

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (53-3)$$

از مقایسه رابطه (۵۳-۳) با دومین معادله از (۵۲-۳) نتیجه می شود (با توجه به اینکه $X(0)=0$ است):

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (54-3)$$

تابع تبدیل $G(s)$ در معادلات (۵۳-۳) و (۵۴-۳) یک رابطه ماتریسی بصورت ماتریس $m \times r$ می باشد. معادله (۵۳-۳) را می توان بصورت زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_m(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & D_{12}(s) & \dots & G_{1r}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \dots & G_{2r}(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_{m1}(s) & G_{m2}(s) & \dots & G_{mr}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_r(s) \end{bmatrix} \quad (55-3)$$

هر یک از خروجی های سیستم بوسیله r تابع تبدیل با r ورودی سیستم ارتباط دارند. یعنی از

رابطه (۳-۵۵) نتیجه می شود:

$$Y_i(s) = G_{i1}(s)U_1(s) + G_{i2}(s)U_2(s) + \dots + G_{ir}(s)U_r(s) \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (۳-۵۶)$$

رابطه (۳-۵۶) را بصورت زیر نیز می توان چنین نوشت:

$$Y_i(s) = \sum_{j=1}^r G_{ij}(s)U_j(s) \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (۳-۵۷)$$

با توجه به وجود عامل $(sI - A)^{-1}$ در معادله (۳-۵۴)، ملاحظه می شود که مخرج تمامی توابع تبدیل G_{ij} عبارت از $\det(sI - A)$ می باشد* که با مساوی صفر قرار دادن آن، معادله مشخصه سیستم بدست می آید.

(۳-۲) - نمایش ترسیمی سیستمهای خطی پیوسته:

علاوه بر "نمایش ریاضی" سیستمهای دینامیکی در کنترل، "روش ترسیمی" نمایش سیستمها نیز ابزار مناسبی برای فهم و تجسم بهتر مسائل کنترل بشمار می آید. نمایش ترسیمی سیستمهای دینامیکی در کنترل علاوه بر بیان صریحتر روابط مربوط به علتها و معلولها، دارای این مزیت نسبت به نمایش ریاضی است که آنچه را که در سیستم اتفاق می افتد آشکارتر بیان می نماید.

نمایش ترسیمی سیستمها معمولاً به دو صورت "دیاگرام جعبه ای" و "دیاگرام جریانی" ارائه می شود. در جدول (۳-۱) موضوع مورد نظر و طرز نمایش آن در دیاگرامهای جعبه ای و جریانی منعکس شده است.

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)}$$

*- زیرا همانطور که قبلاً نیز گفته شد معکوس $(sI - A)$ عبارت است از:

۱- Block Diagram

۲- Signal Flow Diagram

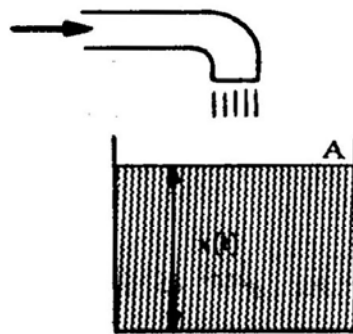
(۳-۲-۱) - نمایش ترسیمی یک سیستم خطی رسته یک:

در این قسمت ابتدا طرز نمایش یک انتگرال گیرنده^۱ بررسی می‌شود. برای سیستم شکل (۳-۱۳) تغییرات حجم مایع ظرف نسبت به زمان یعنی $A \frac{dx}{dt}$ برابر دبی ورودی است، یعنی:

$$A \frac{dx}{dt} = u(t)$$

و با در نظر گرفتن $\frac{d}{dt} = D$ داریم:

$$DX(t) = \frac{1}{A} u(t) \quad (3-58)$$



شکل (۳-۱۳) - سیستم سیالاتی (مخزن مایع) بعنوان انتگرال گیرنده .

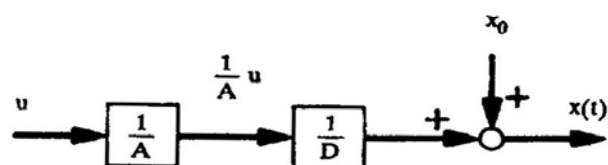
با انتگرال گرفتن از معادله (۳-۵۸) و با تعریف نماد $\int_0^t dt = \frac{1}{D}$ داریم:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \frac{1}{A} u(t) dt = x_0 + \frac{1}{D} \cdot \frac{1}{A} u(t) \quad (3-59)$$

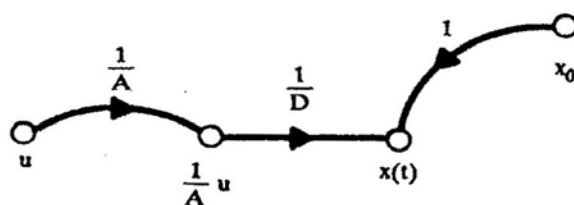
با توجه به نحوه نمایش مفاهیم ریاضی به صورت دیاگرامهای جعبه‌ای و جریانی از جدول (۳-۱)، نمایش ترسیمی یک انتگرال گیرنده که نمایش ریاضی آن بصورت معادله (۳-۵۹) داده شده است بصورت شکل (۳-۱۴) خواهد بود.

جدول (۱-۳) - موضوع و طرز نمایش در دیاگرامهای جعبه‌ای و جریان‌ی.

موضوع نمایش	دیاگرام جعبه‌ای	دیاگرام جریان‌ی
طرز نمایش	طرز نمایش	طرز نمایش
سیگنال	خط راست	دایره کوچک
تابع	جعبه	خط منحنی
جمع و تفریق سیگنال	تجمع خطوط در دایره کوچک	تجمع خطوط در محل دایره کوچک

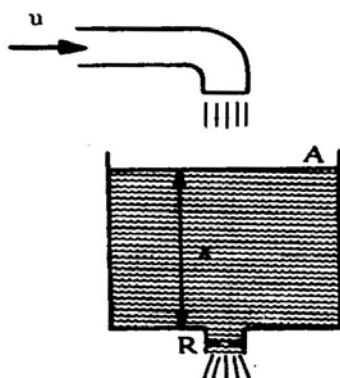


(a)



(b)

شکل (۳-۱۴) - نمایش ترسیمی رابطه (۳-۵۹) بصورت (a) دیاگرام جعبه‌ای (b) دیاگرام جریان‌ی.



شکل (۳-۱۵) - سیستم سیالاتی مخزن .

قابل ذکر است که در دیاگرام جریانی استثنائاً تابع $\frac{1}{D}$ (یک انتگرال گیرنده خالص) بصورت خط راست نمایش داده می شود.

فرم کلی تری از سیستم خطی رسته یک را می توان برای سیستم شکل (۳-۱۵) که نمایشگر مخزن (دارای سوراخ به مقاومت R) است بدست آورد. نمایش ریاضی این سیستم بصورت زیر خواهد بود:

$$A\dot{x} = u - \frac{x}{R} \quad (a)$$

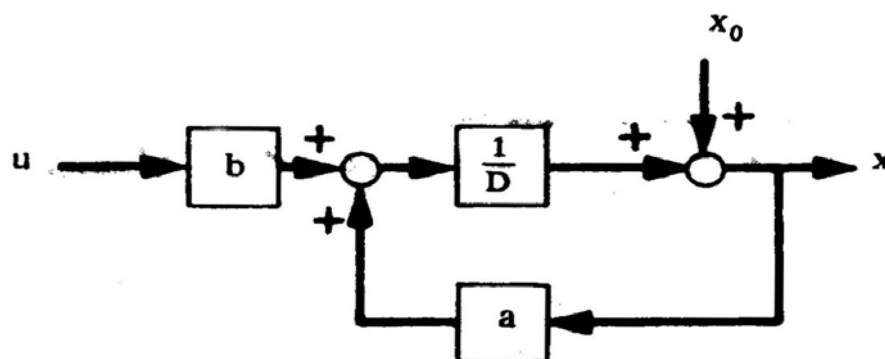
$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{RA}x(t) + \frac{1}{A}u(t) \quad \text{و یا:}$$

با در نظر گرفتن $\frac{-1}{RA}=a$ و $\frac{1}{A}=b$ نتیجه می شود:

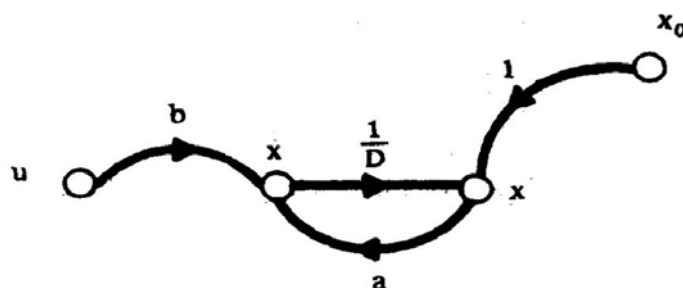
$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t) \quad (a-۶۰-۳)$$

با انتگرالگیری از این معادله نتیجه می شود:

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{D} [ax(t) + bu(t)] \quad (b-۶۰-۳)$$



(a) - دیاگرام جعبه‌ای سیستم در میدان زمان.



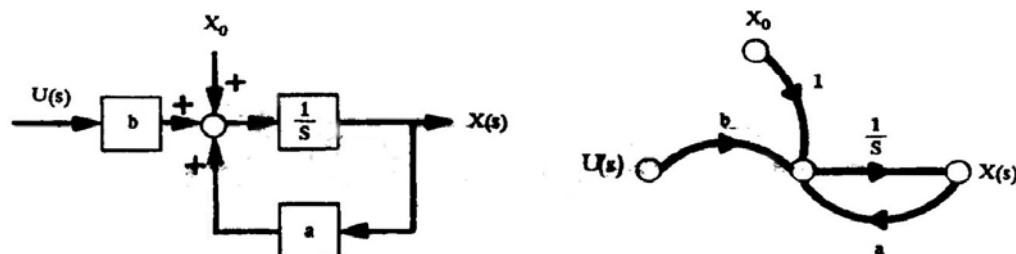
(b) - دیاگرام جریانی سیستم در میدان زمان.

شکل (۱۶-۳) - نمایش ترسیمی از رابطه (۳-۶۰-b) برای یک سیستم رسته یک.

که دیاگرام ترسیمی آن بصورت شکل (۱۶-۳) بدست می‌آید. دیاگرامهای ترسیمی را می‌توان در میدان لاپلاس نیز بدست آورد. در مورد سیستم رسته یک، با تبدیل لاپلاس گرفتن از معادله (۳-۶۰-a) خواهیم داشت:

$$sX(s) - x(0) = aX(s) + bU(s) \quad (۳-۶۰-c)$$

که در آن $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ و $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$ می‌باشد. دیاگرام جعبه‌ای و جریانی در میدان لاپلاس برای رابطه (۳-۶۰-c) در شکل (۱۷-۳) نشان داده شده‌اند.



(b) - دیاگرام جریانی سیستم در میدان لاپلاس . (a) - دیاگرام جعبه‌ای سیستم در میدان لاپلاس .
 شکل (۳-۱۷) - نمایش ترسیمی رابطه (۳-۶۰) برای یک سیستم رسته یک .

از مقایسه دیاگرام‌های ترسیمی برای سیستم رسته یک در میدان زمان و میدان لاپلاس [شکلهای (۳-۱۶) و (۳-۱۷)] نتیجه می‌شود که عملگر $\frac{1}{D}$ نظیر $\frac{1}{s}$ بوده و هر دو معرف انتگرال می‌باشند. بنابراین D و s نیز نظیر هم هستند. همچنین از شکل (۳-۱۷) نتیجه می‌شود که شرایط اولیه نظیر یک ورودی ضربه‌ای با مقدار x_0 عمل می‌کند.

(۳-۲-۲) - نمایش ترسیمی سیستم رسته n بایک ورودی و یک خروجی:

نمایش ریاضی یک سیستم خطی رسته n با یک ورودی و یک خروجی بصورت معادلات (۳-۹) بیان شده است. با بکاربردن عملگر D معادله (۳-۹) می‌شود:

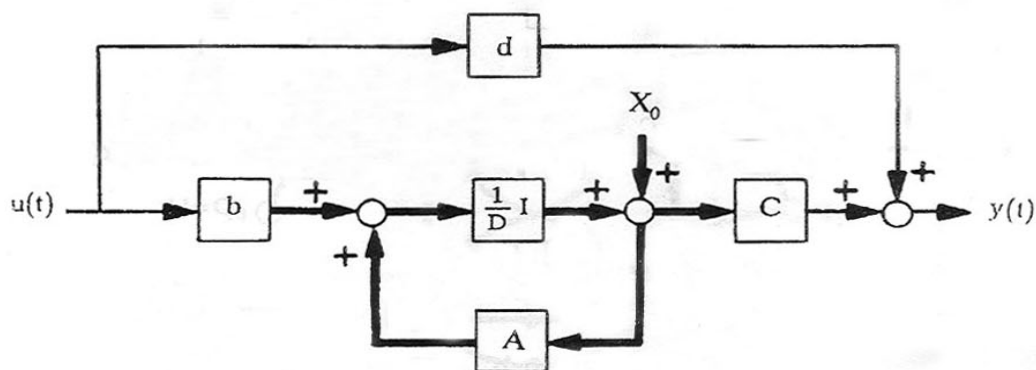
$$\begin{aligned}DX &= AX + bu \\ y &= cX + du\end{aligned}$$

و یا:

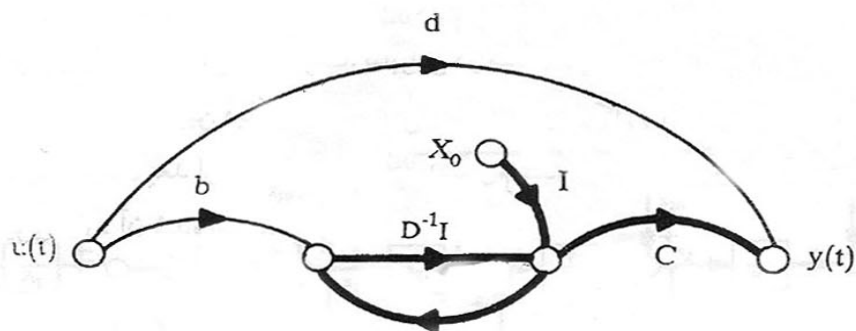
$$X(t) = X(0) + \frac{1}{D}I(AX + bu) \quad (۳-۶۱)$$

در این رابطه I ماتریس واحد $n \times n$ بوده و نمایش ترسیمی رابطه (۳-۶) در میدان زمان بصورت شکل (۳-۱۸) خواهد بود.

این دیاگرامها بصورت برداری رسم شده‌اند و خطوط ضخیم در دیاگرام جعبه‌ای نمایش سیگنالهای برداری و در دیاگرام جریانی نمایش توابع برداری هستند. نمایش ترسیمی این



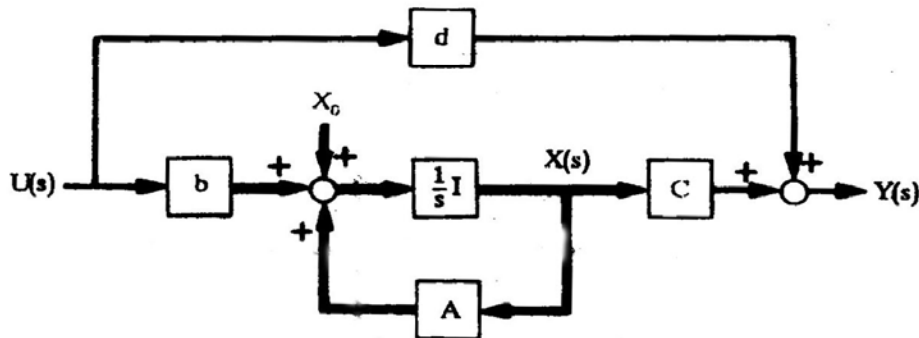
(a) - دیاگرام جعبه‌ای سیستم در میدان زمان بصورت برداری.



(b) - دیاگرام جریان سیستم در میدان زمان بصورت برداری.

شکل (۳-۱۸). نمایش ترسیمی رابطه (۳-۶۱) برای یک سیستم رسته n با یک ورودی و یک خروجی.

سیستم در میدان لاپلاس را نیز می‌توان با تبدیل لاپلاس گرفتن از معادلات (۳-۹) بدست آورد. تبدیل لاپلاس این معادلات قبلاً بصورت معادلات (۳-۴۳) و (۳-۴۴) نمایش داده شده و نمایش دیاگرام جعبه‌ای این معادلات نیز بصورت شکل (۳-۱۹) می‌باشد. از مقایسه دیاگرام جعبه‌ای سیستم در میدان زمان [شکل (۳-۱۸-۲)] با دیاگرام جعبه‌ای



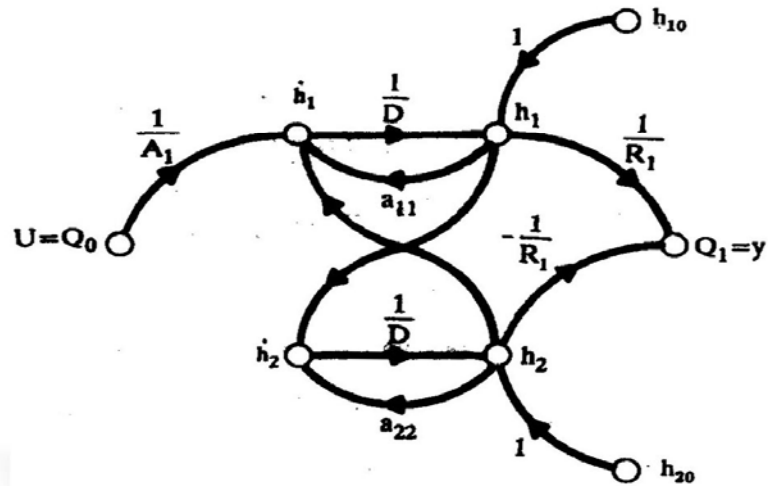
شکل (۳-۱۹). دیاگرام جمعی سیستم خطی رسته n با یک ورودی و یک خروجی در میدان لاپلاس بصورت برداری.

همان سیستم در میدان لاپلاس [شکل (۳-۱۹)] ملاحظه می شود که اپراتور $\frac{1}{D}$ در میدان زمان به $\frac{1}{s}$ در میدان لاپلاس تبدیل شده است. بنابراین در میدان لاپلاس نیز $\frac{1}{s}$ نمایش یک انتگرال گیرنده است. تنها تفاوت بین دیاگرامهای شکل (۳-۱۸) با شکل (۳-۱۹) آن است که شرایط اولیه x در میدان زمان بعد از انتگرال گیری وارد سیستم شده در حالیکه در میدان لاپلاس قبل از انتگرال گیری وارد آن شده است.

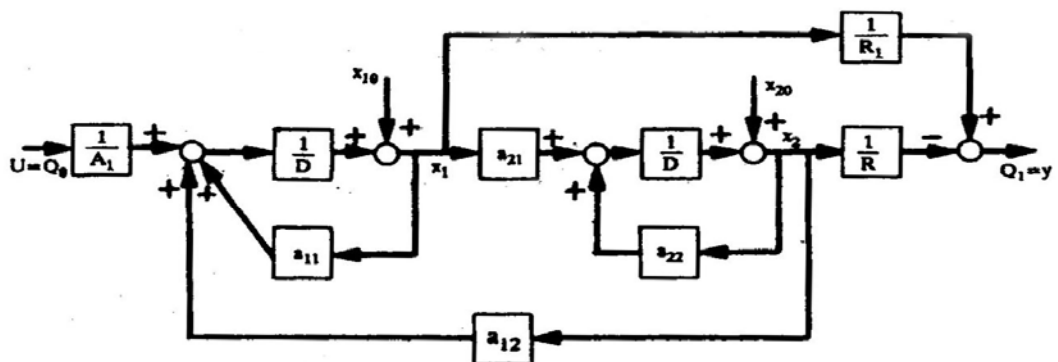
مثال (۳-۷):

می خواهیم دیاگرامهای جریانی و جمعی را برای سیستم مثال (۳-۱) رسم کنیم. معادلات حالت و پارامترهای این سیستم بوسیله معادلات (۳-۴) و (۳-۵) بیان شده اند. اگر برای سهولت، اجزاء ماتریس A در معادله (۳-۵) را a_{ij} بنامیم، معادلات (۳-۴) و (۳-۵) چنین می شوند:

$$\begin{aligned} \dot{h}_1 &= a_{11} h_1 + a_{12} h_2 + \frac{1}{A} Q_0 \\ \dot{h}_2 &= a_{21} h_1 + a_{22} h_2 \\ Q &= \frac{1}{R_1} h_1 - \frac{1}{R_2} h_2 \end{aligned} \quad (۳-۶۲)$$



(a) - دیاگرام جریانی سیستم.



(b) - دیاگرام جعبه‌ای سیستم.

(که در آن $x_{20}=h_{20}$ ، $x_{10}=h_{10}$ ، $x_2=h_2$ ، $x_1=h_1$ می‌باشد)

شکل (۳-۲۰). نمایش ترسیمی سیستم مثال (۳-۱) در میدان زمان.

که پارامترهای a_{ij} عبارتند از:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\frac{1}{R_1 A_1} & , & & a_{12} &= -\frac{1}{R_1 A_1} \\ a_{21} &= \frac{1}{R_1 A_1} & , & & a_{22} &= -\left(\frac{1}{R_1 A_2} + \frac{1}{R_2 A_2}\right) \end{aligned}$$

با توجه به روشهای ترسیمی بیان شده، دیاگرامهای جریانی و جعبه‌ای سیستم فوق بصورت شکل (۳-۲۰) خواهند بود (در دیاگرام جعبه‌ای متغیرهای حالت x بجای h بیان شده‌اند).

مثال (۳-۸):

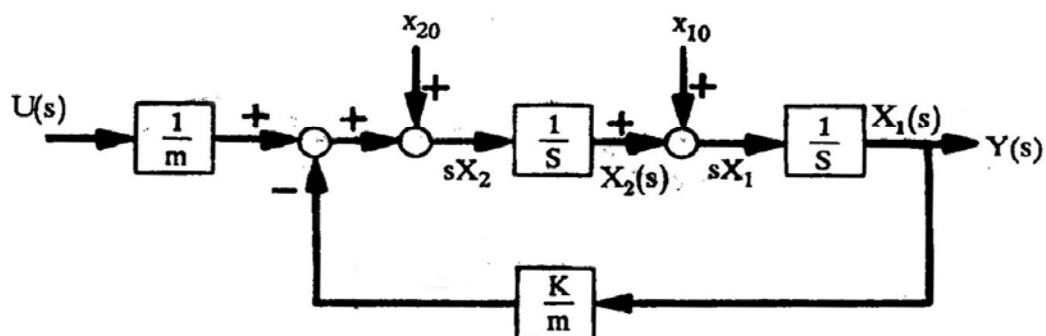
دیاگرامهای جعبه‌ای و جریانی را برای سیستم فنر و وزنه مثال (۳-۲) با توجه به معادلات (۳-۱۷) که در ذیل دوباره نوشته می‌شوند، می‌خواهیم در میدان لاپلاس

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2 \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{K}{m}x_1 + \frac{1}{m}u(t) \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (۳-۶۳)$$

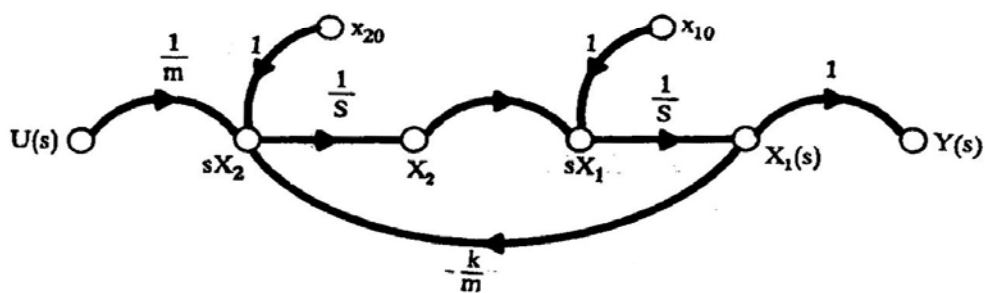
و معادلات حالت در میدان لاپلاس عبارتند از:

$$\begin{aligned} sX_1(s) - x_1(0) &= X_2(s) \\ sX_2(s) - x_2(0) &= -\frac{K}{m}X_1(s) + \frac{1}{m}U(s) \\ Y(s) &= X_1(s) \end{aligned}$$

نمایش ترسیمی روابط فوق در شکل (۳-۲۱) ارائه شده است.



(a) - دیاگرام جعبه‌ای سیستم فنر و وزنه.



(b) - دیاگرام جریانی سیستم فنر و وزنه.

شکل (۳-۲۱) - نمایش ترسیمی سیستم مثال (۳-۲) در میدان لاپلاس.

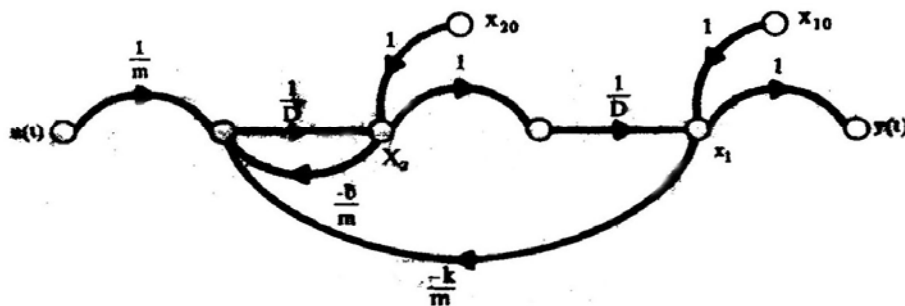
رسم نمائیم.

مثال (۳-۹):

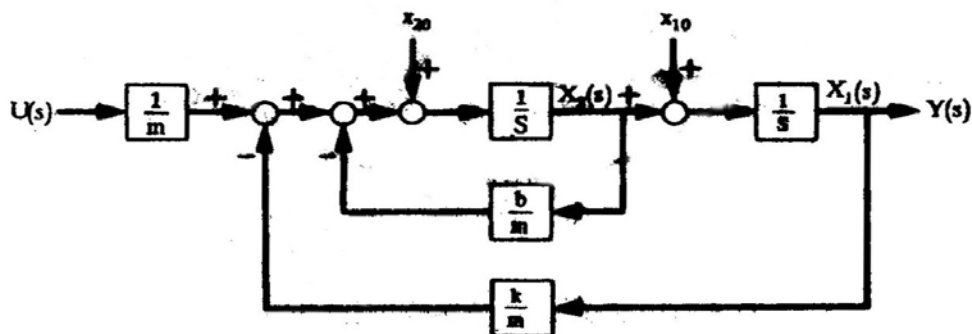
برای سیستم فنر و وزنه و مستهلک‌کننده مثال (۳-۴) معادلات حالت سیستم

[در مثال (۳-۶)] بصورت زیر بیان شده است:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= AX + bu \\ Y &= CX\end{aligned}$$



(a) - دیاگرام جریانی سیستم در میدان زمان.



(b) - دیاگرام جعبه‌ای سیستم در میدان لاپلاس.

شکل (۳-۲۲) - نمایش ترسیمی سیستم فنر، وزنه و دمپر مثال (۳-۴).

که در آن ضرایب عبارتند از:

$$c = [1 \ 0] \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -b/m \end{bmatrix}$$

می‌خواهیم برای این سیستم دیاگرام‌های جعبه‌ای و جریانی را رسم کنیم.

معادلات حالت فوق را می‌توان چنین نوشت:

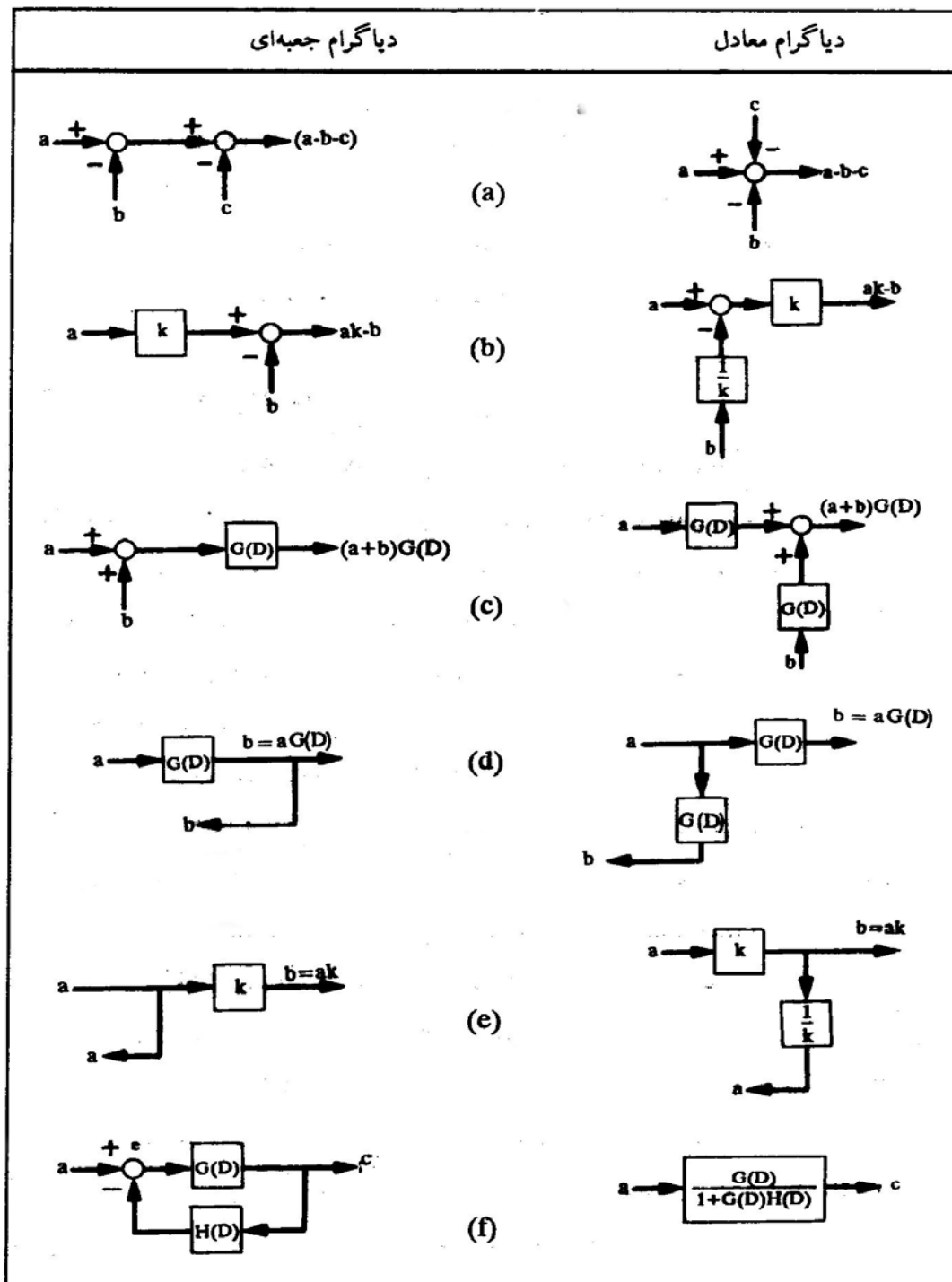
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{1}{m}u \\ y &= x_1\end{aligned}\quad (۶۴-۳)$$

و دیاگرامها بصورت شکل (۳-۲۲) بدست می‌آیند (در این مثال دیاگرام جریانی در میدان زمان و دیاگرام جعبه‌ای در میدان لاپلاس رسم شده است).

(۳-۲-۳) - ساده کردن نمایش ترسیمی:

به دلایلی که اشاره خواهد شد می‌توان دیاگرام جعبه‌ای (یا جریانی) را بدون خدشه‌دار شدن مفهوم کلی آن تغییر فرم داد. معمولاً این تغییر فرمها بمنظور ترکیب چند قسمت و بدست آوردن قسمت معادل صورت می‌گیرد و این عمل اصطلاحاً ساده کردن دیاگرام نامیده می‌شود. با ساده کردن دیاگرامها می‌توان روابط بین ورودی و خروجی را بصورت یک جعبه (در دیاگرام جعبه‌ای) و یا یک خط (در دیاگرام جریانی) بدست آورد. با توجه به تعریف تابع تبدیل چنانچه این ساده کردن در میدان لاپلاس باشد نتیجه ساده شده رابطه بین ورودی و خروجی از دیاگرام، همان تابع تبدیل سیستم خواهد بود.

در شکل (۳-۲۳) چند نمونه دیاگرام جعبه‌ای و دیاگرام معادل هر یک از آنها رسم شده است. مفهوم شکل (۳-۲۳-ب) آن است که اگر سیگنال ورودی به یک مدار به سمت چپ جعبه‌ای منتقل شود (سیگنال b) در عکس آن جعبه ضرب می‌شود. مفهوم شکل (۳-۲۳-ج) آن است که اگر سیگنال ورودی به یک مدار (سیگنال b) به سمت راست جعبه‌ای منتقل شود باید در آن جعبه ضرب شود. شکل (۳-۲۳-د) مبین آن است که اگر سیگنال خروجی از یک مدار به سمت چپ جعبه‌ای منتقل شود در جعبه ضرب می‌شود و هوشکل (۳-۲۳-ه) می‌بینیم که اگر سیگنال خروجی از یک مدار به سمت راست جعبه‌ای منتقل شود در معکوس آن جعبه ضرب می‌شود. بالاخره برای بدست آوردن معادل سیستم شکل (۳-۲۳-۴) یعنی برای یافتن رابطه بین ورودی a و خروجی y بصورت یک جعبه، با نوشتن روابط مربوطه در این



شکل (۳-۲۳) - چند نمونه کلی دیاگرامهای جمعهای و معادل آنها.

شکل داریم:

$$c = G(D)c = G(D)[a - H(D)c] = aG(D) - cG(D)H(D)$$

و یا:

$$c(1 + G(D)H(D)) = aG(D)$$

که نتیجه می شود:

$$\frac{c}{a} = \frac{G(D)}{1 + G(D)H(D)} \quad (۳-۶۵)$$

رابطه فوق را که دستورالعمل "تامپسون" از آن نتیجه می شود می توان چنین بیان کرد که در هر سیستم فیدبک رابطه بین ورودی و خروجی عبارت است از:

$$(۳-۶۶) \quad \text{مسیر مستقیم بین ورودی و خروجی} = \frac{\text{خروجی}}{\text{ورودی}} = \text{تابع تبدیل در مدار فیدبک}$$

حال با ذکر چند مثال نحوه ساده کردن دیاگرامها تصریح می گردد.

مثال (۳-۱۰):

با ساده کردن دیاگرام جعبه ای شکل (۳-۲۱a) در مورد سیستم فنر و وزنه و با توجه به اینکه رفتار کلی $Y(s)$ عبارت از جمع اثرات همه ورودیها و شرایط اولیه می باشد، با بکاربردن دستور تامپسون از معادله (۳-۶۶) داریم:

$$Y(s) = \frac{(\text{مسیر مستقیم بین ورودی } u \text{ و خروجی})}{1 + (\text{مدار بسته})} U(s) + \frac{(\text{مسیر مستقیم بین } X_{10} \text{ و خروجی})}{1 + (\text{مدار بسته})} X_{10} + \frac{(\text{مسیر مستقیم بین } X_{20} \text{ و خروجی})}{1 + (\text{مدار بسته})} X_{20}$$

و یا:

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{s^2}}{1 + (\frac{K}{ms^2})} U(s) + \frac{\frac{1}{s}}{1 + (\frac{K}{ms^2})} X_{10} + \frac{\frac{1}{s^2}}{1 + (\frac{K}{ms^2})} X_{20}$$

پس از ساده کردن رابطه فوق، نتیجه می‌شود:

$$Y(s) = \frac{1}{ms^2 + K} U(s) + \frac{Kx_{10}}{ms^2 + K} + \frac{mx_{20}}{ms^2 + K} \quad (۶۷-۳)$$

اگر شرایط اولیه $x_{10} = x_{20} = 0$ باشد رابطه بین ورودی و خروجی بنابه تعریف، همان تابع تبدیل خواهد بود. لذا از معادله (۶۷-۳) با صفر قراردادن x_{10} و x_{20} داریم:

$$Y(s) = \frac{U(s)}{ms^2 + k}$$

و یا:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2 + K} \quad (۶۸-۳)$$

و این همان معادله (۴۱-۳) می‌باشد که در مثال (۵-۳) نیز آنرا بدست آورده بودیم.

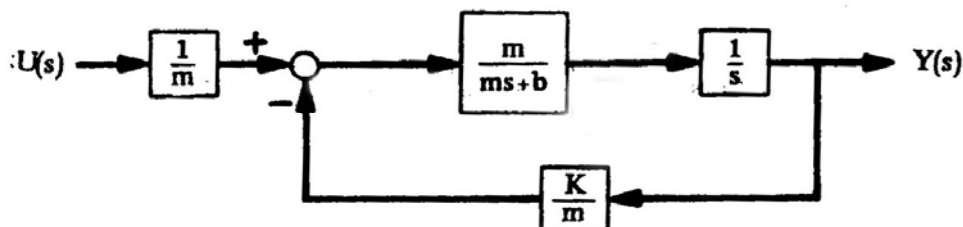
مثال (۱۱-۳):

می‌خواهیم با ساده کردن دیاگرام جعبه‌ای شکل (b-۲۲-۳)، تابع تبدیل سیستم فنر و وزنه و مستهلک‌کننده را بین ورودی (نیروی وارد به جرم) و خروجی (تغییر مکان جرم) بدست آوریم.

در مدار شکل (b-۲۲-۳) ابتدا همه شرایط اولیه را مساوی صفر در نظر می‌گیریم. سپس با ساده کردن مدار داخلی (در مدار داخلی مسیر مستقیم $\frac{1}{s}$ و مدار بسته داخلی $\frac{1}{s} \frac{b}{m}$ است) داریم:

$$\text{معادل مدار داخلی} = \frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{b}{ms}} = \frac{m}{ms + b}$$

بنابراین مدار سیستم بصورت شکل (۲۴-۳) حاصل می‌شود.



شکل (۳-۲۴) - نمایش ترسیمی ساده شده شکل (۳-۲۲-ب).

با بکاربردن مجدد روش تاملسون داریم:

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{\frac{1}{m} \cdot \frac{m}{ms+b} \cdot \frac{1}{s}}{1 + \frac{m}{ms+b} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{K}{m}} \quad (۳-۶۹) \\ &= \frac{1}{ms^2 + bs} = \frac{1}{ms^2 + bs + K} \end{aligned}$$

معادله (۳-۶۹) همان معادله (۳-۴۲) می باشد که در مثال (۳-۴) و مثال (۳-۶) نیز آنرا بدست آورده ایم.

(۳-۲-۴) معادلات برداری حالت از تابع تبدیل :

در این قسمت، با در اختیار داشتن مدل ریاضی یک سیستم به صورت تابع تبدیل، می خواهیم نمایش ریاضی دیگری از یک سیستم یعنی، معادلات حالت را به دست می آوریم.

به عبارت دیگر می خواهیم با داشتن $G(s)$ در یک سیستم با یک ورودی و یک خروجی ماتریسهای A ، b و C و کمیت اسکالر d در معادله (۳-۹) تعیین نماییم.

با توجه به معادله (۳-۴۸)، برای تابع تبدیل $G(s)$ رسته n ، ماتریس A یک ماتریس مربع $n \times n$ است و b و C به ترتیب ماتریسهای سطری و ستونی با n المان می باشند. معادله

(۴۸-۳) را می‌توان چنین نوشت :

$$G(s) = \frac{I}{\det(sI - A)} \cdot c [adj(sI - A)] b + d \quad (۷۰-۳)$$

که در آن با استفاده از رابطه (۴۹-۳) ترم $[adj(sI - A)] / \det(sI - A)$ به جای $(sI - A)^{-1}$ به کار برده شده است.

اولین نکته‌ای که باید مورد توجه قرار گیرد آن است که با داشتن $G(s)$ ، حالات تعیین ماتریسهای A ، b و c منحصر به فرد نیست. انتخاب A تنها دارای این محدودیت است که مقادیر ویژه A باید همان قطب‌های تابع تبدیل باشند و این بدان معناست که ماتریس A صرفاً با توجه به قطب‌های تابع تبدیل تعیین می‌گردد.

همچنین می‌توان گفت که مقدار اسکالر d در معادله حالت (۹-۳) بستگی به رسته صورت تابع تبدیل دارد. از معادله (۴۸-۳) می‌توان به سادگی نتیجه گرفت که اگر رسته صورت تابع تبدیل برابر رسته مخرج آن باشد، $d \neq 0$ و اگر رسته صورت کمتر از رسته مخرج باشد، $d=0$ خواهد بود. به عبارت دیگر :

$$G(s) = \frac{\text{چندجمله‌ای برحسب } S \text{ با رسته حداکثر } (n-1)}{\text{چندجمله‌ای برحسب } S \text{ از رسته } (n)} \rightarrow d = 0 \quad (۷۱-۳)$$

$$G(s) = \frac{\text{چندجمله‌ای برحسب } S \text{ از رسته } n}{\text{چندجمله‌ای برحسب } S \text{ از رسته } n} \rightarrow d \neq 0 \quad (۷۲-۳)$$

معادله (۷۲-۳) را می‌توان چنین نوشت :

$$G(s) = d + \frac{\text{چندجمله‌ای برحسب } S \text{ تا رسته حداکثر } (n-1)}{\text{چندجمله‌ای برحسب } S \text{ از رسته } (n)} \quad (۷۳-۳)$$

پس اگر رسته صورت و مخرج تابع تبدیل با هم برابر باشند در معادلات حالت $d \neq 0$ بوده و مقدار d را می توان از معادله (۷۲-۳) با تقسیم صورت بر مخرج به صورت معادله (۷۳-۳) به دست آورد. به عنوان مثال، تابع تبدیل $G(s) = (3s + 4) / (s + 1)$ را می توان چنین نمایش داد:

$$G(s) = \frac{3s + 4}{s + 1} = \frac{3s + 3 + 1}{s + 1} = 3 + \frac{1}{s + 1}$$

که در آن $d = 3$ می باشد.

بنابراین از بحث فوق می توان نتیجه گرفت که در تعیین معادلات حالت از تابع تبدیل کافی است حالتی را که رسته صورت تابع تبدیل کمتر از رسته مخرج است مورد بررسی قرار دهیم زیرا توابع تبدیلی که رسته های صورت و مخرج آنها برابرند را می توان به توابع تبدیلی که رسته های صورت آنها کمتر از رسته مخرج باشند تبدیل نمود. تعیین معادلات حالت از تابع تبدیل را می توان به کمک دیاگرام جریانی انجام داد.

برای یک سیستم رسته n ، در دیاگرام جریانی n انتگرال گیرنده به صورت $\frac{1}{s}$ ظاهر می شود (یعنی در دیاگرام جریانی n عضو مانند خواهیم داشت). کافی است خروجی هر انتگرال گیرنده را یکی از متغیرهای حالت انتخاب کنیم و به این ترتیب n متغیر حالت سیستم تعیین می شود. نحوه تعیین معادلات حالت را به کمک دیاگرام جریانی با ذکر یک مثال روشن می کنیم.

مثال (۳-۱۲):

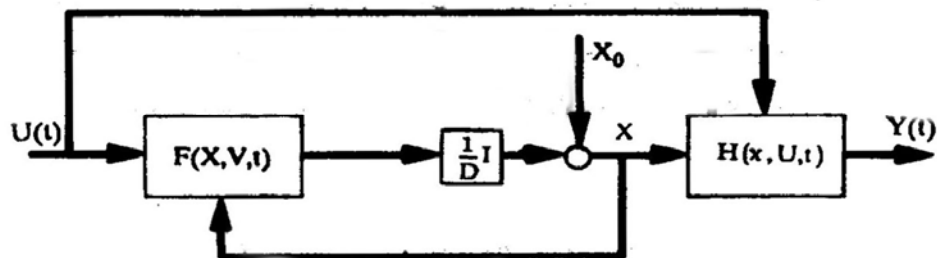
می خواهیم معادلات حالت سیستمی را که تابع تبدیل آن با $G(s) = b_0 / (s + a)$

نمایش داده شده تعیین کنیم.

قدم اول :

صورت و مخرج تابع تبدیل را بر s تقسیم می کنیم:

$$G(s) = \frac{\frac{b_0}{s}}{1 + \frac{a_0}{s}} \quad (۷۴-۳)$$



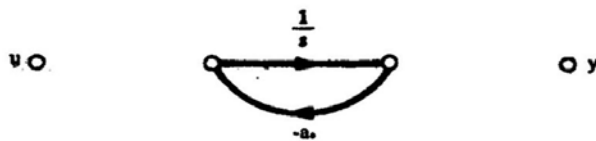
شکل (۲۵-۳) - دیاگرام جریانی سیستم رسته یک.

چون این سیستم تنها یک انتگرال گیرنده دارد نمایش کلی این سیستم را می‌توان به صورت دیاگرام جریانی (۲۵-۳) ارائه داد. تابع تبدیل این سیستم عبارت است از:

$$G(s) = \frac{\text{مسیر مستقیم}}{\text{مدار بسته با فیدبک منفی} + 1}$$

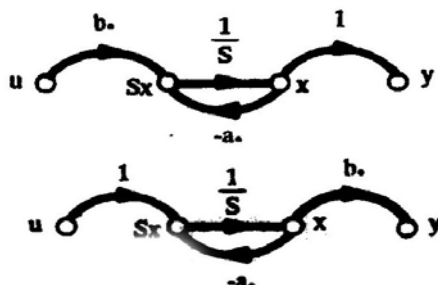
بنابراین در رابطه (۷۴-۳) صورت کسر یعنی b_0/s مسیر مستقیم است و مدار فیدبک برابر $\frac{a_0}{s}$ است. قدم دوم:

با توجه به بحث فوق مدار فیدبک در دیاگرام جریانی به صورت زیر در می‌آید:



قدم سوم:

چون مسیر مستقیم باید برابر b_0/s باشد، دیاگرام جریانی سیستم به یکی از دو حالت نشان داده شده در شکل (۲۶-۳) قابل ارائه می‌باشد.



شکل (۳-۲۶) - دو نوع دیاگرام جریانی برای سیستم رسته یک.

قدم چهارم و نهائی :

معادله حالت برای دیاگرام جریانی شکل (۳-۲۶-ا) عبارت است از:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x &= -a_0x + b_0u \\ y &= x \end{aligned} \quad (۳-۷۵)$$

همچنین معادلات حالت برای دیاگرام جریانی شکل (۳-۲۶-ب) عبارت است از :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x &= -a_0x + u \\ y &= b_0u \end{aligned} \quad (۳-۷۶)$$

در حالت کلی اگر تابع تبدیل رسته n به صورت زیر ارائه شود:

$$G(s) = \frac{b_n s^{n-1} + b_{n-1} s^{n-2} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (۳-۷۷)$$

و معادلات حالت نیز به فرم عمومی زیر بیان شوند :

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + bu \\ Y &= cX \end{aligned} \quad (۳-۷۸)$$

دو انتخاب کلی برای ماتریسهای A ، b و c به عنوان انتخاب نوع اول و دوم را می توان

معرفی نمود.

انتخاب نوع اول:

$$(۷۹-۳) \quad A = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 & \vdots \\ -a_1 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ -a_0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix}, \quad c = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]$$

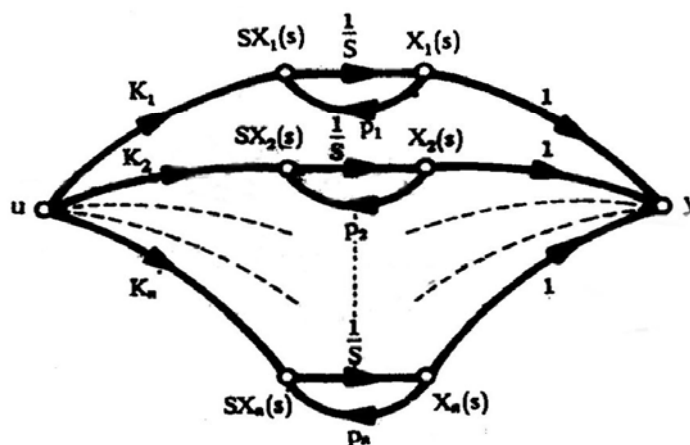
انتخاب نوع دوم:

$$(۸۰-۳) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{n-1}]$$

یکی دیگر از موارد خاصی که معادلات حالت را می‌توان با دستور العمل جداگانه‌ای تعیین نمود مربوط به شرایطی است که تابع تبدیل دارای n ریشه حقیقی و مجزابه صورت زیر باشد:

$$G(s) = \frac{\text{چند جمله‌ای بر حسب } s \text{ تارسته } (n-1)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (۸۱-۳)$$

که در آن p_1 تا p_n اعداد حقیقی و مجزا و ریشه‌های تابع تبدیل یا قطب‌های سیستم هستند،



شکل (۲۷-۳) - دیاگرام جریانی برای تابع تبدیل با قطب‌های مجزا و حقیقی.

یعنی:

$$p_1 \neq p_2 \neq \dots \neq p_n \quad (۸۲-۳)$$

در این حالت تابع تبدیل را میتوان به n جمله تجزیه نمود:

$$G(s) = \frac{N(s)}{d(s)} = \frac{K_1}{s-p_1} + \frac{K_2}{s-p_2} + \dots + \frac{K_n}{s-p_n} \quad (۸۳-۳)$$

که در آن:

$$K_i = \lim_{s \rightarrow p_i} \left[(s-p_i) \frac{N(s)}{D(s)} \right] \quad (۸۴-۳)$$

می باشد. برای تابع تبدیل تجزیه شده دیاگرام جریانی به صورت شکل (۲۷-۳) درمی آید:

بنابراین در معادلات حالت (۷۸-۳) ماتریس‌های A ، b و C چنین خواهند بود:

(۸۵-۳)

$$A = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & p_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}, \quad c = [1 \quad 1 \quad 1 \quad \dots \quad 1]$$

همانطور که ملاحظه می شود ماتریس A قطری و مقادیر ویژه ماتریس A همان قطب های تابع تبدیل می باشند.

(۳-۳) - سیستمهای دینامیکی غیر خطی

یک سیستم دینامیکی غیر خطی رسته n که پارامترهای آن با همان تغییر می کنند را می توان بصورت زیر نمایش داد (سیستم دارای r ورودی u_1 تا u_r می باشد که با بردار U بیان گردیده است):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x_i &= f_i(X, U, t) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ y_j &= h_j(X, U, t) \quad (j = 1, 2, \dots, m)\end{aligned}\quad (۸۶-۳)$$

این معادلات را بصورت برداری هم می توان نشان داد (معادلات حالت):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} X(t) &= F(X, U, t) \\ Y(t) &= H(X, U, t)\end{aligned}\quad \begin{matrix} (۸۷-۳) \\ \text{که در آن:} \end{matrix}$$

$$F(X, U, t) = \begin{bmatrix} f_1(X, U, t) \\ f_2(X, U, t) \\ \vdots \\ f_n(X, U, t) \end{bmatrix}\quad (۸۸-۳)$$

$$H(X, U, t) = \begin{bmatrix} h_1(X, U, t) \\ h_2(X, U, t) \\ \vdots \\ h_m(X, U, t) \end{bmatrix}$$

می باشند. در شکل (۲۸-۳) دیاگرام جعبه ای سیستم دینامیکی غیر خطی رسته n با



شکل (۳-۲۸) - نمایش ترسیمی سیستم دینامیکی غیر خطی رسته n با پارامترهای تابع زمان.

پارامترهای متغیر به فرم برداری نمایش داده شده است. اگر پارامترهای سیستم با معادلات حالت (۳-۸۷) با زمان تغییر نکنند، سیستم به فرم غیرخطی با پارامترهای ثابت^۱ تبدیل می شود در اینصورت معادلات حالت بصورت زیر خواهند بود:

$$\dot{x} = f(x)$$

(۳-۸۹)

برای خطی کردن سیستم فوق از بسط تیلور استفاده می کنیم. سیستمهای غیرخطی می توانند دارای چندین نقطه تعادل باشند (یک سیستم غیرخطی ممکن است در اطراف یک نقطه تعادل، پایدار و در اطراف یک یا چند نقطه تعادل دیگر ناپایدار باشد). در مورد سیستمهای دینامیکی مورد بحث، خطی کردن معمولاً حول یکی از نقاط تعادل سیستم غیرخطی صورت می گیرد. در مورد سیستم غیرخطی با معادلات حالت (۳-۸۹) اگر نقطه تعادل $x = x_0$ و $u = u_0$ باشد در اینصورت تغییرات x نسبت به زمان در این نقطه صفر می باشد (تعریف نقطه تعادل)، یعنی:

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{x=x_0} = 0$$

(۳-۹۰)

۱- "Stationary" or "time invariant"

بنابراین:

$$F(X_0, U_0) = 0 \quad (91-3)$$

اگر تغییرات جزئی در اطراف نقطه تعادل X_0 و U_0 بنامیم، داریم:

$$X' = X - X_0, \quad U' = U - U_0 \quad (92-3)$$

در اینصورت از بسط تیلور معادلات (۸۹-۳) روابط زیر نتیجه می‌شود:

$$\frac{d}{dt} X' = A X' + B U' \quad (93-3)$$

$$Y' = C X' + D U'$$

که در آن ماتریسهای A ، B ، C و D عبارتند از:

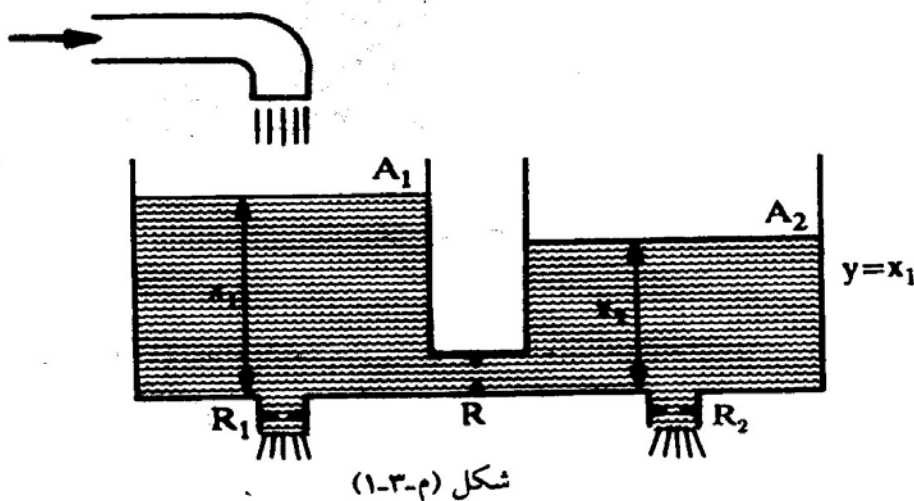
$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\substack{X=X_0 \\ U=U_0}} \quad (94-3) \quad B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_r} \end{bmatrix}_{\substack{X=X_0 \\ U=U_0}}$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial x_1} & \frac{\partial h_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\substack{X=X_0 \\ U=U_0}} \quad D = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u_1} & \frac{\partial h_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial u_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial u_1} & \frac{\partial h_m}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial u_r} \end{bmatrix}_{\substack{X=X_0 \\ U=U_0}}$$



مسائل

(۱-۳)- برای سیستم شکل (م-۱-۳) ماتریسهای A ، b و c و مقدار اسکالر d را در معادله حالت سیستم بدست آورید.



(۲-۳)- در سیستم شکل (م-۱-۳) مسأله قبل با استفاده از پارامترهای زیر:

$$A_1 = A_2 = 1, \quad R_1 = R_2 = R = 1$$

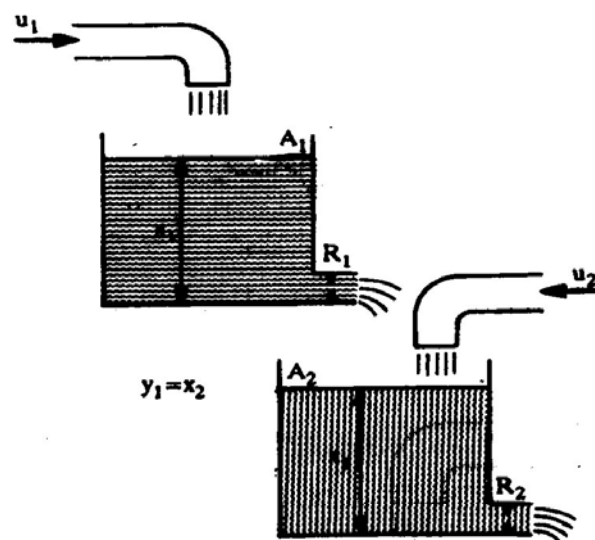
تابع تبدیل بین ورودی و خروجی سیستم را بدست آورید.

(۳-۳)- برای سیستم شکل (م-۳-۳) ماتریسهای A ، B ، C و D را در معادله حالت بدست آورید.

(۴-۳)- برای سیستم شکل (م-۳-۳) مسأله قبل با استفاده از پارامترهای زیر:

$$A_1 = A_2 = 1, \quad R_1 = 1, \quad R_2 = \frac{1}{2}$$

ماتریس تابع تبدیل را برای ورودی‌ها و خروجی‌های نشان داده شده در شکل بدست آورید.



شکل (۳-۳-م)

(۵-۳)- در مسأله (۱-۳) به‌ازاء پارامترهای داده شده در مسأله (۲-۳) مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس A را بدست آورید.

(۶-۳)- در مسأله (۳-۳) به‌ازاء پارامترهای داده شده در مسأله (۴-۳) مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس A را بدست آورید.

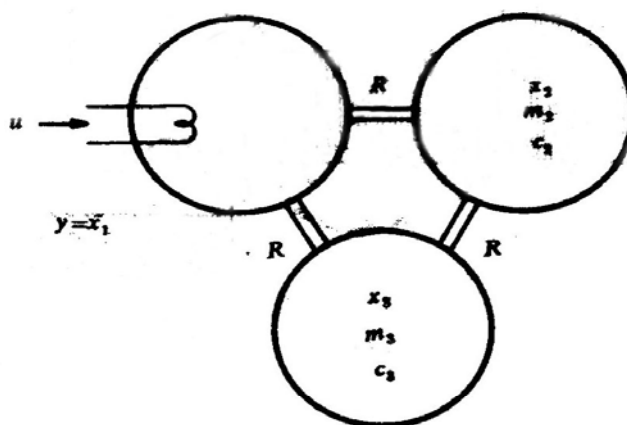
(۷-۳)- سه مخزن شکل (۷-۳-م) به وسیله سه مقاومت مساوی R به هم وصل شده‌اند. هیچگونه نشت حرارتی از منابع بخارج در نظر گرفته نشده است. متغیرهای x_1 ، x_2 و x_3 به ترتیب درجه حرارت مخازن ۱ تا ۳ و m_1 ، m_2 و m_3 جرم سیال مخازن و c_1 ، c_2 و c_3 نیز گرمای ویژه سیال مخازن هستند. u عبارت از دبی حرارتی ورودی به مخزن ۱ و خروجی سیستم نیز درجه حرارت مخزن ۳ می‌باشد.

اولاً: ماتریس A را در معادله حالت بدست آورید.

ثانیاً: برای حالتی که $R=1$ ، $m_1c_1=m_2c_2=m_3c_3=1$ باشد، مقادیر ویژه ماتریس A را

مشخص نمایید.

ثالثاً: بازاء این مقادیر عددی، تابع تبدیل سیستم را بدست آورید.



شکل (م-۳-۷)

(۸-۳)- دیاگرام جعبه‌ای مربوط به سیستم شکل (م-۳-۱) را در میدان زمان رسم کنید. این دیاگرام را با توجه به مقادیر عددی مسأله (۳-۲) ساده نموده و توابع F_1 ، F_2 و F_3 را در رابطه زیر بدست آورید.

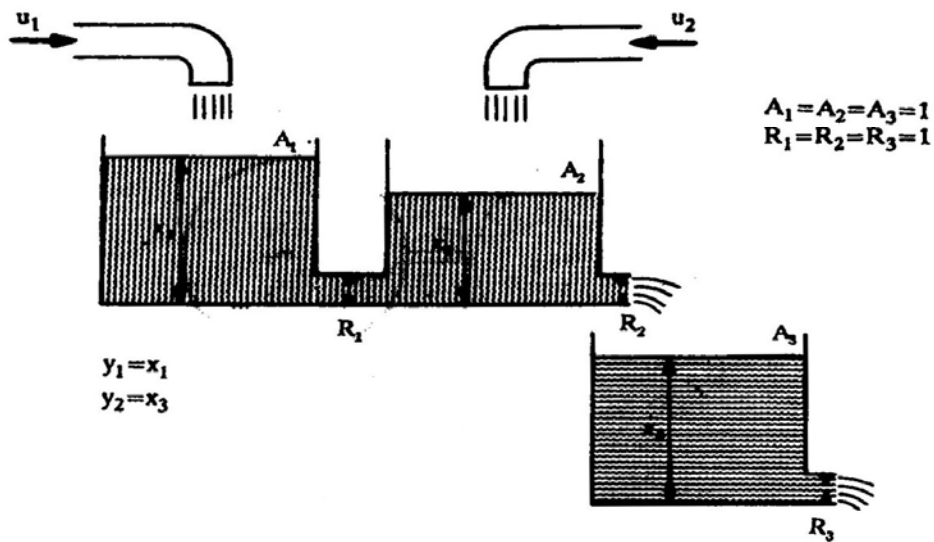
(۹-۳)- دیاگرام جریانی مربوط به سیستم شکل (م-۳-۷) را در میدان لاپلاس رسم کنید. با ساده کردن این دیاگرام و بازاء مقادیر عددی داده شده در مسأله (۳-۷)، تابع تبدیل بین ورودی و خروجی سیستم را بدست آورید.

(۱۰-۳)- برای سیستم شکل (م-۳-۱۰):

اولاً: معادلات حالت را بدست آورید.

ثانیاً: دیاگرام جعبه‌ای سیستم را در میدان لاپلاس رسم کنید.

ثالثاً: با ساده کردن دیاگرام جعبه‌ای فوق رابطه بین ورودی u_1 و خروجی y_1 را در میدان لاپلاس بدست آورید.



شکل (م-۳-۱۰)

(۱۱-۳)- در سیستم شکل (م-۳-۱۱) معادلات حالت را با توجه به متغیرهای انتخاب شده بدست آورید. همچنین با ساده کردن دیاگرام، رابطه بین ورودی و خروجی را نوشته و تابع تبدیل سیستم را نیز بدست آورید.

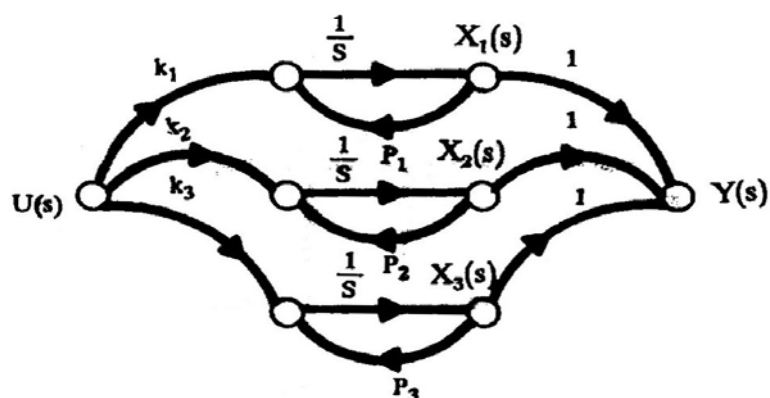


شکل (م-۳-۱۱)

(۱۲-۳)- مقادیر ویژه ماتریس A حاصله در مسأله (۳-۱۱) را بدست آورید. این مقادیر ویژه را با قطب‌های تابع تبدیل بدست آمده در مسأله (۳-۱۱) مقایسه کنید.

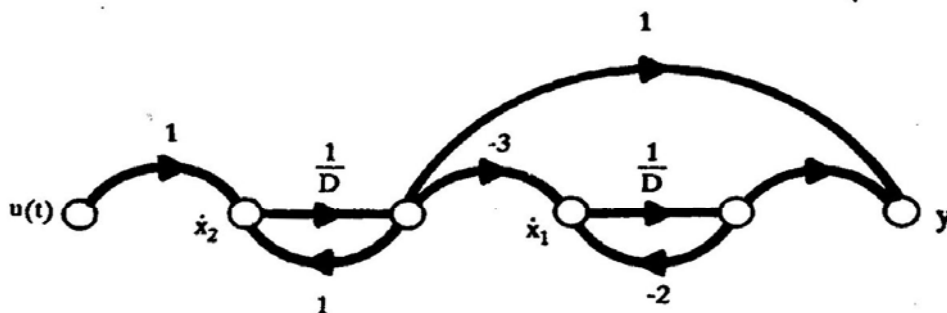
(۱۳-۳)- برای سیستم شکل (م-۳-۱۲):
اولاً: معادلات حالت را بدست آورید.

ثالثاً: تابع تبدیل را بنویسید.



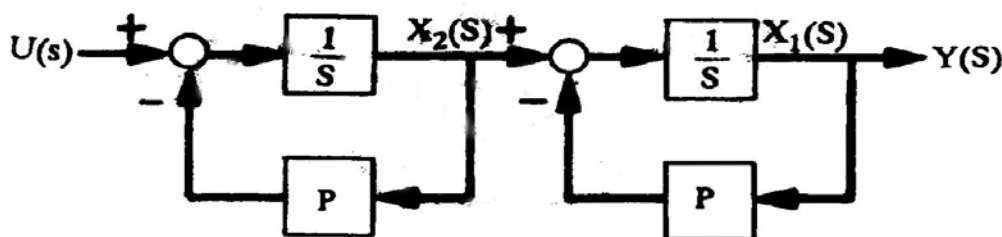
شکل (م-۳-۱۳)

این معادله را با نتیجه قسمت (ج) مقایسه کنید.



شکل (م-۳-۱۴)

(۱۵-۳)- برای سیستم شکل (م-۱۵-۳): اولاً معادلات حالت و ثانیاً تابع تبدیل را بدست آورید. (تابع تبدیل را یکبار از معادله حالت و یکبار با ساده کردن دیاگرام بدست آورده باهم مقایسه کنید).



شکل (م-۱۵-۳)

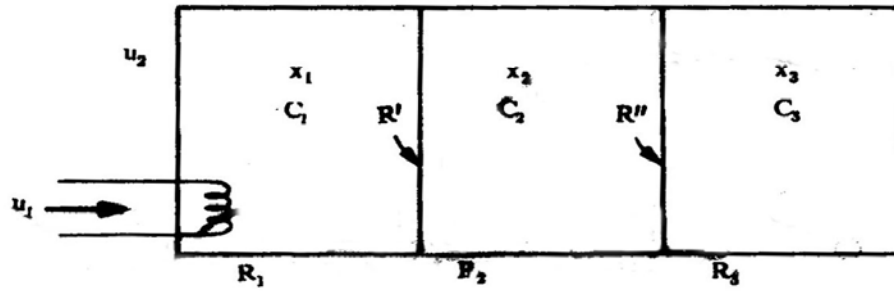
(۱۶-۳)- شکل (م-۱۶-۳) یک سیستم حرارتی متشکل از سه منبع را نشان می‌دهد که در آن C_i ($i=1,2,3$) ظرفیت حرارتی هر کدام از منابع و R_i ($i=1,2,3$) مقاومت دیوارهای منابع با محیط اطراف، R' مقاومت بین منابع ۱ و ۲ و R'' مقاومت بین منابع ۲ و ۳ می‌باشند. u_1 دبی حرارتی ورودی به منبع ۱ برحسب $(\frac{kcal}{min})$ و ورودی کنترل شده سیستم و u_2 درجه حرارت محیط اطراف و ورودی مزاحم *^۱ سیستم است. متغیرهای حالت سیستم عبارت از درجه حرارت‌های x_1 ، x_2 و x_3 سه منبع بوده و خروجی سیستم نیز درجه حرارت منبع سوم $y=x_3$ می‌باشد. حال:

اولاً: معادلات حالت سیستم را بدست آورید.

ثانیاً: با فرض اینکه همه ظرفیتهای حرارتی و همه مقاومتها برابر واحد باشند دیاگرام جعبه‌ای سیستم را رسم کنید.

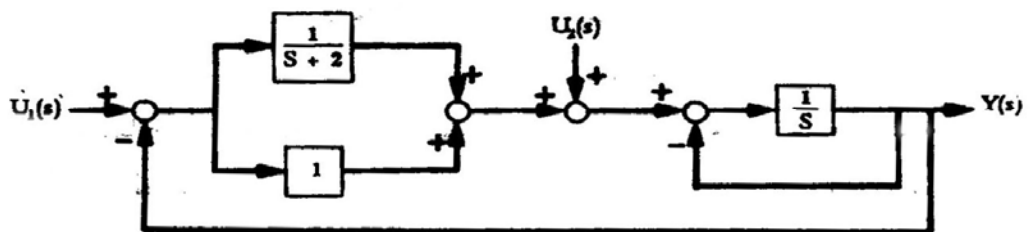
ثالثاً: دیاگرام جعبه‌ای را ساده کرده و رابطه بین هر یک از ورودیهای u_1 و u_2 را با خروجی y بدست آورید.

*- در قسمت (۱-۶) فصل ششم تعریف شده است.

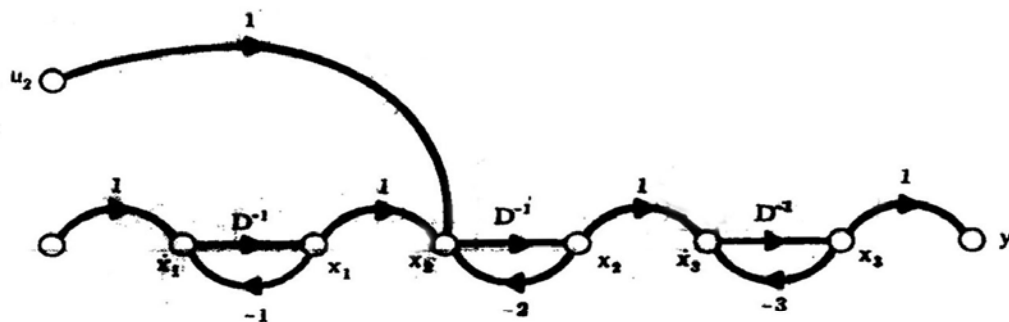


شکل (۱۶-۳-م)

(۱۷-۳) - برای سیستم شکل (۱۷-۳-م) مقادیر $G_1(s)$ و $G_2(s)$ را که در رابطه زیر صدق می‌کنند بدست آورید.



شکل (۱۷-۳-م)



شکل (م-۳-۱۸)

(۱۸-۳)- برای سیستمی که دیاگرام جریانی آن در شکل (م-۳-۱۸) نمایش داده شده، ماتریسهای A ، B ، C و D را در معادلات حالت بدست آورید.

فصل چهارم

رفتار سیستمهای خطی^۱

مقدمه :

تعریف کلی رفتار یک سیستم در فصل اول بمنظور آشنائی مقدماتی ارائه گردید. در آنجا دیدیم که حتی تعریف "سیستم" نیز به "رفتار" مجموعه مورد نظر مربوط می شود. استفاده از رفتار سیستم بعنوان ابزار مناسب تحلیل عملکرد آن، ارائه تعریف دقیقتری را ایجاب می نماید که در این فصل به آن پرداخته می شود.

بر حسب تعریف "رفتار" یک سیستم عبارت از تغییرات متغیرهای حالت و یا خروجی سیستم بر حسب زمان می باشد. از نظر فیزیکی نیز آنچه را که به صورت تظاهر خارجی یا نمایش عینی مشخصات یک سیستم به طور مستقیم یا غیرمستقیم حس می شود، رفتار یا عکس العمل آن سیستم می نامیم. به عبارت دیگر اگرچه می توانیم یک سیستم را در اشکال مختلف (بصورت معادلات دیفرانسیل، معادلات حالت و یا توابع تبدیل) نمایش دهیم، اما آنچه را که به طور فیزیکی از یک سیستم لمس و درک می کنیم، صرفاً رفتار یا عکس العمل آن سیستم است. با این تعریف می توان گفت که "رفتار" یک سیستم مهمترین و اساسی ترین مشخصه آن سیستم به شمار می رود. یعنی رفتار سیستم تنها ابزار برونی نمایش تغییرات و تحولات درونی یک سیستم بوده و از اینجاست که بعنوان یک اصل مهم، دو سیستم معادل و

مشابه را چنین تعریف می‌کنیم:

«دو سیستم را می‌توان معادل و مشابه هم دانست اگر بازنه شرایط یکسان و مشابه دارای رفتار یکسان و مشابه باشند».

بعبارت دیگر چنانچه دو سیستم تحت تأثیر ورودیها و شرایط اولیه مشابه، دارای رفتار مشابه باشند آن دو سیستم مشابه یکدیگرند. با این تعریف واضح است آنچه را که علوم ریاضی و مهندسی بعنوان روشهای مختلف مدل‌سازی سیستمهای دینامیکی ارائه می‌نمایند در واقع تلاشی در جهت ایجاد یک مدل مشابه سیستم اصلی می‌باشد. در این راستا میزان ارزش مدل پیشنهادی نیز به اینکه رفتار مدل تا چه اندازه به رفتار سیستم واقعی نزدیک و با آن یکسان خواهد بود بستگی دارد. نکته حائز اهمیت دیگر آنست که علم کنترل (بعنوان موضوع اصلی این کتاب) تنها، کنترل رفتار سیستم‌ها را مورد بحث قرار می‌دهد. بعبارت دیگر تئوریهای مختلف ارائه شده از سوی صاحب‌نظران این شاخه از علوم مهندسی تنها بمنظور بهبود رفتار سیستم ابداع شده‌اند.

در شاخه مهندسی کنترل (که هدف اساسی آن تنظیم و کنترل رفتار سیستم‌های دینامیکی است)، مطالعه و بررسی رفتار سیستم‌های دینامیکی و شناخت ساختمان ونحوه تأثیر اجزاء مدل ریاضی در این رفتار، از مباحث اصلی مورد علاقه مهندسین کنترل است. بررسی و تحلیل رفتار سیستم‌های دینامیکی عملاً به معنای بررسی و حل معادلات دیفرانسیل (برای سیستم‌های پیوسته) آنها است که این معادلات به دو روش ذیل قابل حل می‌باشند:

الف - حل تحلیلی (محاسباتی).

ب - حل کامپیوتری.

در این فصل ابتدا حل تحلیلی معادلات برداری حالت برای بررسی رفتار سیستم خطی آزاد (سیستم بدون ورودی) ارائه می‌شود که ضمن آن روشهای مختلف حل معادلات سیستم معرفی می‌گردند. در مبحث بعدی به حل تحلیلی رفتار سیستم با ورودی پرداخته شده و سپس رفتار سیستم خطی در حالت کلی و تحت تأثیر ورودی و شرایط اولیه مورد بررسی قرار می‌گیرد. پس از بررسی تحلیلی رفتار سیستم‌های دینامیکی خطی، اصول کلی حل معادلات سیستم به کمک کامپیوتر مورد بررسی قرار می‌گیرد. حل تحلیلی سیستم‌های دینامیکی ارائه

شده در این کتاب محدود به سیستمهای خطی می باشد. حل تحلیلی سیستمهای غیرخطی عموماً پیچیده بوده و در بسیاری موارد اصولاً راه حلی برای تعیین رفتار سیستمهای دینامیکی غیر خطی به روش تحلیلی نمی توان یافت. در حالی که حل عددی معادلات سیستم به کمک کامپیوتر را می توان برای سیستمهای غیرخطی نیز بکار برد و از این نظر محدودیتی وجود ندارد. در آخرین بخش این فصل، نمایش رفتار سیستمهای دینامیکی در حالت گذرا و تحت تأثیر ورودیهای ضربه ای و پله ای (عمدتاً از طریق تبدیل معکوس لاپلاس و استفاده از قضایای مقدار اولیه و مقدار نهایی) مورد بحث قرار می گیرد. مزیت عمده این روش، که اساس روشهای مختلف «شناسایی سیستم»^۱ از طریق بررسی پاسخ حالت گذرا به شمار می آید، آن است که با بررسی نحوه تأثیر ورودی بر خروجی (برای توابع تبدیل مختلف) می توان سیستمهایی را که نمایش ریاضی آنها نامشخص است شناسایی نمود.

(۴-۱) - رفتار سیستم آزاد:

در این بخش رفتار سیستمها تحت تأثیر شرایط اولیه و با فرض صفر بودن ورودی مورد بررسی قرار می گیرد. سیستمی که در آن ورودی $u(t)$ مساوی صفردر نظر گرفته شود را «سیستم آزاد»^۲ و رفتار چنین سیستمی را «رفتار سیستم آزاد»^۳ می نامیم. رفتار آزاد سیستم خطی رسته یک و بدنبال آن رفتار سیستم خطی رسته n را ذیلاً مورد بررسی قرار می دهیم.

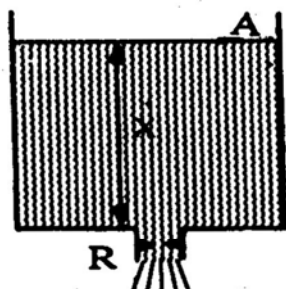
(۴-۱-۱) - رفتار آزاد سیستم رسته یک:

شکل (۴-۱) نمایش فیزیکی یک سیستم رسته یک را نشان می دهد. این سیستم سیالاتی منبعی با سطح مقطع A و با مقاومت مسیر R (برای سوراخ خروجی) می باشد که در آن ارتفاع اولیه مایع ظرف مساوی x_0 در نظر گرفته شده است.

۱ - System Identification

۲ - Free System

۳ - Response of Free System



شکل (۱-۴) - مخزن مایع بعنوان سیستم سیالاتی "آزاد رسته یک".

در مورد این سیستم می‌توان نوشت:

$$A \dot{x} = -\frac{x}{R}$$

$$x(0) = x_0$$

و یا:

$$\dot{x} = ax$$

$$x(0) = x_0$$

(۱-۴)

که در آن:

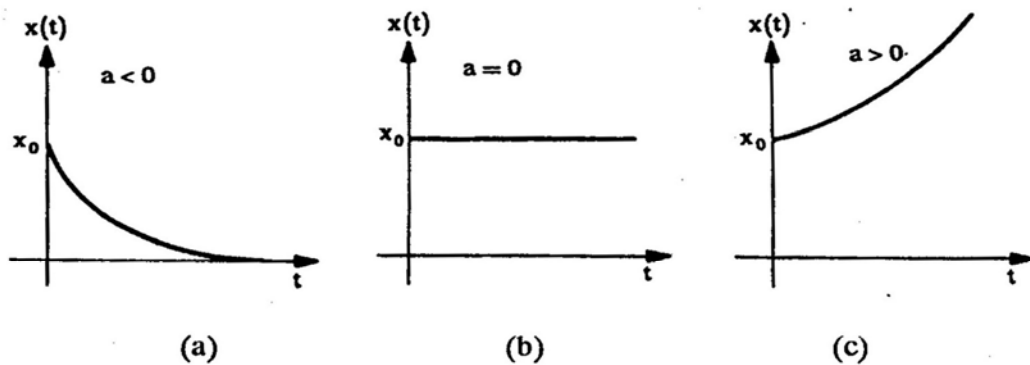
$$a = -\frac{1}{RA}$$

(۲-۴)

بوده و مقدار $x(t)$ در $t=0$ نیز برابر x_0 فرض شده است. معادله (۱-۴) را نمایش ریاضی "سیستم آزاد رسته یک" می‌نامند. حل این معادله عبارت است از:

$$x(t) = e^{at} x_0$$

(۳-۴)



شکل (۲-۴) - نمایش ترسیمی رابطه (۳-۴) برای مقادیر مختلف ضریب a .

و نمایش تغییرات $x(t)$ برای حالت‌های مختلف ضریب a در شکل (۲-۴) نشان داده شده است. در مورد سیستم شکل (۱-۴) با توجه به معادله (۲-۴) که در آن a یک مقدار منفی است، نمایش تغییرات ارتفاع مایع داخل ظرف نظیر شکل (۲-۴) خواهد بود. اگر سوراخ انتهای ظرف بسته شود (یعنی $R = \infty$) در این صورت $a = 0$ می‌شود، یعنی ارتفاع مایع در این حالت ثابت می‌ماند، و نمایش $x(t)$ بصورت شکل (۲-۴) خواهد شد. معادله (۳-۴) و نمایش تغییرات x مطابق شکل (۲-۴) را "رفتار آزاد سیستم" می‌نامند.

(۲-۱-۴) - رفتار آزاد سیستم رسته n :

در فصل سوم دیدیم که هر سیستم خطی با هر رسته‌ای را می‌توان بصورت یک معادله دیفرانسیل برداری نمایش داد. در این خصوص رابطه اول از معادله (۹-۳) را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{d}{dt}X = AX + bu$$

رابطه فوق یک معادله دیفرانسیل خطی است که حل کلی یا عمومی آن حاصل جمع حل خصوصی^۱ و حل همگن^۲ معادله می‌باشد. در اینجا حل سیستم آزاد همان حل همگن

۱- Particular Solution

۲- Homogenous Solution

می باشد که با در نظر گرفتن $u(t)=0$ [در رابطه (۳-۹)] و شرایط اولیه، متغیرهای حالت X بصورت بردار حالت $x(0)$ بیان شده است. یعنی:

$$\frac{d}{dt}X(t) = AX(t) \quad (۴-۴)$$

$$X(0) = X_0$$

برای حل معادله (۴-۴) فرض می کنیم که حل معادله بصورت زیر بیان شود:

$$X(t) = \Phi(t)X(0) \quad (۵-۴)$$

$$(۶-۴)$$

$$= (I + C_1t + C_2t^2 + \dots + C_kt^k + \dots)X_0$$

که در آن $\Phi(t)$ عبارت است از:

$$\phi(t) = I + C_1t + C_2t^2 + \dots + C_kt^k + \dots \quad (۷-۴)$$

$\phi(t)$ را «ماتریس حل»^۱ می نامند که عبارت از یک «سری نامحدود» با ضرایب نامعلوم است. هر کدام از این ضرایب در یک سیستم رسته n ، عبارت از یک ماتریس مربع $n \times n$ می باشد که در ادامه این قسمت ضرایب فوق را بدست می آوریم.

با قراردادن بجای $X(t)$ از معادله (۵-۴) در معادله (۴-۴) داریم:

$$\frac{d}{dt}(\phi(t) X_0) = A \phi(t) X_0$$

و با مقدار قراردادن بجای $\phi(t)$ از معادله (۷-۴) نتیجه می شود:

$$(C_1 + 2C_2t + \dots + KC_Kt^{K-1} + \dots)X_0 = (A + AC_1t + AC_2t^2 + \dots + AC_Kt^K + \dots)X_0$$

با مساوی قرار دادن ضرایب توانهای مشابه t در طرفین رابطه فوق داریم:

$$\begin{aligned} C_1 &= A \\ C_2 &= \frac{1}{2}AC_1 = \frac{1}{2}A^2 = \frac{1}{2!}A^2 \\ &\vdots \\ C_k &= \frac{1}{k!}A^k \end{aligned}$$

و یا:

$$\phi(t) = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \dots + \frac{1}{K!}A^kt^k + \dots \quad (۸-۴)$$

از طرفی سری رابطه (۸-۴)، تعریف تابع ماتریسی e^{At} می باشد، لذا:

$$\phi(t) = e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \dots + \frac{1}{k!}A^kt^k + \dots \quad (۹-۴)$$

$\phi(t)$ در رابطه (۹-۴) را ماتریس حل می نامند که وقتی A ماتریس $n \times n$ باشد $\phi(t)$ یا e^{At} نیز ماتریس $n \times n$ خواهد بود.

بنابراین حل معادله (۴-۴) که همان حل همگن می باشد عبارت است از:

$$X(t) = \phi(t)X_0 = e^{At}X_0 \quad (۱۰-۴)$$

پس از حل معادله همگن، باید e^{At} را بدست آوریم. بادرست داشتن ماتریس A ، ماتریس e^{At} از رابطه (۹-۴) بدست می آید. ولی استفاده از بسط e^{At} در معادله (۹-۴) معمولاً (جز در موارد خاصی) عملی نیست. زیرا مطابق رابطه (۹-۴) باید ماتریس A را مرتباً به توان رسانده و این عمل را بی نهایت بار تکرار نمود تا e^{At} محاسبه شود. از اینرو استفاده از معادله (۹-۴) تنها در حالت های خاصی میسر می باشد (مثلاً وقتی که به کمک توانهای محدود ماتریس A توانهای بالاتر آن را بتوان محاسبه نمود، در غیر این صورت باید راههای دیگری برای یافتن e^{At} جستجو کرد). از جمله حالت های خاص آن است که ماتریس A قطری باشد که در این حالت طرز بدست آوردن e^{At} را برای ماتریس قطری A بررسی می نمائیم. فرض می کنیم ماتریس

قطری A بصورت ذیل باشد:

$$A = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_m \end{bmatrix} \quad (11-4)$$

دراینصورت داریم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} p_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_m^2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} p_1^3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2^3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_m^3 \end{bmatrix}$$

$$A^k = \begin{bmatrix} p_1^k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2^k & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & p_m^k \end{bmatrix}$$

با قراردادن در معادله (۹-۴) نتیجه می شود:

$$\phi(t) = e^{At} = \begin{bmatrix} e^{(p_1 t)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{(p_2 t)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{(p_3 t)} \end{bmatrix} \quad (12-4)$$

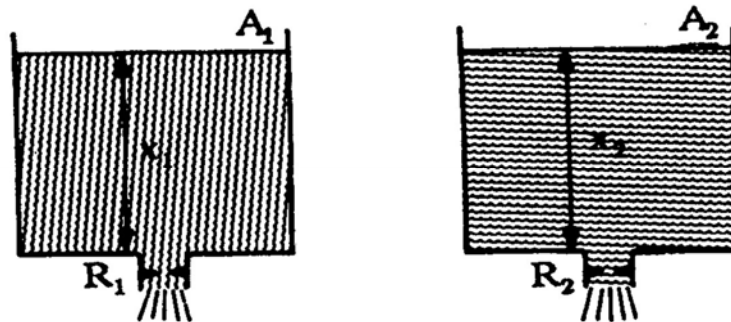
توجه شود که :

$$e^{p_1 t} = 1 + p_1 t + \frac{1}{2!} p_1^2 t^2 + \dots + \frac{1}{K!} p_1^K t^K + \dots$$

می باشد.

مثال (۱-۴):

می خواهیم رفتار سیستم شکل (۳-۴) را که متشکل از دو مخزن با مشخصات داده شده می باشد با فرض اینکه ارتفاع اولیه مایع در ظروف به ترتیب برابر x_{10} و x_{20} باشد بدست آوریم.



شکل (۳-۴) - مخازن مایع بعنوان سیستمهای سیالاتی "آزاد مرتبه n".

برای این سیستم معادله حالت بصورت زیر می باشد:

$$\dot{X} = AX$$

$$X(0) = X_0$$

که در آن:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 A_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_2 A_2} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad X_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$$

می‌باشد و حل این سیستم عبارت است از:

$$X(t) = e^{At} X_0$$

که در آن e^{At} از رابطه (۱۲-۴) بدست می‌آید:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-\frac{1}{R_1 A_1} t} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{R_2 A_2} t} \end{bmatrix}$$

بنابراین $x(t)$ چنین خواهد شد:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\frac{1}{R_1 A_1} t} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{R_2 A_2} t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$$

$$x_1(t) = e^{-\frac{1}{R_1 A_1} t} x_{10}$$

$$x_2(t) = e^{-\frac{1}{R_2 A_2} t} x_{20}$$

و یا:

یکی دیگر از حالت‌های خاصی که می‌توان ماتریس حل e^{At} را مستقیماً از رابطه (۹-۴) بدست آورد وقتی است که ماتریس A دارای مقادیر ویژه تکراری مانند رابطه (۱۳-۴) باشد.

$$A = \begin{bmatrix} p & 1 \\ 0 & p \end{bmatrix} \quad (۱۳-۴)$$

اگر عضو ۱ در ماتریس در نظر گرفته نشود، در اینصورت (علیرغم مقدار ویژه تکراری p در ماتریس A) چون ماتریس A قطری می‌شود، e^{At} نیز یک ماتریس قطری بوده که عناصر قطر آن برابر e^{pt} می‌باشد. برای ماتریس (۱۳-۴) نیز از رابطه (۹-۴) می‌توان e^{pt} را بصورت

ذیل بدست آورد:

$$A^2 = \begin{bmatrix} p^2 & 2p \\ 0 & p^2 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} p^3 & 3p^2 \\ 0 & p^3 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad A^k = \begin{bmatrix} p^k & kp^{k-1} \\ 0 & p^k \end{bmatrix}$$

که با قراردادن آنها در معادله (۹-۴) نتیجه می شود:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} pt & t \\ 0 & pt \end{bmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{bmatrix} p^2 t^2 & 2pt^2 \\ 0 & p^2 t^2 \end{bmatrix} + \dots + \frac{1}{k!} \begin{bmatrix} p^k t^k & kp^{k-1} t^k \\ 0 & p^k t^k \end{bmatrix} + \dots$$

و یا:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 + pt + \frac{1}{2!} p^2 t^2 + \dots & t(1 + pt + \frac{1}{2!} p^2 t^2 + \dots + \frac{1}{k!} p^k t^k + \dots) \\ 0 & 1 + pt + \frac{1}{2!} p^2 t^2 + \dots + \frac{1}{k!} p^k t^k + \dots \end{bmatrix}$$

از آنجا که هر یک از اعضای غیر صفر ماتریس فوق معرف بسط e^{pt} می باشد، یعنی:

$$e^{pt} = 1 + pt + \frac{1}{2!} p^2 t^2 + \dots + \frac{1}{k!} p^k t^k + \dots$$

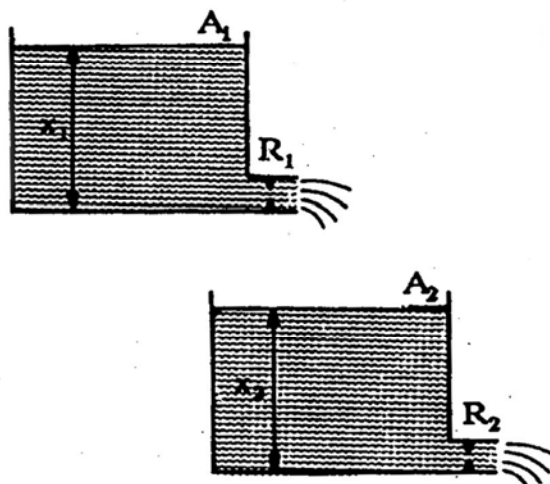
لذا داریم:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{pt} & t e^{pt} \\ 0 & e^{pt} \end{bmatrix} \quad (۱۴-۴)$$

بنابر این اگر ماتریس A نظیر رابطه (۱۳-۴) باشد e^{At} بصورت رابطه (۱۴-۴) بدست می آید.

مثال (۴-۲):

می‌خواهیم رفتار یا عکس‌العمل سیستم شکل (۴-۴) را که از دو مخزن مشابه هم تشکیل شده بدست آوریم (ارتفاع اولیه مایع در ظروف به ترتیب x_{10} و x_{20} می‌باشد).



شکل (۴-۴) - مخازن مایع بعنوان سیستم "آزاد مرتبه n".

معادلات حالت عبارتند از:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2\end{aligned}$$

و یا:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= AX \\ X(0) &= X_0\end{aligned}$$

که در آن:

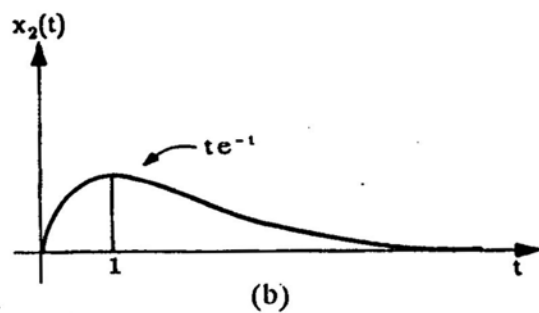
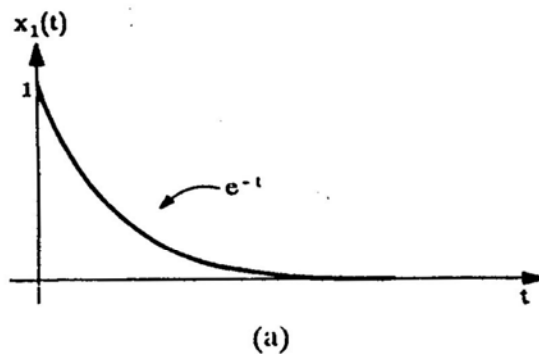
$$X_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

می‌باشد. از مقایسه ماتریس A در این مسأله با رابطه (۱۳-۴) و ماتریس حل بدست آمده در رابطه (۱۴-۴) نتیجه می‌شود:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ te^{-t} & e^{-t} \end{bmatrix}$$

که با قراردادن آن در رابطه $x(t) = e^{At} x_0$ نتیجه می‌شود:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ te^{-t} & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$$



(a) - نمایش تغییرات $x_1(t)$ (b) - نمایش تغییرات $x_2(t)$

شکل (۵-۴) - نمایش تغییرات ارتفاع مخازن مثال (۲-۴).

و یا:

$$x_1(t) = e^{-t} x_{10} \quad (A)$$

$$x_2(t) = te^{-t} x_{10} + e^{-t} x_{20} \quad (B)$$

با داشتن مقادیر اولیه متغیرهای حالت می توان رفتار سیستم را رسم کرد. مثلاً اگر $x_{10}=1$ و $x_{20}=0$ باشد نمایش $x_1(t)$ و $x_2(t)$ در شکل (۴-۵) نشان داده شده است. برای بدست آوردن e^{At} در حالت کلی دو روش در اینجا مورد بررسی قرار می گیرد. در روش اول با استفاده از تبدیل لاپلاس و در روش دوم با قطری کردن ماتریس A ، e^{At} را می توان بدست آورد.

(۴-۱-۳) - حل سیستم آزاد با استفاده از تبدیل معکوس لاپلاس:

معادله (۴-۴) را دوباره می نویسیم:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} X(t) &= AX(t) \\ X(0) &= X_0 \end{aligned} \quad (۴-۴)$$

با استفاده از تبدیل لاپلاس، این معادله بصورت زیر نوشته می شود:

$$sX(s) - X_0 = AX(s)$$

و یا:

$$X(s) = (sI - A)^{-1} X_0 \quad (۴-۱۵)$$

در این رابطه $X(s)$ تبدیل لاپلاس $X(t)$ می باشد. با انجام تبدیل معکوس لاپلاس از معادله (۴-۱۵) رابطه ذیل حاصل می شود:

$$X(t) = \mathcal{L}^{-1} (sI - A)^{-1} X_0 \quad (۴-۱۶)$$

از مقایسه معادله (۴-۱۶) با (۴-۱۰) نتیجه می شود:

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}(sI - A)^{-1} \quad (۴-۱۷)$$

بنابراین مطابق رابطه فوق برای بدست آوردن e^{At} کافی است ماتریس مربع $(sI - A)$ را تشکیل داده معکوس آن را بدست آوریم و سپس از آن تبدیل معکوس لاپلاس بگیریم که حاصل یک ماتریس مربع $n \times n$ یعنی همان e^{At} خواهد بود.

مثال (۴-۳):

می خواهیم برای سیستمی که ماتریس A برای آن در زیر داده شده ماتریس حل یا e^{At} را بدست آوریم.

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

ابتدا $(sI - A)$ و سپس معکوس آنرا بدست می آوریم:

$$sI - A = \begin{bmatrix} s + \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{6} & s + \frac{3}{2} \end{bmatrix}, \quad (sI - A)^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} s + \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{6} & s + \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

که در آن Δ دترمینان ماتریس $(sI - A)$ می باشد، یعنی:

$$\Delta = (s + 1)(s + 2)$$

بنابراین با استفاده از رابطه (۴-۱۷) داریم:

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{s + \frac{3}{2}}{(s+1)(s+2)} & \frac{\frac{3}{2}}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{\frac{1}{6}}{(s+1)(s+2)} & \frac{s + \frac{3}{2}}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

از جبر خطی می‌دانیم که لاپلاس معکوس یک ماتریس*، عبارت از ماتریسی است که عناصر آن لاپلاس معکوس عناصر ماتریس اولیه می‌باشد و لاپلاس معکوس عناصر ماتریس اخیر عبارت است از:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{S + \frac{3}{2}}{(S+1)(S+2)}\right) = \frac{1}{2}(e^{-t} + e^{-2t})$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{3}{2}}{(S+1)(S+2)}\right) = \frac{3}{2}(e^{-t} - e^{-2t})$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{1}{6}}{(S+1)(S+2)}\right) = \frac{1}{6}(e^{-t} - e^{-2t})$$

بنابراین e^{At} خواهد شد:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{-t} + e^{-2t}) & \frac{3}{2}(e^{-t} - e^{-2t}) \\ \frac{1}{6}(e^{-t} - e^{-2t}) & \frac{1}{2}(e^{-t} + e^{-2t}) \end{bmatrix}$$

در مثال فوق ریشه‌های معادله مشخصه $\Delta = \det(sI - A) = 0$ بعنوان ضرایب توابع نمایی در ماتریس e^{At} ظاهر شده‌اند (ریشه‌ها عبارتند از -1 و -2 و توابع نمایی نیز عبارتند از e^{-t} و e^{-2t}). این ریشه‌ها مقادیر ویژه ماتریس A هستند. عبارتی مقادیر ویژه ماتریس A ریشه‌های معادله مشخصه زیر هستند.

$$\det(sI - A) = 0 \quad (18-4)$$

بطور کلی اگر معادله مشخصه سیستم دارای n ریشه حقیقی و مجزا باشد، عبارتی اگر ماتریس A دارای n مقدار ویژه (حقیقی و غیر تکراری) باشد و آنها را p_1 تا p_n بنامیم، توابع نمایی $e^{p_1 t}$ تا $e^{p_n t}$ که مودهای^۱ سیستم نام دارند در ماتریس حل e^{At} ظاهر می‌شوند. اگر معادله مشخصه (18-4) دارای دو ریشه تکراری بوده و آنها را p بنامیم، مودهای

* به پیوست (۲) مراجعه شود.

سیستم عبارت از e^{pt} و te^{pt} خواهند بود که در ماتریس حل e^{At} ظاهر می‌شوند [مانند ماتریس A در رابطه (۴-۱۳) و e^{At} مربوط به آن در معادله (۴-۱۴) و یا مانند مثال (۴-۲)]. بطور کلی اگر معادله مشخصه (۴-۱۸) دارای K ریشه تکراری p باشد (بعبارتی ماتریس A دارای K مقدار ویژه تکراری باشد) مودهای سیستم عبارتند از:

$$e^{pt}, te^{pt}, \frac{1}{2!}t^2e^{pt}, \dots, \frac{1}{(k-1)!}t^{k-1}e^{pt}$$

اگر معادله مشخصه (۴-۱۸) دارای ریشه‌های مختلط بصورت زیر باشد (σ حقیقی و ω حقیقی و غیر صفر):

$$p_1 = -\sigma + j\omega, \quad p_2 = -\sigma - j\omega$$

در اینصورت مودهای سیستم $e^{(-\sigma+j\omega)t}$ و $e^{(-\sigma-j\omega)t}$ خواهند بود که این مودها را می‌توان بصورت زیر نیز بیان نمود:

$$e^{-\sigma t} \sin \omega t, \quad e^{-\sigma t} \cos \omega t$$

بطور کلی از مطالب فوق می‌توان نتیجه گرفت که اجزاء مستقل ماتریس حل e^{At} ، مودهای سیستم هستند، که این مودها در موارد مختلف بصورت‌های ذیل می‌باشند:

- برای مقادیر ویژه غیر تکراری و حقیقی ماتریس A ، مودها بصورت $e^{(مقدار ویژه)t}$ می‌باشند.

- برای مقادیر ویژه تکراری، مودها بصورت حاصلضرب دو مقدار $e^{(مقدار ویژه)t}$ و t^m بوده که در آن تعداد ریشه‌های تکراری می‌تواند برابر $m+1$ باشد.

- برای مقادیر ویژه مختلط، مودها بصورت "توابع نوسانی" با افزایش یا کاهش دامنه می‌باشند.

- برای مقادیر ویژه موهومی خالص، مودها بصورت "توابع نوسانی" بدون تغییر دامنه می‌باشند.

- برای سیستم آزاد (یعنی با ورودی $u=0$) رفتار یا عکس‌العمل سیستم در معادله (۴-۱۰) ترکیب خطی از مودهای سیستم می‌باشد.

مثال (۴-۴):

برای سیستم فنر و وزنه مثال (۲-۳) معادله حالت بصورت رابطه (۱۸-۳) بیان شده است. با فرض $u=0$ می‌خواهیم رفتار سیستم را تحت تأثیر شرایط اولیه $x_1(0)=x_{10}$ و $x_2(0)=0$ بررسی نمائیم. معادله (۱۸-۳) را با فرض $u=0$ و ماتریس A را از معادله (۱۹-۳) می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}X &= AX \\ X(0) &= \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} \\ A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{m} & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

حل این معادله عبارت است از:

$$X(t) = e^{At} X_0$$

با فرض $\frac{K}{m} = \omega^2$ ، ماتریس حل را بدست می‌آوریم:

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}(SI - A)^{-1}$$

$$(SI - A) = \begin{bmatrix} S & -1 \\ \omega^2 & S \end{bmatrix}, \quad (SI - A)^{-1} = \frac{1}{S^2 + \omega^2} \begin{bmatrix} S & 1 \\ -\omega^2 & S \end{bmatrix}$$

و یا:

$$(SI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{S}{S^2 + \omega^2} & \frac{1}{S^2 + \omega^2} \\ \frac{-\omega^2}{S^2 + \omega^2} & \frac{S}{S^2 + \omega^2} \end{bmatrix}$$

لذا مطابق رابطه (۴-۱۷) داریم:

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2 + \omega^2} & \frac{1}{s^2 + \omega^2} \\ \frac{-\omega^2}{s^2 + \omega^2} & \frac{s}{s^2 + \omega^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega t & \frac{1}{\omega} \sin \omega t \\ -\omega \sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega t & \frac{1}{\omega} \sin \omega t \\ -\omega \sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ 0 \end{bmatrix}$$

و یا:

$$x_1(t) = x_{10} \cos \omega t$$

$$x_2(t) = -x_{10} \omega \sin \omega t$$

همانطور که ملاحظه می‌شود چون در مورد این مثال ریشه‌های معادله مشخصه $s^2 + \omega^2 = 0$ عبارت از $p_1 = j\omega$ و $p_2 = -j\omega$ هستند، مودهای سیستم نوسانی غیرمیرا بوده و رفتار سیستم نیز ترکیب خطی از مودها خواهد بود.

(۴-۱-۴) - حل سیستم آزاد به روش قطری کردن:

در این قسمت حل سیستم آزاد معادله (۴-۴) را که مجدداً در ذیل آورده شده به روش "قطری کردن" مورد بررسی قرار می‌دهیم.

$$\frac{d}{dt} X(t) = AX(t) \quad (a-۱۹-۴)$$

$$X(0) = X_0$$

برای این منظور سیستم با متغیرهای حالت $X(t)$ فوق را به سیستم جدیدی با متغیرهای حالت $X^*(t)$ طوری تبدیل می‌کنیم که در سیستم جدید ماتریس مربوطه قطری باشد. زیرا

همانطور که قبلاً دیدیم برای سیستم قطری، ماتریس حل را می‌توانیم بسادگی از معادله (۱۲-۴) بدست آوریم.

فرض می‌کنیم ماتریس مربع T با اجزاء ثابت (ماتریس $n \times n$) متغیرهای حالت $X(t)$ را به متغیرهای حالت جدید $X^*(t)$ تبدیل نماید*، یعنی:

$$X(t) = TX^*(t) \quad , \quad X^*(t) = T^{-1}X(t) \quad (b-19-4)$$

بجای X از معادله (b-19-4) در معادله (a-19-4) قرار می‌دهیم:

$$\frac{d}{dt} [TX^*(t)] = ATX^*(t)$$

و یا:

$$\frac{d}{dt} X^*(t) = T^{-1}ATX^*(t) \quad (20-4)$$

و تحت شرایط اولیه نیز:

$$X^*(0) = T^{-1}X_0$$

می‌باشد. ماتریس مربع $T^{-1}AT$ را Λ (لامبدا) می‌نامیم و فرض می‌کنیم که Λ یک ماتریس قطری باشد، بنابراین داریم:

$$\frac{d}{dt} X^*(t) = \Lambda X^*(t) \quad , \quad X^*(0) = T^{-1}X_0 \quad (21-4)$$

* - از قبل با تبدیلهائی نظیر رابطه (b-19-4) آشنا هستیم. مثلاً در ریاضیات مقدماتی خوانده‌ایم که اگر سیستم مختصات x و y باندازه زاویه θ حول مرکز مختصات در جهت مثلثاتی بچرخد و سیستم مختصات جدید x' و y' حاصل شود رابطه سیستم مختصات $x-y$ با $x'-y'$ عبارت است از:

$$X = TX^* \quad \text{که در آن} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad X^* = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad \text{بوده و ماتریس} \quad T \quad \text{نیز عبارت است از:}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

که بنام ماتریس تبدیل یا ماتریس دوران نامیده می‌شود.

که در آن:

$$T^{-1}AT = \Lambda = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{bmatrix} \quad (22-4)$$

می باشد. از آنجا که معادله دیفرانسیل برداری حالت (۱۲-۴) دارای ماتریس قطری Λ می باشد، لذا مطابق آنچه که قبلاً گفته شد، حل معادله عبارت است از:

$$X^*(t) = e^{\Lambda t} X^*(0) \quad (23-4)$$

که در آن:

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{p_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{p_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{p_n t} \end{bmatrix} \quad (24-4)$$

بوده بنابراین حل $X^*(t)$ بصورت فوق می باشد لذا با قراردادن از (۲۳-۴) در (۱۹-۴) می توانیم $X(t)$ را بدست آوریم:

$$X(t) = TX^*(t) = T[e^{\Lambda t} X^*(0)] = Te^{\Lambda t} T^{-1}X_0 \quad (25-4)$$

با توجه به حل معادله (۱۹-۴) که بصورت $X(t) = e^{\Lambda t} X_0$ [یعنی همان معادله (۱۰-۴)]

می باشد و مقایسه این حل با معادله (۲۵-۴) نتیجه می شود:

$$e^{\Lambda t} = Te^{\Lambda t} T^{-1} \quad (26-4)$$

بنابراین با داشتن Λ و T ، ماتریس e^{At} از رابطه (۴-۲۶) بدست می آید. حال نشان می دهیم که ماتریس قطری Λ عبارت از یک ماتریس مربع قطری می باشد که اجزاء قطر آن همان مقادیر ویژه ماتریس A هستند و ماتریس مربع T نیز ماتریسی متشکل از n ستون است که هر ستون آن معرف یک بردار ویژه ماتریس A می باشد. می دانیم که مقادیر ویژه ماتریس Λ برابر اعضای قطر این ماتریس هستند یعنی در معادله (۴-۲۲)، p_1 تا p_n مقادیر ویژه ماتریس $\Lambda = T^{-1}AT$ می باشند، لذا داریم:

$$\det(\lambda I - \Lambda) = 0$$

و یا:

$$\det(\lambda I - T^{-1}AT) = 0$$

طرف چپ این معادله یک چند جمله ای از درجه n برحسب λ است که p_1 تا p_n ریشه های این چند جمله ای می باشند. می خواهیم نشان دهیم که مقادیر ویژه ماتریس A نیز از همین معادله بدست می آیند لذا می توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned}\det(\lambda I - T^{-1}AT) &= \det[T^{-1}(\lambda T - AT)] \\ &= \det[T^{-1}(\lambda I - A)T] = 0 \\ &= \det T^{-1} \det(\lambda I - A) \det T\end{aligned}$$

چون $\det[T]$ و $\det[T^{-1}]$ مخالف صفر هستند، نتیجه می شود:

$$\det(\lambda I - A) = 0 \quad (۴-۲۷)$$

بنابراین p_1 تا p_n مقادیر ویژه ماتریس A نیز خواهند بود. حال نشان می دهیم که ماتریس T ، ماتریسی متشکل از بردارهای ویژه ماتریس A می باشد. با ضرب طرفین معادله (۴-۲۲) در T داریم:

$$AT = T\Lambda \quad (۴-۲۸)$$

که طرف راست این معادله عبارت است از:

$$T\Lambda = T \begin{bmatrix} p_1 & & & 0 \\ & p_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & p_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1n} \\ T_{21} & T_{22} & \dots & T_{2n} \\ \vdots & & & \\ T_{n1} & T_{n2} & \dots & T_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & p_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} p_1 T_{11} & p_2 T_{12} & \dots & p_n T_{1n} \\ p_1 T_{21} & p_2 T_{22} & \dots & p_n T_{2n} \\ \vdots & & & \\ p_1 T_{n1} & p_2 T_{n2} & \dots & p_n T_{nn} \end{bmatrix} \quad (29-4)$$

برای سهولت، هر ستون ماتریس T را با بردار ستونی V^i نشان می‌دهیم، یعنی:

$$V^i = \begin{bmatrix} T_{1i} \\ T_{2i} \\ \vdots \\ T_{ni} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^i \\ v_2^i \\ \vdots \\ v_n^i \end{bmatrix}$$

بنابراین معادله (29-4) چنین می‌شود:

$$T\Lambda = \begin{bmatrix} p_1 V_1^1 & p_2 V_1^2 & \dots & p_i V_1^i & \dots & p_n V_1^n \\ p_1 V_2^1 & p_2 V_2^2 & \dots & p_i V_2^i & \dots & p_n V_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_1 V_n^1 & p_2 V_n^2 & \dots & p_i V_n^i & \dots & p_n V_n^n \end{bmatrix} \quad (30-4)$$

$$= \begin{bmatrix} p_1 V^1 & p_2 V^2 & \dots & p_i V^i & \dots & p_n V^n \end{bmatrix}$$

حال طرف چپ معادله (۲۸-۴) را بدست می‌آوریم. با توجه به قواعد ضرب ماتریسها، هر ستون ماتریس AT عبارت است از:

$$A \begin{bmatrix} T_{1i} \\ T_{2i} \\ \vdots \\ T_{ni} \end{bmatrix} = AV^i$$

از طرفی هر ستون ماتریس AT در سمت چپ معادله (۲۸-۴) باید با ستون مشابه سمت راست این معادله یعنی TA از معادله (۳۰-۴) برابر باشد. بنابراین:

$$AV^i = p_i V^i, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (۳۱-۴)$$

و یا:

$$(p_i I - A)V^i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (۳۲-۴)$$

می‌باشد. در روابط فوق p_1 تا p_n مقادیر ویژه ماتریس A هستند و نیز می‌دانیم که بردارهای ویژه ماتریس A از رابطه (۳۲-۴) بدست می‌آیند. بنابراین V^i ($i=1, 2, \dots, n$) بردارهای ویژه ماتریس A می‌باشند. خلاصه مطالب فوق را برای بدست آوردن ماتریس حل e^{At} از روش قطری کردن بصورت مراحل زیر می‌توان بیان نمود:

قدم اول: ابتدا مقادیر ویژه ماتریس A را از معادله (۲۷-۴) بدست آورده و آنها را p_1 تا p_n می‌نامیم.

قدم دوم: بردارهای ویژه ماتریس A را از معادلات (۳۱-۴) یا (۳۲-۴) بدست آورده و آنها را V^1 تا V^n می‌نامیم.

قدم سوم: ماتریس T (ماتریس مربع) را که ستونهایش V^1 تا V^n هستند تشکیل می‌دهیم.

قدم چهارم: ماتریس T^{-1} را بدست می‌آوریم.

قدم پنجم: با در دست داشتن مقادیر ویژه p_1 تا p_n ماتریس مربع e^{At} را از رابطه (۲۴-۴) تشکیل می‌دهیم.

قدم ششم: ماتریس حل e^{At} را از معادله (۲۶-۴) بدست می‌آوریم.

(مثال ۴-۵):

برای سیستمی که معادله حالت آن بصورت $X(0)=X_0$ و $\frac{d}{dt}X=AX$ داده شده (که در آنها A و X و X_0 به صورت زیر تعریف شده‌اند) می‌خواهیم ابتدا e^{At} را با روش قطری کردن محاسبه نموده سپس $X(t)$ را بدست آوریم.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}, \quad X(0) = X_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{bmatrix}$$

قدم اول:

با حل معادله $\det(\lambda I - A) = 0$ مقادیر ویژه ماتریس A بدست می‌آیند:

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda + 1)(\lambda + 3)(\lambda + 5) = 0$$

بنابراین مقادیر ویژه عبارتند از:

$$p_1 = -1, \quad p_2 = -3, \quad p_3 = -5$$

قدم دوم:

بردارهای ویژه نیز از حل $(p_i I - A)V^i = 0$ حاصل می‌شوند که عبارتند از:

$$V^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad V^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad V^3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

قدم سوم:

ماتریس T متشکل از بردارهای ویژه نیز عبارت است از:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

قدم چهارم:

با معکوس کردن این ماتریس، T^{-1} حاصل می‌شود:

$$T^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

قدم پنجم:

ماتریس e^{At} عبارت است از:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-5t} \end{bmatrix}$$

قدم ششم:

بنابراین e^{At} چنین خواهد بود:

$$e^{At} = T e^{At} T^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

پس از ضرب ماتریسهای فوق داریم:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} + 2e^{-3t} + e^{-5t} & e^{-t} - e^{-5t} & e^{-t} - 2e^{-3t} + e^{-5t} \\ 2e^{-t} - 2e^{-5t} & 2e^{-t} + 2e^{-5t} & 2e^{-t} - 2e^{-5t} \\ e^{-t} - 2e^{-3t} & e^{-t} - e^{-5t} & e^{-t} + 2e^{-3t} + e^{-5t} \end{bmatrix}$$

با قراردادن ماتریس فوق در رابطه $X(t) = e^{At} X_0$ رفتار سیستم بدست می‌آید.

مثال (۴-۶):

معادله حالت سیستمی بصورت $\dot{X} = AX$ داده شده که در آن ماتریسها

عبارتند از:

$$X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -\sigma & \omega \\ -\omega & -\sigma \end{bmatrix}$$

می‌خواهیم ابتدا e^{At} را از روش قطری کردن تعیین نموده و سپس رفتار سیستم یعنی $X(t)$ را بدست آوریم (σ و ω اعداد حقیقی و مثبت هستند).

قدم اول:

ابتدا مقادیر ویژه ماتریس A را بدست می‌آوریم:

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda + \sigma & -\omega \\ \omega & \lambda + \sigma \end{bmatrix} = (\lambda + \sigma)^2 + \omega^2 = 0$$

که p_1 و p_2 (مقادیر ویژه) عبارتند از:

$$p_1 = -\sigma + j\omega$$

$$p_2 = -\sigma - j\omega$$

و یا:

$$\lambda + \sigma = \pm j\omega$$

قدم دوم:

حال بردارهای ویژه را تعیین می‌کنیم.

برای $p_1 = -\sigma + j\omega$ داریم:

$$(p_1 I - A)V^1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -\sigma + j\omega + \sigma & -\omega \\ \omega & -\sigma + j\omega + \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

و یا:

$$\begin{bmatrix} j\omega & -\omega \\ \omega & j\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow V^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}$$

و به همین ترتیب برای p_2 نتیجه می‌شود:

$$V^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix}$$

قدم سوم و چهارم:

ماتریسهای T و T^{-1} عبارتند از:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \frac{1}{2j} \begin{bmatrix} j & 1 \\ j & -1 \end{bmatrix}$$

قدم پنجم:

e^{At} عبارت است از:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{(-\sigma+j\omega)t} & 0 \\ 0 & e^{(-\sigma-j\omega)t} \end{bmatrix} = e^{-\sigma t} \begin{bmatrix} e^{j\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-j\omega t} \end{bmatrix}$$

قدم ششم:

با قراردادن نتیجه فوق در رابطه (۴-۲۶) داریم:

$$\begin{aligned} e^{At} &= T e^{At} T^{-1} = \frac{e^{-\sigma t}}{2j} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{j\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-j\omega t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j & 1 \\ j & -1 \end{bmatrix} \\ &= e^{-\sigma t} \begin{bmatrix} \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} & \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \\ -\frac{(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})}{2j} & \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

با استفاده از روابط ذیل:

$$\cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}, \quad \sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

e^{At} چنین خواهد شد:

(۴-۳۳)

$$e^{At} = e^{-\sigma t} \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\sigma t} \cos \omega t & e^{-\sigma t} \sin \omega t \\ -e^{-\sigma t} \sin \omega t & e^{-\sigma t} \cos \omega t \end{bmatrix}$$

برای تعیین رفتار سیستم $X(t)$ داریم:

$$X(t) = e^{At} X_0 = \begin{bmatrix} e^{-\sigma t} \cos \omega t & e^{-\sigma t} \sin \omega t \\ -e^{-\sigma t} \sin \omega t & e^{-\sigma t} \cos \omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

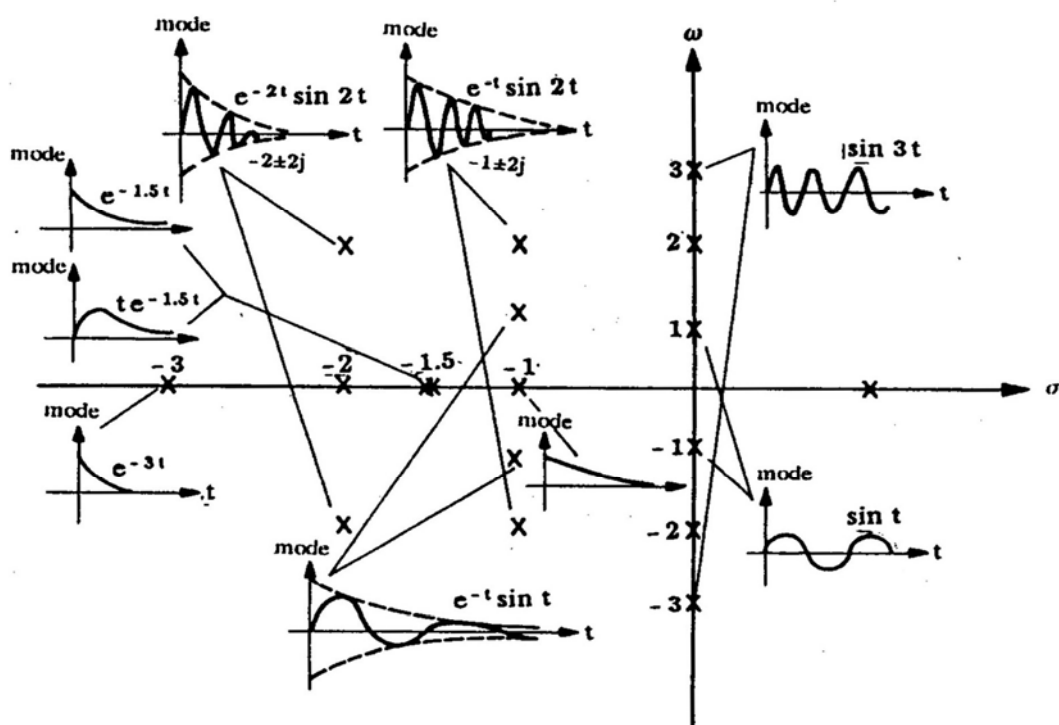
و یا:

$$x_1(t) = e^{-\sigma t} (\sin \omega t + \cos \omega t) \quad (۴-۳)$$

$$x_2(t) = e^{-\sigma t} (\cos \omega t - \sin \omega t)$$

(۴-۱-۵) - مقادیر ویژه در صفحه مختلط و رفتار مربوط به هر مقدار ویژه:

شکل (۴-۶) مقادیر ویژه و مودهای مربوط به این مقادیر ویژه را در نقاط مختلف صفحه نشان می‌دهد. همانطور که ملاحظه می‌شود رفتار سیستم آزاد بستگی به اجزاء مستقل ماتریس حل e^{At} (که مودهای سیستم نامیده می‌شوند) داشته و این مودها نیز بستگی به



شکل (۴-۶) - مقادیر ویژه و مودهای مربوط به آنها در صفحه مختلط.

مقادیر ویژه ماتریس A دارند. پس مقادیر ویژه ماتریس A که از معادله مشخصه (۴-۱۸) بدست می آیند، تعیین کننده مودهای سیستم و مودها نیز تعیین کننده رفتار سیستم آزاد هستند. در شکل (۴-۶) مقادیر ویژه و مودهای مربوط به آنها در صفحه مختلط نمایش داده شده است.

(۴-۲) - رفتار سیستم با اعمال ورودی^۱:

در این بخش رفتار سیستمهای خطی تحت تأثیر ورودی (با اعمال شرایط اولیه و بدون اعمال آن) مورد مطالعه قرار می گیرد. برای این منظور ابتدا رفتار سیستم رسته یک را تحت تأثیر ورودی بررسی نموده سپس به تفسیر این تأثیر (در سیستم) می پردازیم. در قسمت بعد نیز عکس العمل یا رفتار کلی سیستم خطی رسته n را تحلیل نموده و آنگاه به حل معادلات سیستم از طریق تبدیل لاپلاس پرداخته می شود.

(۴-۲-۱) - رفتار سیستم رسته یک با ورودی:

مدل ریاضی یک سیستم خطی رسته یک را می توان بصورت معادله (۴-۳۵) نشان داد:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax + bu \\ x(0) &= x_0\end{aligned}\quad (4-35)$$

در این معادله a و b اعداد ثابت، u و x تابع زمان و x_0 نیز مقدار اولیه x می باشد. اگر در سیستم شکل (۴-۱) مایع با دبی u وارد شود، نمایش ریاضی آن بصورت معادله (۴-۳۵) خواهد بود که در آن a و b عبارتند از:

$$a = -\frac{1}{RA}, \quad b = \frac{1}{A}$$

حل معادله (۳۵-۴) بصورت معادله (۳۶-۴) می باشد:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (۳۶-۴)$$

در معادله فوق $x_h(t)$ حل همگن سیستم است و داریم [که همان معادله (۳-۴) می باشد]:

$$x_h(t) = e^{at} x_0$$

همچنین $x_p(t)$ نیز معرف حل خصوصی سیستم بوده و تنها تأثیر ورودی را نشان می دهد که در اینجا آنرا بدست می آوریم. برای محاسبه $x_p(t)$ می نویسیم:

$$x_p(t) = e^{at} p(t) \quad (۳۷-۴)$$

با جایگزینی از (۳۷-۴) در (۳۵-۴) نتیجه می شود:

$$a e^{at} p(t) + e^{at} \frac{d}{dt} p(t) = a e^{at} p(t) + b u(t)$$

و یا:

$$\frac{d}{dt} p(t) = e^{-at} b u(t)$$

بنابراین:

$$p(t) = \int_0^t e^{-a\tau} b u(\tau) d\tau$$

با قراردادن در معادله (۳۷-۴) داریم:

$$x_p(t) = e^{at} \int_0^t e^{-a\tau} b u(\tau) d\tau = \int_0^t e^{a(t-\tau)} b u(\tau) d\tau \quad (۳۸-۴)$$

بجای $x_p(t)$ از معادله (۳۸-۴) در (۳۶-۴) قرار می دهیم و همچنین با جایگزینی $x_h(t) = e^{at} x_0$

در (۴-۳۶)، نتیجه می‌شود:

$$x(t) = e^{at} x_0 + \int_0^t e^{a(t-\tau)} b u(\tau) d\tau \quad (4-39)$$

معادله (۴-۳۹) حل کلی سیستم رسته یک و شامل حل همگن و حل خصوصی می‌باشد.

مثال (۴-۷):

می‌خواهیم برای سیستم شکل (۴-۷) رفتار سیستم را با شرایط اولیه $x(0)=0$

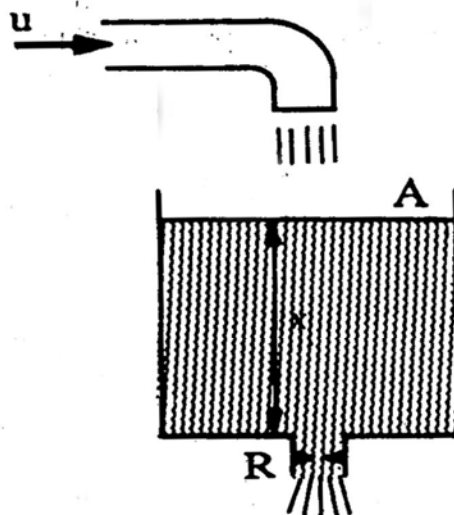
بدست آوریم.

در مورد این سیستم می‌توان نوشت:

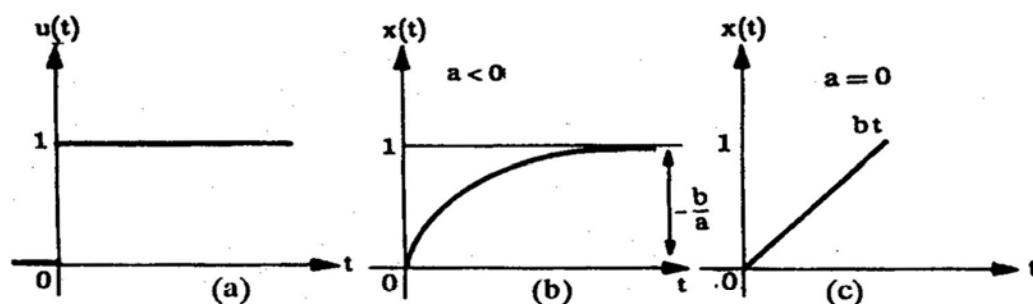
$$A\dot{x} = u - \frac{x}{R}$$

و یا:

$$\dot{x} = -\frac{1}{RA}x + \frac{1}{A}u \quad (4-40)$$



شکل (۴-۷) - مخزن مایع بعنوان سیستم سیالاتی "رسته یک با ورودی".



شکل (۸-۴). نمایش عکس‌العمل سیستم "رسته یک با ورودی پله‌ای واحد".

(a) - ورودی پله‌ای واحد. (b) - نمایش رفتار سیستم برای $a < 0$.

(c) - نمایش رفتار سیستم برای $a = 0$.

با فرض $a = -\frac{1}{RA}$ و $b = \frac{1}{A}$ داریم:

$$\dot{x} = ax + bu$$

چون شرایط اولیه صفر در نظر گرفته شده، حل این سیستم [با توجه به معادله

(۴-۳۹) عبارت است از:

$$x(t) = \int_0^t e^{a(t-\tau)} b u(\tau) d\tau$$

اگر ورودی تابع پله‌ای واحد $[u(t)=1]$ در نظر گرفته شود، داریم:

$$x(t) = e^{at} \int_0^t e^{-a\tau} b d\tau = -\frac{b}{a}(1 - e^{at}) \quad (۴-۴۱)$$

در مثال فوق a عددی منفی است ($a = -\frac{1}{RA}$) و در صورتیکه شیر خروجی بسته شود

$a=0$ بوده و معادله فوق چنین می شود:

$$x(t) = bt \quad (۴۲-۴)$$

شکل (۸-۴) رفتار این سیستم را نشان می دهد. همانطور که ملاحظه می شود برای $a < 0$ ارتفاع مایع در ظرف بتدریج افزایش یافته تا به مقدار نهائی خود یعنی $R = -\frac{b}{a}$ برسد و برای $a = 0$ ارتفاع مایع بصورت خطی با شیب $b = \frac{1}{A}$ افزایش می یابد.

مثال (۸-۴):

می خواهیم رفتار سیستم مثال (۷-۴) را تحت تأثیر ورودی ضربه ای بررسی نماییم. در مثال (۷-۴) اگر ظرف ابتدا خالی باشد و در یک لحظه حجم معینی از مایع بطور ناگهانی وارد آن شود (مثلاً ناگهان یک سطل آب را در آن خالی کنیم)، این نوع ورودی، ورودی ضربه ای برای سیستم تلقی می گردد و انتظار می رود که ارتفاع مایع آن دفعتاً افزایش یافته و رفتار یک سیستم آزاد از آن نتیجه شود. اگر ورودی عبارت از یک تابع ضربه ای واحد مطابق معادله (۳۳-۳) باشد با قراردادن آن در معادله (۳۹-۴) و اعمال شرایط اولیه صفر داریم:

$$x(t) = e^{at} \int_0^t e^{-a\tau} b \delta(\tau) d\tau = e^{at} b \quad (۴۳-۴)$$

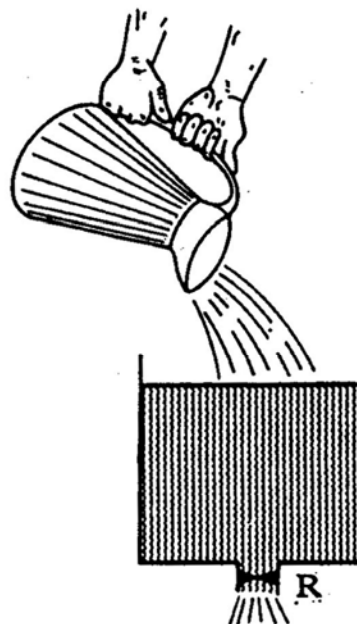
در رابطه (۴۳-۴)، b معرف ارتفاع مایع در زمان $t=0$ می باشد که بخاطر ریختن ناگهانی مایع (در زمان $t=0$) ایجاد شده است. از آنجا که $b = \frac{1}{A}$ می باشد رابطه (۴۳-۴) نشان می دهد که ارتفاع اولیه ناشی از ورودی ضربه ای واحد مساوی $\frac{1}{A}$ خواهد بود که این امر مورد انتظار بوده است. زیرا ورودی ضربه ای واحد بمعنای ریختن "واحد" حجم مایع به داخل ظرف در زمان $t=0$ می باشد و چون سطح مقطع ظرف A می باشد ارتفاع آن به اندازه $\frac{1}{A}$ خواهد بود. بعبارتی:

$$1 = b.A \Rightarrow b = \frac{1}{A}$$

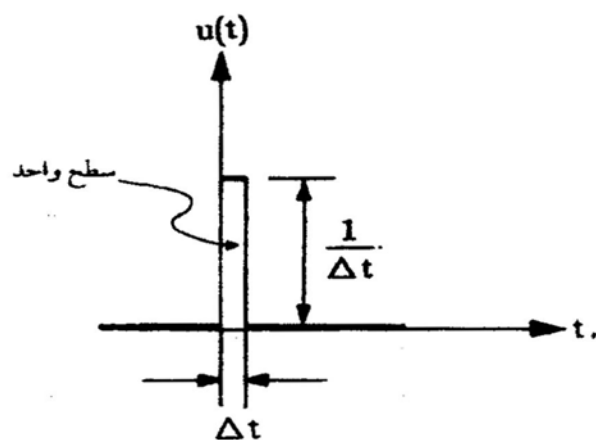
از مقایسه معادلات (۴-۴۳) با (۴-۳) بسادگی نتیجه می‌شود که b معادل x_0 است. عبارتی برای سیستم با ورودی، تأثیر ورودی ضربه‌ای در $t=0$ [شکل (۴-۹)] همانند تأثیر شرایط اولیه برای سیستم بدون ورودی (سیستم آزاد) می‌باشد. همانطور که گفته شد عبارت دوم معادله (۴-۳۹) معرف رفتار سیستم تحت تأثیر ورودی و با اعمال شرایط اولیه صفر می‌باشد. عبارت مذکور را که بصورت انتگرالهای معادلات (۴-۳۹) یا (۴-۳۸) نمایش داده شده انتگرال کانولوشن می‌نامند. در اینجا قبل از تفسیر این انتگرال مثال دیگری از سیستم با ورودی رسته یک ارائه می‌گردد.

مثال (۴-۹):

در مثال (۴-۸) رفتار سیستم برای ورودی تابع ضربه‌ای واحد در زمان $t=0$ مورد بررسی قرار گرفت. حال می‌خواهیم رفتار سیستم را به ازاء این ورودی ولی بدون استفاده از انتگرال کانولوشن معادله (۴-۳۹) بدست آوریم. یعنی می‌خواهیم نتایج بدست آمده در مثال (۴-۸) را مستقیماً برای سیستمی نظیر شکل (۴-۹) محاسبه



شکل (۴-۹). نمایش ورودی ضربه‌ای برای سیستم آزاد.



شکل (۴-۱۰). ورودی ضربه‌ای واحد در زمان $t=0$.

نموده و رفتار سیستم را تعیین نمائیم.

در اینجا داریم:

$$\dot{x} = ax + bu$$

که در آن $u(t)$ ورودی ضربه‌ای واحد در زمان $t=0$ می‌باشد و آن را بصورت شکل (۴-۱۰) نمایش می‌دهیم.

با قراردادن معادله $(u(t) = \frac{1}{\Delta t}, t \leq \Delta t)$ در معادله دیفرانسیل فوق داریم:

$$\dot{x} = ax(t) + b\frac{1}{\Delta t}, \quad t \leq \Delta t$$

$$x(0) = 0$$

و یا:

$$\dot{x} = a\left(x + \frac{b}{a\Delta t}\right), \quad t \leq \Delta t \quad (a-44-4)$$

$$x(0) = 0$$

با تغییر متغیر $x(t)$ به $h(t)$ بصورت:

$$h(t) = x + \frac{b}{a\Delta t} \quad (b-44-4)$$

و قراردادادن در (a-۴۴-۴) نتیجه می شود:

$$\frac{d}{dt}h(t) = ah(t) \quad , \quad t \leq \Delta t$$

$$h(0) = \frac{b}{a\Delta t} \quad (c-۴۴-۴)$$

معادله (c-۴۴-۴) نمایش یک سیستم آزاد (بدون ورودی) است و حل آن با توجه به معادله (۳-۴) عبارت است از:

$$h(t) = e^{at} \frac{b}{a\Delta t} \quad , \quad t \leq \Delta t$$

با قراردادادن از این رابطه در (b-۴۴-۴) معادله ذیل حاصل می شود:

$$x(t) = \frac{b}{a\Delta t} (e^{at} - 1) \quad , \quad t \leq \Delta t$$

بازاء $t = \Delta t$ با قراردادادن بسط e^{at} در معادله فوق نتیجه می شود:

$$x(\Delta t) = b(1 + \frac{1}{2}a\Delta t + \dots) \quad (d-۴۴-۴)$$

و بازاء $\Delta t \rightarrow 0$ نتیجه می شود:

$$x(\Delta t) = b \quad (e-۴۴-۴)$$

و چون برای $t > \Delta t$ ورودی صفر است داریم:

$$\frac{d}{dt}x(t) = ax(t) \quad , \quad t \geq \Delta t \quad (f-۴۴-۴)$$

$$x(\Delta t) = b$$

و خل این سیستم عبارت است از:

$$x(t) = e^{a(t-\Delta t)} \cdot b, \quad t \geq \Delta t \quad (g-44-4)$$

و بازاء $\Delta t \rightarrow 0$ نتیجه می شود:

$$x(t) = e^{at} \cdot b, \quad t \geq 0 \quad (h-44-4)$$

معادله (h-44-4) همان معادله (43-4) می باشد که قبلاً آن را بدست آورده ایم.

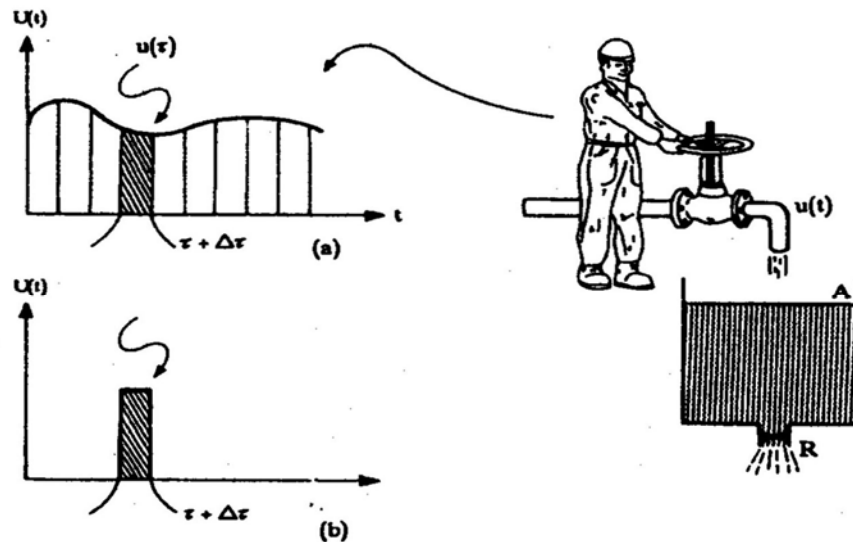
(2-2-4) - تفسیر انتگرال کانولوشن :

در سیستم شکل (4-11) فرض می کنیم که ارتفاع اولیه مایع در ظرف مساوی صفر (یعنی $x(0)=0$) باشد. می خواهیم رفتار این سیستم (تغییرات ارتفاع مایع در ظرف) را نسبت به ورودی $u(t)$ بررسی نماییم.

برای این منظور نمودار ورودی $u(t)$ به سیستم در شکل (4-11a) را به فواصل زمانی مختلف تقسیم می کنیم. در اولین مرحله سعی می کنیم رفتار سیستم را بازاء یک جزء از ورودی (که در شکل مذکور هاشور خورده است) بدست آوریم (برای وضوح بیشتر، این جزء ورودی بطور مشخص در شکل (4-11b) نشان داده شده است). بنابراین در مرحله اول هدف تعیین رفتار سیستم بازاء ورودی از نوع شکل (4-11b) می باشد، لذا مسأله را بشکل زیر می توان مطرح نمود :

می خواهیم رفتار سیستم زیر را به ازای ورودی شکل (4-11b) بدست آوریم.

$$\dot{x} = ax + bu$$



شکل (۴-۱۱) - نمایش سیستم رسته یک با ورودی $u(t)$.

(a) - نمودار ورودی $u(t)$.

(b) - نمایش ورودی $u(t)$ برای یک فاصله زمانی.

(c) - سیستم سیالاتی "رسته یک با ورودی".

از آنجا که شرایط اولیه صفر بوده و قبل از زمان $t = \tau$ نیز ورودی نداریم نتیجه می‌شود:

$$x(t) = 0, \quad t < \tau$$

و چون در فاصله زمانی " $\tau < t < \tau + \Delta\tau$ " ورودی $u(t)$ ظاهر شده پس داریم:

$$\dot{x} = ax + bu(\tau)$$

$$, \quad \tau < t < \tau + \Delta\tau$$

$$x(\tau) = 0$$

و یا:

$$\dot{x} = a \left(x + \frac{b}{a} u(\tau) \right)$$

$$, \quad \tau < t < \tau + \Delta\tau \quad (a-45-4)$$

$$x(\tau) = 0$$

با تغییر متغیر بصورت زیر:

$$h(\tau) = x + \frac{b}{a} u(\tau)$$

$$(b-45-4)$$

معادله (a-۴۵-۴) چنین خواهد شد:

$$\dot{h} = ah(t), \quad \tau < t < \tau + \Delta\tau$$

$$h(\tau) = \frac{bu(\tau)}{a}$$

و حل آن عبارت است از:

$$h(t) = e^{a(t-\tau)} \frac{bu(\tau)}{a}, \quad \tau < t < \tau + \Delta\tau$$

که با قراردادن در معادله (b-۴۵-۴) مقدار $x(t)$ بصورت ذیل نتیجه می‌شود:

$$x(t) = \frac{bu(\tau)}{a} (e^{a(t-\tau)} - 1), \quad \tau < t < \tau + \Delta\tau \quad (c-۴۵-۴)$$

بازاء $t = \tau + \Delta\tau$ داریم (با مقدار قراردادن در (c-۴۵-۴) و ساده کردن آن):

$$x(\tau + \Delta\tau) = bu(\tau) \Delta\tau$$

در نتیجه برای $t > \tau + \Delta\tau$ داریم:

$$\dot{x} = ax$$

$$x(\tau + \Delta\tau) = bu(\tau) \Delta\tau$$

که حل آن برای $t > \tau + \Delta\tau$ عبارت است از:

$$x(t) = e^{a(t-\tau-\Delta\tau)} bu(\tau) \Delta\tau$$

از $\Delta\tau$ در مقابل τ صرف نظر نموده و بطور خلاصه رفتار سیستم را بازاء ورودی شکل (b-۱۰-۴)

بصورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} x(t) &= 0 & t \leq \tau \\ x(t) &= e^{a(t-\tau)} b u(\tau) \Delta \tau & t > \tau \end{aligned} \quad (46-4)$$

معادله (۴۶-۴) رفتار سیستم بازاء جزء هاشور خورده شکل (۴-۱۱-۱) می‌باشد. هر گاه بخواهیم رفتار سیستم را بازاء همه ورودیهای شکل (۴-۱۱-۱) که بصورت قطاری از این اجزاء هاشور خورده قابل نمایش است مشخص کنیم، کافی است رفتارهای حاصل از ورودیهای جزئی را با هم جمع کنیم که جمع این رفتارها، نمایش رفتار سیستم بازاء ورودی کل خواهد بود. یعنی داریم:

$$x_p(t) = \sum e^{a(t-\tau)} b u(\tau) \Delta \tau \quad (47-4)$$

هر گاه زمان $\Delta \tau$ در رابطه فوق بقدری کوچک شود که به dt تبدیل شود جمع فوق نیز به انتگرال رفتارهای جزئی تبدیل می‌شود، یعنی:

$$x_p(t) = \int_0^t e^{a(t-\tau)} b u(\tau) d\tau \quad (48-4)$$

رابطه فوق همان انتگرال کانولوشن می‌باشد که تعبیر آن چنین است:

رفتار سیستم برای یک ورودی در طول زمان t عبارت از جمع اثر بی‌نهایت ورودی ضربه‌ای با اندازه کوچک $u(t)dt$ می‌باشد که در مقاطع زمانی صفر تا t گسترده شده‌اند. از طرفی چون هر ورودی ضربه‌ای تأثیرش در یک سیستم، معادل سیستمی است که در آن «ورودی برابر صفر ولی دارای شرایط اولیه معینی» می‌باشد، می‌توان نتیجه گرفت که انتگرال فوق معادل «اثر تعداد بینهایت شرایط اولیه» در سیستم با ورودی صفر است.

(۳-۲-۴) - رفتار سیستم رسته n با ورودی $u(t)$:

معادله حالت سیستم خطی رسته n با یک ورودی و یک خروجی مطابق معادله (۳-۹) عبارت است از:

$$\dot{X} = AX + bu \quad (۴-۴۹)$$

$$y = cX + du$$

شرایط اولیه نیز بصورت ذیل فرض شده است:

$$X(0) = X_0$$

برای بدست آوردن $X(t)$ (یا حل سیستم) آن را بصورت مجموع حل همگن و خصوصی می نویسیم:

$$X(t) = e^{At} X_0 + X_p(t) \quad (۴-۵۰)$$

که در آن $e^{At} X_0$ (یعنی حل همگن) را قبلاً بدست آورده بودیم و برای یافتن $X_p(t)$ (یعنی حل خصوصی)، جواب را بصورت معادله زیر در نظر گرفته و آن را امتحان می کنیم:

$$X_p(t) = \phi(t) p(t) = e^{At} p(t) \quad (۴-۵۱)$$

در این رابطه $p(t)$ یک تابع برداری نامعلوم است که باید آنرا بدست آوریم. با مشتق گرفتن از رابطه فوق داریم:

$$\frac{d}{dt} X_p(t) = A e^{At} p(t) + e^{At} \frac{d}{dt} p(t) \quad (۴-۵۲)$$

از طرفی $X_p(t)$ باید در معادله حالت (۴-۴۹) صدق کند، یعنی:

$$\dot{X}_p(t) = AX_p(t) + bu(t) \quad (۴-۵۳)$$

با قراردادن از (۴-۵۲) در (۴-۵۳) رابطه ذیل نتیجه می شود:

$$Ae^{At} p(t) + e^{At} \frac{d}{dt} p(t) = Ae^{At} p(t) + bu(t)$$

و یا:

$$\frac{d}{dt} p(t) = e^{-At} bu(t)$$

و با انتگرالگیری از آن، رابطه زیر حاصل می شود:

$$p(t) = \int_0^t e^{-A\tau} bu(\tau) d\tau \quad (۴-۵۴)$$

با قراردادن از (۴-۵۴) در (۴-۵۱) حل خصوصی بصورت ذیل خواهد شد:

$$X_p(t) = e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} bu(\tau) d\tau = \int_0^t e^{A(t-\tau)} bu(\tau) d\tau \quad (۴-۵۵)$$

در نتیجه حل کلی $X(t)$ با قراردادن از (۴-۵۵) در (۴-۵۰) چنین نتیجه می شود:

$$X(t) = e^{At} X_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} bu(\tau) d\tau \quad (۴-۵۶)$$

عبارت اول سمت راست رابطه فوق معرف تأثیر شرایط اولیه بر رفتار سیستم است و عبارت دوم نیز (که همان انتگرال کانولوشن می باشد) اثر ورودی بر رفتار سیستم را بیان

می‌کند. عبارت اول یا $e^{At} X_0$ را "رفتار سیستم با ورودی صفر^۱" و عبارت دوم را "رفتار سیستم با شرایط اولیه صفر^۲" می‌نامند (بیان فوق در رابطه (۴-۵۷) نشان داده شده است). می‌توانیم با قراردادن از (۴-۵۶) در معادله دوم از (۴-۴۹)، خروجی $y(t)$ را بدست آوریم.

$$y(t) = ce^{At} X_0 + c \int_0^t e^{A(t-\tau)} bu(\tau) d\tau + du(t) \quad (۴-۵۷)$$

رفتار سیستم با شرایط اولیه صفر رفتار سیستم با ورودی صفر

(۴-۲-۴) - حل معادلات سیستم از طریق تبدیل معکوس لاپلاس:

در فصل سوم دیدیم که حل معادلات حالت (۳-۹) [نظیر رابطه (۴-۴۹)] در میدان لاپلاس بصورت معادله (۳-۴۵) که دوباره در زیر نوشته شده، می‌باشد.

$$X(s) = (sI - A)^{-1} X_0 + (sI - A)^{-1} b U(s) \quad (۴-۵۸)$$

با اعمال تبدیل معکوس لاپلاس بر این معادله، $X(t)$ حاصل می‌شود. تبدیل معکوس لاپلاس عبارت اول سمت راست معادله فوق حل همگن و تبدیل معکوس لاپلاس عبارت دوم آن حل خصوصی را نتیجه می‌دهد. در مورد حل همگن قبلاً دیدیم که $\mathcal{L}^{-1}(sI - A)^{-1} = e^{At}$ می‌باشد، که از آن رفتار آزاد سیستم بصورت $x_h(t) = e^{At} X_0$ نتیجه شده بود. به همین ترتیب با اعمال تبدیل معکوس لاپلاس بر عبارت دوم معادله (۴-۵۸)، رفتار سیستم مطابق رابطه (۴-۵۹) خواهد بود.

$$X(t) = e^{At} X_0 + \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1} b U(s)] \quad (۴-۵۹)$$

۱- Zero Input Response

۲- Zero State Response

عبارت دوم این معادله، خود لاپلاس معکوس حاصلضرب دو جمله $(sI-A)^{-1}$ و $bU(s)$ بوده که لاپلاس معکوس $(sI-A)^{-1}$ مساوی e^{At} و لاپلاس معکوس $bU(s)$ نیز مساوی $bu(t)$ می باشد. از ریاضیات نیز بخاطر داریم که لاپلاس معکوس "حاصلضرب فوق" بصورت انتگرال کانولوشن ذیل می باشد:

$$\mathcal{L}^{-1}(sI-A)^{-1}bU(s) = \int_0^t e^{A(t-\tau)}bu(\tau) d\tau \quad (60-4)$$

که با قراردادن آن در معادله (۵۹-۴) داریم:

$$X(t) = e^{At}X_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}bu(\tau) d\tau \quad (61-4)$$

معادله (۶۱-۴) همان معادله (۵۶-۴) می باشد که قبلاً آن را بدست آورده ایم. خروجی $Y(s)$ در میدان لاپلاس نیز از معادله (۴۶-۳) که در ذیل آورده شده بدست می آید:

$$Y(s) = c(sI-A)^{-1}X_0 + c(sI-A)^{-1}bU(s) + dU(s) \quad (62-4)$$

رفتار سیستم با شرایط اولیه صفر رفتار سیستم با ورودی صفر

همانطور که ملاحظه می شود اگر شرایط اولیه صفر باشد (یعنی $X_0=0$) از تقسیم طرفین رابطه (۶۲-۴) بر $U(s)$ ، تابع تبدیل سیستم یعنی $G(s)$ بدست می آید که به صورت زیر خواهد بود:

$$G(s) = c(sI-A)^{-1}b + d$$

(۵-۲-۴) - قضایای "مقدار اولیه" و "مقدار نهائی":

یکی از موارد مهم استفاده از تبدیل لاپلاس تعیین "مقادیر اولیه و نهائی" تابعی نظیر $f(t)$ می باشد که ذیل (در حد تعریف و اثبات) مورد بررسی قرار می گیرند.

(الف) - قضیه مقدار نهائی :

در تجزیه و تحلیل یک سیستم دینامیکی چنانچه بدون حل ریاضی معادلات سیستم، بتوان مقدار نهائی عکس العمل یا رفتار یک سیستم را تعیین کرد این امر کمک زیادی به تحلیل سیستم خواهد نمود. از آنجا که در بسیاری موارد رفتار سیستم در حالت ماندگار مورد توجه می باشد، لذا قضیه مقدار نهائی ابزار مناسبی است که اطلاعات زیادی در مورد رفتار سیستم در این حالت را بدست می دهد. تعریف و اثبات این قضیه در ذیل ارائه شده است.

تعریف:

هرگاه توابع $f(t)$ و مشتق آن $f'(t)$ دارای تبدیل لاپلاس باشند و $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ و حد $f(t)$ نیز وقتی $t \rightarrow \infty$ وجود داشته باشد، آنگاه داریم:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (۴-۶۳)$$

اثبات:

با توجه به اینکه:

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^{\infty} f'(t)e^{-st} dt$$

می باشد، معادله (۳-۳۷) را می توان چنین نوشت (لاپلاس مشتق):

$$\int_0^{\infty} f'(t)e^{-st} dt = sF(s) - f(0)$$

به ازاء $s=0$ مقدار $e^{-st}=1$ است، بنابر این خواهیم داشت :

$$\int_0^{\infty} f(t)dt = \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s)] - f(0)$$

اما سمت چپ معادله فوق عبارت از انتگرال مشتق یک تابع است که برابر خود تابع $f(t)$

می‌باشد، لذا با قراردادن حدود انتگرال داریم:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [f(t)] - f(0) = \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s)] - f(0)$$

با حذف $f(0)$ از طرفین معادله فوق رابطه مطلوب حاصل می‌شود:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (۴-۶۳)$$

این قضیه مبین آن است که "رفتار $f(t)$ در حدود $t = \infty$ برابر رفتار $sF(s)$ در نزدیکیهای $s=0$ می‌باشد." اگر $sF(s)$ دارای قطب‌هایی در روی محور موهومی (بجز $\omega=0$) و یا در سمت راست محور موهومی باشد در اینصورت $f(t)$ دارای مقدار نهائی نخواهد بود و نمی‌توان از قضیه فوق استفاده نمود. همچنین اگر $f(t)$ تابع سینوسی باشد قضیه غیرقابل قبول است. چنانچه $sF(s)$ در $s=0$ دارای قطب باشد مطابق قضیه مقدار نهائی $f(\infty) = \infty$ می‌شود که بطور دقیق نحوه رفتار چنین سیستمی را بازاء $t \rightarrow \infty$ نشان می‌دهد.

(ب) - قضیه مقدار اولیه:

در اینجا نیز همانند قضیه مقدار نهائی، می‌توان مفهوم مناسبی را از قضیه مقدار اولیه برای بررسی رفتار یک سیستم استنباط نمود. تعریف ریاضی و اثبات این قضیه در ذیل ارائه شده است.

تعریف:

هرگاه $f(t)$ و $f'(t)$ دارای تبدیل لاپلاس باشند و $F(s)$ تبدیل لاپلاس $f(t)$ بوده و حد $sF(s)$ نیز وقتی $s \rightarrow \infty$ وجود داشته باشد، آنگاه داریم:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0^+) \quad (۴-۶۴)$$

اثبات:

معادله (۳-۳۷) را می توان چنین نوشت:

$$\int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} dt = s F(s) - f(0)$$

از آنجا که در فاصله بسیار کوتاه $t=0$ تا $t=0^+$ یعنی زمان بسیار کوتاهی پس از $t=0$ مقدار e^{-st} مساوی واحد است، لذا:

$$\int_0^{0^+} f'(t) dt + \int_{0^+}^{\infty} f'(t) e^{-st} dt = s F(s) - f(0)$$

خواهد بود. از طرفی وقتی $s \rightarrow \infty$ میل کند، در ترم دوم سمت چپ رابطه فوق، e^{-st} بسمت صفر میل می کند. بنابراین:

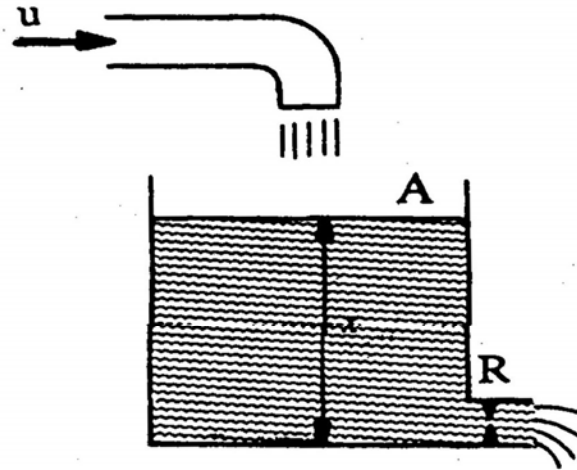
$$\int_0^{0^+} f'(t) dt = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s) - f(0)$$

و یا:

$$f(0^+) - f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s) - f(0)$$

با حذف $f(0)$ از طرفین معادله فوق، رابطه مطلوب بدست می آید:

$$f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s)$$


 شکل (۱۲-۴) - سیستم با ورودی $u(t)$.

مثال (۱۰-۴):

معادله حالت سیستم شکل (۱۲-۴) با $A=1$ و $R=1$ بصورت $\dot{x} = -x + u(t)$ می باشد که در آن $u(t)$ دبی مایع ورودی و $x(t)$ ارتفاع مایع داخل ظرف است. شرایط اولیه سیستم نیز $x(0) = x_0$ در نظر گرفته می شود. برای ورودی سیستم دو حالت "ورودی پله ای واحد $u(t)=1$ و ورودی ضربه ای واحد $u(t)=\delta(t)$ " را در نظر می گیریم. برای بدست آوردن $x(t)$ در هر لحظه با استفاده از معادله (۶۱-۴) داریم:

$$x(t) = e^{-t} x_0 + \int_0^t e^{-(t-\tau)} b u(\tau) d\tau = e^{-t} x_0 + e^{-t} \int_0^t e^{\tau} u(\tau) d\tau \quad (a)$$

اگر ورودی به سیستم "تابع پله ای واحد" باشد، نتیجه می گیریم:

$$x(t) = e^{-t} x_0 + 1 - e^{-t} = 1 + (x_0 - 1)e^{-t} \quad (b)$$

مقدار تابع بازاء $t=0^+$ عبارت است از:

$$x(0^+) = x_0 \quad (c)$$

و مقدار تابع بازاء $t \rightarrow \infty$ (یعنی مقدار نهائی $x(t)$) عبارت است از:

$$x(t) = 1 \quad (d)$$

$$t \rightarrow \infty$$

اگر ورودی به سیستم "تابع ضربه‌ای واحد باشد" معادله (a) چنین می‌شود:

$$x(t) = e^{-t}x_0 + e^{-t} \quad (e)$$

مقدار تابع بازاء $t = 0^+$ عبارت است از:

$$x(0^+) = x_0 + 1 \quad (f)$$

و مقدار تابع وقتی $t \rightarrow \infty$ عبارت است از:

$$x(t) = 0 \quad (g)$$

$$t \rightarrow \infty$$

حال نتایج فوق را با استفاده از تبدیل لاپلاس و بکاربردن قضایای مقدار نهائی و اولیه بررسی می‌کنیم. معادله حالت سیستم در میدان لاپلاس بصورت زیر می‌باشد:

$$X(s) = \frac{1}{s+1}x_0 + \frac{1}{s+1}U(s) \quad (h)$$

اگر ورودی، تابع پله‌ای واحد باشد لذا $U(s) = \frac{1}{s}$ بوده و داریم:

$$X(s) = \frac{x_0}{s+1} + \frac{1}{s(s+1)} \quad (i)$$

با استفاده از قضیه مقدار نهائی [یعنی رابطه (۴-۶۳)]، معادله (i) چنین می‌شود:

$$x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} s X(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s x_0}{s+1} + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s+1} = 1$$

که این رابطه همان معادله (d) می باشد. اگر قضیه مقدار اولیه را بکار ببریم با استفاده از رابطه (۴-۶۴) معادله (i) نتیجه ذیل را خواهد داد:

$$X(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{s x_0}{s+1} + \frac{1}{s+1} \right) = x_0$$

که همان معادله (c) می باشد.

اگر ورودی، تابع ضربه‌ای واحد (یعنی $U(s)=1$) باشد، معادله (h) می شود:

$$X(s) = \frac{x_0}{s+1} + \frac{1}{s+1} = \frac{x_0+1}{s+1} \quad (j)$$

همچنین با استفاده از قضیه مقدار نهائی [یعنی رابطه (۴-۶۳)]، از معادله (j) نتیجه می گیریم:

$$x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(x_0+1)}{s+1} = 0$$

حال اگر قضیه مقدار اولیه را بکار ببریم، با استفاده از رابطه (۴-۶۴) معادله (j) نتیجه می دهد:

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s(x_0+1)}{s+1} = x_0+1$$

که همان معادله (f) می باشد.

بطور کلی تابع $f(0^+)$ ، [و در مورد این مثال تابع $x(0^+)$ مقدار تابع را در $t=0^+$ نشان می دهد. $f(0^+)$ برابر "مجموع $f(0)$ (یعنی همان شرایط اولیه و یا مقدار تابع در $t=0$) و اثر ورودی به سیستم در $t=0$ " می باشد. واضح است که اثر ورودی در $t=0$ تنها وقتی صفر نیست که تابع ورودی از نوع ضربه‌ای باشد. بنابراین اگر ورودی تابع ضربه‌ای باشد، $f(0^+)$ با $f(0)$ متفاوت خواهد بود. همچنین با استفاده از نتایج بدست آمده می توان گفت که "اثر ورودی ضربه‌ای به سیستم نظیر شرایط اولیه در سیستم

می‌باشد" یعنی "سیستم با ورودی ضربه‌ای واحد و شرایط اولیه $f(0)$ (در مورد این مثال ورودی ضربه‌ای واحد و شرایط اولیه X_0) نظیر سیستمی است که ورودی به سیستم مساوی صفر و شرایط اولیه آن مساوی $f(0)+1$ باشد" (درمورد این مثال شرایط اولیه X_0+1 و ورودی صفر).

(۴-۲-۶) - حل کامپیوتری معادلات سیستم:

حل کامپیوتری معادلات سیستم های دینامیکی به کمک کامپیوتر دارای دو مزیت عمده ذیل است:

- الف) - روشهای حل کامپیوتری سریع و موثر هستند.
 - ب) - این روشها هم برای سیستم های خطی و هم برای سیستمهای غیرخطی قابل استفاده می‌باشند.
- از طرفی اشکال و نقیصه روشهای کامپیوتری برای حل معادلات سیستم آن است که عموماً با استفاده از این روشها نمی‌توان یک جواب کلی و عمومی برای معادلات سیستم بدست آورد.
- روشهای کامپیوتری حل معادلات سیستم، هم به وسیله کامپیوترهای آنالوگ و هم توسط کامپیوترهای دیجیتال قابل اجرا می‌باشند. رفتار سیستم هایی که نمایش ریاضی آنها بصورت معادلات دیفرانسیل یا توابع تبدیل ارائه شوند را می‌توان با کامپیوترهای آنالوگ تعیین نمود. در این کامپیوترها ممکن است هریک از اعمال انتگرال گیری، ضرب شدن در مقادیر ثابت پارامتری و یا جمع جبری، بر روی سیگنالها صورت گیرد. این اعمال عمدتاً به کمک تقویت کننده الکتریکی با ضریب بسیار بزرگ^۱ انجام می‌شود. اساس کار، ساختمان و مکانیزم کامپیوترهای آنالوگ در مبحث کنترلرهای الکتریکی "کتاب کنترل پیشرفته" (جلد دوم این کتاب) مورد تحلیل قرار می‌گیرد.

اگرچه در کامپیوترهای دیجیتال اطلاعات ورودی و خروجی بصورت غیر پیوسته^۱ وارد و خارج می‌شوند و به این ترتیب بجای معادلات دیفرانسیل، باید معادلات تفاضلی توسط این کامپیوترها حل شوند، ولی با کوچک کردن زمان نمونه‌گیری در معادلات تفاضلی می‌توان عملاً معادلات دیفرانسیل را نیز با کامپیوترهای دیجیتال حل نمود.

امروزه با استفاده از کامپیوترهای شخصی^۲ و به کمک نرم افزارهای متعددی که برای حل معادلات دیفرانسیل تهیه شده‌اند می‌توان معادلات دیفرانسیل (به عبارتی نمایش ریاضی) سیستم‌های دینامیکی را حل نمود. در این حالت ارائه اطلاعات ذیل به کامپیوتر مقدمه روش حل کامپیوتری بشمار می‌آید:

۱- معادلات حالت سیستم (خطی یا غیر خطی).

۲- شرایط اولیه (متغیرهای حالت).

۳- ورودی (یا ورودیها) به سیستم (در صورت اعمال ورودی).

۴- پریود نمونه‌گیری^۳ و زمان کلی محاسبه.

۵- اطلاعات مربوط به نحوه نمایش رفتار سیستم، رسم شکل و

دو روش حل عددی معادلات دیفرانسیل به کمک کامپیوتر عبارت از روش اویلر^۴ و روش رانج کوتا^۵ می‌باشند که در پیوست (۱) ارائه شده‌اند. باید توجه داشت عملاً آنچه که در حل معادلات دیفرانسیل به وسیله کامپیوترهای دیجیتال انجام می‌شود همان انتگرال‌گیری عددی^۶ می‌باشد.*

۱- Discrete

۲- Personal Computer

۳- Sampling Period

۴- Euler Method

۵- Runge - Kutta Method

۶- Numerical Integration

*مشهورترین روشهای انتگرال‌گیری عددی عبارت از روش پیشرو نیوتن، روش دوزنقه، روش سیمپسون، روش زامبرگ، روش تیلور، روش گری گوری و روش ضرایب نامشخص می‌باشند که در درس محاسبات عددی با آنها آشنا شده‌اید.

(۷-۲-۴)- نمایش عکس العمل سیستم:

در این قسمت عکس العمل سیستم را از طریق حل مدل ریاضی آن در میدان لاپلاس و یا عبارتی از طریق تبدیل معکوس لاپلاس "تابع تبدیل" سیستم بدست می آوریم و دیاگرام این عکس العمل را نشان می دهیم. بنابراین مسئله مورد نظر در این قسمت آن است که برای سیستم شکل (۴-۱۳) بازاء ورودیهای مختلف $u(t)$ ، مقدار خروجی $y(t)$ را بدست آورده و این خروجی را رسم نمائیم.

نمایش ترسیمی عکس العمل سیستمها به ما کمک می کند که رفتار دینامیکی سیستمهای مختلف را بازاء ورودیهای متفاوت تجربه نموده و همچنین با استفاده از آن بتوان مسائل پیچیده را بنحو مطلوبتری ارائه و قابل فهم نمود.

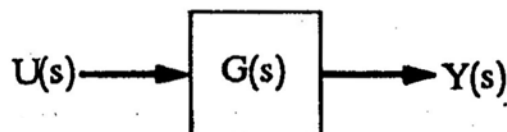
دراین مبحث از انواع مختلف ورودیها، تنها دو نوع ورودی "تابع ضربه ای واحد" و "تابع پله ای واحد" را انتخاب نموده و عکس العمل سیستمهای مختلف را نسبت به این دو نوع ورودی بررسی می نمائیم. علت این انتخاب آن است که در سیستمهای خطی:

اولاً ورودی هر چه باشد می توان آنرا بصورت جمع تعداد زیادی (عملاً بینهایت) ضربه^۱ تصور نمود (به بخش (۴-۲-۲) مراجعه شود). در نتیجه با بدست آوردن عکس العمل سیستم نسبت به ورودی ضربه ای فرم کلی عکس العمل سیستم نسبت به هر نوع ورودی دیگر را نیز می توان مشخص نمود و همانطور که خواهیم دید نمایش عکس العمل سیستم نسبت به ورودی ضربه ای عملاً نمایش مستقیم "تابع تبدیل" در میدان زمان می باشد.

ثانیاً علت انتخاب "تابع پله ای" بعنوان ورودی مورد بحث در این قسمت آن است که در اکثر فرآیندهای صنعتی^۲ ورودی پله ای فرم معمول و طبیعی ورودی به سیستم است. مثلاً در یک کوره ذوب، ورودی عبارت از مقدار معینی دبی حرارتی است که یک تابع پله ای بشمار می آید. همچنین در دیگ بخار یک نیروگاه، ورودی عبارت از دبی حرارتی و خروجی ها متغیرهایی نظیر درجه حرارت و فشار و دبی بخار آب می باشند. در توربین نیز ورودی عبارت

۱-Impulse

۲- Industrial Processes


 شکل (۴-۱۳). نمایش سیستم با تابع تبدیل $G(s)$.

از فشار، دبی و درجه حرارت ثابت و خروجی آن توان الکتریکی است که کلیه ورودیهای فوق را می توان تابع پله ای در نظر گرفت.

عکس العمل سیستم شکل (۴-۱۳) با فرض صفر بودن شرایط اولیه نسبت به ورودی تابع ضربه ای واحد عبارت است از:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} Y(s) = \mathcal{L}^{-1} G(s) U(s) \quad (۴-۶۵)$$

با توجه به اینکه ورودی تابع ضربه ای واحد یعنی $U(s)=1$ است، داریم:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} G(s) = g(t) \quad (۴-۶۶)$$

همچنین عکس العمل سیستم شکل (۴-۱۳) نسبت به ورودی تابع پله ای واحد که برای آن $U(s)=\frac{1}{s}$ می باشد عبارت است از:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1} Y(s) = \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s} G(s) \\ &= \int_0^t g(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (۴-۶۷)$$

(معادله (۴-۶۷) به کمک انتگرال کانولوشن بدست آمده است). نتایج فوق بطور خلاصه در

جدول (۴-۱) نمایش داده شده است. همچنین باید توجه داشت که چون سیستم با ورودی

جدول (۱-۴). عکس‌العمل سیستم نسبت به ورودیهای "ضربه‌ای واحد" و "پله‌ای واحد".

خروجی	لاپلاس خروجی	لاپلاس ورودی	ورودی	شرایط اولیه	
$y(t) = g(t)$	$G(s)$	1	$\delta(t)$	0	ورودی ضربه‌ای واحد
$y(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} G(s)$	$\frac{1}{s}$	1	0	ورودی

ضربه‌ای معادل سیستمی با شرایط اولیه و بدون ورودی می‌باشد (به مسأله (۴-۱۲) مراجعه شود)، بررسی حاضر عملاً سیستم را با ورودی و با شرایط اولیه، مورد تجزیه و تحلیل قرار داده است.

مثال (۴-۱۱):

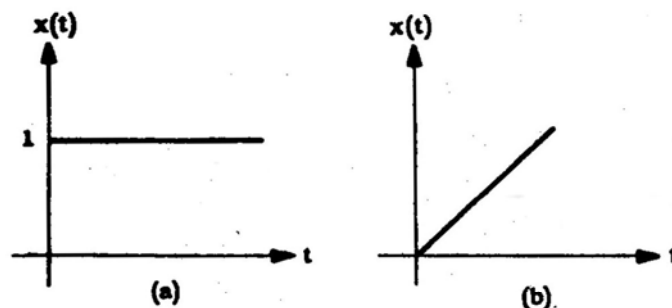
می‌خواهیم عکس‌العمل یک انتگرال گیرنده با تابع تبدیل $G(s) = \frac{1}{s}$ را نسبت به ورودیهای ضربه‌ای واحد و پله‌ای واحد بدست آوریم.
عکس‌العمل نسبت به "تابع ضربه‌ای واحد" عبارت است از:

$$y(t) = g(t) = \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s} = 1 \quad (۴-۶۸)$$

همچنین عکس‌العمل نسبت به "تابع پله‌ای واحد" نیز عبارت است از:

$$y(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau = \int_0^t d\tau = t \quad (۴-۶۹)$$

این عکس‌العملها در شکل (۴-۱۴) نمایش داده شده است. شکل (a) مربوط به عکس‌العمل ورودی ضربه‌ای و شکل (b) مربوط به عکس‌العمل ورودی پله‌ای است.



شکل (۴-۱۴). نمودار عکس العمل یک سیستم انتگرال گیرنده نسبت به :
 (a) - ورودی ضربه‌ای واحد. (b) - ورودی پله‌ای واحد.

مثال (۴-۱۲):

در این مثال تعیین عکس العمل سیستم رسته یک با تابع تبدیل $G(s) = \frac{K}{1+Ts}$ نسبت به ورودیهای ضربه‌ای و پله‌ای واحد، مورد نظر می‌باشد.
 الف) - عکس العمل سیستم نسبت به ورودی ضربه‌ای واحد بصورت ذیل می‌باشد:

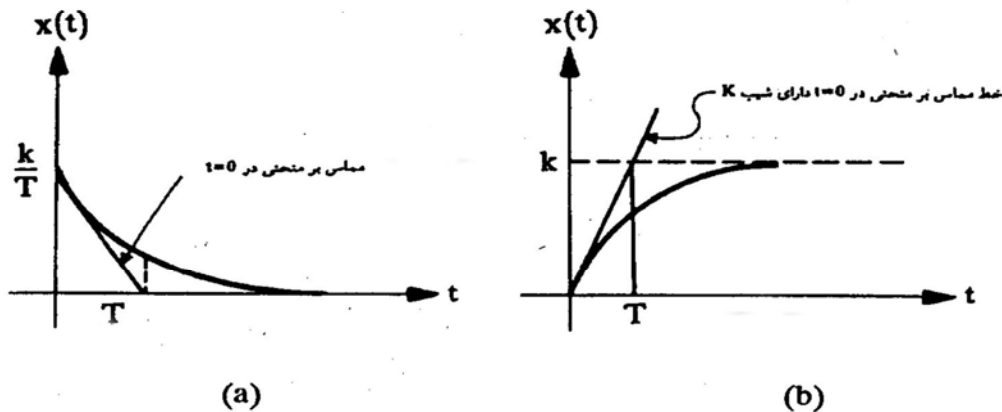
$$y(t) = g(t) = \mathcal{L}^{-1} \frac{k}{1+Ts} = \mathcal{L}^{-1} \frac{\frac{k}{T}}{s + \frac{1}{T}} = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}} \quad (۴-۷۰)$$

ب) - عکس العمل سیستم نسبت به تابع پله‌ای واحد نیز عبارت است از:

$$y(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau = \int_0^t \frac{k}{T} e^{-\frac{\tau}{T}} d\tau = k(1 - e^{-\frac{t}{T}}) \quad (۴-۷۱)$$

این عکس العمل‌ها در شکل (۴-۱۵) نمایش داده شده‌اند. شکل (a) عکس العمل نسبت به ورودی ضربه‌ای واحد و شکل (b) عکس العمل نسبت به ورودی پله‌ای واحد را نشان می‌دهد.

باید توجه داشت که عکس العمل سیستم نسبت به تابع پله‌ای واحد [معادله (۴-۶۹)]



شکل (۴-۱۵). نمودار عکس‌العمل سیستم رسته یک نسبت به ورودی:
(a) - ضربه‌ای واحد (b) - پله‌ای واحد

را می‌توان از رابطه زیر نیز بدست آورد:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}Y(s) = \mathcal{L}^{-1}G(s)U(s) = \mathcal{L}^{-1} \frac{k}{1+Ts} \cdot \frac{1}{s} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{k}{s} - \frac{k}{s + \frac{1}{T}} \right\}$$

که نتیجه اخیر معادل نتایج قبل (در مورد ورودی پله‌ای واحد) می‌باشد.

در تابع تبدیل $G(s) = \frac{K}{1+Ts}$ پارامتر K را "بزرگنمایی^۱" و T را "ثابت زمانی^۲" سیستم می‌نامند که این دو پارامتر اهمیت زیادی در هر سیستم دارند. بطور اصولی هر سیستمی دارای یک بزرگنمایی مشخص و یک یا چند ثابت زمانی است که رویهم رفته می‌توان یک "ثابت زمانی معادل" برای هر سیستمی در نظر گرفت. ثابت زمانی هر سیستم نقش اساسی در رفتار سیستم دارد و بعبارت ساده مقدار آن، سرعت عکس‌العمل سیستم را نشان می‌دهد. از نظر عددی، ثابت زمانی می‌تواند مقادیری در حدود میکرو ثانیه و حتی کمتر از آن را برای

۱- Gain

۲-Time Constant

سیستمهای الکترونیکی" تا "مضارب ثانیه، دقیقه و واحدهای بزرگتر را برای سیستمهای مکانیکی" و "هفته و ماه و سال را برای سیستمهای اقتصادی" شامل شود. همانطور که در سیستم رسته یک با ورودی پله‌ای واحد مثال (۴-۱۲) ملاحظه می‌شود، عکس‌العمل سیستم بازاء $t=T$ (یعنی وقتی از شروع عکس‌العمل سیستم، مدت زمانی باندازه ثابت زمانی T سپری شده باشد) عبارت است از:

$$y(\tau) = k(1 - e^{-1}) = k(1 - 0.363) = 0.637k$$

مطابق شکل (۴-۱۵-b) و محاسبه فوق با توجه به اینکه بازاء $t \rightarrow \infty$ مقدار $y(t)$ به سمت K میل می‌کند، پس از گذشت زمان T (یعنی سپری شدن زمانی معادل ثابت زمانی) عکس‌العمل سیستم به $63/7\%$ درصد مقدار نهائی خود می‌رسد و بسادگی ملاحظه می‌شود که پس از گذشتن زمان $2T$ و $3T$ عکس‌العمل سیستم بترتیب تقریباً معادل 87% و 95% خواهد شد. با توجه به مطلب فوق کاملاً روشن است که در یک سیستم الکترونیکی، عکس‌العمل سیستم در زمان بسیار کوتاهی (مثلاً چند میکرو ثانیه) می‌تواند حدوداً به مقدار نهائی خود برسد. در حالیکه در یک سیستم اقتصادی که مثلاً ثابت زمانی آن معادل سه ماه است، ماهها طول خواهد کشید تا سیستم نسبت به ورودی، عکس‌العمل قابل ملاحظه‌ای نشان دهد.

از مثال (۴-۱۲) همچنین ملاحظه می‌شود که " K یعنی بزرگنمایی سیستم، مقدار نهائی عکس‌العمل سیستم نسبت به تابع پله‌ای واحد است و این تعریف در مورد هر سیستمی صادق است". در فصل ششم که سیستمهای فیدبک را مورد مطالعه قرار می‌دهیم خواهیم دید که از طریق مدار فیدبک می‌توان تا اندازه‌ای عکس‌العمل سیستم را سریع نمود و بعبارت دیگر ثابت زمانی سیستم فیدبک را کاهش داد. ولی در اکثر سیستمهای واقعی بخاطر محدودیت در تعیین پارامترهای کنترلرهای تغییر در ثابت زمانی و یا سعی در سرعت بخشیدن به عکس‌العمل سیستم با محدودیتهای اساسی مواجه خواهیم بود.

از آنجا که در مسائل کنترل، توابع تبدیل بدست آمده در حالت کلی کسرهایی مرکبی در میدان لاپلاس می‌باشند که برای سهولت انجام تبدیل معکوس لاپلاس، تجزیه آنها به کسرهایی شناخته شده ضرورت می‌یابد، لذا قبل از ذکر مثالهای دیگری از نمایش عکس‌العمل سیستم در مورد سیستمهای با رسته‌های بالاتر از یک، ذیلاً نحوه تجزیه یک کسر در میدان

لاپلاس را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

الف)- بسط تابع تبدیل $G(s)$ "فاقد قطب تکراری":

فرض می‌کنیم تابع $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ از رسته n باشد (یعنی $D(s)$ از رسته n برحسب s است). اگر $G(s)$ دارای n قطب حقیقی و غیر تکراری باشد نحوه تجزیه کسر بصورت زیر خواهد بود:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{k_1}{s-p_1} + \frac{k_2}{s-p_2} + \dots + \frac{k_n}{s-p_n} \quad (۷۲-۴)$$

که در آن ضرایب K_i عبارتند از:

$$k_i = \frac{N(p_i)}{D'(p_i)}, \quad D'(p) = \frac{dD(p)}{dp}, \quad i=1, 2, 3, \dots, n \quad (۷۳-۴)$$

برای بدست آوردن مقادیر K_i بجای رابطه (۷۱-۴) از رابطه زیر نیز می‌توان استفاده نمود:

$$k_i = \lim_{s \rightarrow p_i} \{(s - p_i) G(s)\} \quad (۷۴-۴)$$

ب)- بسط تابع تبدیل $G(s)$ "دارای قطبهای تکراری":

اگر $G(s)$ دارای قطبهای تکراری باشد برای تجزیه آن نمی‌توان از روابط فوق استفاده نمود، بلکه تجزیه یک تابع تبدیل که دارای m قطب تکراری p باشد مطابق ذیل صورت می‌گیرد:

$$G(s) = \frac{H(s)}{(s-p)^m}$$

(در این رابطه $H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ و عبارتی $D(s)$ دارای ریشه‌های غیر تکراری می‌باشد).

$$G(S) = \frac{H(p)}{(S-p)^m} + \frac{H'(p)}{1!(S-p)^{m-1}} + \frac{H''(p)}{2!(S-p)^{m-2}} + \dots + \frac{H^{(m-1)}(p)}{(m-1)!(S-p)} \quad (۷۵-۴)$$

(بسط تابع $G(s)$ در قطب‌های غیر تکراری)

حال به کمک روابط فوق به ذکر مثالهای دیگری از نمایش عکس‌العمل سیستمهای با رسته‌های بالاتر از یک می‌پردازیم.

مثال (۴-۱۳):

در این مثال نمایش عکس‌العمل سیستم رسته دو با دو ریشه حقیقی و مجزا بصورت تابع تبدیل $G(s)$ مطابق ذیل مورد نظر می‌باشد.

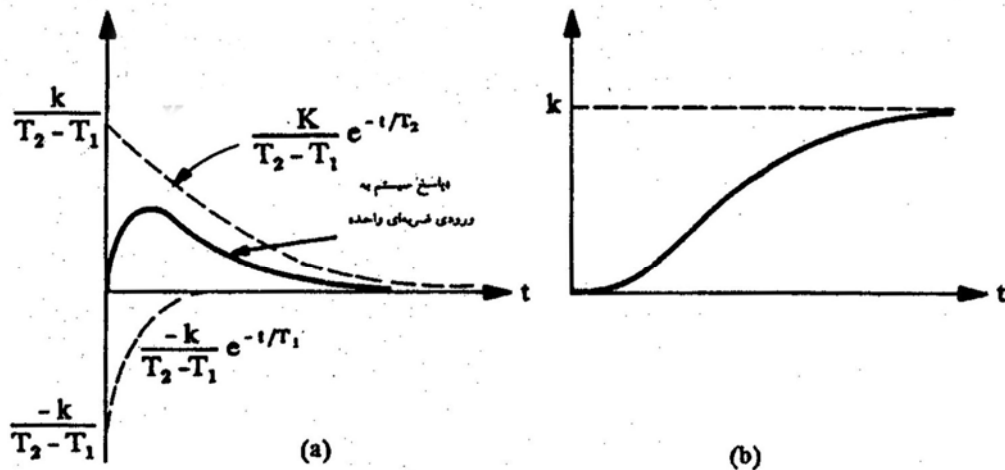
$$G(s) = \frac{k}{(1+T_1S)(1+T_2S)} \quad T_2 > T_1 \quad (۷۶-۴)$$

قطب‌های این سیستم عبارت از $p_1 = -\frac{1}{T_1}$ و $p_2 = -\frac{1}{T_2}$ بوده، همچنین با استفاده از معادله (۴-۷۱) یا (۴-۷۲) نتیجه می‌شود:

$$G(S) = \frac{-\frac{k}{T_2-T_1}}{S+\frac{1}{T_1}} + \frac{\frac{k}{T_2-T_1}}{S+\frac{1}{T_2}}$$

(a) - بنابراین عکس‌العمل سیستم نسبت به "تابع ضربه‌ای واحد" عبارت است از:

$$y(t) = g(t) = \mathcal{L}^{-1}G(S) = \frac{k}{T_2-T_1} (e^{-\frac{t}{T_2}} - e^{-\frac{t}{T_1}}) \quad (۷۷-۴)$$



شکل (۴-۱۶) - نمایش عکس‌العمل سیستم رسته دوبار ریشه‌های حقیقی نسبت به ورودی‌های:

(a) - ضربه‌ای واحد (b) - پله‌ای واحد

(b) - عکس‌العمل سیستم نسبت به "ورودی پله‌ای واحد" عبارت است از:

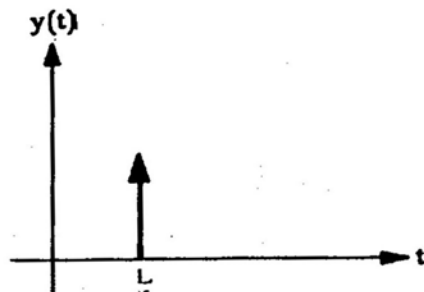
(۴-۷۸)

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \int_0^t g(\tau) d\tau = \frac{k}{T_2 - T_1} \int_0^t (e^{-\frac{\tau}{T_2}} - e^{-\frac{\tau}{T_1}}) d\tau \\
 &= \frac{k}{T_2 - T_1} \left\{ (T_2 - T_1) + T_1 e^{-\frac{t}{T_1}} - T_2 e^{-\frac{t}{T_2}} \right\} \\
 &= k \left\{ 1 + \frac{T_1}{T_2 - T_1} e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{T_2}{T_2 - T_1} e^{-\frac{t}{T_2}} \right\}
 \end{aligned}$$

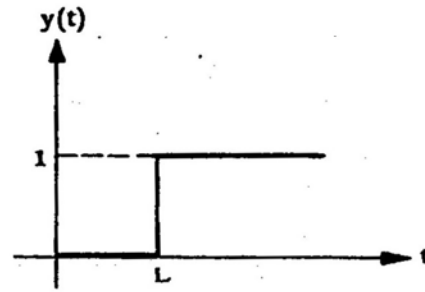
ترسیمه این عکس‌العملها در شکل (۴-۱۶) نشان داده شده است.

مثال (۴-۱۴):

سیستم با تأخیر زمانی^۱ دارای تابع تبدیل $G(s) = e^{-sL}$ می‌باشد که در این مثال به



(a)



(b)

شکل (۴-۱۷). نمایش عکس‌العمل سیستم با تأخیر زمانی $G(s)=e^{-sL}$ برای ورودی‌های:

(a) - ضربه‌ای واحد (b) - پله‌ای واحد

تعیین و ارائه نمایش ترسیمی عکس‌العمل چنین سیستمی می‌پردازیم. می‌دانیم تابع تبدیل $G(s)=e^{-sL}$ ، یک سیستم دارای تأخیر زمانی را نشان می‌دهد. چنین سیستمی باعث می‌شود که عکس‌العمل آن نسبت به هر نوع ورودی با یک تأخیر زمانی همراه باشد. در ذیل برای دو نوع ورودی، عکس‌العمل سیستم مورد بررسی قرار گرفته است.

(a) - عکس‌العمل این سیستم نسبت به "ورودی ضربه‌ای واحد" عبارت است از:

$$y(t) = g(t) = \mathcal{L}^{-1} e^{-sL} = \delta(t - L) \quad (۴-۷۹)$$

مطابق شکل (۴-۱۷-a) تابع $\delta(t-L)$ نمایش یک تابع ضربه‌ای واحد است که در زمان $t=L$ اتفاق می‌افتد.

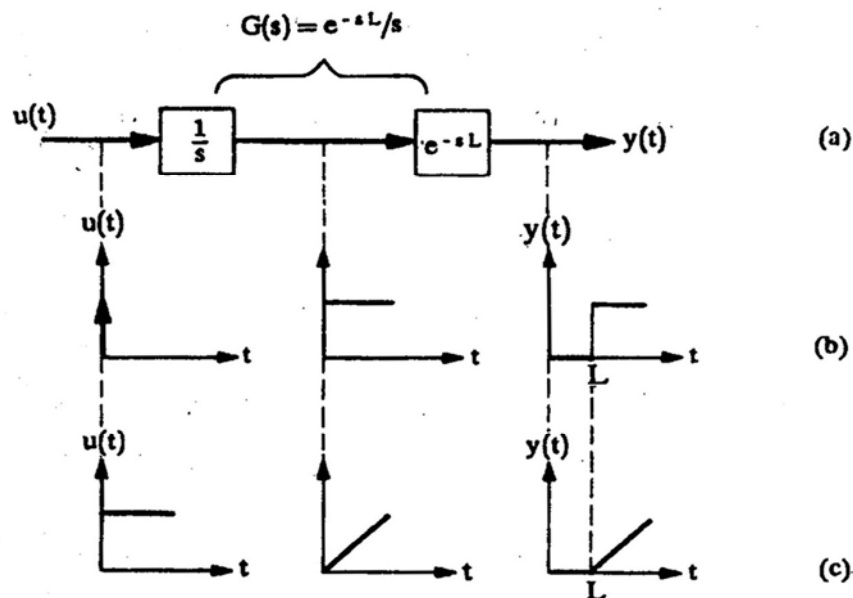
(b) - عکس‌العمل سیستم نسبت به "ورودی پله‌ای واحد" عبارت است از:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t g(\tau) d\tau = \int_0^t \delta(\tau - L) d\tau \quad (۴-۸۰) \\ &= \int_0^{t-\epsilon} \delta(\tau - L) d\tau + \int_{L-\epsilon}^{t+\epsilon} \delta(\tau - L) d\tau + \int_{L+\epsilon}^{t+\epsilon} \delta(\tau - L) d\tau \\ &= \begin{cases} 0 & t < L \\ 1 & t \geq L \end{cases} \end{aligned}$$

این تابع نمایش یک تابع پله‌ای واحد است که از زمان $t=L$ شروع می‌شود
[شکل (b-۱۷-۴)]

مثال (۴-۱۵):

در این مثال تعیین و ترسیم عکس‌العمل سیستم "انتگرال‌گیرنده با تأخیر زمانی" با
 $G(s) = \frac{e^{-sL}}{s}$ تابع تبدیل مد نظر می‌باشد. برای تعیین عکس‌العمل این سیستم نسبت



شکل (۴-۱۸) دیاگرام جعبه‌ای سیستم انتگرال‌گیرنده با تأخیر زمانی برای ورودی‌های
ضربه‌ای واحد و پله‌ای واحد.

(a) - دیاگرام جعبه‌ای.

(b) - عکس‌العمل سیستم برای "ورودی ضربه‌ای واحد".

(c) - عکس‌العمل سیستم برای "ورودی پله‌ای واحد".

به ورودی‌های پله‌ای و ضربه‌ای واحد کافی است توجه کنیم که این تابع (سیستم) در واقع ترکیبی از یک

سیستم انتگرال گیرنده [مثال (۱۱-۴)] و یک سیستم تأخیر زمانی [مثال (۱۴-۴)] می باشد. ترسیمه های شکل (۱۸-۴) با توجه به مثالهای یاد شده، نمایش تفکیکی تابع فوق و عکس العمل این سیستم را نسبت به ورودی های "ضربه ای و پله ای" واحد نشان می دهند.



مسائل

(۱-۴) - در سیستم شکل (م-۴-۱):

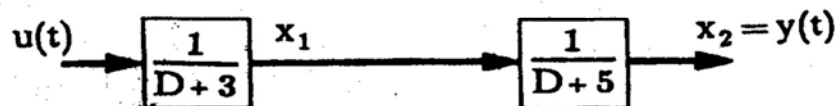
الف) - ماتریسهای A و b و c را در معادلات حالت مشخص نمایید.

ب) - مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس A را بدست آورید.

ج) - مودهای سیستم را تعیین کنید.

د) - مقدار نهائی عکس العمل سیستم یعنی $y(\infty)$ را بازاء ورودی تابع پلهای واحد محاسبه نمایید.

ه) - عکس العمل سیستم $y(t)$ را بازاء $u(t)=1$ بدست آورده و نمودار آن را رسم کنید.



شکل (م-۴-۱)

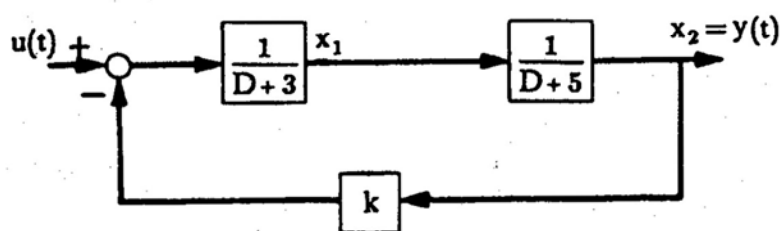
(۲-۴) - سیستم شکل (م-۴-۱) را مطابق شکل (م-۴-۲) در مدار بسته قرار می دهیم در

این حالت:

الف) - ماتریسهای A و b و c را در معادلات حالت سیستم مدار بسته بدست آورید.

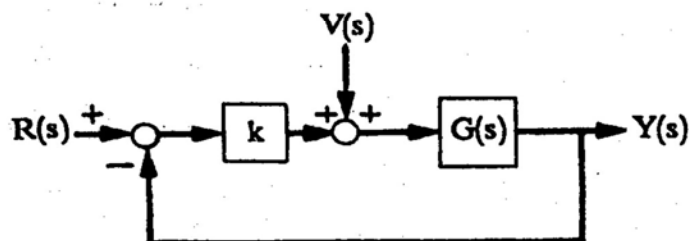
ب) - مقادیر ویژه سیستم مدار بسته را محاسبه نموده و مشخص کنید بازاء چه مقادیری از K ، مقادیر ویژه بصورت مختلط خواهند بود.

- ج) - مقادیر ویژه و مودهای سیستم مدار بسته را با $K=5$ بدست آورید.
- د) - دیاگرام جعبه‌ای سیستم مدار بسته را ساده کرده و تابع تبدیل سیستم مدار بسته را بدست آورید.
- ه) - قطبهای سیستم مدار بسته را با $K=5$ تعیین نموده و با نتایج قسمت (ج) مقایسه نمایید.
- و) - با $u(t)=1$ عکس‌العمل سیستم مدار بسته را با $K=5$ بدست آورده و آنرا رسم کنید.
- ز) - مقدار نهائی $y(t)$ وقتی $t \rightarrow \infty$ در قسمت (ف) را بدست آورید.



شکل (۳-۴-م)

- (۳-۴) - در سیستم شکل (۳-۴-م)، تابع تبدیل سیستم عبارت است از $G(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)}$ معرف ورودی مبنا و $V(s)$ نیز ورودی مزاحم می‌باشد:
- الف) - با ساده کردن دیاگرام جعبه‌ای عکس‌العمل $Y(s)$ را نسبت به ورودی‌های $R(s)$ و $V(s)$ بدست آورید.
- ب) - با K مقدار عکس‌العمل سیستم برابر ورودی مبنا خواهد بود.
- ج) - اگر $V(s)=0$ و ورودی مبنا نیز تابع پله‌ای واحد باشد عکس‌العمل سیستم را با $K=0.25$ بدست آورده و مقدار نهائی آن را تعیین نمائید.



شکل (۳-۴-م)

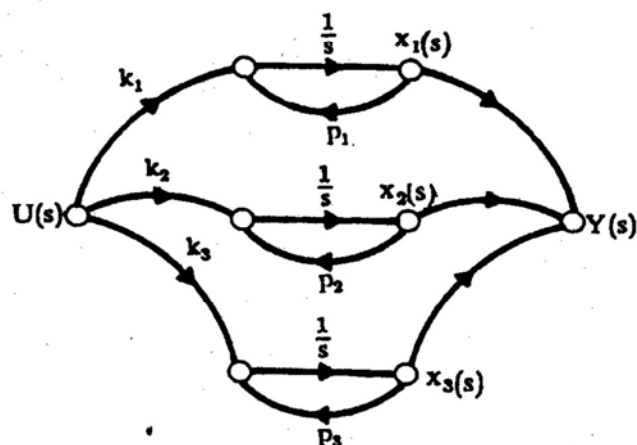
(۴-۴) - برای سیستم با دیاگرام جریانی شکل (۳-۴-م):

الف) - معادلات حالت را بدست آورید.

ب) - تابع تبدیل را مشخص نمایید.

ج) - مقادیر ویژه و مدهای سیستم را تعیین کنید.

د) - عکس‌العمل نهایی سیستم $y(t)$ را با $u(t)=1$ بدست آورید.



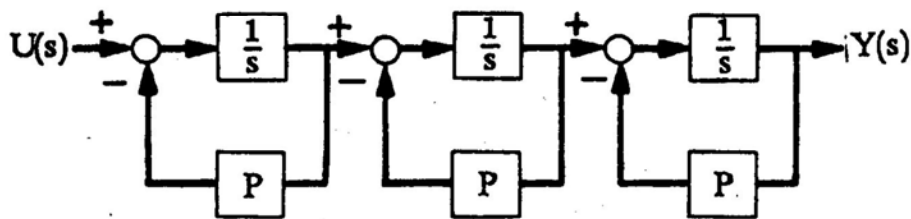
شکل (۴-۴-م)

(۵-۴) - در سیستم شکل (۵-۴-م):

الف) - معادلات حالت را بدست آورید.

ب) - تابع تبدیل را تعیین نمایید.

ج) - برای ورودی "تابع پله‌ای واحد" مقدار عکس‌العمل سیستم را در حالت ماندگار بدست آورید.



شکل (م-۴-۵)

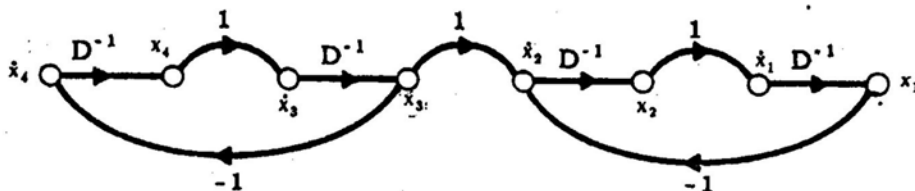
(۴-۶) - ماتریس انتقال T را برای ماتریس A که بصورت ذیل داده شده بدست آورید و ماتریس A را به فرم قطری شده تبدیل نمایید.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

(۴-۷) - دیاگرام جریانی سیستمی در شکل (م-۴-۷) نمایش داده شده است. مطلوبست تعیین:

الف) - $(sI - A)^{-1}$

ب) - ماتریس حل $\phi(t) = L^{-1}(sI - A)$



شکل (م-۴-۷)

(۸-۴) - تغییر مکان x در سیستم نوسانی آزاد شکل (م-۴-۸) بصورت زیر داده شده :

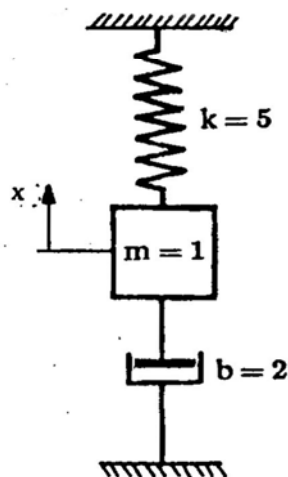
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + 5x = 0$$

با فرض $x = x_1$ و $\frac{dx}{dt} = x_2$:

اولاً : معادله حالت سیستم را بنویسید.

ثانیاً : مقادیر ویژه و بردارهای ویژه را بدست آورید.

ثالثاً : ماتریس T را بگونه‌ای تعیین کنید که ماتریس A به فرم «قطری اصلاح شده»^۱ تبدیل گردد.



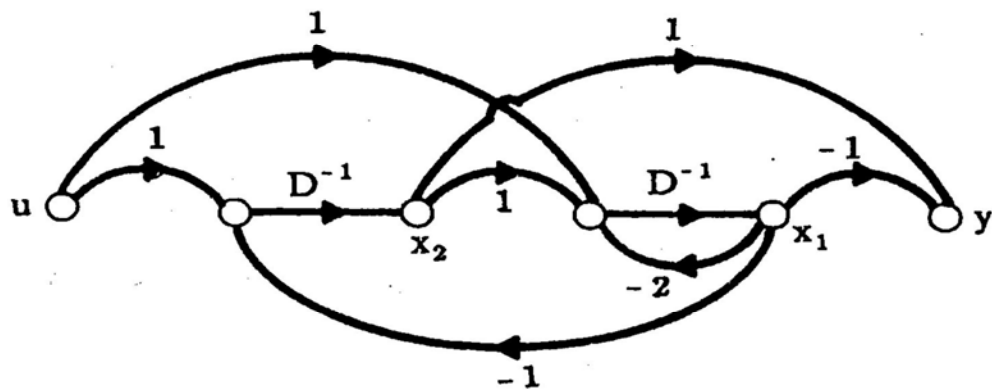
شکل (م-۴-۸)

(۹-۴) - با توجه به شکل (م-۴-۹) که دیاگرام جریانی یک سیستم رسته دو را نشان می‌دهد، مطلوبست:

اولاً : فرم قطری شده Λ .

ثانیاً : رسم دیاگرام جریانی سیستم قطری شده.

ثالثاً : تعیین تابع تبدیل $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$.



شکل (م-۴-۹)

(۴-۱۰) - معادله حرکت سیستمی بصورت زیر داده شده:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} = 0$$

که در آن m جرم و b ضریب خطی اثر استهلاک است. اگر $x = x_1$ و $\frac{dx}{dt} = x_2$ در نظر گرفته شود مطلوبست:

اولاً: تعیین معادلات حالت.

ثانیاً: نوشتن ماتریس حل $\phi(t)$ از طریق محاسبه مستقیم e^{At} .

(۴-۱۱) - در مسأله (۴-۱۰):

اولاً: ماتریس حل $\phi(t)$ را از معادله $\phi(t) = \mathcal{L}^{-1}(sI - A)^{-1}$ بدست آورید.

ثانیاً: مقادیر ویژه ماتریس A را بیابید و فرم قطری شده سیستم را بدست آورید.

(۴-۱۲) - عکس‌العمل سیستم نسبت به ورودی ضربه‌ای معادل با عکس‌العمل سیستم آزاد (بدون ورودی) با شرایط اولیه مناسب می‌باشد. برای اثبات این مورد سیستم رسته سه با تابع

تبدیل زیر را در نظر می گیریم:

$$G(s) = \frac{b_0 s^2 + b_1 s + b_2}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}$$

فرمی از معادله حالت که معادل سیستم با تابع تبدیل فوق است عبارت از $\dot{X} = AX + bu$ و $y = cX$ می باشد که در آن ماتریسهای ضرایب عبارتند از:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = [b_2 \ b_1 \ b_0]$$

مطلوبست تعیین شرایط اولیه X_0 در سیستم آزاد $X(0) = X_0$ و $\dot{X} = AX$ و $y = cX$ بطوریکه "عکس العمل سیستم آزاد" معادل با "عکس العمل سیستم با تابع تبدیل فوق بازاء ورودی ضربه ای واحد" گردد.

(۱۳-۴) - عکس العمل هر یک از سیستمهای معرفی شده با توابع تبدیل $G_1(s)$ و $G_2(s)$ را نسبت به ورودیهای "تابع ضربه ای واحد" و "تابع پله ای واحد" بدست آورده و رسم نمائید.

$$G_1(s) = \frac{1}{s^2 + \omega^2}, \quad G_2(s) = \frac{1}{(s + \sigma)^2 + \omega^2}$$

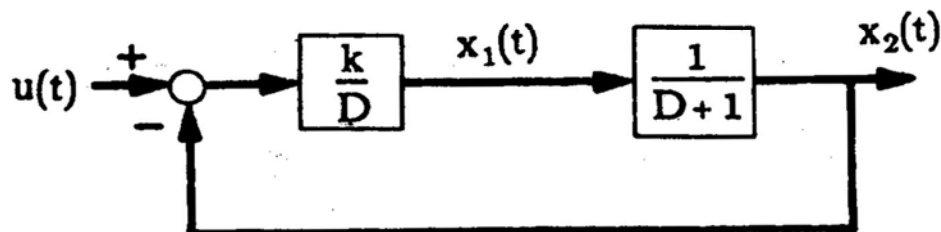
در روابط فوق ω و σ مقادیر حقیقی و مثبت هستند.

(۱۴-۴) - برای سیستم شکل (م-۴-۱۴) مطلوبست:

اولاً: تعیین معادلات حالت سیستم.

ثانیاً: تعیین مقادیر ویژه و بردارهای ویژه.

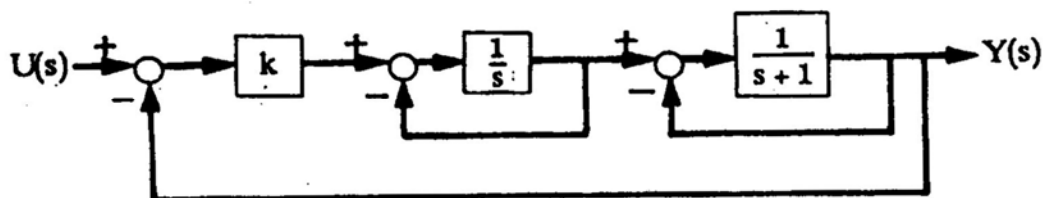
ثالثاً: با فرض ثابت بودن ورودی $[u(t) = c = \text{Const.}]$ حالت تعادل سیستم را مشخص نمائید.



شکل (م-۴-۱۴)

(۱۵-۴)- سیستمی با تابع تبدیل $G(s) = \frac{K}{Ts+1} - \frac{1}{s+1}$, $1 < K < T$ را فرایند با عکس‌العمل معکوس^۱ می‌نامند. عکس‌العمل این سیستم را نسبت به ورودی‌های "ضربه‌ای واحد" و "پله‌ای واحد" بدست آورده و رسم نمایید.

(۱۶-۴)- برای سیستم شکل (م-۴-۱۶) مقدار K را طوری تعیین کنید که بازاء ورودی پله‌ای واحد مقدار نهائی عکس‌العمل $y(t)$ برابر 0.8 گردد.



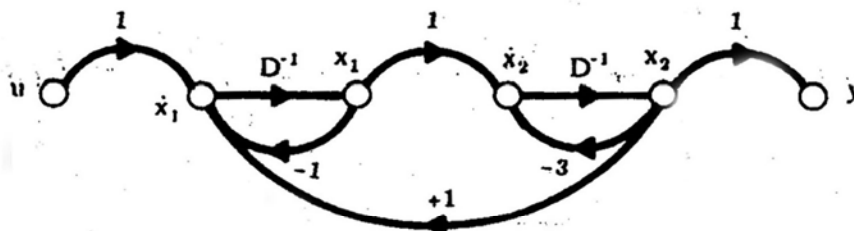
شکل (م-۴-۱۶)

(۱۷-۴)- برای سیستم شکل (م-۴-۱۷):

اولاً: معادله حالت سیستم را بنویسید.

ثانیاً: تابع تبدیل را بدست آورید.

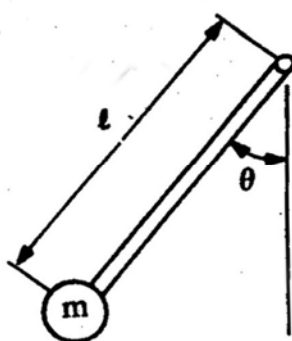
ثالثاً: عکس‌العمل سیستم را نسبت به ورودی پله‌ای واحد تعیین و بررسی نمایید.



شکل (م-۴-۱۷)

(۱۸-۴)- برای پاندول ساده شکل (م-۴-۱۸) که در آن جرم m بوسیله نخى بطول L به لولا وصل شده:

اولاً: معادلات حالت سیستم غیرخطی را بصورت $\dot{X}=F(X)$ بدست آورید (که در آن $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ و $x_1 = \theta$ زاویه انحراف از حالت تعادل و $x_2 = \omega$ سرعت زاویه‌ای می‌باشد).
ثانیاً: معادله غیرخطی را حول نقطه تعادل $X=0$ ، خطی نموده و آنرا بصورت $\dot{X}=AX$ بنویسید.



شکل (م-۴-۱۸)

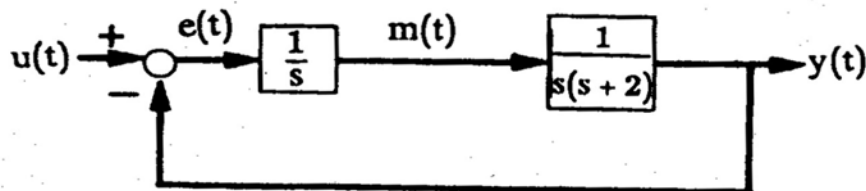
(۱۹-۴)- برای هر یک از سیستمهای داده شده ذیل عکس العمل آنها را نسبت به ورودی‌های

"ضربه‌ای واحد" و "پله‌ای واحد" بدست آورده و رسم نمائید.

$$G_1(s) = \frac{1-s}{s(s+1)}, \quad G_2(s) = \frac{1-2s}{(4s+1)(s+1)}$$

(۴-۲۰). سیستم غیر خطی رسته یک با $\dot{x} = ax + bu$ را در نظر می‌گیریم. اصطلاحاً این نوع سیستم را سیستم دو خطی یا سیستم خطی مضاعف^۱ می‌نامند. زیرا وقتی در آن $x = \text{Const}$ یا $u = \text{Const}$ باشد، تبدیل به سیستم خطی می‌شود. آیا چنین سیستمی را می‌توان حول $x=0$ و $u=0$ طوری خطی نمود که خواص سیستم محفوظ بماند؟ در این مورد بحث کنید.

(۴-۲۱). در سیستم شکل (۴-۲۱-م) برای ورودی $u(t) = t$ * در حالت ماندگار مقادیر m, e و y را محاسبه و تعیین نمایید.



شکل (۴-۲۱-م)

(۴-۲۲). برای هر یک از توابع تبدیل زیر عکس‌العمل سیستمها را نسبت به ورودیهای ضربه‌ای واحد و "پله‌ای واحد" تعیین نموده و رسم کنید.

$$G_1(s) = \frac{K}{s^2}, \quad G_2(s) = \frac{Ke^{-sT_1}}{(1+T_1s)(1+T_2s)}, \quad T_2 > T_1$$

یادآوری می‌گردد که در تابع تبدیل $G_2(s)$ ، کمیت e^{-sL} نمایش‌دهنده یک تأخیر زمانی باندازه L می‌باشد.

* * *

فصل پنجم

پایداری سیستمهای خطی

مقدمه :

در ابتدای این فصل با ارائه تعریف "مسیر حرکت^۱ یک سیستم" خواهیم دید که چگونه مسیر حرکت مشخصکننده رفتار سیستم در مسائل کنترلی می باشد. آنگاه ایده "پایداری لیاپانوف"^۲ را معرفی و تحلیل نموده، سپس پایداری سیستمهای خطی و روشهای تعیین پایداری را مورد بررسی قرار می دهیم. همچنین خواهیم دید که روش پایداری لیاپانوف امروزه بعنوان یک روش با ارزش تعیین پایداری شناخته شده و بویژه برای سیستمهای خطی با پارامترهای ثابت، روش ساده ای برای محاسبه پایداری سیستم بشمار می آید.

(۵-۱) - مسیر حرکت سیستم در فضای متغیرهای حالت^۳:

رفتار یا عکس العمل سیستمی که دارای شرایط اولیه $x=x(t_0)$ در زمان $t=t_0$ باشد بطور ترسیمی مسیر یک منحنی را در فضای " $n+1$ " بعدی (یا سیستم مختصات $n+1$ بعدی که n بعد آن مربوط به n متغیر حالت x_1 تا x_n و بعد دیگر آن زمان است) طی میکند.

۱- Trajectory

۲- Stability in the sense of "Lyapuno'v"

۳. motion in the state space

تصویر منحنی رفتار سیستم فوق در مختصات "n" بعدی x_1 تا x_n ، منحنی دیگری را تشکیل میدهد که مسیر حرکت نامیده میشود. این منحنی از اهمیت و ارزش ویژه‌ای در تجزیه و تحلیل یک سیستم برخوردار می‌باشد. برای سیستم رسته دو "فضای متغیرهای حالت"، "دوبعدی" (یعنی بصورت یک صفحه) میباشد که در این حالت تحلیل ترسیمی رفتار سیستم بسیار ساده خواهد بود. با وجود آنکه نمایش ترسیمی مسیر حرکت برای سیستمهای با رسته بزرگتر از سه به کمک ایده مسیر حرکت بسادگی ممکن نیست، اما این تئوری همچنان مفید و مورد استفاده می‌باشد. حال با ارائه مثالی مطلب را پی می‌گیریم.

مثال (۵-۱):

می‌خواهیم نمایش ترسیمی رفتار سیستم $\dot{X}=AX$ با ورودی صفر که در آن ماتریس A و شرایط اولیه عبارت از:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}, \quad X_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

می‌باشند را بدست آوریم.

عکس العمل سیستم بصورت زیر می‌باشد:

$$X(t) = e^{At} X_0$$

ماتریس e^{At} برای این سیستم در مثال (۴-۳) مشخص شده که با جایگزینی در معادله فوق داریم:

$$X(t) = \begin{bmatrix} 7e^{-t} - 5e^{-2t} \\ \frac{7}{3}e^{-t} + \frac{5}{3}e^{-2t} \end{bmatrix}$$

رفتار این سیستم در شکل (۱-۵) نمایش داده شده است. صفحه x_1x_2 در شکل (۱-۵-۱) و شکل (۲-۵) معرف "فضای متغیرهای حالت" می باشد. در اشکال فوق فلش های روی مسیر حرکت تغییرات مثبت زمان را نشان می دهند (مثلاً $x_2(t)$ از $x_2(0)$ کمتر بوده لذا مسیر حرکت نزولی خواهد بود).

اگر شرایط اولیه به یکی از صورتهای $x_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ یا $x_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ باشد در اینصورت $x(t)$ نیز برای هر حالت عبارت است از:

(a) - برای $x_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ داریم:

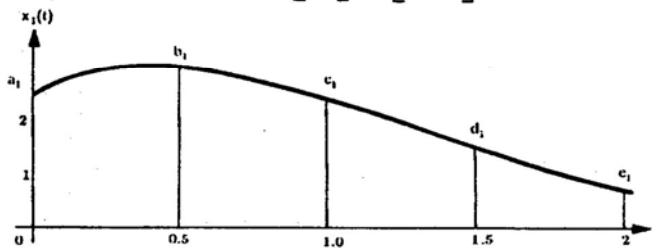
$$X(t) = e^{At} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix}$$

بنابراین برای همه مقادیر t نتیجه می شود:

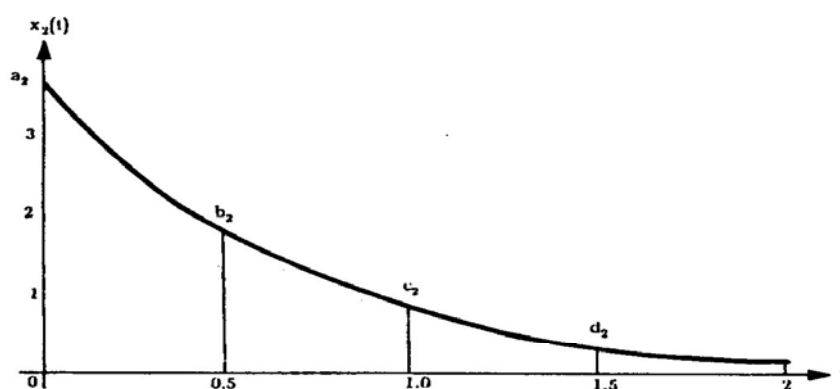
$$\frac{x_1(t)}{x_2(t)} = \frac{3e^{-t}}{e^{-t}} = 3$$

(b) - برای $x_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ داریم:

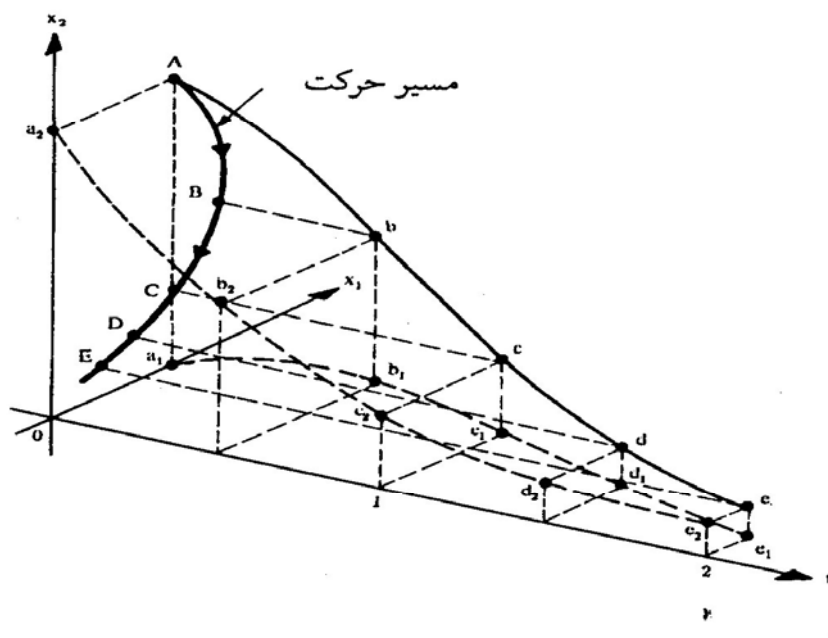
$$X(t) = e^{At} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix}$$



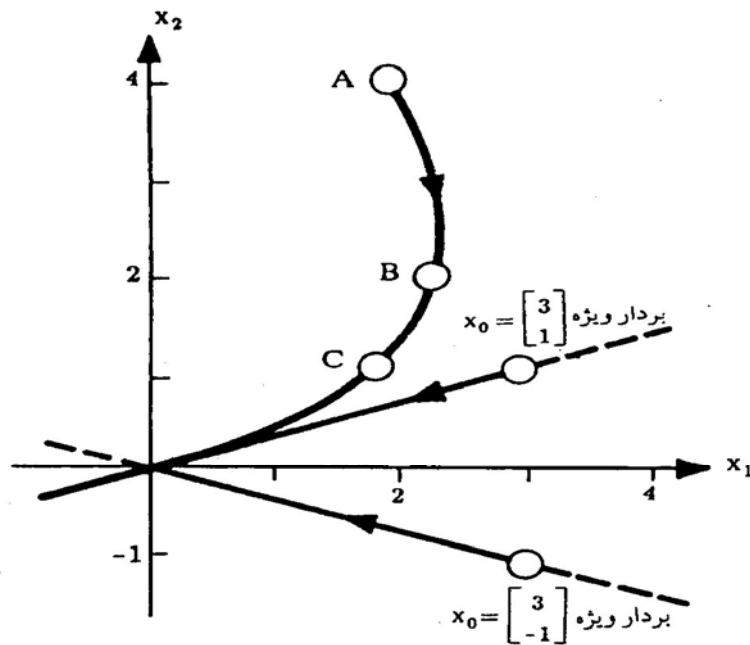
شکل (۱-۵-۱) - نمایش ترسیمی عکس العمل سیستم رسته دو در صفحه $(t, x_1(t))$.



شکل (۵-۱-ب) - نمایش ترسیمی عکس‌العمل سیستم رسته دو در صفحه $(t$ و $x_2(t)$).



شکل (۵-۱-ج) - نمایش رفتاری سیستم رسته دو و مسیر حرکت سیستم.



شکل (۵-۲) - نمایش مسیر حرکت سیستم رسته دو

لذا برای همه مقادیر t نتیجه می‌شود:

$$\frac{x_1(t)}{x_2(t)} = \frac{3e^{-2t}}{-e^{-2t}} = -3$$

چون برای این سیستم فضای متغیرهای حالت، صفحه x_1x_2 می‌باشد لذا مطابق شکل (۵-۲) برای هر یک از شرایط اولیه $x_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ یا $x_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ ، مسیر حرکت بصورت خط راست حاصل می‌شود.

حال این سؤال مطرح است که چرا باید این شرایط اولیه بخصوص، باعث شوند که مسیر حرکت یک خط راست باشد؟ برای تعمیم این نتیجه بصورت کلی، ابتدا بردارهای ویژه ماتریس A را بدست می‌آوریم. با توجه به مثال (۴-۳) مقادیر ویژه این ماتریس برابر ۱- و ۲-

بوده و بردارهای ویژه نظیر آن که از حل معادله $(\lambda I - A)V^i = 0$ حاصل می‌شوند نیز عبارتند از:

$$V^1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad V^2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

همانطور که ملاحظه می‌شود نقطه شروع (یا شرایط اولیه x_0) هر مسیر حرکت روی یکی از بردارهای ویژه قرار دارد و نتیجه گیری کلی که در ذیل اثبات خواهد شد آن است که هر مسیر حرکت سیستم آزاد (سیستم بدون ورودی) که از روی یک بردار ویژه شروع شود همواره بر روی همان بردار ویژه باقی مانده تا به مبداء مختصات برسد. در اینجا نشان خواهیم داد که این نتیجه گیری صحیح است.

نقطه‌ای مانند $x(t)$ در فضای متغیرهای حالت را می‌توان بصورت زیر نمایش داد:

$$X(t) = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n \quad (1-5)$$

که در این رابطه e_i معرف "بردارهای یکه" ذیل می‌باشد:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بردار X نه تنها در راستای بردارهای یکه فوق قابل بیان است، بلکه می‌توان آنرا در راستای هر مجموعه دیگر متشکل از n بردار (بشرط آنکه این بردارها بطور خطی از هم مستقل باشند) نشان داد. از طرفی می‌دانیم "بشرط آنکه مقادیر ویژه سیستم مجزا و حقیقی باشند یک سیستم رسته n دارای n بردار ویژه خواهد بود که بطور خطی مستقل از هم می‌باشند". بنابراین بردار X

را می توان در راستای این بردارهای ویژه بصورت زیر نوشت:

$$X = x_1^* V^1 + x_2^* V^2 + \dots + x_n^* V^n$$

این رابطه دقیقاً همان رابطه (۴-۱۹-b) می باشد که در آن ماتریس متشکل از بردارهای ویژه V^1 تا V^n می باشد. بنابراین با قراردادن از معادله فوق در معادله دیفرانسیل سیستم آزاد داریم:

$$\frac{d}{dt} X(t) = AX(t) = x_1^* AV^1 + x_2^* AV^2 + \dots + x_n^* AV^n$$

از طرفی با تعریف بردارهای ویژه داریم:

$$(A - P_i I) V^i = 0 \quad \text{و یا} \quad AV^i = P_i V^i$$

بنابراین نتیجه می شود:

$$\frac{d}{dt} X = p_1 x_1^* V^1 + p_2 x_2^* V^2 + \dots + p_n x_n^* V^n \quad (2-5)$$

بعنوان مثال اگر $X = x_i^* V^i$ باشد (یعنی متغیرهای حالت در نقطه ای از فضای متغیرهای حالت بر روی یک بردار ویژه قرار داشته باشند)، داریم:

$$\frac{d}{dt} X = AX = x_i^* AV^i = p_i x_i^* V^i \quad (3-5)$$

این معادله مبین آن است که بردار سرعت (بعبارتی مماس بر مسیر حرکت در هر لحظه) در امتداد یک بردار ویژه قرار داشته و با توجه به اینکه جهت بردار ویژه V^i ثابت و مشخص است لذا بردار سرعت در طول مسیر حرکت همواره در امتداد این بردار ویژه خواهد بود. تعبیر هندسی این معادله آن است که هر مسیر حرکت که از روی یک بردار ویژه شروع شود و یا آنرا قطع کند همواره بر روی آن بردار ویژه باقی می ماند.

همانطور که ملاحظه شد وقتی مسیر حرکت از روی یک بردار ویژه شروع می شود، حل

سیستم تنها شامل یک "مود" می باشد و بسادگی مسیر حرکت را می توان مشاهده نمود. در حالت کلی برای تعیین مسیر حرکت باید از شیوه دیگری استفاده کرد. مثلاً در مورد مثال ذکر شده که شرایط اولیه آن عبارت از $x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ بود داشتیم:

$$x_1(t) = 7e^{-t} - 5e^{-2t}, \quad x_2(t) = \frac{7}{3}e^{-t} + \frac{5}{3}e^{-2t}$$

برای مشخص نمودن مسیر حرکت، باید متغیر t را بین معادلات بالا حذف نمود. برای این منظور ابتدا e^{-t} و e^{-2t} را بدست می آوریم:

$$e^{-t} = \frac{x_1 + 3x_2}{14}, \quad e^{-2t} = \frac{-x_1 + 3x_2}{10}$$

از طرفی $(e^{-t})^2 = e^{-2t}$ بوده لذا داریم:

$$\left(\frac{x_1 + 3x_2}{14}\right)^2 = -\frac{x_1 - 3x_2}{10}$$

رابطه فوق، معادله ریاضی مربوط به مسیر حرکت می باشد که در شکل (۵-۳) نمایش داده شده است. اگر چه با حذف t بین معادلات فوق غالباً می توان معادله ریاضی مسیر حرکت را بدست آورد با این وجود روش سریعتری نیز برای تعیین مسیر حرکت سیستم رسته دو وجود دارد که "روش ایزوکلاین"^۱ نامیده می شود.^۲ بطور خلاصه در این روش یک گروه از منحنی ها (بنام ایزوکلاین) را باید بدست آوریم. منحنی های فوق دارای این خاصیت هستند که یک "مسیر حرکت" مشخص همواره یک ایزوکلاین معین را با شیب معین $\frac{dx_2}{dx_1}$ قطع می کند. برای سیستمهای خطی مرتبه دو با پارامترهای ثابت، ایزوکلاین ها خطوط مستقیم

هستند. وقتی ایزوکلاين‌ها برای یک سیستم معین شدند تعیین "مسیر حرکت" برای هر نوع شرایط اولیه‌ای بسادگی انجام می‌شود (توجه شود که اگر معادله ریاضی مسیر حرکت را داشته باشیم این معادله بازاء شرایط اولیه متفاوت، مرتباً تغییر می‌کند). بمنظور روشن شدن "روش ایزوکلاين"، در این قسمت ابتدا برای مثال (۵-۱) ایزوکلاين‌ها را بدست آورده، و سپس روش ایزوکلاين را برای یافتن مسیر حرکت بکار می‌بریم.

از مثال (۵-۱) داشتیم:

$$A = \begin{bmatrix} -3/2 & 3/2 \\ 1/6 & -3/2 \end{bmatrix}$$

و معادلات حالت نیز عبارتند از:

$$\frac{d}{dt} x_1 = -\frac{3}{2} x_1 + \frac{3}{2} x_2$$

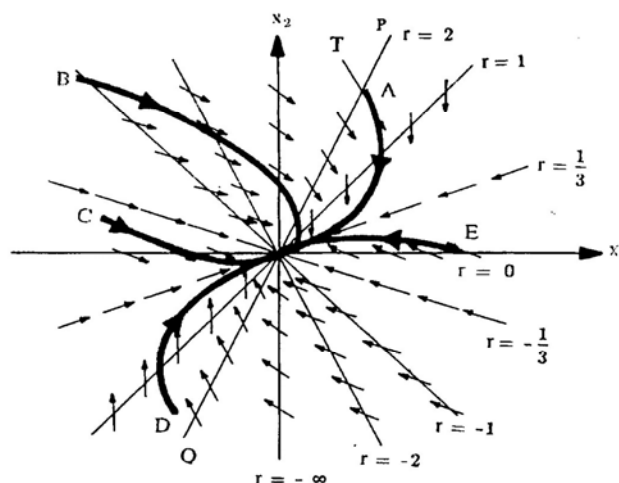
$$\frac{d}{dt} x_2 = \frac{1}{6} x_1 - \frac{3}{2} x_2$$

برای محاسبه $\frac{dx_2}{dx_1}$ معادله دوم را بر معادله اول تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{dx_2/dt}{dx_1/dt} = \frac{\frac{1}{6}x_1 - \frac{3}{2}x_2}{-\frac{3}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2} = \frac{\frac{1}{3} - 3r}{-3 + 3r} \quad (۴-۵)$$

که در آن $r = \frac{x_2}{x_1}$ می‌باشد. هر مقدار r در صفحه x_1x_2 مشخص‌کننده یک خط است که از مرکز مختصات می‌گذرد و از معادله (۴-۵) می‌توان شیب $\frac{dx_2}{dx_1}$ مربوط به مسیر حرکت هائی را که این خط راست را قطع می‌کنند مشخص نمود. این خط راست همان ایزوکلاين می‌باشد که در شکل (۵-۳) نمایش داده شده است.

در شکل فوق ایزوکلاينها برای مقادیر مختلف r رسم گردیده و همچنین خطوط شیب (بصورت فلش‌دار) نمایش داده شده‌اند. این خطوط که برای هر ایزوکلاين بصورت یک دسته



شکل (۳-۵) - نمایش مسیر حرکت و خطوط ایزوکلاین برای سیستم رسته دو پایدار.

خطوط موازی هم می باشد مشخص کننده زاویه ای است که مسیر حرکت، آن ایزوکلاین را تحت زاویه مذکور قطع می کند. جهت فلش روی این خطوط شیب، با توجه به معادله حالت سیستم تعیین می شود. مثلاً در روی خط ایزوکلاینی که با $r=2$ بیان شده [یعنی خط PQ در شکل (۳-۵)] با توجه به اینکه $\frac{x_2}{x_1} = 2$ است داریم:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{-3}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 = \frac{3}{2}x_1$$

از این معادله نتیجه می شود که اگر x_1 بزرگتر از صفر باشد تغییرات x_1 مثبت است و از اینجا جهت فلش روی خط شیب TT در جهت نشان داده شده روی شکل خواهد بود. همانطور که انتظار می رفت روی بردارهای ویژه، خطوط شیب، در امتداد ایزوکلاین قرار می گیرند و یا عبارتی وقتی ایزوکلاین بر بردار ویژه منطبق شود خطوط شیب، هم امتداد بردار

ویژه بوده و از اینجا می توان بردارهای ویژه را مشخص نمود. به این ترتیب که داریم:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\frac{1}{3} - 3r}{-3 + 3r} = r \Rightarrow r = \pm \frac{1}{3}$$

حال با استفاده از این خطوط شیب می توان بسادگی مسیر حرکت را از هر نقطه دلخواه رسم نمود [مثلاً از نقاط A، B، C و D در شکل (۳-۵)]. با توجه به شکل مشاهده می شود که مسیرهای حرکت در اطراف مرکز مختصات همگی بر یکی از بردارهای ویژه مماس هستند و چون مود سریع (یعنی e^{-2t}) بسرعت کاهش می یابد، در اطراف مرکز مختصات همه مسیرهای حرکت، مماس بر بردار ویژه مربوط به مود آهسته (یعنی e^{-t}) خواهند بود.

در جدول (۱-۵) مسیرهای حرکت برای چند "سیستم آزاد رسته" دو با دو مقدار ویژه (قطب) حقیقی و مجزا^۱ نشان داده شده است. سیستم شکل [جدول (۱-۵)] سیستمی است با دو مقدار ویژه حقیقی و منفی و شکل [جدول (۱-۵)] همان سیستم را در فرم قطری شده^۱ نشان می دهد. سیستم شکل [جدول (۱-۵)] دارای یک قطب منفی و یک قطب مثبت می باشد که بترتیب معرف مود پایدار و مود ناپایدار سیستم هستند. مرکز مختصات سیستم شکل [جدول (۱-۵)] را "گره"^۲ نامیده و سیستم شکل [جدول (۱-۵)] نیز "زین"^۳ نامیده می شود. سیستم شکل [جدول (۱-۵)] همان سیستم شکل [جدول (۱-۵)] در فرم قطری شده آن می باشد.

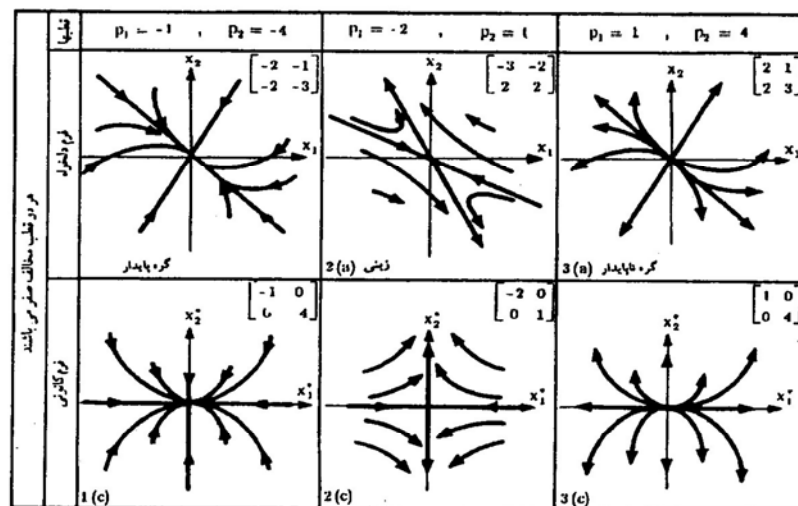
سیستم شکل [جدول (۱-۵)] و فرم قطری شده آن [شکل (۱-۵)] دارای دو قطب مثبت می باشد که در آنها مسیر حرکت همواره از مرکز دور می شود. اگر یکی از قطبها مساوی صفر باشد، مؤلفه سرعت در امتداد آن بردار ویژه برابر صفر خواهد شد. در نتیجه همانطور که در شکلهای [جدول (۱-۵)] 5a، 4c، 4a و 5c نشان داده شده هر یک از سیستمها دارای بی نهایت حالت تعادل خواهند بود.

۱- Canonical Form

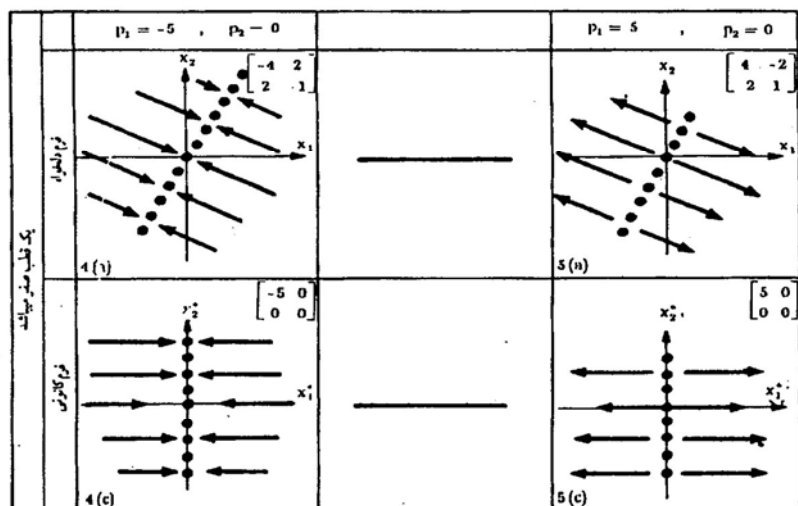
۲- Node

۳- Saddle

جدول (۱-۵) - نمایش مسیر حرکت سیستمهای رسته دو دارای دو ریشه حقیقی و مجزا.

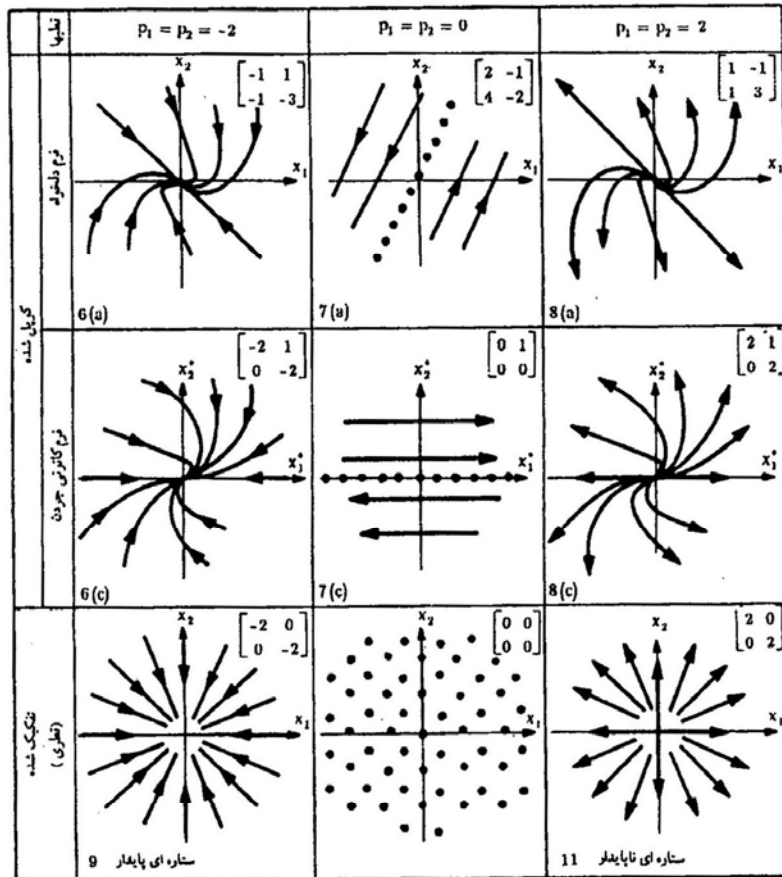


(a)



(b)

جدول (۲-۵). نمایش مسیر حرکت سیستمهای رسته دو دارای دو ریشه حقیقی و تکراری.



جدول (۲-۵) رفتار "سیستمهای رسته دو را که دارای قطبهای تکراری" هستند نشان می دهد. سیستمهای شکلهای [6, 8/جدول (۲-۵)]، نظیر و مشابه سیستمهای شکلهای [1, 3/جدول (۱-۵)] بوده با این تفاوت که سیستمهای اشکال (6 و 8) هر یک تنها دارای یک بردار ویژه می باشند. اگر دو سیستم رسته یک مشابه بعنوان یک سیستم رسته دو در نظر گرفته شود و یا عبارتی یک سیستم رسته دو متشکل از «دو سیستم رسته یک کاملاً مجزا از هم» باشد، همه مسیرهای حرکت بصورت خط راست درآمده بطوریکه سیستمهای ستاره ای اشکال [9 و 11/جدول (۲-۵)] را بوجود می آورند. اگر به یک جرم m هیچ نیروئی وارد نشود و تغییر

مکان جرم با x_1 و سرعت آن با $\dot{x}_1$ نمایش داده شود طبق رابطه نیوتن داریم:

$$m \frac{d^2}{dt^2} x_1 = 0$$

مسیر حرکت چنین سیستمی در شکل [7c/ جدول (۵-۲)] نشان داده شده است. و بالاخره شکل [10/ جدول (۵-۱)] نمایش سیستمی است که ماتریس A در آن بصورت ماتریس صفر^۱ (ماتریسی که همه اجزاء آن صفر است) درآمده بعبارتی این سیستم در واقع یک سیستم استاتیکی است و هر نقطه‌ای در آن بعنوان شرایط اولیه^۲ یک نقطه تعادل پایدار محسوب می‌شود. اگر یک سیستم رسته^۳ دو دارای دو قطب موهومی خالص باشد سیستم دارای دو بردار ویژه مختلط خواهد بود. از اینرو در صفحه متغیرهای حالت نمی‌توان آنها را نشان داد. ولی می‌توان مسیر حرکت را با حذف زمان بین متغیرهای حالت بدست آورد.

مثال (۵-۲):

ماتریس A برای سیستمی عبارت است از:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

می‌خواهیم مسیر حرکت این سیستم را که دارای دو مقدار ویژه (قطب) بصورت

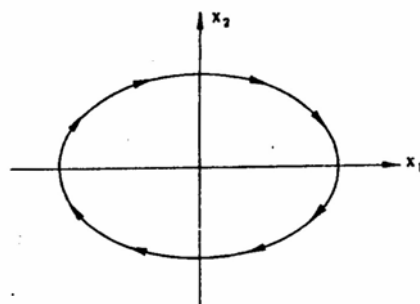
$$p_1 = 3 \text{ و } p_2 = -3 \text{ می‌باشد تعیین نماییم.}$$

فرم کلی حل این سیستم را قبلاً مطالعه کرده‌ایم و می‌دانیم که $x_1(t)$ و $x_2(t)$ توابع

نوسانی با فرکانس $\omega = 3$ می‌باشند. پس:

$$x_1(t) = c \cos(3t + \phi)$$

در رابطه فوق C و ϕ مقادیر ثابتی هستند که با اعمال شرایط اولیه سیستم بدست



شکل (۴-۵). نمایش مسیر حرکت سیستم.

می‌آیند. با قرار دادن مقدار $x_1(t)$ در رابطه اول معادله حالت (یعنی رابطه $\frac{d}{dt}x_1 = -x_1 + 2x_2$) خواهیم داشت:

$$x_2(t) = \frac{1}{2}c \cos(3t + \phi) - \frac{3}{2}c \sin(3t + \phi)$$

برای حذف t بین x_1 و x_2 ابتدا مقادیر $\sin(3t + \phi)$ و $\cos(3t + \phi)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\sin(3t + \phi) = \frac{x_1 - 2x_2}{3c}, \quad \cos(3t + \phi) = \frac{x_1}{c}$$

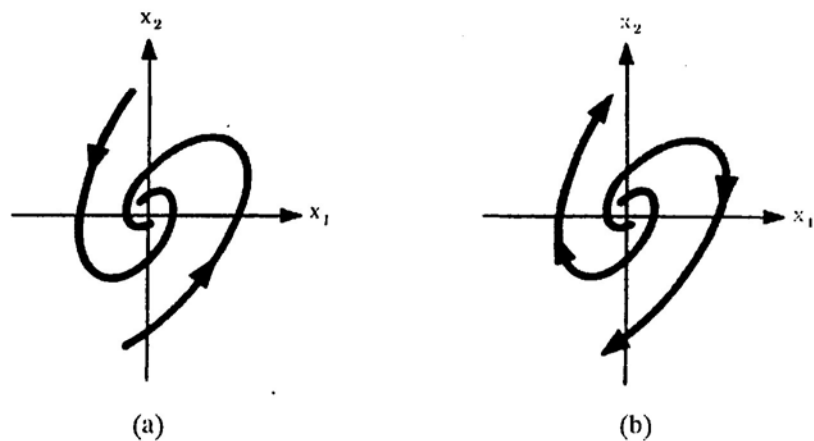
با مجذور نمودن طرفین معادلات فوق و جمع کردن آنها داریم:

$$\sin^2(3t + \phi) + \cos^2(3t + \phi) = 1 = \frac{x_1^2 + 1/9(x_1 - 2x_2)^2}{c^2}$$

و یا:

$$\frac{10}{9}x_1^2 - \frac{4}{9}x_1x_2 + \frac{4}{9}x_2^2 = c^2$$

رابطه فوق معرف معادله یک بیضی است بنابراین مسیر حرکت این سیستم بصورت بیضی خواهد بود که در شکل (۴-۵) نمایش داده شده است.



شکل (۵-۵). نمایش مسیر حرکت برای سیستمهای رسته دو دارای قطبهای مختلط برای:

(a) - سیستم با دادههای رابطه (a)

(b) - سیستم با دادههای رابطه (b)

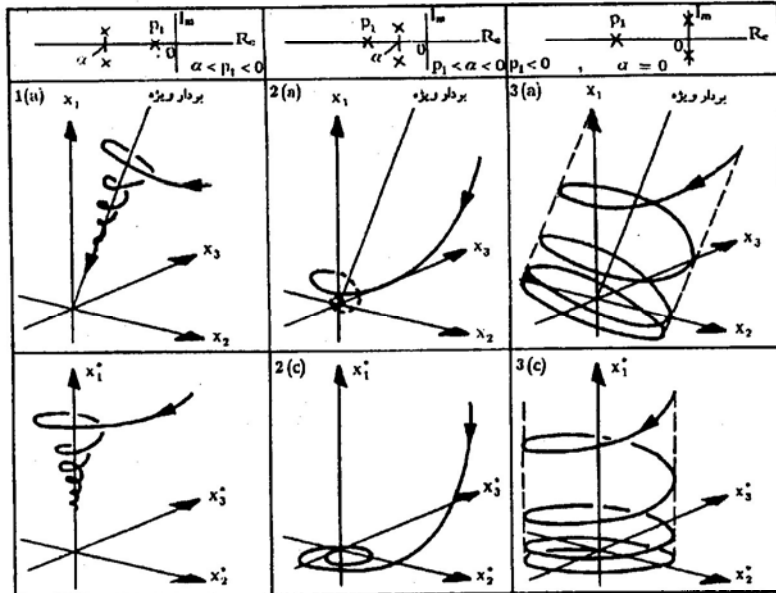
اگر سیستم رسته دو دارای دو قطب مختلط بصورت $p_{1,2} = -\sigma \pm j\omega$ باشد، مودهای سیستم چنین خواهند بود:

$$e^{-\sigma t} \sin(\omega t + \phi) \quad , \quad e^{-\sigma t} \cos(\omega t + \phi)$$

اگر σ مثبت باشد*، مسیر حرکت عبارت از یک بیضی است که دامنه‌اش تا رسیدن به مبدأ مختصات مرتباً کاهش می‌یابد. همچنین اگر σ منفی باشد سیستم ناپایدار و مسیر حرکت مرتباً از مبدأ دور می‌شود. شکل (۵-۵) مسیر حرکت در حالت‌های پایدار و ناپایدار را برای سیستمهای با قطبهای مختلط داده شده ذیل نشان می‌دهد.

$$(a) \quad \begin{cases} p_1, p_2 = -1 \pm 3j \\ \Lambda = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (b) \quad \begin{cases} p_1, p_2 = 1 \pm 3j \\ \Lambda = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} \end{cases}$$

*-که معرف Damped System می‌باشد.



شکل (۵-۶)- نمایش مسیر حرکت سیستم‌های رسته سه دارای یک قطب حقیقی و دو قطب مختلط (سیستم پایدار).

در شکل (۵-۶) نیز مسیر حرکت سیستم‌های رسته سه دارای یک قطب حقیقی و دو قطب مختلط (سیستم پایدار) در مختصات سه بعدی (x_1 و x_2 و x_3) نمایش داده شده است.

(۵-۲)- پایداری حول نقطه تعادل:

یک سیستم دینامیکی آزاد با پارامترهای ثابت نسبت به زمان^۱ را در نظر بگیرید که متغیرهای حالت آن (که با بردار X_a نمایش داده می‌شود) در معادله زیر صدق کند:

$$\frac{d}{dt} X_a(t) = F(X_a(t)) \quad (5-5)$$

این سیستم می تواند خطی یا غیرخطی باشد. فرض می کنیم که سیستم دارای یک نقطه تعادل (حالت تعادل) $X_a = c$ باشد. بنابراین:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} X_a(t) = F(c) = 0$$

خواهد بود. حال این سؤال مطرح است که آیا سیستم مورد نظر حول نقطه مذکور دارای تعادل پایدار است یا خیر؟ برای بررسی پایداری سیستم فوق حول این نقطه تعادل ابتدا یک انتقال محورهای مختصات "حالت" را (بصورت $X = X_a - c$) انجام می دهیم. در اینصورت سیستم جدید زیر را خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dt} X = F(X), \quad F(X) = 0 \quad (6-5)$$

اگر این سیستم خطی باشد، معادله (6-5) بصورت زیر درمی آید:

$$\frac{d}{dt} X = AX \quad (7-5)$$

از آنجا که معادلات (6-5) و (7-5) نمایش ریاضی یک پدیده فیزیکی هستند، فرض می شود که حل $X(t)$ منحصر بفرد^۱ و پیوسته است. اگر سیستم غیرخطی باشد واضح است که فرضهای "منحصر بفرد بودن" و "پیوسته بودن" جواب $X(t)$ به ناحیه محدودی در اطراف نقطه تعادل 0 مربوط می شود. چنین ناحیه ای را می توان بصورت:

$$\|X\| < R \quad (8-5)$$

نمایش داد که R یک مقدار محدود، حقیقی و مثبت است و $\|X\|$ نیز بصورت زیر تعریف می شود:

$$\|X\| = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$$

یعنی $\|X\|$ فاصله نقطه‌ای مانند X از مرکز مختصات متغیرهای حالت فضائی است و آن را نرم^۱ X (یا طول X) می نامند. بنابراین در مورد سیستمهای غیرخطی، R بیان کننده محدوده و ناحیه‌ای در اطراف نقطه تعادل است که "بحث پایداری سیستم حول نقطه تعادل" تنها در همین محدوده صادق است.

در مورد سیستمهای خطی شرط (۸-۵) لازم نبوده و چون سیستم خطی تنها یک نقطه تعادل دارد، اگر سیستم حول این نقطه پایدار باشد، همواره پایدار خواهد ماند و پایداری سیستم به منطقه بخصوصی در اطراف نقطه تعادل محدود نمی شود.

در مورد سیستمهای غیرخطی، شرط (۸-۵) بیان کننده آن است که بررسی پایداری سیستم در داخل یک کره فضائی^۲ به مرکز O و به شعاع R (منطبق بر مرکز مختصات) انجام می شود. حال پایداری سیستم معرفی شده در رابطه (۶-۵) را بروش لیپانوف تعریف می کنیم: ابتدا دو ناحیه فضائی بصورت دو کره فضائی به شعاعهای δ و ε را مطابق شکل (۷-۵) در داخل کره فضائی به شعاع R طوری در نظر می گیریم که داشته باشیم:

$$\delta \leq \varepsilon < R$$

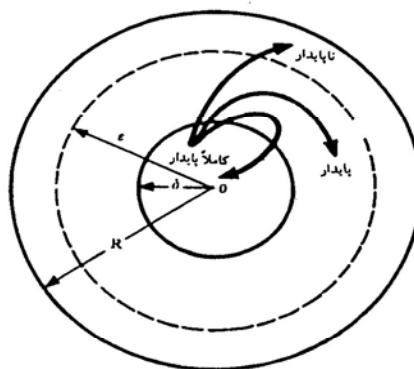
به این ترتیب مراکز هر سه کره فضائی به شعاعهای R ، δ و ε منطبق بر مرکز مختصات فضائی سیستم خواهد بود.

مطابق روش لیپانوف پایداری سیستم رابطه (۶-۵) در نقطه تعادل $X=0$ (مرکز فضائی مختصات) بصورت زیر تعریف می شود:

اگر برای هر شعاع ε ، شعاعی مانند δ وجود داشته باشد بطوریکه هرگاه مسیر حرکت سیستم از نقطه X_0 داخل (یا روی) کره فضائی با شعاع δ شروع شود و آنگاه مسیر حرکت

۱- Norm of "x"

۲- Hypersphere



شکل (۷-۵) - نمایش فضای پایداری در معیار پایداری لیاپانوف.

همواره داخل (یا روی) کره فضائی بشعاع ε باقی بماند، سیستم پایدار^۱ خواهد بود.

مثال (۳-۵):

سیستم فنر و وزنه شکل (۵-۸-۸) دارای معادله حالت $\dot{X} = AX$ بوده و ماتریس A نیز قبلاً در معادله (۳-۱۹) برای این سیستم بیان شده است. با فرض آنکه این سیستم تحت تأثیر شرایط اولیه X_0 قرار گیرد می‌خواهیم پایداری آن را با روش لیاپانوف بررسی نماییم.

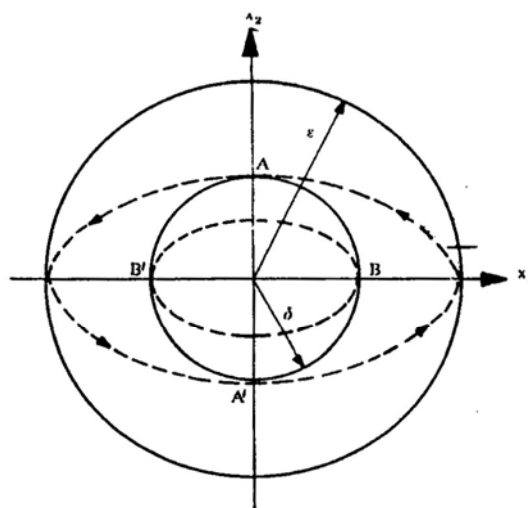
تحت تأثیر شرایط اولیه X_0 تغییر مکان $x_1(t)$ بطور کلی عبارت است از:

$$x_1(t) = C \sin(\omega t + \phi)$$

که C و ϕ (مقادیر ثابت) را می‌توان با توجه به اعمال شرایط اولیه X_0 بدست آورد و همچنین $\omega = \sqrt{k/m}$ می‌باشد.



(a)



(b)

شکل (۸-۵) - نمایش:

(a) - سیستم فنر و وزنه.

(b) - فضای پایداری لیاپانوف برای سیستم فنر و وزنه.

سرعت $x_2(t)$ عبارت است از:

$$x_2(t) = c\omega \cos(\omega t + \phi)$$

با حذف زمان t بین $x_2(t)$ و $x_1(t)$ نتیجه می‌شود:

$$\frac{x_1^2}{c^2} + \frac{x_2^2}{c^2\omega^2} = 1$$

این معادله نمایش یک بیضی است که معرف مسیر حرکت می‌باشد. حال با استفاده از

معیار پایداری لیاپانوف به بررسی پایداری این سیستم می‌پردازیم. این سیستم با تعریف فوق، پایدار است زیرا مطابق شکل (۵-۸) بازاء هر دایره دلخواه به شعاع ε ، کافی است دایره‌ای به شعاع δ (که شرایط اولیه x_0 از داخل یا روی آن شروع می‌شود) طوری انتخاب گردد که قطر بزرگ بیضی مساوی ε و قطر کوچک آن مساوی δ باشد.

همانطور که از شکل (۵-۸-۵) مشاهده می‌شود اگر شرایط اولیه از هر نقطه دایره به شعاع δ (از داخل یا روی آن) شروع شود، بیضی مسیر حرکت همواره داخل یا روی دایره به شعاع ε باقی می‌ماند. زیرا اگر مسیر حرکت از نقطه‌ای مانند B یا B' روی دایره به شعاع δ شروع شود فرم مسیر حرکت بصورت بیضی کوچک نمایش داده شده در شکل فوق می‌باشد، همچنین اگر مسیر حرکت از نقطه A یا A' از روی دایره به شعاع δ شروع شود فرم آن بصورت بیضی بزرگ نمایش داده شده در شکل مذکور بوده و هر گاه مسیر حرکت از هر نقطه دیگر واقع در روی دایره به شعاع δ شروع شود فرم مسیر حرکت عبارت از یک بیضی خواهد بود که بین دو بیضی رسم شده در شکل فوق قرار می‌گیرد. بنابراین واضح است چنانچه مسیر حرکت از داخل دایره به شعاع δ شروع شود همواره داخل بیضی بزرگ شکل فوق قرار گرفته، بنابراین بطور اولی مسیر حرکت همواره داخل دایره‌ای به شعاع ε باقی می‌ماند و مطابق تعریف پایداری لیاپانوف، این سیستم پایدار خواهد بود.

هر گاه در یک سیستم بازاء تغییر حالت اولیه، مسیر حرکت بحالت تعادل در مبدأ برگردد، این نوع سیستم را "کاملاً پایدار" می‌نامند که این تعریف از قوت بیشتری نسبت به تعریف قبل برخوردار است. نمایشی از این سیستمها در اشکال [۱/ جدول (۵-۱)] و [۶/ و ۹/ جدول (۵-۲)] ارائه شده است. معیار "کاملاً پایداری" چنین تعریف می‌شود:

حالت تعادل 0 "کاملاً پایدار" است اگر:

اولاً پایدار باشد و ثانیاً مطابق شکل (۵-۷) هر مسیر حرکتی که از داخل کره فضائی به شعاع δ شروع می‌شود نهایتاً $(t \rightarrow \infty)$ به مبدا مختصات فضائی برگردد و عبارتی داشته باشیم:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = 0$$

باید توجه داشت که در معیار کاملاً پایداری، مسیر حرکت همواره داخل کره فضائی به شعاع ε باقی می‌ماند و به عبارت دیگر عکس‌العمل سیستم دارای دامنه محدود^۱ می‌باشد. سیستم‌های اشکال [2 و 3 و 5/ جدول (۵-۱)] و [7 و 8 و 11/ جدول (۵-۲)] ناپایدار هستند و سیستم ناپایدار نیز بصورت زیر تعریف می‌شود:

مطابق شکل (۵-۷)، حالت تعادل صفر را ناپایدار^۲ می‌نامند اگر برای هر کره فضائی بزرگ به شعاع ε و برای هر کره فضائی دلخواه کوچک به شعاع δ ، همواره نقطه شروعی مانند x_0 در داخل کره فضائی به شعاع ε وجود داشته باشد بطوریکه مسیر حرکت (که از x_0 شروع شده) مرکز کره فضائی به شعاع ε را قطع نموده و از آن بگذرد.

(۵-۳) - پایداری سیستم با ورودی:

برای تعیین پایداری سیستم تحت تأثیر ورودی باید به این سؤال پاسخ داد که آیا بازاء هر ورودی با دامنه محدود، عکس‌العمل (خروجی) سیستم دارای دامنه محدود است یا خیر؟ برای این منظور معیار پایداری ذیل برای سیستم با ورودی ارائه شده است.

یک سیستم با شرایط اولیه صفر را پایدار نامند اگر:

بازاء هر ورودی با دامنه محدود^۳، دامنه عکس‌العمل (خروجی) سیستم نیز محدود^۴ باشد در اینصورت چنین سیستمی را "پایدار BI-BO"^۵ می‌نامند. واضح است چنانچه بازاء ورودی با دامنه محدود دامنه عکس‌العمل یا خروجی محدود نباشد این سیستم "پایدار BI-BO" نخواهد بود.

در اینجا قابل ذکر و حائز اهمیت است که بدانیم یک سیستم ممکن است با تعریف لیاپانوف پایدار باشد ولی "پایدار BI-BO" نباشد. مثلاً سیستم فنر و وزنه مثال (۵-۳) مطابق معیار پایداری لیاپانوف، پایدار است اما از آنجا که این سیستم، دارای "ورودی محدود - خروجی محدود (BI-BO)" نیست لذا "پایدار BI-BO" نخواهد بود. زیرا در صورت اعمال ورودی سینوسی با دامنه محدود به این سیستم (ورودی نیروی وارد به جرم)، چنانچه

۱- Bounded Solution

۲- Unstable

۳- Bounded Input

۴- Bounded Output

۵- Bounded Input-Bounded Output Stable (BI-BO Stable)

فرکانس ورودی با فرکانس طبیعی سیستم فتر و وزنه برابر باشد، علیرغم آنکه دامنه ورودی محدود است بدلیل آنکه سیستم بحالت تشدید می‌رسد، دامنه خروجی محدود نخواهد بود که این مسئله را از معیار پایداری لیاپانوف نمی‌توان تشخیص داد. بنابراین معیار "پایداری BI-BO از پایداری لیاپانوف قویتر بوده و در قسمت بعد نشان خواهیم داد که این معیار معادل "کاملاً پایداری لیاپانوف" می‌باشد.

(۴-۵) - پایداری سیستمهای خطی:

سیستم خطی رسته n که معادلات حالت آن بصورت ذیل می‌باشد را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= AX(t) + BU(t) \\ y(t) &= CX(t) + DU(t)\end{aligned}\quad (۹-۵)$$

که در آن $X(t)$ بردار ستونی $n \times 1$ می‌باشد. معادلات فوق همان معادلات (۳-۲۷) می‌باشند که ماتریسهای A ، B ، C و D آن در روابط (۳-۲۸) تعریف شده‌اند. می‌دانیم که حل معادله (۹-۵) با توجه به روابط (۴-۵۶) و (۴-۵۷) چنین می‌باشد:

$$X(t) = e^{At} X_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B U(\tau) d\tau \quad (۱۰-۵)$$

$$Y(t) = C e^{At} X_0 + C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B U(\tau) d\tau + D U(t) \quad (۱۰-۵)$$

گرچه بکمک حل فوق می‌توان پایداری سیستمهای خطی را مورد بررسی قرار داد ولی همانطور که خواهیم دید در سیستمهای خطی برای بررسی پایداری نیازی به حل معادلات حالت نبوده و مستقیماً از خواص ماتریس A نیز می‌توان در مورد پایداری اظهار نظر نمود. برای این منظور بحث را با بیان قضایای ذیل ادامه می‌دهیم.

الف) - قضیه (۱):

هر سیستم با معادلات حالت (۹-۵)، "کاملاً پایدار" است اگر و تنها اگر همه مقادیر ویژه ماتریس A دارای قسمت حقیقی منفی باشند.

برای اثبات این مطلب باید حل قسمت همگن معادله (۵-۱۰-۵) را مورد بررسی قرار

دهیم، یعنی:

$$X(t) = e^{At} X_0 \quad (۵-۱۱)$$

همچنین در فصل چهارم [قسمت (۴-۱-۳)] دیدیم که اجزاء ماتریس e^{At} ترکیب خطی از مودهای سیستم هستند. بنابراین $X(t)$ در معادله (۵-۱۱) نیز ترکیب خطی از مودها می باشد و از طرفی مودها به مقادیر ویژه ماتریس A بستگی دارند [قسمت های (۴-۱-۳) و (۴-۱-۴) از فصل چهارم]. پس کافی است ثابت کنیم که "اگر مقادیر ویژه ماتریس A دارای قسمت حقیقی منفی باشند همه مودها بازاء $t \rightarrow \infty$ به سمت صفر میل می کنند". در نتیجه $X(t)$ که ترکیب خطی از مودهاست نیز به سمت صفر میل خواهد نمود. فرض می کنیم ماتریس A دارای n مقدار ویژه (اعم از "مجزا" و "تکراری") باشد. بازاء هر مقدار ویژه مجزا مانند P_i ، مود بصورت $e^{P_i t}$ بوده و بازاء هر مقدار ویژه تکراری مانند P_i (فرض می کنیم K مرتبه تکرار شده باشد) مودها بصورت ذیل می باشند:

$$e^{P_i t}, \quad t e^{P_i t}, \quad \frac{1}{2!} t^2 e^{P_i t}, \quad \dots, \quad \frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} e^{P_i t}$$

از طرفی واضح است که اگر P_i دارای قسمت حقیقی منفی باشد $e^{P_i t}$ بازاء $t \rightarrow \infty$ به سمت صفر میل می کند. همچنین اگر P_j دارای قسمت حقیقی منفی باشد هر کدام از مودها و بطور کلی $t^{k-1} e^{P_j t}$ نیز به سمت صفر میل نموده، بنابراین $X(t)$ که ترکیب خطی از مودهاست به سمت صفر میل می کند. از طرفی اگر P_i یا P_j دارای قسمت حقیقی منفی نباشند داریم:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{P_i t} \neq 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{ t^{k-1} e^{P_j t} \} \neq 0$$

بنابراین $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) \neq 0$ بوده و سیستم کاملاً پایدار نیست. باین ترتیب شرط لازم و کافی اثبات شد.

(ب) - قضیه (۲):

هر سیستم با معادلات حالت (۵-۹) اگر کاملاً پایدار باشد این سیستم "پایدار BI-BO" نیز هست (اثبات بعهدہ دانشجویان).
از قضیه فوق می توان نتیجه گرفت که:

شرط لازم و کافی برای آنکه سیستمی "پایدار BI-BO" باشد آن است که همه مقادیر ویژه ماتریس A سیستم دارای قسمت حقیقی منفی باشند.
از مطالب و قضایای یاد شده نتیجه می گیریم که پایداری سیستم خطی تنها به مقادیر ویژه ماتریس A و یا عبارتی به ریشه های معادله مشخصه:

$$\det(sI - A) = 0 \quad (5-12)$$

بستگی دارد، بطوریکه در صفحه مختلط s اگر تمامی ریشه های معادله مشخصه در سمت چپ محور موهومی قرار گیرند (یعنی قسمت حقیقی ریشه ها منفی باشد) سیستم "کاملاً پایدار" و اصطلاحاً "پایدار" است و محور موهومی معرف مرز پایداری و ناحیه سمت راست محور موهومی نیز "ناپایداری" را نشان می دهد. بنابراین برای تعیین پایداری سیستم باید معادله (۵-۱۲) را که برای سیستم رسته n بصورت یک چند جمله ای رسته n بر حسب s می باشد حل نمود. اما ابداع روشهایی توسط محققین سبب گردیده تا بدون حل معادله فوق نیز بتوان تعداد ریشه های پایدار و ناپایدار معادله مذکور را تعیین نمود. یکی از روشهای معروف و متداول فوق روش راوث^۱ می باشد که در قسمت بعد تشریح می گردد.

(۵-۵) - تعیین پایداری سیستم خطی با استفاده از روش راوث^۲:

در این قسمت تنها به تشریح روش می پردازیم و برای مطالعه اثبات آن به مراجع مختلف* کنترل می توانید رجوع نمایید. معادله (۵-۱۲) برای یک سیستم رسته n بصورت

۱- Routh Test

۲-The Routh Test

* - از جمله مراجع و مأخذ معرفی شده در پایان این مجلد.

ذیل نوشته می شود:

$$a_0 S^n + a_1 S^{n-1} + \dots + a_{n-1} S + a_n = 0 \quad (۱۳-۵)$$

در رابطه فوق ضرایب a_0 تا a_n باید مثبت باشند، یعنی:

$$a_i > 0, \quad (i=0, 1, \dots, n)$$

اگر ضرایب فوق مثبت نباشند سیستم پایدار نبوده (همه ریشه ها دارای قسمت حقیقی منفی نیستند) ولی در صورت مثبت بودن ضرایب، باید مراحل بشرح زیر طی شود تا مشخص گردد که آیا سیستم پایدار است یا خیر.

قدم اول:

ضرایب a_0 تا a_n را به فرمی که گفته می شود در دو سطر می نویسیم. در سطر اول ابتدا ضریب مربوط به جمله S^n (یعنی a_0) را نوشته سپس ضرایب با اندیس زوج ($a_2, a_4, \dots$) را می نویسیم. در سطر دوم ابتدا ضریب مربوط به جمله S^{n-1} (یعنی a_1) را نوشته سپس بقیه ضرایب با اندیس فرد را می نویسیم، یعنی:

a_0	a_2	a_4	$\dots$	a_n	0
a_1	a_3	a_5	$\dots$	0	0

واضح است که اگر n عدد زوج باشد a_n در سطر اول قرار می گیرد و اگر n عدد فرد باشد a_n در ابتدای سطر دوم قرار می گیرد.

قدم دوم:

سطر سوم را که شامل اعضای $b_1, b_2, \dots, b_m$ می باشد بترتیب ذیل و با استفاده از روابط

داده شده (a-۱۴-۵) پس از سطرهای اول و دوم می‌نویسیم.

a_0	a_2	a_4	...	a_n	0
a_1	a_3	a_5	...	0	0
b_1	b_2	b_3	...	b_m	0 (سطر سوم)

که $b_1, b_2, \dots, b_m$ به کمک روابط ذیل تعیین می‌شوند.

$$h_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}, h_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} \quad (a-14-5)$$

قدم سوم:

اعضای سطر بعدی را با علائم $c_1, c_2, \dots, c_m$ نمایش داده و هر عضو آن را شبیه روش "قدم دوم" با استفاده از روابط (b-۱۴-۵) بدست آورده و در سطر چهارم قرار می‌دهیم:

c_1	c_2	c_3	...	c_m	0 (سطر چهارم)
-------	-------	-------	-----	-------	---------------

روابط تعیین اعضای سطر چهارم عبارتند از:

$$c_1 = \frac{h_1 a_3 - h_2 a_1}{b_1}, c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 h_3}{b_1} \quad (b-14-5)$$

این سطر معمولاً یک جزء کمتر از سطر سوم خواهد داشت (مگر آنکه n عدد فرد باشد).

قدم چهارم تا آخر:

قدم سوم را کلاً برای $(n+1)$ سطر تکرار نموده بطوریکه اولین جزء سطر $(n+2)$ صفر شود.

در معیار پایداری راوٹ اگر مثبت بودن ضرایب a_0 تا a_n را بعنوان شرط اول پایداری در نظر بگیریم، شرط دوم پایداری سیستم (کاملاً پایداری) آن است که تمامی اعداد ستون اول

تا سطر $(n+1)$ ام مثبت باشند. بهر حال در صورت برقرار نبودن شرط دوم (بعبارتی وجود عدد منفی در ستون اول جدول راوٹ)، پایداری برقرار نبوده و هر تغییر علامت در این ستون معرف وجود یک ریشه ناپایدار است بطوریکه اگر چند عدد منفی در ستون اول ظاهر شود تعداد ریشه‌های ناپایدار برابر تعداد تغییر علامتها در ستون اول خواهد بود.

مثال (۴-۵):

می‌خواهیم پایداری سیستمی را که معادله مشخصه آن بصورت ذیل می‌باشد از روش راوٹ بررسی نماییم.

$$9S^7 + 3S^6 + 48S^5 + 14S^4 + 64S^3 + 14S^2 + 14S + 2 = 0$$

مطابق جدول راوٹ که در صفحه بعد آمده، از آنجا که تمامی ضرایب مثبت و تمامی اعداد ستون اول نیز مثبت هستند لذا تمامی ریشه‌ها در سمت چپ محور موهومی واقع بوده و سیستم پایدار (بلکه کاملاً پایدار) است.

$$9S^7 + 3S^6 + 48S^5 + 14S^4 + 64S^3 + 14S^2 + 14S + 2 = 0$$

سطر اول	S^7	9	48	64	14	0
سطر دوم	S^6	3	14	14	2	0
سطر سوم	S^5	6	22	8	0	
سطر چهارم	S^4	3	10	2	0	
سطر پنجم	S^3	2	4	0		
سطر ششم	S^2	4	2	0		
سطر هفتم	S^1	3	0			
سطر هشتم	S^0	2	0			
		0	0			

(ستون اول برای محاسبه علامتها با کادر مشخص شده است.)

مثال (۵-۵):

برای سیستم با معادله مشخصه ذیل پایداری را از روش راوت مورد بررسی قرار

می‌دهیم.

$$S^4 + 2S^3 + S^2 + 4S + 4 = 0$$

	S^4	1	1	4	0
تغییر علامت اول	S^3	2	4	0	
	S^2	-1	4	0	
تغییر علامت دوم	S^1	12	0		
	S^0	4	0		
		0	0		

در اینجا ملاحظه می‌شود که ستون اول دوبار تغییر علامت داده بنابراین معادله

مشخصه دارای دو ریشه ناپایدار می‌باشد. عبارتی دو مقدار ویژه در سمت راست

محور موهومی در صفحه مختلط قرار می‌گیرد.

مطابق روابط (۵-۱۴) ملاحظه می‌شود که برای بدست آوردن اعضای سطرهای جدول روش پایداری راوت، همواره مخرج کسرها عبارت از اعضای ستون اول جدول می‌باشند (مثل a_1 و b_1 در روابط مذکور). حال اگر در مرحله‌ای از تشکیل جدول، اولین عضو یکی از سطرهای میانی برابر صفر شود، بدیهی است که اعضای سطر بعد برابر بینهایت می‌شوند (زیرا $\frac{\infty}{0} = \infty$) به این ترتیب ادامه تشکیل سطرهای بعدی میسر نخواهد بود. گرچه در عمل چنین حالتی بندرت پیش می‌آید^{*}، ولی برای حفظ کارایی روش "راوت" سه راه حل مناسب برای رفع مشکل فوق پیشنهاد گردیده که بکمک هر یک می‌توان به جواب دست یافت. قبل از

*- زیرا اصولاً در مسائل واقعی و عملی ضرایب معادله مشخصه آنچنان دقیق بدست نمی‌آیند. از اینرو وقتی در تحلیل معادله مشخصه از روش راوت با اشکال فوق مواجه می‌شویم الزامی وجود ندارد که بگوئیم این صفر آنچنان دقیق است که نمی‌توان آن را تغییر داد. بنابراین دقیق نبودن ضرایب معادله مشخصه (در عمل) این امکان را فراهم نموده تا برای حذف صفر از ستون اول بتوان سه روش (الف)، (ب) و (ج) را ارائه نمود.

معرفی روشهای مذکور یادآوری این نکته ضروری است که "هر صفر در ستون اول جدول راوٹ مبین وجود حداقل یک ریشه ناپایدار" است.

الف)- روش اول حذف صفر در ستون اول جدول راوٹ (قراردادن مقدار بسیار کوچک ε بجای صفر):

در این روش بجای صفر ستون اول، مقدار مثبت* بسیار کوچک ε را قرار داده و همانند قبل به تشکیل سطرهای جدول ادامه می دهیم. مثال (۵-۶) این مطلب را روشن می سازد.

مثال (۵-۶):

برای سیستمی با معادله مشخصه ذیل پایداری را از روش راوٹ مورد بررسی قرار

می دهیم.

$$S^5 + 2S^4 + 4S^3 + 8S^2 + 3S + 2 = 0$$

S^5	1	4	3	0
S^4	2	8	2	0
S^3	ε	2	0	
منفی S^2	$8 - \frac{4}{\varepsilon}$	2	0	
مثبت S^1	$2 - \frac{2\varepsilon}{8 - 4/\varepsilon}$	0		
S^0	2	0		
	0	0		

ملاحظه می شود که دو تغییر علامت در ستون اول صورت گرفته است که مبین وجود

دو ریشه ناپایدار می باشد.

*- می توان نشان داد که استفاده از مقدار منفی بسیار کوچک (یعنی $-\varepsilon$) نیز همان نتیجه را می دهد (تحقیق بعهده

دانشجویان).

ب)- روش دوم حذف صفر در ستون اول جدول راوٹ (تبدیل S به $\frac{1}{P}$ در معادله مشخصه):
در این روش S را در معادله مشخصه به $\frac{1}{P}$ تبدیل نموده و هر جمله معادله حاصله را در P^n ضرب می‌کنیم تا معادله جدیدی بر حسب P بدست آید. در اینصورت با بکارگیری روش راوٹ نتیجه‌ای مشابه معادله مشخصه اصلی حاصل می‌شود.

مثال (۷-۵):

معادله مشخصه مثال (۶-۵) را از نظر پایداری بررسی نموده و روش دوم را برای رفع اشکال ایجاد صفر در ستون اول بکار می‌بریم.

$$\frac{1}{P^5} + \frac{2}{P^4} + \frac{4}{P^3} + \frac{8}{P^2} + \frac{3}{P} + 2 = 0$$

و یا:

$$2P^5 + 3P^4 + 8P^3 + 4P^2 + 2P + 1 = 0$$

بنابراین جدول راوٹ چنین خواهد شد:

P^5	2	8	2	0
P^4	3	4	1	0
P^3	16/3	4/3	0	0
P^2	13/3	1	0	
منفی P^1	-4/3	0		
مثبت P^0	1	0		
	0	0		

ملاحظه می‌شود که با این روش نیز همان نتیجه قبل حاصل گردیده است.

ج)- روش سوم حذف صفر در ستون اول جدول راوٹ (ضرب کردن معادله مشخصه در $(S+1)$):

روش دیگری که به کمک آن می‌توان اشکال ناشی از وجود صفر در ستون اول جدول

راوت را برطرف نمود، ضرب کردن معادله مشخصه در $(S+1)$ می باشد. بدین ترتیب معادله مشخصه جدیدی بدست می آید که تشکیل کلیه سطری جدول راوت برای آن میسر خواهد شد. مثال (۸-۵) این مطلب را تصریح می نماید.

مثال (۸-۵):

پایداری سیستم با معادله مشخصه داده شده در دو مثال اخیر را با اعمال روش سوم حذف صفر در ستون اول جدول راوت مورد بررسی قرار می دهیم.
پس از ضرب معادله مشخصه سیستم مذکور در $(S+1)$ معادله مشخصه جدید ذیل حاصل می شود:

$$S^6 + 3S^5 + 6S^4 + 12S^3 + 11S^2 + 5S + 2 = 0$$

برای بررسی پایداری سیستم، جدول راوت را تشکیل می دهیم:

S^6	1	6	11	2	0
S^5	3	12	5	0	
S^4	2	28/3	2	0	
S^3	-12	2	0		
S^2	+29/3	2	0		
S^1	130/29	0			
S^0	2	0			
	0	0			

وجود دو تغییر علامت در ستون اول گویای وجود دو ریشه ناپایدار است و این همان

نتیجه ای است که از دو روش قبل (در مورد حذف صفر) نیز بدست آمده بود.

در بررسی پایداری یک سیستم با استفاده از روش راوت، گاهی ممکن است تمامی اعضای یک سطر جدول راوت صفر شوند و باین دلیل نتوان به تشکیل سطری بعدی

پرداخت. در این حالت با استفاده از معادله کمکی (معادله فرعی) که در ذیل تعریف شده امکان بررسی پایداری سیستم بروش راوٹ فراهم میگردد:

"معادله کمکی عبارت از معادله‌ای برحسب S ، با ضرایب و مرتبه‌های متناظر با مرتبه‌های S سطر ماقبل سطر صفر می‌باشد".

حال مطابق مراحل زیر به رفع اشکال صفر شدن تمام اعضای یک سطر جدول راوٹ می‌پردازیم.

- ابتدا معادله کمکی (فرعی) را تشکیل می‌دهیم.

- از معادله کمکی نسبت به S مشتق می‌گیریم.

- ضرایب معادله حاصله (مشتق معادله کمکی) را بجای اعضای سطر صفر قرار می‌دهیم.

قابل ذکر است که ریشه‌های معادله کمکی، ریشه‌های معادله اصلی نیز می‌باشند (اثبات و تحقیق بعهده دانشجویان).

مثال (۵-۹):

می‌خواهیم پایداری سیستم با معادله مشخصه ذیل را بررسی نمائیم.

$$S^4 + 2S^3 + 11S^2 + 18S + 18 = 0$$

جدول راوٹ را تشکیل می‌دهیم:

S^4	1	11	18	0
S^3	2	18	0	
S^2	2	18	0	
S^1	0	0		(سطر صفر)
S^0				

همانگونه که ملاحظه می‌شود اعضای سطر چهارم صفر شده و تشکیل سطر بعدی

ممکن نیست لذا بترتیب ذیل عمل می‌کنیم:

- تشکیل معادله کمکی:

$$2S^2 + 18S^0 = 0 \quad \text{یا} \quad S^2 + 9 = 0$$

- مشتق معادله کمکی نسبت به S :

$$2S + 0 = 0$$

- ضرایب معادله اخیر (یعنی 2 و صفر) را بجای سطر صفر جدول راوت قرار ده و به تشکیل سطرهای بعدی می‌پردازیم.

مطابق جدول تشکیل شده در ذیل، ملاحظه می‌شود که در ستون اول جدول فوق

تغییر علامتی وجود ندارد بنابراین سیستم پایدار می‌باشد.

S^4	1	11	18	0
S^3	2	18	0	
S^2	2	18	0	
S^1	2	0		
S^0	9	0		

با حل معادله کمکی می‌توان تعدادی از ریشه‌های معادله اصلی را بدست آورد که

در اینجا داریم:

$$S^2 + 9 = 0$$

که ریشه‌های آن عبارتند از:

$$S = \pm 3j$$

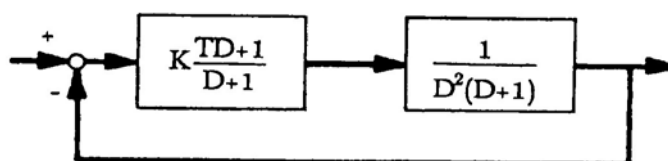
جوابهای فوق دو ریشه از جوابهای معادله اصلی می‌باشند.



مسایل

(۱-۵) - ثابت کنید که در یک سیستم رسته n ، ناپایداری ایجاد شده در اثر تنها یک مقدار ویژه ناپایدار (مقدار حقیقی) را می توان همواره از شرط اول پایداری راوٹ (شرط مثبت بودن همه ضرایب معادله مشخصه) بدست آورد.

(۲-۵) - در سیستم شکل (م-۵-۲) عبارت $TD+1$ در جعبه سمت چپ (جعبه کنترلر)، بعنوان یک کنترلر PD، پایداری سیستم را بهبود می بخشد. با استفاده از روش راوٹ مقدار T را که به ازاء آن مقدار K در مرز پایداری ماکزیمم باشد تعیین نمایید. (این مقدار T می تواند مشخص کننده مقدار بهینه آن برای حداقل نمودن خطای حالت ماندگار سیستم باشد).



شکل (م-۵-۲)

(۳-۵) - سیستمی با معادله مشخصه:

$$S^3 + 7S^2 + 17S + K = 0$$

را که در آن K یک پارامتر متغیر است در نظر بگیرید. در این سیستم مقدار K را بترتیبی که عکس العمل سیستم دارای هیچ جمله با ثابت زمانی بزرگتر از $\frac{1}{2}$ ثانیه نباشد بدست آورید.

(۴-۵) - به کمک روش راوت ریشه‌های یکسان و مختلف علامه و تعداد آنها را در معادله مشخصه زیر تعیین نمایید.

$$s^6 - 2s^5 - 7s^4 + 16s^3 + 8s^2 - 32s + 16 = 0$$

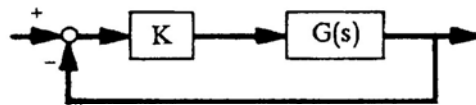
(۵-۵) - سیستمی با تابع تبدیل ذیل را در نظر بگیرید.

$$G(S) = \frac{\text{چند جمله‌ای بر حسب } S \text{ از رسته } m}{\text{چند جمله‌ای بر حسب } S \text{ از رسته } n}$$

این سیستم هیچ قطب یا صفری در نیم صفحه سمت راست صفحه مختلط S ندارد و هم‌چنین تفاوت رسته‌صورت و مخرج آن نیز از شرط ذیل تبعیت می‌کند.

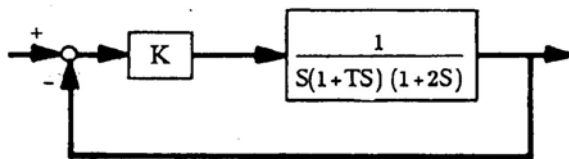
$$0 \leq n - m \leq 2$$

ثابت کنید سیستم مدار بسته شکل (۵-۵-م) با $G(S)$ فوق همواره و به ازاء همه مقادیر مثبت K پایدار است.



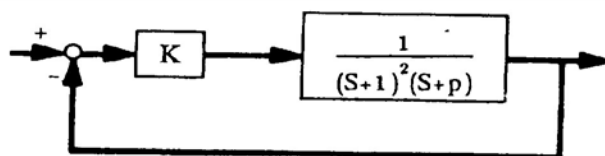
شکل (۵-۵-م)

(۶-۵) - سیستم شکل (۶-۵-م) با پارامترهای متغیر K و T را برای آنکه سیستم از نظر طراحی و پایداری قابل قبول باشد تعیین نمایید.



شکل (۶-۵-م)

(۷-۵) - در سیستم شکل (۷-۵-م)، اولاً رابطه بین $Y(s)$ و $U(s)$ را پیدا کنید. ثانیاً برای آنکه این سیستم بازاء کلیه مقادیر مثبت K کمتر یا مساوی ۳۵ ($K \leq 35$) پایدار باشد مقدار P را تعیین نمایید.



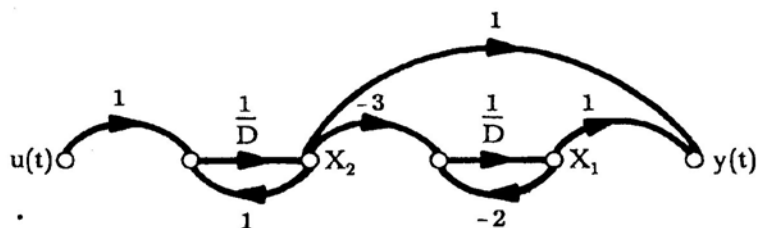
شکل (۷-۵-م)

(۸-۵) - برای سیستم شکل (۸-۵-م):

- الف) - ماتریس‌های A , b و C را در معادلات حالت سیستم بدست آورید.
- ب) - تابع تبدیل $G(s) = Y(s)/U(s)$ را تعیین نمایید.
- ج) - با توجه به رابطه بدست آمده در قسمت (ب) آیا این سیستم پایدار است.
- د) - مقادیر ویژه ماتریس A را بدست آورده و در مورد پایداری سیستم با توجه به مقادیر ویژه حاصله بحث و اظهار نظر نمایید.
- هـ) - ماتریس T متشکل از بردارهای ویژه A (هر ستون T یک بردار ویژه A) و ماتریس T^{-1} را بدست آورید.
- و) - با توجه به آنکه سیستم قطری شده به صورت زیر درمی آید،

$$\dot{X}^* = T^{-1}ATX^* + T^{-1}bu$$

$$Y = cTX^*$$
 دیاگرام جریانی سیستم قطری شده را رسم نمایید.
- ز) - با استفاده از دیاگرام قسمت (و)، تناقض موجود بین قسمت‌های (ج) و (د) را مورد بحث قرار دهید.



شکل (م-۵-۸)

(۹-۵) - در سیستم بامعادلات حالت ذیل،

$$\dot{X}_1 = A_1 X_1 \quad \text{سیستم (الف)}$$

$$\dot{X}_2 = A_2 X_2 \quad \text{سیستم (ب)}$$

که در آن $X_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix}$ و $X_2 = \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix}$ متغیرهای حالت دو سیستم و A_1 و A_2 نیز ماتریس‌های مربع 2×2 و به صورت ذیل هستند؛

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$$

اولاً: مسیر حرکت مربوط به هر یک از این دو سیستم را در صفحه مختصات متغیرهای حالت آنها تعیین نمایید.

ثانیاً: در صفحه مختصات X_1 ، تابع $V(X_1) = X_{11}^2 + X_{12}^2$ و در صفحه مختصات X_2 تابع $V(X_2) = X_{21}^2 + X_{22}^2$ را در نظر می‌گیریم (که به ازاء مقادیر ثابت V و $V(X_1)$ و $V(X_2)$ نمایش دایره هستند)، ثابت کنید $V(X_1)$ در روی مسیر حرکت سیستم (الف) همواره منفی است در حالیکه $V(X_2)$ در روی مسیر حرکت سیستم (ب) همواره منفی نیست.

(۱۰-۵) - در سیستم شکل (م-۵-۱۰):

الف - معادلات حالت سیستم را بدست آورید.

ب) - بردارهای ویژه مربوط به ماتریس ضرایب A را تعیین کنید.

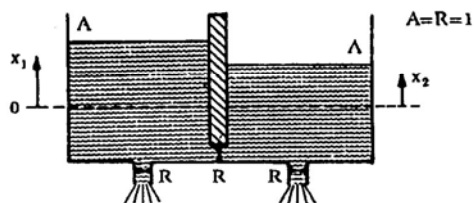
ج) - مسیر حرکت را به ازاء شرایط اولیه ذیل رسم نمایید.

a) $X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

c) $X_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

d) $X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$



شکل (م-۵-۱۰)

(۱۱-۵) - با استفاده از معیار پایداری راوٹ، پایداری هر یک از توابع تبدیل ذیل را بررسی نمایید.

a) $G(S) = \frac{1}{S^3 + S^2 + 2S + 24}$

b) $G(S) = \frac{(S+1)^2}{S^4 + 2S^3 + 2S^2 + 4S + 5}$

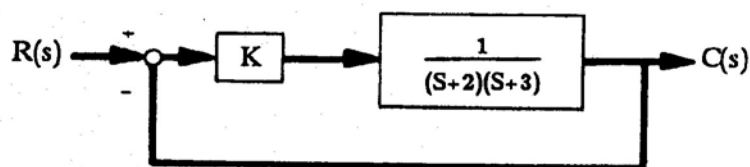
c) $G(S) = \frac{1}{S^2 + \omega^2}$

d) $G(S) = \frac{S-1}{S^3 + 3S^2 + 3S + 1}$

(۱۲-۵) - در سیستم مدار بسته شکل (م-۵-۱۲):

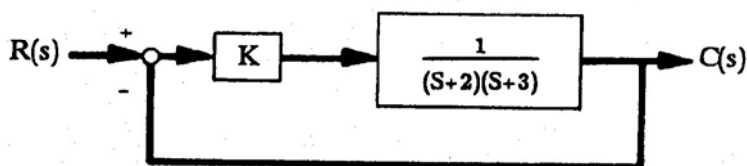
الف) - مقادیری از K را که به ازاء آن سیستم مدار بسته پایدار باشد تعیین کنید.

ب) - مقدار K را طوری بیابید که به ازاء آن نسبت میراثی (ξ) در سیستم مدار بسته برابر با 0.7 شود. ($\xi = 0.7$).



شکل (م-۵-۱۲)

(۱۳-۵) - در سیستم شکل (م-۵-۱۳) محدوده‌ای از K را که به ازاء آن سیستم پایدار می‌ماند تعیین نمایید.



شکل (م-۵-۱۳)

(۱۴-۵) - تابع تبدیل یک سیستم بصورت $G(S) = \frac{1}{(S^2 + 1)^2}$ داده شده است. آیا $G(S)$ معرف یک سیستم پایدار است؟ پاسخ خود را با استدلال ارائه نمایید.

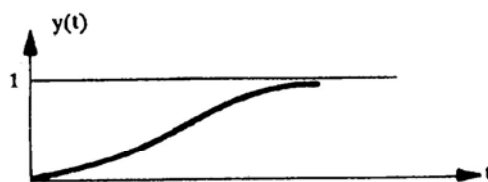
(۱۵-۵) - تابع تبدیل یک سیستم خطی بصورت :

$$G(S) = \frac{1}{(S + a)(S + b)}$$

ارائه شده است که در آن b و a پارامترهای مجهول می‌باشند. برای شناسایی این سیستم باید

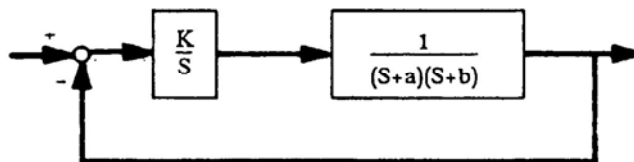
پارامترهای مجهول فوق تعیین شوند که بدین منظور آزمایش‌های ذیل بر روی سیستم مجهول فوق انجام شده است.

الف) - به ازاء ورودی پله‌ای واحد، عکس‌العمل سیستم بررسی گردید که نمودار آن بصورت شکل (م-۵-۱۵-الف) حاصل گردیده است.



شکل (م-۵-۱۵-الف)

ب) - سیستم فوق با یک کنترلر $\frac{K}{S}$ مطابق شکل (م-۵-۱۵-ب) در مدار بسته قرار گرفته و در حالت مرز پایداری مقدار K برابر $\frac{5}{2}$ بدست آمده است. با استفاده از اطلاعات حاصل از آزمون فوق مقادیر مجهول‌های a و b را برای شناسایی سیستم مورد نظر تعیین نمایید.

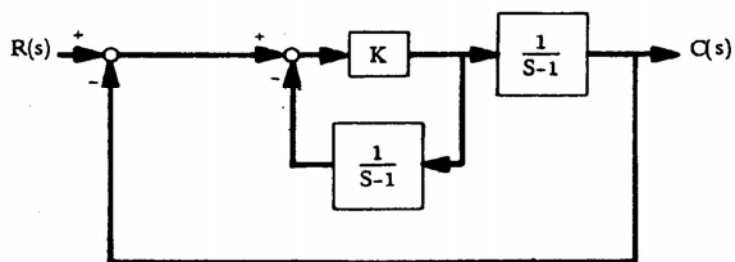


شکل (م-۵-۱۵-ب)

(۵-۱۶) - برای آنکه سیستم با تابع تبدیل ذیل پایدار باشد، محدوده مناسب K را برای آن تعیین نمایید.

$$G(S) = \frac{S^2 + 3S + 1}{S^4 + KS^3 + S^2 + S + 1}$$

(۱۷-۵) - مقدار K را برای سیستم مدار بسته شکل (م-۵-۱۷) چنان تعیین کنید که به ازاء آن سیستم مدار بسته «کاملاً پایدار» باشد.



شکل (م-۵-۱۷)

فصل ششم

کنترل فیدبک

مقدمه :

در این فصل با استفاده از روشهای کلاسیک کنترل^۱ به تحلیل سیستمهای فیدبک^۲ با یک ورودی و یک خروجی پرداخته می شود. باید توجه داشت که سیستمهای مدرن کنترلی که امروزه در صنایع و علوم بکار می روند گرچه بر پایه تئوریهای کنترل کلاسیک استوار هستند ولی دارای کاربرد وسیع تر و نتایج بسیار مطلوب تری نسبت به کنترل کلاسیک می باشند. طراحی سیستمهای پیچیده و مدرن کنترلی براساس روشهای کنترلی نظیر:

- کنترل فیدبک بردار حالت^۳،

- کنترل تطبیقی مدل مبنا^۴،

- کنترل تطبیقی مدل تعقیبی^۵،

- کنترل بهینه^۶،

و غیره پایه گذاری می شود که هر یک از این روشها، خود مبحثی مهم در علم کنترل بشمار

۱- Conventional or Classical Control Theory

۲- Feedback Systems

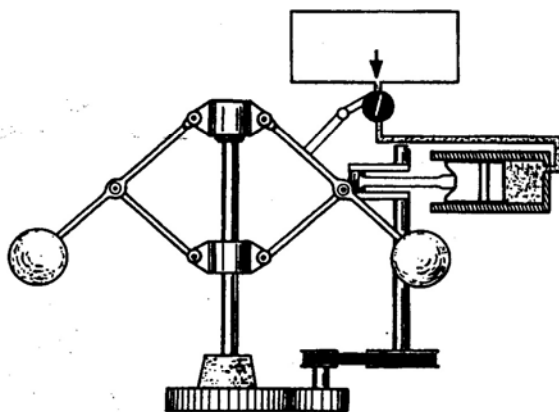
۳- State Vecctor Feedback Control (S.V.F.C)

۴- Model Reference Adaptive Control (M.R.A.C)

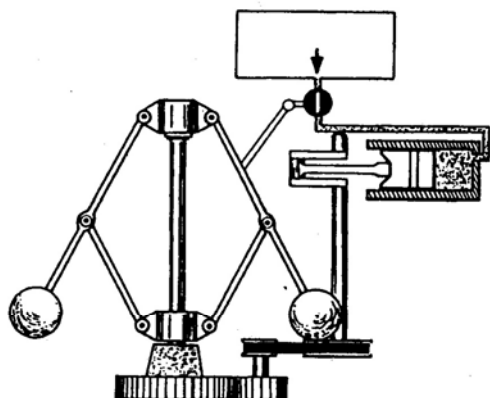
۵- Model Following Adaptive Control (M.F.A.C)

۶- Optimal Control

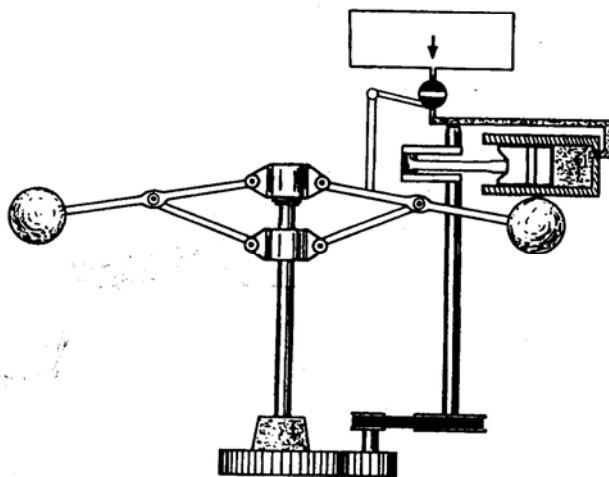
بمنظور ایجاد یک دیدگاه اولیه، در شکل (۶-۱) نمای شماتیک سیستم کنترلی "تنظیم کننده سرعت موتوربخار" نشان داده شده است. این سیستم کنترلی که خود سمیل گویایی برای کنترل فیدبک می باشد، در سال ۱۷۸۴ میلادی توسط وات اختراع شده که امروزه بنام گاورنر وات شناخته می شود.



شکل (۶-۱-۱۱)- سرعت "موتور بخار" در حالت مطلوب (مقدار بخار ورودی به موتور در شرایط عادی).

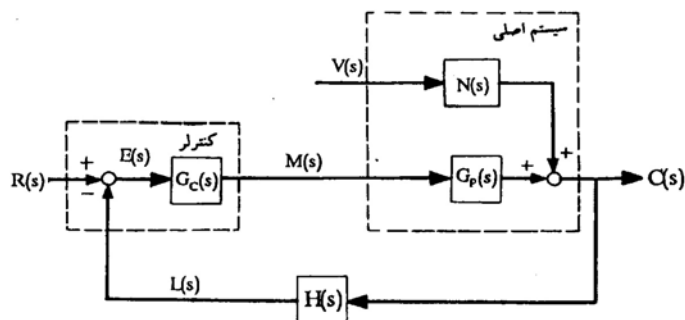


شکل (۶-۱-ب)- سرعت "موتور بخار" از سرعت مطلوب کمتر شده و سیستم کنترل با افزایش دادن بخار ورودی به موتور باعث ازدیاد سرعت آن می‌گردد.



شکل (۶-۱-ج)- سرعت "موتور بخار" از سرعت مطلوب بیشتر شده و سیستم کنترل با کاهش دادن مقدار بخار ورودی به موتور باعث کاهش سرعت موتور می‌گردد.

شکل (۶-۱)- نمایش شماتیک گاورنر وات بعنوان سمبل سیستم کنترل فیدبک در حالت‌های مختلف عملکرد و سرعت موتور.



شکل (۶-۲) - دیاگرام جعبه‌ای یک سیستم کنترل فیدبک (مدار بسته).

(۶-۱) - نمایش و ساختمان یک سیستم کنترل فیدبک :

شکل (۶-۲) دیاگرام جعبه‌ای یک سیستم کنترل فیدبک را نشان می‌دهد. مفهوم نمادهای شکل فوق در ذیل آمده است.
 $C(s)$: متغیری است که باید کنترل شود (بعبارتی طبق تعاریف اولیه همان خروجی سیستم می‌باشد).

$R(s)$: "ورودی مبنا" یا "نقطه تنظیم" یا "مقدار مطلوب" نامیده می‌شود.

$G_p(s)$: معرف تابع تبدیل سیستم اصلی (یعنی سیستمی که می‌خواهیم آن را کنترل کنیم) می‌باشد.

$V(s)$: بعنوان ورودی مزاحم به سیستم شناخته می‌شود.

$N(s)$: بیان‌کننده تابع تبدیل مربوط به ورودی مزاحم به سیستم است.

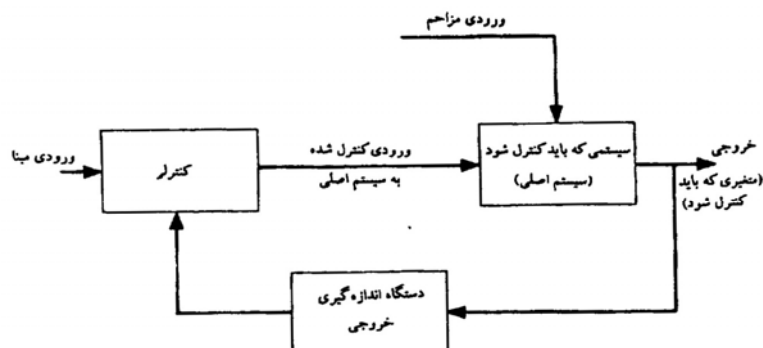
$M(s)$: ورودی کنترل شده به سیستم اصلی نامیده می‌شود.

$E(s)$: سیگنال خطای سیستم است.

$G_c(s)$: تابع تبدیل مربوط به کنترلر سیستم می‌باشد.

$H(s)$: معرف تابع تبدیل مدار فیدبک و معمولاً مربوط به دستگاه اندازه‌گیری خروجی سیستم است.

$L(s)$: مبین سیگنال فیدبک می‌باشد.

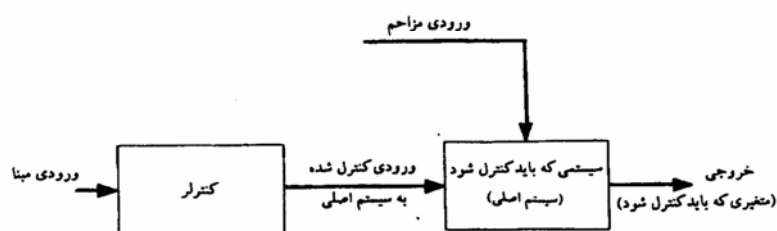


شکل (۳-۶). نمای شماتیک سیستم کنترلی فیدبک (مدار بسته). - فرم ساده شده شکل (۲-۶).

در شکل (۳-۶) نیز فرم ساده شده‌ای از شکل (۲-۶) ارائه شده است. دیاگرامهای اشکال (۲-۶) و (۳-۶) در تحلیل سیستمها و فرآیندهای مهندسی دارای کاربرد گسترده‌ای می‌باشند. در این سیستمها هدف آن است که خروجی $C(s)$ (یعنی متغیری که باید کنترل شود) حتی‌المقدور به ورودی مبنا $R(s)$ (که مقدار مطلوب و مورد نظری است) نزدیک باشد و همانطور که نشان خواهیم داد چنین سیستم مدار بسته‌ای تا حد زیادی ما را به این هدف نزدیک می‌نماید. برای این منظور به بررسی سیستم کنترلی دیاگرامهای فوق می‌پردازیم. باید توجه داشت که سیستم کنترلی فیدبک شکل (۲-۶) وقتی فعال می‌شود که خروجی یا عکس‌العمل سیستم به عللی از مقدار مطلوب و مورد نظر خود دور شود. در اینصورت سیستم کنترلی فیدبک خودبخود آنرا به حالت مطلوب برمی‌گرداند، از اینرو به آن "سیستم کنترلی خودکار یا اتوماتیک" گفته می‌شود. حال در اینجا باید پرسید که اصولاً چرا عکس‌العمل سیستم از مقدار مطلوب خود دور شده و چه عواملی باعث این تغییرات و انحراف از مقدار مطلوب می‌گردند؟ بطور کلی دو عامل می‌تواند باعث تغییرات نامطلوب در خروجی سیستم شود که عبارتند از:

الف) - تغییر پارامترهای سیستم اصلی.

ب) - تأثیر ورودی مزاحم.



شکل (۴-۶). نمای شماتیک یک سیستم کنترلی مدار بسته.

خاصیت مهم کنترل فیدبک آن است که علیرغم چنین تغییراتی، این سیستم کنترل با استفاده از مدار فیدبک با کم و زیاد کردن ورودی کنترل شده به سیستم اصلی یعنی $M(s)$ ، خروجی سیستم را به مقدار مطلوب آن باز می‌گرداند. یک سیستم کنترلی مدار باز را می‌توان بصورت شکل (۴-۶) نمایش داد.

در سیستم کنترلی مدار بسته شکل (۴-۶) علاوه بر "خودکار بودن کنترل خروجی" دو مزیت عمده دیگر نیز نسبت به سیستم کنترلی مدار باز شکل (۴-۶) وجود دارد که عبارتند از: - اثرورودیهای مزاحم در سیستم کنترلی مدار بسته بسیار کمتر از اثر آنها در سیستم کنترلی مدار باز است.

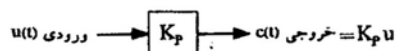
- حساسیت سیستم کنترلی مدار بسته نسبت به تغییرات پارامترها خیلی کمتر از سیستم کنترلی مدار باز است.

برای روشن شدن مطلب به ذکر مثالی می‌پردازیم. برای سادگی بحث، در این مثال سیستم اصلی را یک سیستم استاتیکی در نظر می‌گیریم.

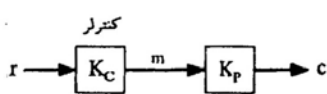
مثال (۱-۶):

فرض می‌کنیم که سیستم اصلی یا سیستمی که باید کنترل شود یک سیستم استاتیکی بصورت شکل (۵-۶) باشد. در اینجا هدف اصلی از کنترل سیستم آن است که خروجی حتی المقدور مساوی یا نزدیک به مقدار ثابت F باشد.

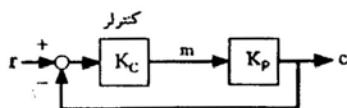
سیستم کنترلی را برای دو حالت کلی "مدار باز" و "مدار بسته" و برای شرایط "با ورودی مزاحم" و "با تغییر در پارامترها" به تفکیک مورد بررسی قرار می‌دهیم.



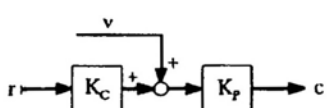
(a) نمایش سیستم اصلی یا سیستمی که باید کنترل شود



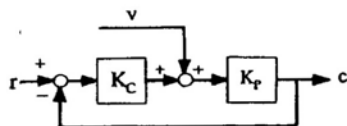
(b) سیستم کنترلی مدار باز



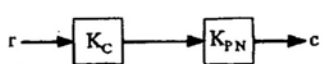
(c) سیستم کنترلی مدار بسته



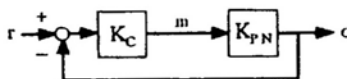
(d) سیستم کنترلی مدار باز با ورودی مزاحم



(e) سیستم کنترلی مدار بسته با ورودی مزاحم



(f) سیستم کنترلی مدار باز با تغییر در پارامترها



(g) سیستم کنترلی مدار بسته با تغییر در پارامترها

شکل (۵-۶). نمایش سیستم اصلی "استاتیکی" بمنظور بررسی کنترل خروجی سیستم در حالات مختلف.

الف)- بررسی سیستم کنترلی "مدار باز" و "مدار بسته" با "ورودی مزاحم":

در شکل (b-۵-۶)، که سیستم کنترلی مدار باز را نشان می‌دهد، داریم:

$$C = K_p K_c r \quad (a-۱-۶)$$

و برای آنکه خروجی C مساوی r باشد باید $K_c K_p = 1$ گردد. به عبارتی:

$$K_c = \frac{1}{K_p} \quad (b-۱-۶)$$

در شکل (c-۵-۶)، که سیستم کنترلی مدار بسته را نشان می‌دهد، داریم:

$$C = \frac{K_c K_p}{1 + K_c K_p} r \quad (c-۱-۶)$$

و برای آنکه مقدار C به ورودی مبنای r خیلی نزدیک باشد باید داشته باشیم:

$$K_c \gg \frac{1}{K_p} \quad (d-۱-۶)$$

و یا:

$$K_c K_p \gg 1$$

حال می‌خواهیم ببینیم اثر یک ورودی مزاحم در سیستمهای مدار باز و مدار بسته چگونه خواهد بود. شکل (d-۵-۶) سیستم کنترلی مدار باز با ورودی مزاحم را نشان می‌دهد که برای آن می‌توان نوشت:

$$C = K_c K_p r + K_p v \quad (e-۱-۶)$$

با توجه به اینکه مقدار K_c برای سیستم مدار باز از معادله (b-۱-۶) برابر $\frac{1}{K_p}$ می‌باشد، نتیجه می‌شود:

$$C = r + K_p v \quad (f-۱-۶)$$

همانطور که ملاحظه می‌شود در سیستم مدار باز، مقدار عکس‌العمل C مساوی r نبوده

بلکه اثر ورودی مزاحم بر سیستم بصورت $K_p V$ به آن اضافه شده است و کنترلر K_c نقشی در کم کردن اثر ورودی مزاحم در سیستم ندارد. در صورتیکه در شکل (e-۱-۶) که سیستم کنترلی مدار بسته با ورودی مزاحم را نشان می‌دهد داریم:

$$C = \frac{K_c K_p}{1 + K_c K_p} r + \frac{K_p}{1 + K_c K_p} V \quad (g-۱-۶)$$

چون بر طبق معادله (d-۱-۶) داریم $K_c K_p \gg 1$ ، لذا از معادله (g-۱-۶) نتیجه می‌شود:

$$C \sim r \quad (h-۱-۶)$$

یعنی در سیستم مدار بسته با انتخاب صحیح مقدار K_c (در اینجا با بزرگ کردن مقدار K_c) می‌توان اثر ورودی مزاحم را به حداقل رساند.

ب)- بررسی سیستم کنترلی "مدار باز" و "مدار بسته" با "تغییر در پارامترها":

در این قسمت اثر حساسیت سیستمهای کنترلی مدار باز و مدار بسته را نسبت به تغییرات در پارامترها مورد بررسی قرار می‌دهیم.

فرض می‌کنیم که K_p در سیستم اصلی به اندازه ۱۰٪ تغییر نماید (بزرگ شود) پس مقدار جدید K_p عبارت است از:

$$K_{pN} = 1.1 K_p \quad (i-۱-۶)$$

که در آن K_{pN} مقدار جدید K_p می‌باشد.

با توجه به این تغییر، در سیستم مدار باز شکل (f-۵-۶) داریم:

$$\begin{aligned} C &= K_c K_{pN} r \\ &= \left(\frac{1}{K_p}\right) (1.1 K_p) r \\ &= 1.1 r \end{aligned} \quad (j-۱-۶)$$

یعنی در سیستم مدار باز وقتی پارامترهای سیستم اصلی ۱۰٪ بزرگ شود، خروجی سیستم (یعنی C) نیز باندازه ۱۰٪ از مقدار مطلوب آن (یعنی r) فاصله گرفته است. در

صورتیکه در سیستم مدار بسته شکل (۵-۶) که در آن نیز پارامتر K_p باندازه ۱۰٪ بزرگ شده و بصورت K_{pN} درآمده داریم:

$$C = \frac{K_C K_{pN}}{1 + K_C K_{pN}} r = \frac{1.1 K_C K_p}{1 + 1.1 K_C K_p} r$$

با توجه به اینکه در سیستم مدار بسته $K_C K_p > 1$ است نتیجه می‌شود:

$$C \sim r$$

بنابراین حساسیت سیستم مدار بسته نسبت به تغییر در پارامترها خیلی کمتر از حساسیت سیستم کنترلی مدار باز می‌باشد.

یکی دیگر از مشخصات سیستم مدار بسته آن است که بخاطر وجود فیدبک در آن، ممکن است یک سیستم پایدار غیرارتعاشی بصورت ارتعاشی درآید. در قسمت بعد با نمایش و روابط مربوط به ارتعاش سیستم فیدبک بطور کامل آشنا خواهیم شد. در شکل (۶-۶) مثالی از ارتعاشی شدن یک سیستم فیدبک نشان داده شده است. در این مثال شخصی که در حال استحمام است در ابتدا و قبل از آنکه درجه حرارت آب دوش به درجه حرارت مطلوب و مورد نظر برسد مجبور است با چرخاندن شیرها مقدار آب سرد و گرم را مرتباً کم و زیاد نموده تا نهایتاً به درجه حرارت مطلوب دست یابد. بنابراین درجه حرارت آب دوش حول درجه حرارت مطلوب نوسان می‌کند تا نهایتاً به آن برسد.

حال معادلات سیستم فیدبک شکل (۶-۲) را بدست می‌آوریم. برای سیستم شکل فوق می‌توان نوشت:

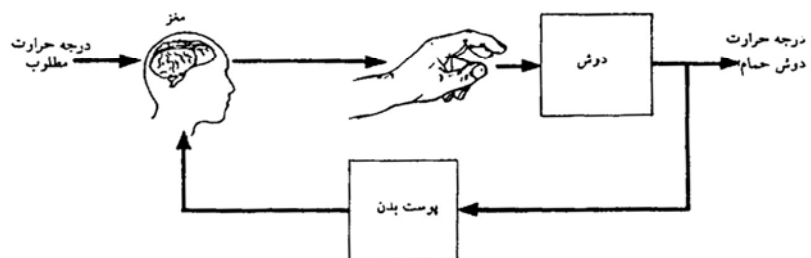
$$C(s) = \frac{G_C(s) G_p(s)}{1 + G(s)} R(s) + \frac{N(s)}{1 + G(s)} V(s) \quad (۲-۶)$$

و یا:

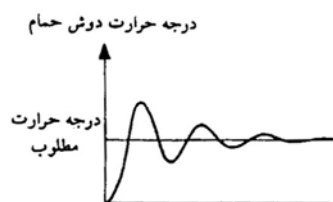
$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)} R(s) - \frac{H(s) N(s)}{1 + G(s)} V(s) \quad (۳-۶)$$



(a)



(b)



(c)

شکل (۶-۶).- نمایشی از ارتعاشی شدن سیستم فیدبک.

که در این روابط $G(s)$ را که عبارت از:

$$G(s) = G_c(s) G_p(s) H(s) \quad (۴-۶)$$

می باشد تابع تبدیل مدار باز می نامند (توجه داشته باشید که عبارت "مدار باز" برای معادله (۴-۶) و همچنین برای سیستمی که تحت تأثیر کنترل فیدبک نباشد بکار می رود). بر طبق معادلات فوق اگر المان فیدبک $H(s)$ مساوی واحد در نظر گرفته شود یعنی داشته باشیم:

$$H(s) = 1$$

در اینصورت سیستم کنترل فیدبک وقتی ایده آل است که داشته باشیم:

$$C(s) = R(s), \quad E(s) = 0$$

و این حالت در صورتی پیش می آید که بزرگنمایی^۱ مربوط به کنترلر بی نهایت بزرگ شود و در عین حال سیستم مدار بسته پایدار باقی بماند. یعنی سیستم مدار بسته بازاء شرایط زیر:

$$|G_c(s)| = K_c \rightarrow \infty$$

پایدار باشد.

با توجه به اینکه تقریباً اکثر سیستمهای مهندسی قبل از رسیدن به حد ایده آل مذکور ناپایدار می شوند، وظیفه طراح سیستم کنترلی آن است که بین "پایداری سیستم فیدبک" و «دقت کنترلی سیستم» تعادلی بوجود آورد (برای روشن شدن مطلب به مثال (۲-۶) مراجعه نمایید). معادلات (۲-۶) و (۳-۶) دارای مخرجهای مشترک $1+G(s)$ هستند. ریشه های معادله:

$$1 + G(s) = 0 \quad (۵-۶)$$

معرف مقادیر ویژه سیستم مدار بسته می باشند که بنام قطبهای سیستم مدار بسته شناخته

۱. Gain

می‌شوند. همچنین معادله (۵-۶) را "معادله مشخصه" سیستم مدار بسته می‌نامند. از آنجا که پایداری سیستم به مقادیر ویژه یا قطب‌های سیستم که همان ریشه‌های معادله مشخصه (۵-۶) می‌باشند بستگی دارد، این معادله در طراحی و آنالیز سیستمهای کنترل فیدبک نقش اساسی را ایفا می‌نماید.

فرض می‌کنیم که تابع تبدیل سیستم مدار باز یعنی $G(s)$ بصورت:

$$G(s) = G_C(s) G_P(s) = \frac{b_0 + b_1s + \dots + b_ms^m}{a_0 + a_1s + \dots + a_ns^n} \quad (۶-۶)$$

نمایش داده شود که در آن $H(s)=1$ فرض شده است. برای اینکه این تابع تبدیل مفهوم فیزیکی داشته باشد مرتبه مخرج کسر باید بزرگتر یا مساوی مرتبه صورت باشد. یعنی:

$$n \geq m \quad (۷-۶)$$

معادله (۶-۶) را بصورت فاکتورگیری شده زیر هم می‌توان نوشت:

$$G(s) = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} = K \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \quad * (۸-۶)$$

که در آن K عبارت از "بزرگنمایی مدار باز" [مساوی b_m/a_n در معادله (۶-۶) میباشد]، z_1 تا z_m [یا بطور کلی z_j ($j=1,2,\dots,m$)] عبارت از "صفرهای مدار باز" و p_1 تا p_n [یا بطور کلی p_i ($i=1,2,\dots,n$)] عبارت از "قطب‌های باز" می‌باشند.

از آنجا که همه ضرایب معادله (۶-۶) حقیقی هستند لذا قطب‌ها و صفرهایی که مختلط می‌باشند بصورت زوجهای قرینه^۱ خواهند بود. یعنی:

$$P_i \quad \text{یا} \quad z_j = -\alpha \pm j\beta$$

* علامت $\prod_{i=1}^n$ نشاندهنده حاصلضرب $i=1$ تا n عبارتی است که بدینال آن نوشته می‌شود.

۱. Complex Conjugate Pairs

که α و β اعداد حقیقی و $\beta > 0$ است، لذا معادله (۸-۶) را بصورت ذیل نیز می‌توان نوشت:

$$G(s) = K \frac{\prod (s - z_i) \prod [(s + \alpha_j)^2 + \beta_j^2]}{\prod (s - p_i) \prod [(s + \alpha_i)^2 + \beta_i^2]} \quad (9-6)$$

در سیستم فیدبک قطب‌های مدار بسته ریشه‌های معادله (۵-۶) می‌باشند که برای بدست آوردن آنها، $G(s)$ را از معادله (۶-۶) در (۵-۶) قرار می‌دهیم. در اینصورت معادله مشخصه سیستم مدار بسته بصورت زیر خواهد شد:

$$(a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n) + (b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_m s^m) \\ = \prod_{i=1}^n (s - p_i) = 0 \quad (10-6)$$

در معادله (۱۰-۶)، p_i ($i=1,2,\dots,n$)، قطب‌های مدار بسته یا همان ریشه‌های معادله مشخصه سیستم مدار بسته می‌باشند.

عکس‌العمل سیستم مدار بسته یعنی $C(s)$ در معادله (۲-۶) را می‌توان چنین نوشت:

$$C(s) = \left[\begin{array}{c} \text{تابع تبدیل بین ورودی مبنا} \\ \text{و خروجی در مدار بسته} \end{array} \right] R(s) + \left[\begin{array}{c} \text{تابع تبدیل بین ورودی مزاحم} \\ \text{و خروجی در مدار بسته} \end{array} \right] V(s) \\ = [G_R(s)] R(s) + [G_V(s)] V(s) \quad (11-6)$$

که در آن توابع تبدیل $G_R(s)$ و $G_V(s)$ عبارتند از:

$$G_R(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}, \quad G_V(s) = \frac{N(s)}{1 + G(s)} \quad (12-6)$$

با استفاده از معادلات (۸-۶) و (۱۰-۶)، تابع تبدیل بین ورودی مبنا و خروجی (یعنی

$G_R(s)$ برابر است با:

$$G_R(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{K \frac{\prod_1^m (s - z_j)}{\prod_1^n (s - p_i)}}{1 + K \frac{\prod_1^m (s - z_j)}{\prod_1^n (s - p_i)}} \quad (۱۳-۶)$$

و:

$$= \frac{K \prod_1^m (s - z_j)}{\prod_1^n (s - p_i) + K \prod_1^m (s - z_j)} = \frac{K \prod_1^m (s - z_j)}{\prod_1^n (s - p_i)}$$

در اینجا فرض می‌کنیم n بزرگتر از m باشد که از شرط (۷-۶) قوی‌تر و در اکثر سیستمهای حقیقی صادق است.

اگر قطبهای مدار بسته را بدو دسته حقیقی و مختلط تقسیم نموده، قطبهای حقیقی را با P_i و قطبهای مختلط را با $-\sigma_i \pm j\omega_i$ نشان دهیم معادله (۱۳-۶) چنین خواهد شد:

$$G_R(s) = \frac{B(s)}{\prod (s - P_i) \prod [(s + \sigma_i)^2 + \omega_i^2]} \quad (۱۴-۶)$$

که در آن $B(s)$ همان صورت کسر از رابطه (۱۳-۶) و P_i نیز عبارت از قطبهای حقیقی سیستم مدار بسته می‌باشد.

حال پایداری سیستم مدار بسته را بصورت زیر بیان می‌نمائیم:

یک سیستم کنترل فیدبک خطی پایدار است اگر و تنها اگر تمامی "قطبهای حقیقی" و تمامی "قسمتهای حقیقی قطبهای مختلط" منفی باشند. یعنی داشته باشیم:

$$P_i = -\lambda_i \quad (\lambda_i > 0) \quad , \quad \sigma_i > 0 \quad (۱۵-۶)$$

همچنین می‌توانیم مودهای سیستم مدار بسته را با توجه به روابط موجود بدست آوریم. برطبق معادلات (۲-۶)، (۱۴-۶) و (۱۵-۶) مودهای زیر در عکس‌العمل یک سیستم کنترل فیدبک پایدار ظاهر می‌شوند.

$$e^{-\lambda_i t}, \quad e^{-\sigma_i t} \sin \omega_i t, \quad e^{-\sigma_i t} \cos \omega_i t \quad (۱۶-۶)$$

در اینجا فرض شده است که همه قطب‌ها مجزا بوده و عبارتی قطب تکراری نداشته باشیم. همانطور که ملاحظه می‌شود همه مودهای سیستم بتدریج و با افزایش زمان به سمت صفر میل کرده و از بین می‌روند. سرعت از بین رفتن مودها نیز به λ_i و σ_i بستگی داشته و هر چه λ_i و σ_i بزرگتر باشند مودهای مربوطه سریعتر از بین می‌روند.

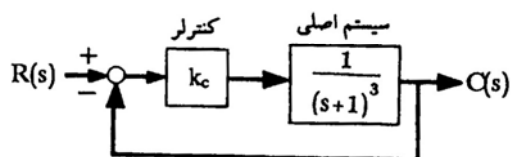
همانطور که در قسمت بعد خواهیم دید در یک سیستم کنترلی مدار بسته عمدتاً یک مود ارتعاشی بصورت $e^{-\sigma_i t} \sin \omega_i t$ و یا $e^{-\sigma_i t} \cos \omega_i t$ وجود دارد که سرعت از بین رفتن آن به مراتب آهسته‌تر از بقیه مودها است. عبارت دیگر سیستم دارای دو قطب مسلط بصورت:

$$P_{d1}, P_{d2} = -\sigma_1 \pm j\omega_1 \quad (۱۷-۶)$$

می‌باشد که در آن σ_1 به مراتب کوچکتر از "سایر قطب‌های حقیقی و قسمت حقیقی قطب‌های مختلط" می‌باشد. این قطب‌های معادله مشخصه سیستم مدار بسته را "قطب‌های مسلط" می‌نامند.

مثال (۲-۶):

در سیستم شکل (۷-۶) توابع تبدیل بصورت $G_p(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$ و $G_c(s) = K_c$ بوده و $H(s) = 1$ می‌باشد. بنابراین $G(s) = K_c \frac{1}{(s+1)^3}$ خواهد بود. می‌خواهیم اولاً در مورد دقت این سیستم کنترلی یعنی نزدیک بودن عکس‌العمل سیستم $c(t)$ به



شکل (۷-۶) - سیستم کنترلی مدار بسته.

ورودی مبنای $r(t)$ برحسب مقادیر مختلف K_C بحث کنیم، ثانیاً پایداری سیستم مدار بسته را بررسی نمائیم.
- اولاً داریم:

$$C(s) = \frac{\frac{K_C}{(s+1)^3}}{1 + \frac{K_C}{(s+1)^3}} R(s) = \frac{K_C}{(s+1)^3 + K_C} R(s)$$

اگر ورودی تابع پله‌ای واحد یعنی $r(t)=1$ باشد $[R(s)=1/s]$ مقدار نهائی خروجی یعنی $C(t)$ باید مساوی واحد شود. از طرفی داریم:

$$C(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} s C(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K_C}{(s+1)^3 + K_C} \cdot \frac{1}{s} = \frac{K_C}{1 + K_C} \quad (۱۸-۶)$$

این رابطه نشان می‌دهد که دقت کنترل در سیستم مدار بسته بستگی به انتخاب K_C دارد و برای آنکه خروجی کاملاً مساوی ورودی شود (یعنی در رابطه فوق مقدار نهائی $C(t)$ مساوی واحد شود) باید $K_C \rightarrow \infty$ میل کند یعنی K_C باید بی‌اندازه بزرگ شود. بطور مثال برای $K_C=9$ مقدار نهائی $C(t)$ مساوی 0.9 می‌شود یعنی 10% خطا خواهیم داشت بنابراین برای کم کردن خطا، K_C باید خیلی بزرگ شود. در جدول ذیل

مقدار $C(t)$ نهائی و همچنین مقدار خطای حاصله برحسب مقدار K_c ارائه شده است.

K_c	1	4	9	99	999	∞
مقدار نهایی $C(t)$	0.5	0.8	0.9	0.99	0.999	1
درصد خطای نهایی	50%	20%	10%	1%	0.1%	0.0%

- ثانیاً برای اینکه سیستم مدار بسته پایدار باشد ریشه‌های معادله مشخصه سیستم مدار بسته یعنی ریشه‌های معادله زیر:

$$1 + \frac{K_c}{(s+1)^3} = 0 \quad \text{یا} \quad (s+1)^3 + K_c = 0$$

باید در سمت چپ محور موهومی قرار گیرند و یا عبارتی ریشه‌های حقیقی و قسمت حقیقی ریشه‌های مختلط همواره باید منفی باشند.
پس:

$$(s+1)^3 + K_c = 0 \Rightarrow (s+1)^3 = K_c (-1) = K_c e^{j(2n+1)\pi}$$

که نتیجه می‌شود:

$$s+1 = \sqrt[3]{K_c} e^{j(\frac{2n+1}{3})\pi}$$

بازاء $n=0$:

$$p_1 = -1 + \sqrt{K_c} \left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

و بازاء $n=1$:

$$p_2 = -1 - \sqrt[3]{K_c}$$

و بازاء $n=-1$:

$$P_3 = -1 + \sqrt[3]{K_C}(1/2 - j\sqrt{3}/2)$$

و برای پایداری باید داشته باشیم:

$$-1 + \frac{1}{2} \sqrt[3]{K_C} < 0 \Rightarrow K_C < 8$$

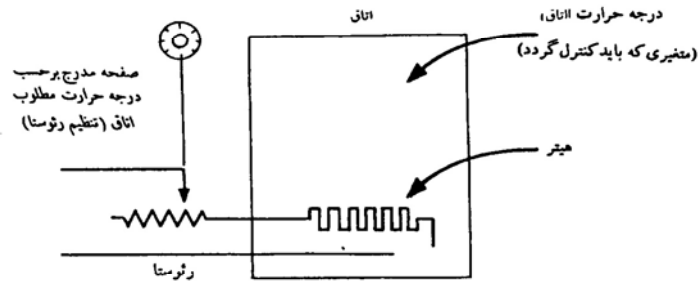
بنابراین برای پایداری بودن سیستم باید $K_C < 8$ باشد و دقت سیستم نیز در جدول فوق فقط برای محدوده $K_C < 8$ می باشد.

مثال (۳-۶):

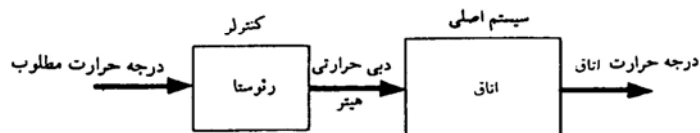
بررسی سیستم کنترلی "مدار باز پیوسته":

سیستم شکل (۸-۶) یک سیستم کنترلی مدار باز پیوسته را نشان می دهد. در هر سیستم کنترلی مدار باز، کنترلر مستقل از متغیری که باید کنترل شود* عمل می کند. در سیستم شکل مذکور، کنترلر عبارت از یک رئوستا می باشد که مقاومت آن مقدار دبی حرارتی ورودی به اتاق (از طریق هیتر) را کنترل می کند. و این امر یعنی کنترل مقدار دبی حرارتی ورودی باعث کنترل درجه حرارت اتاق (یعنی متغیری که در سیستم باید کنترل شود) می گردد. در اینجا درجه بندی رئوستا برحسب درجه حرارت مطلوب و مورد نظر اتاق است. یعنی مقادیر مقاومت رئوستا (که باعث تغییر در جریان الکتریکی مدار و در نتیجه تغییر در دبی حرارتی ورودی و نهایتاً تغییر در درجه حرارت اتاق می گردد) بر روی یک صفحه مدرج برحسب درجه حرارت مورد نظر درجه بندی شده است. در اینصورت مثلاً با تنظیم رئوستا بر روی ۲۰ یا ۲۵ درجه سانتیگراد، حرارت اتاق نیز به ۲۰ یا ۲۵ درجه سانتیگراد می رسد. واضح است که در اینجا هرگونه تغییر در

* منظور همان خروجی سیستم است.



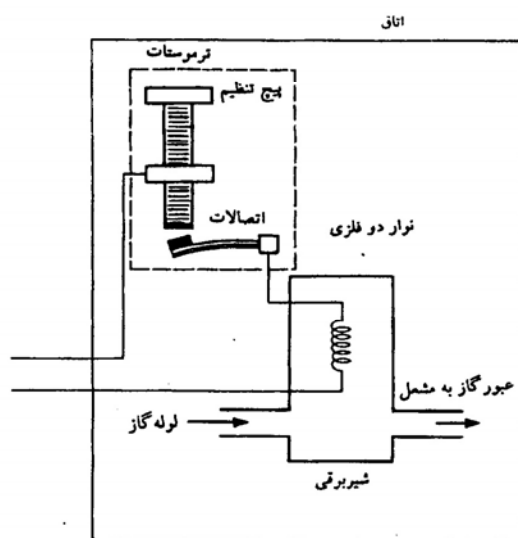
(a) - شماتیک سیستم



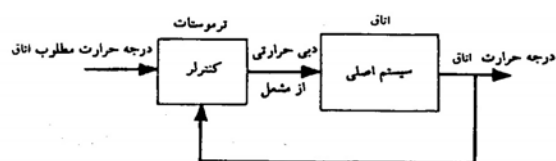
(b) - دیاگرام جعبه‌ای سیستم

شکل (۸-۶) - سیستم کنترلی مدار باز پیوسته (سیستم حرارتی).

سیستم (نظیر باز و بسته شدن پنجره‌ها یا کم و زیاد شدن درجه حرارت محیط اطراف) باعث تغییر درجه حرارت اتاق می‌شود. در حالیکه رئوستا و صفحه مدرج آن این تغییرات را حس نمی‌کنند (زیرا سیستم مدار باز است). از اینرو در حالیکه صفحه مدرج مربوط به رئوستا مثلاً عدد ۲۰ را نشان می‌دهد، درجه حرارت واقعی اتاق بخاطر سرد شدن هوای بیرون ۱۵ درجه سانتیگراد است. بنابراین در چنین سیستمی برای تنظیم رئوستا حضور دائمی یک اپراتور (بطوریکه با کم و زیاد کردن مقاومت رئوستا درجه حرارت اتاق را تنظیم نماید) اجتناب ناپذیر بوده که این امر نقص سیستم کنترلی مدار باز بشمار می‌آید.



(a) - شماتیک سیستم



(b) - دیاگرام جعبه‌ای سیستم

شکل (۹-۶) - سیستم کنترلی "مدار بسته غیر پیوسته" (سیستم تنظیم دمای اتاق بوسیله ترموستات).

مثال (۴-۶):

بررسی سیستم کنترلی "مدار بسته غیر پیوسته":

شکل (۹-۶) سیستم کنترل درجه حرارت اتاق که بوسیله یک ترموستات (کنترلر) انجام می‌شود را نشان می‌دهد. در این سیستم بوسیله پیچ تنظیم، ترموستات طوری

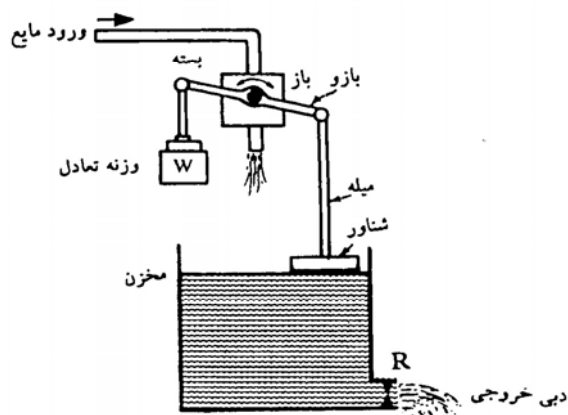
تنظیم می‌شود که در درجه حرارت مطلوب و مورد نظر اولین تماس و اتصال بین "اتصالات" ترموستات برقرار شود.

اگر درجه حرارت اتاق از درجه حرارت مطلوب کمتر باشد نوار بی‌مثال (دو فلزی) بحالت کشیده و صاف درآمده و اتصال برقرار می‌شود در نتیجه جریان از مدار الکتریکی عبور می‌نماید. برقرارشدن جریان در مدار نیز سبب باز شدن شیربرقی لوله عبور گاز به مشعل گردیده و در نتیجه مشعل روشن و اتاق گرم می‌شود. پس از گرم شدن اتاق وقتی دمای آن از درجه حرارت مطلوب بالاتر رفت نوار بی‌مثال خم شده و اتصالات ترموستات قطع می‌شوند و در نتیجه قطع شدن جریان مدار الکتریکی، شیربرقی، جریان گاز را قطع نموده و مشعل خاموش می‌شود و بدین ترتیب درجه حرارت اتاق پائین می‌آید. این سیستم کنترلی مدار بسته یک سیستم غیرپیوسته می‌باشد. یعنی یا مدار الکتریکی وصل است و لذا مشعل روشن و دبی حرارتی وارد اتاق می‌شود و یا مدار الکتریکی قطع بوده و هیچگونه دبی حرارتی توسط مشعل وارد اتاق نمی‌شود. پس سیستم در یکی از حالات ON یا OFF خواهد بود و عبارتی دبی ورودی غیرپیوسته و در نتیجه سیستم نیز غیرپیوسته خواهد بود.

مثال (۵-۶):

بررسی سیستم کنترلی "مدار بسته پیوسته":

شکل (۱۰-۶) یک سیستم کنترلی مدار بسته و پیوسته را نشان می‌دهد که برای کنترل ارتفاع مایع در مخازن (نظیر کنترل ارتفاع بنزین در مخزن یک پالایشگاه) مورد استفاده قرار می‌گیرد. بمنظور کنترل سطح مایع، توسط شناور متصل به میله، فرمان کنترل به شیر که مایع از طریق آن وارد مخزن می‌گردد، داده می‌شود. ارتفاع مورد نظر^۱ باین ترتیب کنترل می‌شود که با تنظیم شناور و میله (برای ارتفاع مطلوب سطح مایع مخزن)، شیر ورودی مایع همواره به اندازه‌ای باز بماند که دبی ورودی به ظرف مساوی دبی خروجی از آن باشد. اگر بعللی ارتفاع مایع از این مقدار مطلوب بیشتر

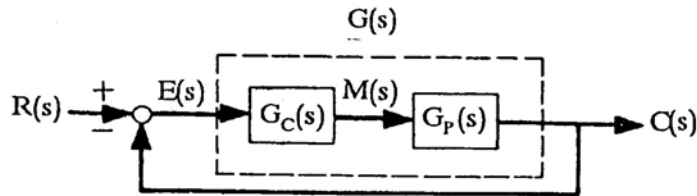


شکل (۶-۱۰) - سیستم کنترلی "مدار بسته" و "پیوسته".

شود شناور بالا آمده و با چرخاندن بازوی شیر (پیچ شیر) سبب می‌شود که مایع کمتری نسبت به آنچه از ظرف خارج می‌شود به آن وارد شود، در نتیجه ارتفاع مایع کاهش یافته و به حالت مطلوب خود می‌رسد. برعکس اگر ارتفاع مایع از حالت مطلوب کمتر شود شناور پائین آمده و شیر ورودی بیشتر باز می‌شود و دبی ورودی بیشتر از دبی خروجی گردیده و ارتفاع سطح مایع افزایش خواهد یافت. سیستم شکل (۶-۱۰) نمونه‌ای از یک سیستم کلاسیک کنترل اتوماتیک است. در این مثال نیز در کنترلر مقدار واقعی متغیری که باید کنترل شود (ارتفاع مایع) با مقدار مطلوب آن مقایسه می‌شود و کنترلر در جهت صفر کردن تفاوت آنها وارد عمل می‌شود. در این مثال چون ورودی به سیستم بطور پیوسته در جریان است (گرچه مقدار آن کم و زیاد می‌شود) سیستم را پیوسته می‌نامند.

(۶-۲) - عکس‌العمل یا رفتار سیستم فیدبک:

رفتار سیستم فیدبک بستگی به مودهای مدار بسته داشته و مودهای مدار بسته نیز بستگی به قطب‌ها یا مقادیر ویژه سیستم مدار بسته دارند. بنابراین طراحی سیستم مدار بسته عبارت



شکل (۱۱-۶) - شماتیک سیستم مدار بسته (باصرفنظر کردن از ورودی مزاحم).

از تعیین همین قطب‌ها یا مقادیر ویژه خواهد بود. از آنجا که طراحی سیستم مدار بسته مستقل از نوع ورودی می‌باشد، در این قسمت رفتار سیستم را تحت تأثیر ورودی مبنا و با صرفنظر کردن از ورودی مزاحم (یعنی با فرض صفر بودن ورودی مزاحم $V(s)$) مورد بررسی قرار می‌دهیم. از اینرو سیستم مدار بسته، بصورت شکل (۱۱-۶) خواهد بود.

در این سیستم می‌خواهیم عکس‌العمل $c(t)$ را با زاء ورودی مبنا و مساوی تابع پله‌ای واحد بدست آوریم:

$$R(s) = \frac{1}{s} \quad (۱۹-۶)$$

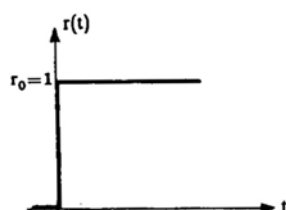
به این ترتیب $C(s)$ و $E(s)$ عبارتند از:

$$C(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} R(s) = G_R(s) R(s) = \frac{1}{s} G_R(s) \quad (۲۰-۶)$$

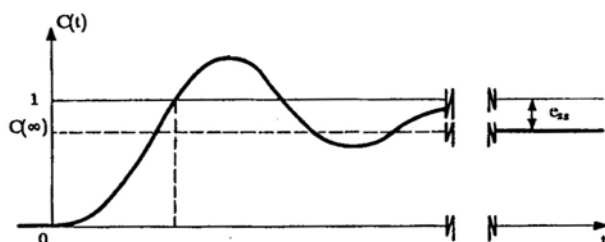
$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)} R(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{1 + G(s)} \quad (۲۱-۶)$$

با انجام تبدیل معکوس لاپلاس از معادله (۲۰-۶) نتیجه می‌شود:

$$c(t) = \mathcal{L}^{-1} C(s) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} G_R(s) \right] \quad (۲۲-۶)$$



(a)



(b)

شکل (۱۲-۶) - نمایش :

(a) - ورودی مبنای معادل تابع پله‌ای واحد.

(b) - عکس‌العمل سیستم مدار بسته نسبت به ورودی پله‌ای واحد.

چون $G_R(s)$ در حالت کلی بصورت معادله (۱۴-۶) می‌باشد داریم:

$$C(s) = \frac{1}{s} G_R(s) = \frac{C_0}{s} + \frac{C_1 s + C_2}{(s + \sigma_1)^2 + \omega_f^2} + \left[\begin{array}{l} \text{نرمهای مربوط به بقیه} \\ \text{قطب‌های مدار بسته} \end{array} \right] \quad (23-6)$$

که در آن C_1 و C_2 ضرایب مربوط به قطب‌های مسلط بوده و $C_0 = c_\infty$ نیز عبارت از مقدار نهایی $c(t)$ می‌باشد. در شکل (۱۲-۶) نمایش ورودی $r(t)$ و خروجی $c(t)$ رسم شده است. چون در معادله (۲۳-۶) اثر نرمهای مربوط به بقیه قطب‌های مدار بسته (بجز قطب‌های مسلط) بزودی از بین می‌روند، در عکس‌العمل $c(t)$ تنها، اثر قطب‌های مسلط بصورت مودهای ارتعاشی (که در شکل (۱۲-۶) نمایش داده شده) باقی می‌ماند. مقدار نهایی $c(t)$ یعنی c_∞ ممکن است بازاء ورودی پله‌ای واحد مساوی یک گردد. همچنین ممکن است مقدار نهایی $c(t)$ عددی غیر

از واحد باشد. اگر مقدار نهائی $c(t)$ مساوی واحد شود، سیستم در حالت ماندگار^۱ هیچگونه خطائی ندارد. ولی اگر مقدار نهائی $c(t)$ غیر از واحد باشد اختلاف آن با ورودی مبنای واحد، عبارت از خطای حالت ماندگار e_{ss} خواهد بود. بنابراین بطور کلی داریم:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} (r(t) - c(t)) = r_0 - c(\infty) \quad (a-24-6)$$

همانطور که از معادلات (۶-۲۰)، (۶-۲۲) و (۶-۲۳) پیداست، عکس العمل $c(t)$ نسبت به یک ورودی $r(t)$ تنها بستگی به ریشه های معادله مشخصه (۶-۵) یعنی قطب های معادله (۶-۱۴) دارد. عکس العمل $c(t)$ سیستم مدار بسته با مشخصاتی نظیر " حداکثر پرش^۲ "، " زمان صعود^۳ "، " زمان استقرار^۴ " و " مقدار نهائی خطا^۵ " بیان می گردد که در ادامه این قسمت باختصار به تعریف آنها پرداخته می شود. از آنجا که این مشخصات توسط مؤلفین کتابهای مختلف (در این زمینه) گاهی با اندکی تفاوت بیان گردیده اند لذا در اینجا به توضیح فیزیکی این مقادیر بجای تعاریف دقیق آنها می پردازیم.

نمودار شکل (۶-۱۳)، عکس العمل $c(t)$ سیستم مدار بسته نسبت به ورودی پله ای r_0 را نشان می دهد که با توجه به آن تعاریف ذیل ارائه می گردد:

الف)- حداکثر پرش: عبارت از حداکثر مقدار $c(t)$ می باشد.

ب)- زمان صعود: عبارت از زمانی است که بازاء آن برای اولین بار مقدار عکس العمل $c(t)$ برابر ورودی مبنا r_0 می شود.

ج)- زمان استقرار: عبارت از زمانی است که پس از آن عکس العمل $c(t)$ در محدوده $\pm \varepsilon$ از مقدار نهائی اش یعنی $c(\infty)$ قرار می گیرد و معمولاً معادل 5% برای ε انتخاب می شود.

د)- خطای حالت ماندگار: عبارت از تفاوت مقدار ورودی مبنا و خروجی در حالت ماندگار بوده و به e_{ss} نمایش داده می شود.

با توجه به اهمیت خطای حالت ماندگار e_{ss} در ذیل به تشریح آن می پردازیم.

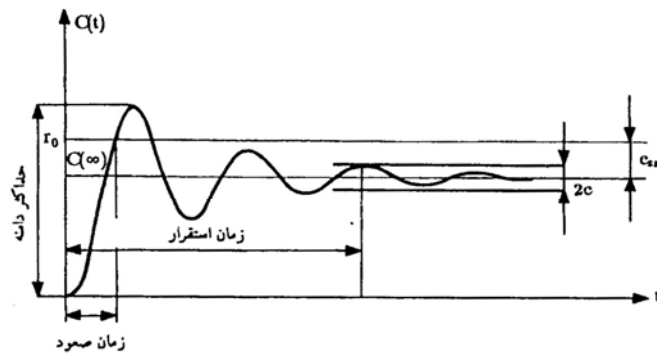
۱- Steady State

۲- Maximum Overshoot

۳- Rise Time

۴- Settling Time

۵- Steady State Error



شکل (۱۳-۶). نمودار عکس العمل سیستم مدار بسته نسبت به ورودی پله‌ای برای نمایش تعاریف اساسی.

(۱-۲-۶). خطای حالت ماندگار (c_{ss}):

بنابراین تعریف، خطای حالت ماندگار عبارت است از تفاوت مقدار ورودی مینا و خروجی در حالت ماندگار، یعنی:

$$c_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} [r(t) - c(t)] = r_0 - c(\infty) \quad (b-۲۴-۶)$$

با استفاده از قضیه مقدار نهائی داریم:

$$c_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) \quad (۲۵-۶)$$

که برای سیستم شکل (۲-۶)، $E(s)$ از رابطه (۳-۶) بدست می‌آید. برای محاسبه خطای حالت ماندگار باید مقادیر رابطه (۳-۶) را بازاء $s \rightarrow 0$ بدست آوریم.

برای این منظور ابتدا فرم دیگری از نمایش تابع تبدیل $G(s)$ را بصورت ذیل معرفی می‌کنیم:

$$G(s) = K \frac{\prod (1 + T_j s) \prod [1 + 2\zeta_j (T_j s) + (T_j s)^2]}{s^N \prod (1 + T_i s) \prod [1 + 2\zeta_i (T_i s) + (T_i s)^2]} \quad (26-6)$$

این رابطه برای تابع تبدیل مدار باز از معادله (۴-۶) با $H(s)=1$ در نظر گرفته شده است. نظیر این رابطه را برای $N(s)$ یعنی تابع تبدیل مربوط به ورودی مزاحم از رابطه (۳-۶) می‌توان نوشت. در رابطه (۲۶-۶)، T_i و T_j را ثابتهای زمانی نامیده و عوامل درجه دو در صورت و مخرج نیز بازاء $1 < |\zeta|$ نشاندهنده قطب‌ها و صفرهای مختلط تابع $G(s)$ می‌باشند. همچنین ورودی مبنای $R(s)$ و ورودی مزاحم $V(s)$ را نیز می‌توان با معادله‌ای نظیر معادله (۲۶-۶) نمایش داد. مثلاً اگر ورودی مبنا تابع پله‌ای با مقدار r_0 و ورودی مزاحم نیز تابع پله‌ای با مقدار v_0 باشد داریم:

$$R(s) = \frac{r_0}{s} \quad (27-6)$$

و

$$v(s) = \frac{v_0}{s} \quad (28-6)$$

مطابق تعریف، در معادله (۲۶-۶) اگر:

$N=0$ باشد تابع $G(s)$ را "تابع نوع صفر" می‌نامند.

$N=1$ باشد تابع $G(s)$ را "تابع نوع یک" می‌نامند.

$N=2$ باشد تابع $G(s)$ را "تابع نوع دو" می‌نامند.

وبطور کلی $G(s)$ را در معادله (۲۶-۶) "تابع نوع N " می‌نامند. با این تعریف، توابع پله‌ای معادلات (۲۷-۶) و (۲۸-۶) یعنی ورودی‌های پله‌ای، جزو توابع نوع یک هستند و اصولاً وقتی همه T ها و ζ ها مثبت باشند، هر تابع نوع یک (بعبارت صحیح‌تر هر سیگنال نوع یک)

دارای "مقدار معین" می باشد. مثلاً در مورد معادله (۶-۲۷) داریم:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sR(s) = r_0$$

همچنین:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sV(s) = v_0 \quad (۶-۲۹)$$

با این مقدمات می توانیم نشان دهیم که:

در یک سیستم فیدبک با تابع تبدیل مدار باز از نوع صفر که تحت تأثیر ورودی مبنا از نوع یک قرار می گیرد (سیستم با فیدبک واحد)، خطای حالت ماندگار ایجاد می شود و مقدار این خطا عبارت است از:

$$e_{ss} = e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [sE(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{sR(s)}{1+G(s)} \right] = \frac{r_0}{1+K} \quad (۶-۳۰)$$

خطای حالت ماندگار یک سیستم کنترلی فیدبک با تابع تبدیل نوع صفر که تحت تأثیر ورودی مبنا از نوع یک قرار می گیرد بنابه تعریف "افست" نامیده می شود. بنابراین "افست" عبارت از "خطای حالت ماندگار در یک سیستم فیدبک با یک تابع تبدیل مدار باز از نوع صفر و تحت تأثیر ورودی از نوع یک" می باشد.

به همین ترتیب می توانیم افست ایجاد شده توسط ورودی مزاحم را بدست آوریم. مثلاً در سیستم شکل (۶-۲) اگر $N(s)$ از نوع صفر، K_N ضریب ثابت تابع تبدیل $N(s)$ [نظیر مقدار ثابت K در معادله (۶-۲۶)] و ورودی مزاحم $V(s)$ از نوع یک باشد در اینصورت برای فیدبک واحد ($H(s)=1$) خطای حالت ماندگار یا افست [با توجه به معادله (۶-۳۰)] عبارت است از:

$$e_{ss} = e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{-sN(s)V(s)}{1+G(s)} \right] = \frac{-K_N v_0}{1+K} \quad (۶-۳۱)$$

که در آن v_0 از معادله (۶-۲۹) حاصل شده است.

همانطور که گفته شد افست یا خطای حالت ماندگار وقتی ایجاد می شود که تابع تبدیل مدار باز $G(s)$ از نوع صفر باشد. یعنی در مخرج کسر $G(s)$ توانهای s بصورت فاکتورگیری شده وجود نداشته باشد ($N=0$ باشد). با توجه به اینکه $G(s) = G_c(s)G_p(s)$ می باشد، نشان خواهیم داد که برای از بین بردن افست، کافی است کنترلر $G_c(s)$ را طوری انتخاب کنیم که شامل یک انتگرال گیرنده باشد.

مثال (۶-۶):

می خواهیم در سیستمهای a و b از شکل (۶-۱۴) مقدار نهائی $C(\infty)$ و خطای حالت ماندگار e_{ss} را بازاء ورودی مینای تابع پله ای محاسبه نمائیم.

در هر دو سیستم فوق، تابع تبدیل سیستم اصلی یکسان و عبارت از $G_p(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$ می باشد. اما تفاوت دو سیستم در آن است که در سیستم شکل (۶-۱۴-۲) کنترلر یک مقدار ثابت K_c و در سیستم شکل (۶-۱۴-۱) کنترلر، یک انتگرال گیرنده $\frac{K_c}{s}$ می باشد. برای سیستم شکل (۶-۱۴-۲) داریم:

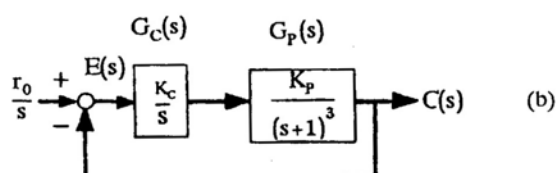
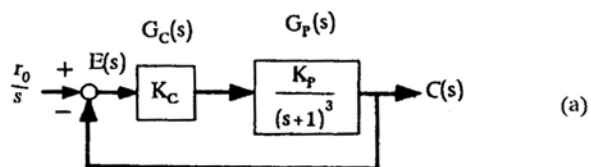
$$G(s) = G_c(s) G_p(s) = \frac{K_c K_p}{(s+1)^3}$$

چون تابع تبدیل مدار باز از نوع صفر است ورودی (یعنی $R(s) = \frac{r_0}{s}$) نیز از نوع یک می باشد. لذا مقدار نهائی یا $C(\infty)$ مساوی r_0 نخواهد شد، بلکه افست نیز خواهیم داشت. بنابراین:

$$e_{ss} = e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [sE(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{sR(s)}{1+G(s)} \right] = \frac{r_0}{1+K_c K_p}$$

همچنین $C(\infty)$ عبارت است از:

$$C(\infty) = r_0 - e_{ss} = r_0 - \frac{r_0}{1+K_c K_p} = \frac{K_c K_p}{1+K_c K_p} r_0$$



شکل (۶-۱۴) - نمایش دیاگرام جعبه‌ای سیستم مدار بسته:

(a) - با کنترلر ثابت

(b) - با کنترلر انتگرال‌گیرنده

برای سیستم شکل (۶-۱۴b) داریم:

$$G(s) = G_C(s) G_P(s) = \frac{K_C K_P}{s(s+1)^3}$$

و:

$$e_{ss} = sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{sR(s)}{1+G(s)} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{r_0}{1 + \frac{K_C K_P}{s(s+1)^3}} \right]$$

و یا:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{r_0 s(s+1)^3}{K_C K_P + s(s+1)^3} \right] = 0$$

بنابراین، در این حالت خطای حالت ماندگار مساوی صفر و $C(\infty)=r_0-c_{ss}=r_0$ می باشد.

بطور کلی اگر تابع تبدیل مدار باز $G(s)$ از نوع یک یا بالاتر باشد [یعنی در معادله (۶-۲۶)، $N=1$ یا بیشتر باشد] خطای حالت ماندگار مساوی صفر خواهد بود. زیرا در معادله:

$$c_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1+G(s)}$$

اگر $G(s)$ از نوع یک یا بالاتر باشد، در مخرج کسر فوق بازاء $s \rightarrow 0$ ، مقدار $G(s)$ به سمت بینهایت میل می کند در نتیجه کسر فوق مساوی صفر می شود. با توجه به اینکه $G(s) = G_c(s)G_p(s)$ می باشد و از طرفی در طراحی سیستم کنترلی، طراح باید کنترلر مناسب را برای سیستم تعیین نماید، چنانچه $G_p(s)$ از نوع صفر باشد برای آنکه خطای حالت ماندگار یا افست صفر شود طراح باید کنترلر $G_c(s)$ را طوری تعیین نماید که شامل انتگرال گیرنده باشد (یعنی $G_c(s)$ از نوع یک باشد) تا $G(s)$ از نوع یک شود و به این ترتیب خطای حالت ماندگار سیستم صفر گردد. در قسمت بعد به تشریح انواع کنترلرهای خطی می پردازیم.

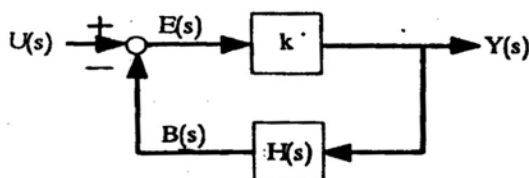
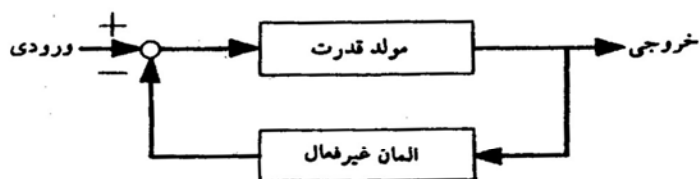
(۶-۳) - کنترلرهای خطی :

هسته مرکزی یک سیستم کنترل فیدبک را "کنترلر" تشکیل می دهد. در این وسیله، ورودی یک "سیگنال ضعیف"^۱ است که بستگی به متغیر اصلی فرآیند و مقدار مطلوب آن دارد (ورودی عبارت است از $E(s)$ یا خطا) و خروجی نیز عبارت از یک "سیگنال تقویت شده"^۲ می باشد که بترتیبی به سیگنال ورودی سیستم اصلی مربوط می شود. باید توجه داشت که در حالت ایده آل "کنترلر" یک وسیله "یک سو"^۳ می باشد. یعنی

۱- Low Power Level Signal

۲- High Power Level Signal

۳- Unilateral



$$(b) \quad \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{1 + kH(s)} \approx \frac{1}{H(s)}$$

شکل (۱۵-۶) - نمایش شماتیک کنترلر.

(a) - نمایش اجزای سیستم

(b) - دیاگرام جعبه‌ای سیستم برای بیان روابط

حالت خروجی کنترلر به هیچ عنوان تأثیری در ورودی آن از طریق کنترل‌کننده ندارد و این سیگنال خروجی از طریق یک "عمل‌کننده" یا "محرك^۱" ورودی به سیستم را کنترل می‌کند. برای آنکه تجسم صحیحی از سیستم "یک سو" داشته باشید یک سیستم سیالانی شامل چند ظرف مایع را در نظر بگیرید که مایع از ظرف اول به دوم و از ظرف دوم به سوم و غیره می‌ریزد. در چنین سیستمی واضح است که ارتفاع مایع در ظرف دوم به ظرف اول بستگی دارد. همچنین ارتفاع مایع در ظرف سوم به ظرف اول و دوم بستگی دارد ولی ارتفاع مایع در ظرف اول به هیچ وجه به ارتفاع مایع در ظرف دوم و سوم بستگی نداشته همچنین ارتفاع مایع در ظرف دوم نیز به ارتفاع مایع ظرف سوم اصلاً بستگی ندارد. چنین سیستمی را سیستم یک سو می‌نامند. مثال دیگری از این سیستم جوی آب است که اگر آب در بالا دست آن گل‌آلود شود تأثیرش در پائین دست آن ظاهر می‌شود ولی اگر در پائین دست جوی، آب آلوده شود تأثیری در بالا دست آن نخواهد داشت.

شکل (۱۵-۶) (a) - نمایش شماتیک یک کنترلر را نشان می‌دهد که در مسیر مستقیم آن مولد

قدرت^۱ و در مسیر فیدبک آن المان غیرفعال دیده می‌شود. انرژی مورد نیاز برای مولد قدرت از خارج مدار تأمین می‌شود، همچنین رابطه بین ورودی و خروجی عملاً از طریق المان غیرفعال فیدبک بدست می‌آید. برای نشان دادن طرز عمل مدار فوق روابط خطی سیستم شکل (b-۱۵-۶) را در نظر می‌گیریم. از شکل فوق داریم:

$$Y(s) = K E(s) \quad , \quad E(s) = U(s) - B(s) \quad , \quad B(s) = H(s) Y(s)$$

بنابراین:

$$Y(s) = \frac{K}{1 + K H(s)} U(s)$$

در این رابطه K عبارت از بزرگنمایی مربوط به تقویت‌کننده است که برای مقادیر بزرگ آن داریم:

$$Y(s) = \frac{1}{H(s)} U(s) \quad (۳۲-۶)$$

ابتدا حالتی را که $H(s)$ استاتیکی است مورد بررسی قرار می‌دهیم. در اینصورت رابطه ورودی و خروجی کنترلر عبارت است از:

$$y(t) = K_c u(t) \quad (۳۳-۶)$$

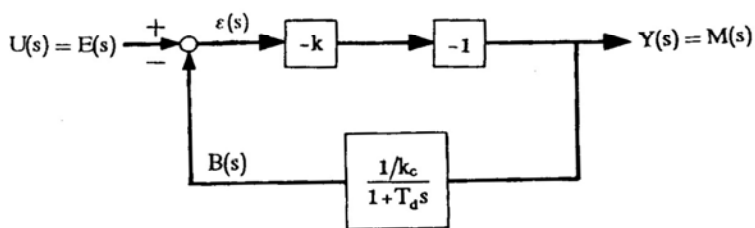
با توجه به اینکه ورودی به کنترلر، خطای $e(t)$ [یعنی تفاوت $r(t)$ و $c(t)$] بوده و خروجی کنترلر یعنی $m(t)$ نیز خود ورودی کنترلر شده به محرک می‌باشد، رابطه (۳۳-۶) را می‌توان چنین نوشت:

$$m(t) = K_c e(t) \quad (۳۴-۶)$$

این معادله نمایش یک کنترلر استاتیکی^۲ با ضریب بزرگنمایی K_c می‌باشد و اختصاراً آنرا "P-action" یا "P-Control" می‌نامیم. در اینجا خروجی $m(t)$ کنترلر فقط بستگی به مقدار

۱- Power Unit (or Power Supply)

۲- Proportional Controller (P-C.) or Proportional Action (P-act.)



شکل (۱۶-۶) - دیاگرام جعبه‌ای کنترلر PD-action نیوماتیکی.

خطا در همان لحظه دارد. با انجام تغییراتی در المان فیدبک شکل (۱۵-۶) می‌توان کنترلی را طراحی نمود که خروجی کنترلر نه تنها به "مقدار خطا در همان لحظه" بلکه به "نرخ تغییرات خطا" یعنی $\frac{d}{dt} e(t)$ نیز بستگی داشته باشد.

معادله (۳۵-۶) نیز نمایش "کنترلر استاتیکی با اضافه مشتق‌گیرنده"^۱ می‌باشد که اختصاراً "PD-action" یا "PD-Control" نامیده می‌شود.

$$m(t) = k_c(1 + T_d D) e(t) \quad (۳۵-۶)$$

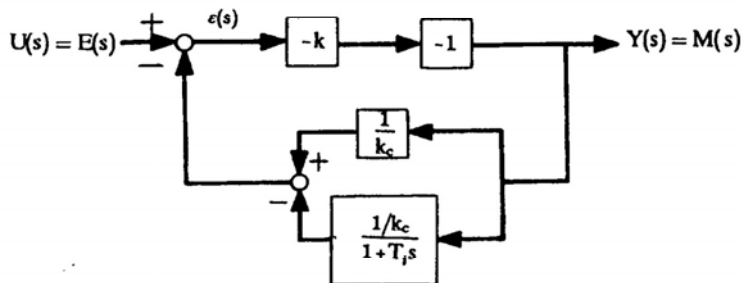
شکل (۱۶-۶) دیاگرام جعبه‌ای یک کنترلر "PD-action" را در سیستم‌های نیوماتیکی نشان می‌دهد.

برای سیستم شکل (۱۶-۶) داریم:

$$\begin{aligned} G_C(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{M(s)}{E(s)} &= \frac{K}{1 + \frac{\frac{K}{k_c}}{1 + T_d s}} = \frac{K}{1 + \frac{K}{k_c(1 + T_d s)}} \\ &= \frac{K(1 + T_d s)}{T_d s + 1 + \frac{K}{k_c}} \end{aligned}$$

۱- Derivative Control (D-C. or D-act.)

۲-Proportional plus Derivative Control (PD-C. or PD-act.)



شکل (۱۷-۶) - دیاگرام جعبه‌ای کنترلر PI-action در سیستم نیوماتیکی.

چون K بسیار بزرگ است با استفاده از معادله (۳۲-۶) نتیجه می‌شود:

$$G_C(s) = k_C (1 + T_i s) \quad (۳۶-۶)$$

نوع دیگر کنترلر خطی، "کنترلر استاتیکی با اضافه انتگرال گیرنده" ^۱ یا ^۲ "PI-action" است. در این نوع کنترلر رابطه بین ورودی و خروجی عبارت است از:

$$m(t) = k_C \left(1 + \frac{1}{T_i D} \right) e(t) \quad (۳۷-۶)$$

مطابق رابطه فوق خروجی $m(t)$ بستگی به مقدار خطا در همان لحظه و انتگرال خطاهای گذشته سیستم دارد. شکل (۱۷-۶) دیاگرام جعبه‌ای یک کنترلر "PI-action" را در سیستم‌های نیوماتیکی نشان می‌دهد.

از مقایسه شکل (۱۷-۶) با شکل (b-۱۵-۶) المان فیدبک $H(s)$ را بدست می‌آوریم:

$$H(s) = \frac{1}{k_C} - \frac{\frac{1}{k_C}}{1 + T_i s} = \frac{1}{k_C} \left(\frac{T_i s}{1 + T_i s} \right) \quad (۳۸-۶)$$

۱-Integral Control (I-C.)

۲-Proportional plus Integral Control (PI-Control or PI-action)

دیاگرام جعبه‌ای	
تابع تبدیل $G_c(s) = \frac{M(s)}{E(s)}$	$G_c(D) = k \left(\frac{T_i^* + T_d^*}{T_i^* - T_d^*} \right) \left[1 + \frac{1}{(T_i^* + T_d^*)D} + \frac{T_i^* T_d^*}{T_i^* + T_d^*} D \right] \quad k \rightarrow \infty$
معادله بردار حالت	$\frac{d}{dt} X = AX + bu \quad y = cx + du$ $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_d^*} \left(\frac{K}{k} + 1 \right) & \frac{K}{T_d^* k} \\ -\frac{K}{T_i^* k} & \frac{1}{T_i^*} \left(\frac{K}{k} - 1 \right) \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} \frac{K}{T_d^* k} \\ \frac{K}{T_i^* k} \end{bmatrix}$ $c = [-k \quad k] \quad d = K$

شکل (۶-۱۸). دیاگرام جعبه‌ای، تابع تبدیل و معادله حالت کنترلر PID.

همچنین رابطه بین ورودی و خروجی برای سیستم فوق در حالتی که K خیلی بزرگ باشد نیز عبارت است از:

$$G_c(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{H(s)} = K_c \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) \quad (۶-۳۹)$$

نوع دیگر کنترلر خطی، کنترلر "PID-action" می‌باشد که فرم ایده‌آل رابطه بین ورودی

دیاگرام جریانی	
تابع تبدیل	$G_c(D) = \frac{K_c}{1 + \tau D} \left(1 + \frac{1}{T_i D} + T_d D \right)$
معادله بردار حالت	$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_b u + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{K_c}{T_i \tau} & \frac{K_c}{\tau} \left(1 - \frac{T_d}{\tau} \right) \end{bmatrix}}_c \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\frac{K_c T_d}{\tau}}_d u$

شکل (۶-۱۹). دیاگرام جریانی، تابع تبدیل و معادله حالت کنترلر "PID با تأخیر زمانی".

و خروجی چنین کنترلری عبارت است از:

$$m(t) = K_c \left(1 + \frac{1}{T_i D} + T_d D \right) e(t) \quad (۴۰-۶)$$

از آنجا که در چنین سیستمهایی، طراحی و دسترسی به مکانیزم مشتق گیرنده ایده آل مقدور نیست لذا فرمهای مورد قبول چنین کنترلری مطابق دیاگرام و روابط شکل (۶-۱۸) می باشد. از مقایسه تابع تبدیل شکل (۶-۱۸) با معادله (۴۰-۶)، ثابتهای زمانی T_i و T_d و ضریب بزرگنمایی K_c کنترلر بصورت زیر در می آیند:

$$K_c = K \frac{T_i^* + T_d^*}{T_i^* - T_d^*}, \quad T_i = T_i^* + T_d^*, \quad T_d = \frac{T_i^* T_d^*}{T_i^* + T_d^*} \quad (۴۱-۶)$$

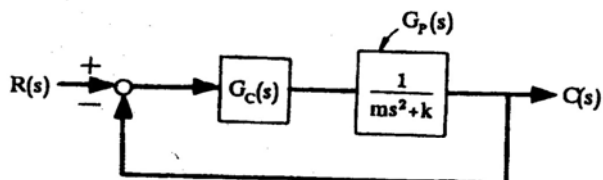
روش دیگر طراحی کنترلر PID آن است که بجای فرم ایده آل معادله (۶-۴۰)، یک تأخیر زمانی τ را به فرم ایده آل آن بیفزائیم. با اضافه کردن تأخیر زمانی τ می توان کنترلر PID را به صورت نمایش داده شده در شکل (۶-۱۹) در آورد.

همانطور که در قسمت (۶-۲) گفته شد، در یک سیستم کنترلی مدار بسته برای از بین رفتن خطای حالت ماندگار، تابع تبدیل مدار باز باید از نوع یک باشد. در مثال (۶-۶) ملاحظه گردید که اگر تابع تبدیل سیستم اصلی یعنی $G_p(s)$ از نوع صفر باشد، با انتخاب کنترلر از نوع "I-action" خطای حالت ماندگار سیستم را می توان به صفر رساند بنابراین:

مهمترین خاصیت کنترلر "I-action" آن است که خطای حالت ماندگار سیستم را صفر می کند. در مقابل کنترلر "I-action" (که خطای حالت ماندگار را صفر می کند) کنترلر "D-action" باعث می شود که سیستم مدار بسته پایدارتر گردد. برای نشان دادن این مطلب به ذکر مثالی می پردازیم و در قسمت بعد که مکان هندسی ریشه ها مورد بحث قرار می گیرد این موارد روشن تر خواهد شد.

مثال (۶-۷):

سیستم فنر و وزنه مثال (۳-۲) با تابع تبدیل معادله (۳-۴۱) دارای قطب ها یا مقادیر ویژه $(\sigma \pm j\omega)$ می باشد $(\omega = \sqrt{K/m})$. واضح است که این سیستم در مرز پایداری بوده و ما می خواهیم با انتخاب کنترلر مناسب سیستم کنترل فیدبک شکل (۶-۲۰) را پایدارنمائیم.



شکل (۶-۲۰) - سیستم کنترل فیدبک "فنر و وزنه"

ابتدا کنترلر $G_c(s)$ را از نوع P-action انتخاب می‌کنیم تا ببینیم که آیا با این کنترلر، سیستم مدار بسته پایدار است یا خیر؟

در این حالت داریم $G_c(s) = K_c$ و معادله مشخصه سیستم مدار بسته عبارت است از:

$$1 + G(s) = 1 + G_c(s)G_p(s) = 1 + \frac{K_c}{ms^2 + K} = 0 \Rightarrow ms^2 + K + K_c = 0$$

ریشه‌های این معادله عبارتند از $s = \pm j\omega_1$ ، که در آن $\omega_1 = \sqrt{\frac{K + K_c}{m}}$ می‌باشد. بنابراین ریشه‌های معادله مشخصه سیستم مدار بسته، مقادیر موهومی هستند (یعنی قسمت حقیقی ریشه‌ها صفر می‌باشد). بنابراین کنترلر نوع P-action سیستم مدار بسته را پایدار نمی‌کند. حال کنترلر نوع PD-action را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این نوع کنترلر داریم:

$$G_c(s) = K_c(1 + T_d s)$$

$$1 + G(s) = 1 + \frac{K_c(1 + T_d s)}{ms^2 + K} = 0$$

$$\Rightarrow ms^2 + K_c T_d s + K_c + K = 0$$

که ریشه‌های این معادله عبارتند از:

$$s_{1,2} = p_1, p_2 = \frac{1}{2m} \left[-K_c T_d \pm \sqrt{(K_c T_d)^2 - 4(K_c + K)m} \right] \quad (42-6)$$

از رابطه فوق ملاحظه می‌شود که قطب‌های سیستم مدار بسته دارای قسمت حقیقی و منفی می‌باشند. بنابراین سیستم مدار بسته پایدار بوده، عبارتی کنترلر نوع D-action باعث پایدارتر شدن سیستم مدار بسته می‌شود.

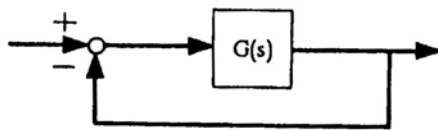
نتیجه آنکه:

با اضافه کردن D-action یا مشتق‌گیرنده در کنترلر، سیستم مدار بسته پایدارتر می‌شود.

قبل از پرداختن به قسمت بعد (که در آن مکان هندسی^۱ ریشه‌های سیستم مدار بسته مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرد) برای وضوح بیشتر مطلب به ذکر چند مثال می‌پردازیم.

مثال (۸-۶):

تابع تبدیل مدار باز سیستمی که فرم کلی آن بصورت معادلات (۸-۶) و (۹-۶) بیان گردیده بصورت $G(s) = \frac{K}{s+p}$ داده شده است. می‌خواهیم در سیستم شکل (۲۱-۶) موقعیت ریشه‌های سیستم مدار بسته را وقتی K از صفر تا بینهایت تغییر می‌کند در صفحه مختلط s بدست آوریم.



شکل (۲۱-۶) - سیستم مدار بسته با $G(s) = KG_0(s)$

تابع $G(s)$ را در این مثال می‌توان چنین نوشت:

$$G(s) = KG_0(s)$$

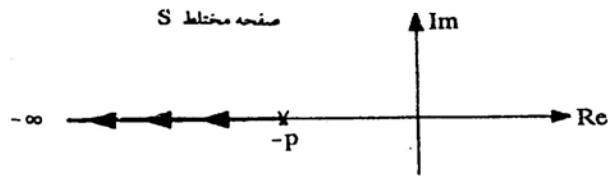
که در آن $G_0(s) = \frac{1}{s+p}$ و $-p$ نیز عبارت از قطب یا ریشه مدار باز می‌باشد که عدد حقیقی و منفی فرض شده است. معادله مشخصه سیستم مدار بسته (که ریشه‌های سیستم مدار بسته از آن بدست می‌آید) عبارت است از:

$$1 + G(s) = 1 + KG_0(s) = 1 + \frac{K}{s+p} = 0$$

(a)

$$s + p + K = 0 \Rightarrow s = -p - K$$

بازاء $K=0$ ریشه سیستم مدار بسته مساوی $s = -p$ می‌باشد (یعنی بازاء $K=0$ ریشه سیستم مدار بسته منطبق برریشه سیستم مدار باز است) و وقتی K بتدریج بزرگ



شکل (۶-۲۲). نمایش ریشه‌های سیستم مدار بسته وقتی K از صفر تا بینهایت تغییر می‌کند. (برای $G(s) = \frac{K}{s+p}$)

می‌شود و به سمت ∞ می‌رود مقدار s در معادله (۶) نیز به سمت $-\infty$ می‌رود. بنابراین نمایش s در صفحه مختلط بصورت شکل (۶-۲۲) خواهد بود.

مثال (۶-۹):

می‌خواهیم موقعیت ریشه‌های سیستم مدار بسته را برای سیستمی که تابع تبدیل مدار باز آن بصورت $G(s) = \frac{K}{(s+1)(s+3)}$ و فرم مدار بسته آن بصورت شکل (۶-۲۱) می‌باشد بدست آوریم. در اینجا نیز داریم:

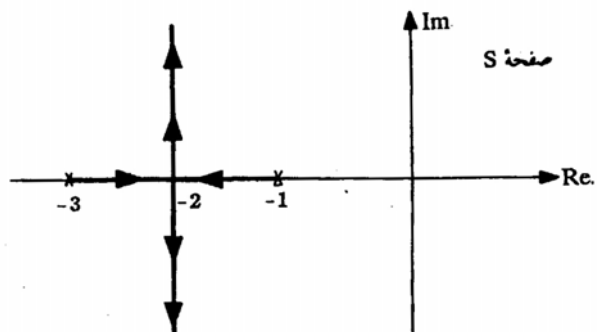
$$G(s) = KG_0(s)$$

که $G_0(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)}$ می‌باشد. بنابراین، قطب‌های مدار باز عبارت از -1 و -3 می‌باشند. معادله مشخصه سیستم مدار بسته از رابطه $1 + G(s) = 0$ بدست می‌آید.

$$1 + G(s) = 1 + KG_0 = 1 + \frac{K}{(s+1)(s+3)} = 0$$

و یا:

$$(S+1)(S+3) + K = S^2 + 4S + 3 + K = 0$$



شکل (۶-۲۳). ریشه‌های سیستم مدار بسته وقتی K از صفر تا ∞ تغییر می‌کند.

ریشه‌های این معادله که قطب‌های مدار بسته هستند عبارتند از:

$$s_1 = -2 + \sqrt{1-k}$$

$$s_2 = -2 - \sqrt{1-k}$$

برای رسم این ریشه‌ها در صفحه s باید توجه نمود که بازاء $K=0$ مقادیر ریشه‌ها

عبارت از $s_1 = -1$ و $s_2 = -3$ می‌باشند که بر ریشه‌های مدار باز منطبق هستند. و بازاء

$K=1$ نیز $s_1 = s_2 = -3$ بوده و بازاء $K > 1$ داریم:

$$s_1 = -2 + j\sqrt{k-1}$$

$$s_2 = -2 - j\sqrt{k-1}$$

بنابراین برای $K > 1$ دو ریشه مختلط خواهیم داشت که مقدار حقیقی آنها همواره برابر

-2 و مقدار موهومی آنها وقتی K به سمت ∞ میل می‌کند، مرتباً بزرگتر می‌شوند.

بنابراین نمایش ریشه‌های سیستم مدار بسته در صفحه مختلط بصورت شکل (۶-۲۳)

خواهد بود.

(۶-۴) روش مکان هندسی ریشه ها^۱:

در طراحی سیستم مدار بسته چنانچه بتوان نحوه رفتار سیستم مدار بسته را از روشی غیر از روش حل معادلات سیستم مشخص نمود، بطوریکه این روش بتواند تغییرات مورد لزوم در سیستم را به منظور بهبود رفتار سیستم نیز مشخص نماید، دراینصورت طراحی سیستم مدار بسته از سهولت و صراحت بیشتری برخوردار خواهد شد. از طرفی در طراحی سیستم مدار بسته پاسخ به این سؤال که " آیا سیستم مدار بسته پایدار است یا خیر " از نخستین گامهای طراحی سیستم جدید یا تحلیل سیستم موجود بشمار می آید. این سؤال را می توان با بررسی معادله مشخصه سیستم مدار بسته با استفاده از روش " راوت " پاسخ داد. با این وجود پرسشهای اساسی دیگری در مورد کیفیت کنترل سیستم و میزان پایداری آن مطرح می باشد که هنوز پاسخ روشنی به آنها داده نشده است. نمونه ای از این سؤالات عبارتند از:

- در رفتار سیستم، حداکثر دامنه چقدر خواهد بود؟

- آیا نوسانات عکس العمل حالت گذرا با سرعت کافی و در فاصله زمانی کوتاه از بین

می روند یا خیر؟

حال این سؤال اساسی مطرح است که:

- اصولاً چرا طراح در طراحی یک سیستم بگونه ای که سیستم حاصله هم از نظر پایداری و

هم از نظر کیفیت کنترلی کاملاً مطلوب باشد آزادی عمل ندارد؟

در پاسخ (با توجه به مبانی طراحی سیستم) باید گفت:

علت آن است که طراح سیستم کنترلی مدار بسته کلاسیک با تعیین تعداد پارامترهای

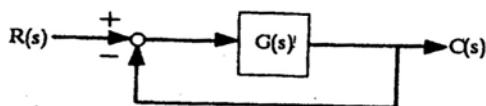
محدود و مشخص (پارامترهای کنترلی) و یا جبران کننده ها^۲ باید به این هدف برسد. در این

راستا مشکل اساسی طراح آن است که تلاش وی در جهت بهبود کیفیت رفتار سیستم، منجر به

تضعیف پایداری سیستم می شود [به مثال (۶-۲) مراجعه شود]. و بعکس حساسیت وی به

۱. The Root Locus Method

۲- Compensators



شکل (۶-۲۴) - نمایش سیستم مدار بسته برای تعیین مکان هندسی ریشه‌ها.

پایداری سیستم، رسیدن به کیفیت مطلوب را دچار محدودیت می‌نماید. از طرفی می‌دانیم که در یک سیستم بین مقادیر ویژه یا قطب‌های (یا ریشه‌های) آن و کیفیت کنترل سیستم ارتباط نزدیکی وجود دارد و همانطور که از شکل (۴-۶) پیداست، موقعیت قطب‌های سیستم نیز مشخص‌کننده رفتار سیستم هستند، در نتیجه این سؤال اساسی مطرح می‌شود که " چگونه باید پارامترهای کنترلر سیستم مدار بسته را انتخاب نمود تا مقادیر (و به عبارتی موقعیت) ریشه‌های سیستم مدار بسته طوری بدست آیند که سیستم مدار بسته هم پایدار باشد و هم از کیفیت کنترل مطلوبی برخوردار باشد".

ساده‌ترین حالت طراحی سیستم مدار بسته مربوط به حالتی است که تنها یک پارامتر در سیستم کنترلی مجهول بوده و طراح می‌خواهد با انتخاب همان یک پارامتر، بنحوی مناسبی "پایداری" و "کیفیت کنترل" را بهینه^۱ و متعادل نماید [مانند انتخاب K_c در مثال (۲-۶)]. اگر این پارامتر بعنوان یک پارامتر "مستقل" در نظر گرفته شود، تمامی ریشه‌های سیستم مدار بسته تابعی از این پارامتر مجهول خواهند بود که با تغییر دادن این پارامتر موقعیت ریشه‌های سیستم مدار بسته نیز تغییر خواهد نمود. بنابراین در صفحه مختلط s با تغییر دادن یک پارامتر مجهول از صفر تا ∞ برای ریشه‌های سیستم مدار بسته، یک "مکان هندسی" حاصل می‌شود که آنرا مکان هندسی ریشه‌های سیستم مدار بسته یا Root Locus می‌نامند.

بعبارت ساده‌تر Root Locus عبارت است از:

"موقعیت مکانی ریشه‌های سیستم مدار بسته شکل (۶-۲۴) در صفحه مختلط وقتی پارامتر K در تابع تبدیل مدار باز $G(s)$ [از معادله (۸-۶) یا (۹-۶)] از صفر تا ∞ تغییر می‌کند".
با در نظر گرفتن تابع تبدیل مدار باز بصورت معادلات (۸-۶) و (۹-۶) ملاحظه می‌شود

که پارامتر K ، همان پارامتر مجهولی است که با تغییر دادن آن از صفر تا ∞ می توان موقعیت ریشه های سیستم مدار بسته شکل (۶-۲۴) را تعیین نمود که آنرا طبق تعریف Root Locus می نامند.

در مثالهای (۶-۸) و (۶-۹) مکان هندسی ریشه های سیستم مدار بسته تعیین و رسم گردید. در این قسمت یک روش دیگر برای بدست آوردن مکان هندسی ریشه های سیستم مدار بسته شکل (۶-۲۴) معرفی می گردد. این روش که بی نیاز از حل معادله مشخصه سیستم مدار بسته می باشد توسط W.R.Evans ابداع شده است و بنام "روش مکان هندسی ریشه ها" شناخته می شود که به تشریح آن می پردازیم.

معادله مشخصه سیستم مدار بسته شکل (۶-۲۴) عبارت است از [همان رابطه (۶-۵)]:

$$1 + G(s) = 0$$

و یا بادر نظر گرفتن فرم معادل آن از مثالهای (۶-۸) و (۶-۹) داریم:

$$G(s) = KG_0(s)$$

بنابراین:

$$1 + KG_0(s) = 0$$

که در آن $G_0(s)$ عبارت است از:

$$G_0(s) = \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \quad (۶-۴۳)$$

از معادله مشخصه فوق داریم:

$$G_0(s) = -\frac{1}{K}, \quad K \geq 0 \quad (۴۴-۶)$$

بطور کلی $G_0(s)$ یک عدد مختلط میباشد. بنابراین با توجه به معادله (۴۴-۶) می توان نوشت:

$$G_0(s) = -180^\circ \pm 360^\circ N \quad (N \text{ عدد صحیح}) \quad (۴۵-۶)$$

و:

$$G_0(s) \text{ اندازه} = |G_0(s)| = \frac{1}{K} \quad (۴۶-۶)$$

روش کلی بدست آوردن ریشه‌ای از معادله (۴۴-۶) شامل سه مرحله ذیل می‌گردد:
مرحله اول)- در صفحه مختلط s موقعیت قطب‌ها و صفرهای مدار باز را مشخص نمائید.
مرحله دوم)- نقطه‌ای مانند p را در صفحه s طوری پیدا کنید که شرط مربوط به زوایا [معادله (۴۵-۶)] در آن صادق باشد. این عمل از طریق سعی و خطا انجام می‌شود.
مرحله سوم)- برای نقطه پیدا شده p ، مقدار K را از رابطه (۴۶-۶) بدست آورید.
با تکرار این روش مکان هندسی ریشه‌های سیستم مدار بسته حاصل می‌شود. حال بمنظور تشریح مطلب یک سیستم مدار باز دارای تابع تبدیل زیر را در نظر گرفته و می‌خواهیم مطابق مراحل فوق مکان هندسی ریشه‌های آنرا مشخص نمائیم.

$$G(s) = KG_0(s) = K \frac{(s-z_1)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)} = K \frac{s+4}{s[(s+5)^2+4]}$$

مرحله اول)- تعیین "قطب‌ها و صفرهای" مدار باز در صفحه مختلط s :
از تابع تبدیل بالا نتیجه می‌شود:

$$p_1 = 0, \quad p_2 = -5 + 2j, \quad p_3 = -5 - 2j, \quad z_1 = -4$$

مرحله دوم)- تعیین نقطه p :

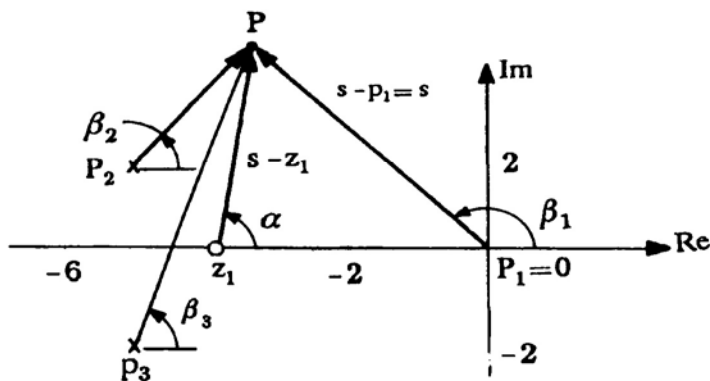
با قراردادن مقادیر فوق در صفحه مختلط مطابق شکل (۶-۲۵) و با سعی و خطا نقطه‌ای مانند p را که شرط (۶-۴۵) در مورد آن صادق است پیدا می‌کنیم. (در صفحه s قطب‌های مدار باز را با علامت $\times$ (ضربدر) و صفرهای مدار باز را با علامت o نشان می‌دهیم). پس از حدس‌های متعدد، نقطه‌ای مانند p حاصل گردیده که مطابق شکل فوق زوایا را بصورت زیر نتیجه داده است:

$$\beta_1 = 140^\circ, \quad \beta_2 = 49^\circ, \quad \beta_3 = 81^\circ, \quad \alpha = 90^\circ$$

حال با قراردادن مقدار زوایا در رابطه (۶-۴۵) داریم:

$$G_0(s) = \alpha - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) = 90^\circ - (140^\circ + 49^\circ + 81^\circ) = -180^\circ$$

بنابراین p انتخاب شده شرط مورد نظر را ارضاء نموده است.



شکل (۶-۲۵)- تعیین موقعیت نقطه‌ای مانند p (ریشه سیستم مدار بسته) در صفحه مختلط.

مرحله سوم) - تعیین مقدار K (برای p تعیین شده):
از رابطه (۴۳-۶) و (۴۶-۶) نتیجه می شود:

$$K = \frac{\prod_{i=1}^n |s - p_i|}{\prod_{j=1}^m |s - z_j|} \quad (۴۷-۶)$$

در این رابطه $|s - p_i|$ و $|s - z_j|$ اندازه این اعداد مختلط را نشان می دهند. در مورد مثال مورد بحث با اندازه گیری مقادیر از شکل (۲۵-۶) داریم:

$$\begin{aligned} |s - p_1| &= \overline{p_1 p} = 5.2, & |s - p_2| &= \overline{p_2 p} = 1.6 \\ |s - p_3| &= \overline{p_3 p} = 5.5, & |s - z_1| &= \overline{z_1 p} = 3.4 \end{aligned}$$

با قراردادن در رابطه (۴۷-۶) مقدار K چنین خواهد شد:

$$K = \frac{(5.2)(1.6)(5.5)}{3.4} = 13.5$$

(۴۶-۱) - رسم مکان هندسی ریشه ها:

برای رسم مکان هندسی ریشه ها از خصوصیات و دستورات عمل های نه گانه زیر استفاده میشود.

- (۱) - مکان هندسی نسبت به محور حقیقی (محور افقی) قرینه است.
- (۲) - اگر $G(s)$ دارای n قطب باشد مکان هندسی از n شاخه تشکیل می گردد. بعضی شاخه ها ممکن است یکدیگر را قطع کنند ولی هرگز بازاء مقادیر معین K ، شاخه ها بر هم منطبق نمی شوند.
- (۳) - تمامی شاخه ها بازاء $K=0$ از محل قطب های مدار باز شروع و بازاء $K \rightarrow \infty$ به محل صفرهای مدار باز ختم می شوند. اگر $n > m$ باشد، " $n-m$ " شاخه در جهت مجانبها به سمت ∞ میل می کند.
- (۴) - مجانبها خطوط مستقیمی هستند که زاویه آنها با محور حقیقی از رابطه (۴۸-۶)

بدست می آید که در این رابطه "n-m" معرف تعداد مجانبها بوده و q نیز بترتیب مقادیر فرد 1، 3 و 5... را اختیار می نماید.

$$\text{زاویه مجانبها با محور حقیقی} = \pm 180^\circ \frac{q}{n-m} \quad (48-6)$$

(5) - برای $n-m \geq 2$ ، نقطه تمرکز مجانبها از رابطه زیر بدست می آید:

$$h = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m} \quad (49-6)$$

(6) - برای $n-m \geq 2$ مرکز ثقل قطبها یا ریشه های مدار بسته بصورت زیر تعریف می شود:

$$(c.g.) = \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{n} \quad (50-6)$$

مقدار (c.g.) مستقل از مقدار K می باشد عبارتی با تغییر K مقدار (c.g.) ثابت باقی می ماند.
 (7) - نقاطی از محور حقیقی جزو مکان هندسی هستند که مجموع قطبها و صفرهای مدار باز واقع شده در روی محور حقیقی و در سمت راست آن نقاط، عدد فرد باشد.
 (8) - اگر همه قطبها و صفرهای مدار باز حقیقی باشند مختصات نقطه p که در آن مکان هندسی از محور حقیقی جدا می شود از حل معادله زیر بروش سعی و خطا بدست می آید:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{b-p_i} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{b-z_j} \quad (51-6)$$

(9) - در مواردی که سیستم مدار باز دارای قطبهای مختلط می باشد زاویه ای که شاخه مکان هندسی از قطب مدار باز p_i تحت آن زاویه جدا می شود از معادله زیر بدست می آید:

$$\theta_i = -180^\circ - \psi_j, \quad i \neq j \quad (52-6)$$

که در آن ψ_j زاویه ای است که توسط سایر قطبها و صفرهای مدار باز در p_i تشکیل می شود

(زاویه قطب‌ها مثبت و زاویه صفرها منفی در نظر گرفته می‌شوند).

مثال (۶-۱۰):

برای تابع تبدیل مدار باز $G(s) = \frac{s+4}{s[(s+5)^2+4]}$ می‌خواهیم مکان هندسی قطب‌های مدار بسته را رسم کنیم.
قطب‌ها و صفرها عبارتند از:

$$p_1=0, \quad p_2=-5+2j, \quad p_3=-5-2j, \quad z_1=-4$$

چون $n=3$ است پس مکان هندسی سه شاخه دارد [دستورالعمل شماره (۲)]. یکی از شاخه‌ها به $z_1=-4$ ختم می‌شود [دستورالعمل شماره (۳)] و دو شاخه دیگر دارای مجانب خواهند بود. پس دو مجانب داریم [دستورالعمل شماره (۴)] که زاویه آنها با محور حقیقی از دستورالعمل شماره (۴) به ترتیب 90° و 270° بدست می‌آید. محل تقاطع مجانبها نیز در $h=-3$ (روی محور حقیقی) خواهد بود [دستورالعمل شماره (۵)]. چون $n-m=2$ می‌باشد مرکز ثقل قطب‌های مدار بسته از رابطه زیر بدست می‌آید [دستورالعمل شماره (۶)]:

$$(Cg) = \frac{(-5+2j) + (-5-2j) + 0}{3} = \frac{-10}{3} = -3.33$$

از طرفی قسمتی از محور حقیقی که بین مرکز مختصات و نقطه -4 قرار دارد نیز جزو

مکان هندسی است [دستورالعمل شماره (۷)].

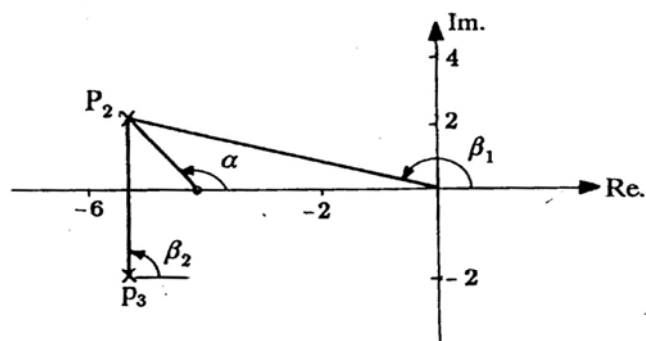
زاویه θ_2 که شاخه مکان هندسی تحت آن زاویه از $p_2=-5+2j$ جدا می‌شود از

رابطه زیر بدست می‌آید [دستورالعمل شماره (۹)].

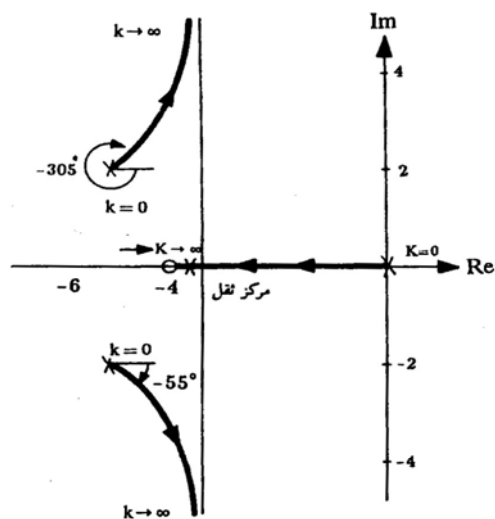
$$\theta_2 = -180^\circ - \psi_2$$

برای بدست آوردن ψ_2 نیز باید زاویه‌ای را که سایر قطب‌ها و صفرهای مدار باز در p_2

تشکیل می‌دهند محاسبه نمائیم.



شکل (۶-۲۶). نمایش موقعیت صفرها و قطب‌ها و زوایای آنها در صفحه مختلط S.



شکل (۶-۲۷). نمایش مکان هندسی ریشه‌ها.

مطابق شکل (۶-۲۶) داریم:

$$\beta_1 = 155^\circ, \beta_2 = 90^\circ, \alpha = 120^\circ$$

و زاویه ψ_2 عبارت است از:

$$\psi_2 = \beta_1 + \beta_2 - \alpha = 155^\circ + 90^\circ - 120^\circ = 125^\circ$$

بنابراین زاویه θ_2 نیز چنین حاصل می‌شود:

$$\theta_2 = -180^\circ - 125^\circ = -305^\circ$$

و با روشی مشابه فوق زاویه θ_3 (یعنی زاویه‌ای که شاخه مکان هندسی تحت آن زاویه از $p_3 = -5 - 2j$ جدا می‌شود) برابر -415° حاصل می‌شود که هم جهت با -55° می‌باشد ($-55^\circ = -415^\circ + 360^\circ$). شکل (۶-۲۷) مکان هندسی ریشه‌های سیستم مدار بس، مثال مورد بحث را نشان می‌دهد.

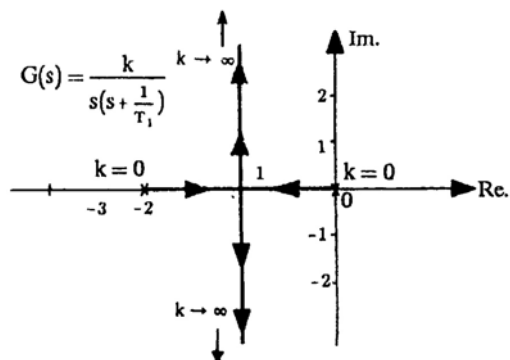
(۶-۵) - تحلیل کیفی مکان هندسی ریشه‌ها:

سیستم مدار بسته شکل (۶-۲۴) را در نظر می‌گیریم که در آن تابع تبدیل سیستم مدار باز $G(s)$ عبارت است از:

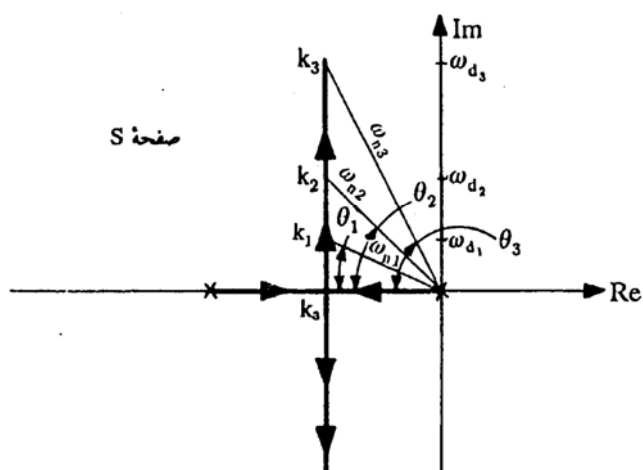
$$G(s) = \frac{k}{s(s+2)} \quad (۶-۵۳)$$

و مکان هندسی ریشه‌های سیستم مدار بسته فوق نیز مطابق شکل (۶-۲۸) خواهد بود. با رسم مکان هندسی فوق، می‌توان بهترین موقعیت قطب‌های سیستم مدار بسته را بمنظور ایجاد رفتار مطلوب برای سیستم، تعیین نموده و K مربوط به آن موقعیت را بدست آورد. برای این سیستم مدار بسته داریم:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K}{s(s+2)}}{1 + \frac{K}{s(s+2)}} = \frac{k}{s^2 + 2s + k} \quad (۶-۵۴)$$



شکل (۶-۲۸). مکان هندسی ریشه‌های سیستم مدار بسته برای $G(s)$ معادله (۶-۵۳).



شکل (۶-۲۹). نمایش تغییرات نسبت میرایی θ برای حالت‌های مختلف قطب مدار بسته سیستم شکل (۶-۲۸).

که ریشه‌های مخرج این معادله، همان "مکان هندسی" می‌باشد که در شکل فوق برای مقادیر K از صفر تا ∞ رسم شده است.

همانطور که از شکل (۶-۲۸) پیداست، برای $K > 1$ قطب‌های مدار بسته مقادیر مرکب یا اعداد مختلط می‌باشند، لذا برای $K > 1$ معادله (۶-۵۴) بصورت ذیل خواهد بود:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{(s + \sigma - j\omega_d)(s + \sigma + j\omega_d)} \quad (6-55)$$

مطابق آنچه که در بخش (۶-۴) گفته شد همه قطب‌هایی که دارای نسبت میرایی^۱ مساوی ξ هستند، بر روی یک شعاع از مرکز قرار می‌گیرند که این شعاع با قسمت منفی محور حقیقی زاویه θ می‌سازد. بطوریکه $\xi = \cos^{-1} \theta$ می‌باشد. تغییرات ξ در سیستم این مثال برای چند حالت قطب مدار بسته در شکل (۶-۲۹) نشان داده شده است.

همانطور که ملاحظه می‌شود در مورد این سیستم می‌توان گفت که با افزایش مقدار K موارد زیر صادق است:

۱- مقدار θ (یعنی نسبت میرایی) کم می‌شود بنابراین مقدار "حداکثر دامنه" عکس‌العمل سیستم بزرگ می‌شود.

۲- مقدار ω_n یا فرکانس طبیعی سیستم غیر میرا^۲ بزرگ می‌شود.

۳- مقدار ω_d (یعنی فرکانس رفتار گذرا) بزرگ می‌شود.

۴- مقدار σ یا نرخ کاهش ثابت می‌ماند (برای $K > K_a$).

۵- مکان هندسی ریشه‌ها برای $K > K_a$ بصورت خط عمودی در می‌آید و $\omega_n = -\sigma$ ثابت است، یعنی هر چقدر هم مقدار K بزرگ شود سیستم مدار بسته ناپایدار نمی‌شود.

روشی که در اینجا مورد بحث قرار گرفت را می‌توان در تحلیل هر مسأله دیگری از این نوع نیز بکار برد. باید توجه نمود شرط آنکه بتوان برای سیستم مدار بسته، قطب‌های مسلط^۳ که در بخش (۶-۱) و در معادله (۶-۱۷) راجع به آن بحث شد [در نظر گرفت آن است که سیستم

۱- Damping Ratio

۲- Undamped System

۳- Dominant Pole

جدول (۱-۶). مکان هندسی ریشه‌ها برای انواع مختلف توابع تبدیل از مرتبه یک تا مرتبه چهار.

$G(s)$	مکان هندسی ریشه‌ها	$G(s)$	مکان هندسی ریشه‌ها
۱ $\frac{1}{s-p_1}$		۶ مشابه شماره ۵ $p_2 < z_1 < p_1$	
۲ $\frac{s-z_1}{s-p_1}$		۷ مشابه شماره ۵ $p_1, p_2 < z_1$	
۳ $\frac{1}{(s-p_1)(s-p_2)}$		۸ مشابه شماره ۱۵ مختلط p_2, p_1	
۴ $\frac{1}{(s-p_1)(s-p_2)}$ مختلط p_2, p_1		۹ $\frac{1}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)}$	
۵ $\frac{(s-z_1)}{(s-p_1)(s-p_2)}$ $z_1 < p_1, p_2$		۱۰ $\frac{1}{s(s-p_2)(s-p_3)}$	
۱۱ $\frac{1}{(s-p)^3}$		۱۶ مشابه شماره ۱۵	
۱۲ $\frac{1}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)}$ مختلط p_2, p_3		۱۷ مشابه شماره ۱۵	
۱۳ مشابه شماره ۱۲		۱۸ مشابه شماره ۱۵	
۱۴ مشابه شماره ۱۲		۱۹ $\frac{(s-z_1)(s-z_2)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)}$	
۱۵ $\frac{(s-z_1)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)}$		۲۰ مشابه شماره ۱۹	

جدول (۱-۶) - ادامه.

$Q_d(s)$	مکان هندسی ریشه ها	$Q_d(s)$	مکان هندسی ریشه ها
۲۱ $\frac{(s-z_1)(s-z_2)}{(s-p)^3}$ $z_2 < z_1 < p$		۲۵ $\frac{1}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)(s-p_4)}$ تمام قطبها حقیقی است	
۲۲ $\frac{(s-z_1)(s-z_2)}{s(s-p_2)(s-p_3)}$ $z_2 < p_1 < z_1 < p_2 < p_3 < 0$		۲۶ مشابه شماره ۲۵ ۲ قطب حقیقی ۲ قطب مختلط	
۲۳ مشابه شماره ۲۲		۲۷ مشابه شماره ۲۶	
۲۴ مشابه شماره ۲۲		۲۸ مشابه شماره ۲۵ تمام قطبها مختلط	

مدار بسته دارای دو قطب نزدیک به محور موهومی بوده و بقیه قطبها تا حد ممکن از محور موهومی دور باشند. هر قدر موقعیت بقیه قطبها دورتر از محور موهومی باشد (به سمت چپ)، دو قطب مسلط بیشتر نمایش تقریبی سیستم معادل را بیان می‌کند. در جدول (۱-۶) مکان هندسی ریشه‌ها برای انواع مختلف توابع تبدیل رسم شده است.

(۱-۶) - تأثیر اضافه کردن "قطب" یا "صفر" در پایداری و رفتار سیستم:

در اینجا می‌خواهیم ببینیم چنانچه به سیستم مدار باز، یک سیستم کمکی اضافه شود بطوریکه این سیستم کمکی باعث اضافه شدن یک قطب یا یک صفر به قطبها و صفرهای سیستم اصلی گردد، این عمل چه تأثیری در پایداری و رفتار سیستم مدار بسته خواهد داشت. فرض می‌کنیم سیستم مورد نظر قبل از اضافه کردن قطب یا صفر همان سیستم مورد مطالعه در قسمت (۵-۶) که تابع تبدیل آن بصورت معادله (۵۳-۶) بیان شده است، باشد. این معادله را می‌توان چنین نیز نوشت:

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 1/T_1)} \quad (56-6)$$

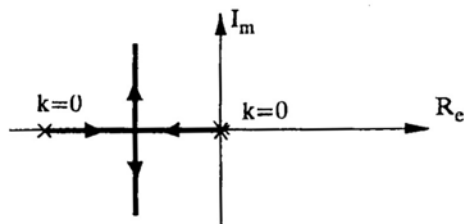
[در معادله (53-6) مقدار $T_1 = \frac{1}{2}$ است]. با افزودن یک صفر به سیستم فوق، تابع تبدیل سیستم جدید چنین خواهد بود:

$$G(s) = \frac{K(s + 1/T_2)}{s(s + 1/T_1)} \quad (57-6)$$

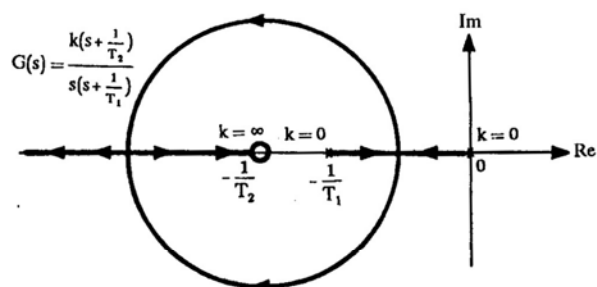
همچنین با افزودن یک قطب به سیستم معادله (56-6) خواهیم داشت:

$$G(s) = \frac{K}{s(s + \frac{1}{T_1})(s + \frac{1}{T_3})} \quad (58-6)$$

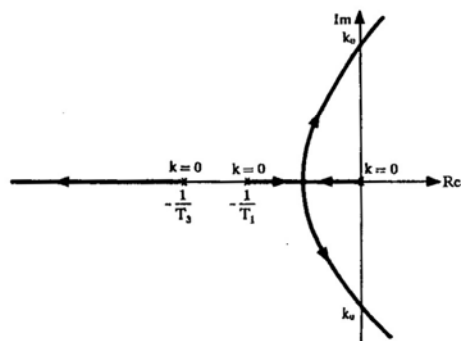
شکل‌های (a, b, c-30-6) مکان هندسی ریشه‌ها را که برای سه تابع تبدیل فوق رسم شده است نشان می‌دهند. از مقایسه حالات (a) و (b) از شکل (30-6) نتیجه می‌شود که با اضافه کردن صفر، شاخه‌ها به سمت چپ تمایل پیدا کرده‌اند در نتیجه برای مقادیر $K > K_n$ که ریشه‌ها نسبت به سیستم اصلی بیشتر به سمت چپ متمایل هستند، عکس‌العمل حالت گذرا سریعتر مستهلک می‌شود و این سیستم نسبت به سیستم اصلی پایدارتر است. همچنین از مقایسه حالات (a) و (c) از شکل (30-6) نتیجه می‌شود که با اضافه کردن قطب، شاخه‌ها به سمت راست تمایل پیدا کرده‌اند و برای مقادیر مشابه K ریشه‌های شکل (c) نسبت به شکل (a) به محور موهومی نزدیک‌ترند. در نتیجه عکس‌العمل حالت گذرا آهسته‌تر مستهلک شده و سیستم کمتر پایدار می‌باشد. همچنین برای مقادیر $K > K_u$ دو قطب از سه قطب سیستم مدار بسته، در سمت راست محور موهومی قرار می‌گیرند، در نتیجه سیستم مدار بسته برای $K > K_u$ ناپایدار می‌شود.



(a) - مکان هندسی ریشه‌های سیستم اصلی با تابع تبدیل $G(s) = \frac{K}{s(s+1/T_1)}$



(b) - مکان هندسی ریشه‌های با افزودن صفر (به سیستم اصلی) با تابع تبدیل $G(s) = \frac{K(s+1/T_2)}{s(s+1/T_1)}$



(c) - مکان هندسی ریشه‌ها با افزودن قطب (به سیستم اصلی) با تابع تبدیل

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1/T_1)(s+1/T_3)}$$

شکل (۶-۳۰). نمایش مکان هندسی ریشه‌ها در سیستم اصلی و حالات اضافه شدن صفر و اضافه شدن قطب به سیستم اصلی.

نتیجه کلی آنکه :

- ۱- اضافه کردن صفر به یک سیستم سبب می شود که مکان هندسی ریشه ها به سمت چپ متمایل شود که در این صورت سیستم پایدارتر و عکس العمل سیستم سریعتر می شود.
- ۲- اضافه شدن قطب به یک سیستم سبب می شود که مکان هندسی ریشه ها به سمت راست متمایل شود که در این صورت سیستم ناپایدارتر و عکس العمل سیستم کندتر می گردد.

(۷-۶) - ترمیم مکان هندسی ریشه ها^۱ :

عمل افزودن مکانیزمها و وسائلی به یک سیستم را که باعث تغییر شکل ترسیم مکان هندسی ریشه ها بمنظور بهبود رفتار سیستم گردد، " ترمیم مکان هندسی ریشه ها" نامیده و چنین ابزار و وسائلی را نیز جبران کننده یا ترمیم کننده^۲ می نامند که در بخش (۷-۶) از فصل هفتم به تفصیل در مورد آن بحث شده است.

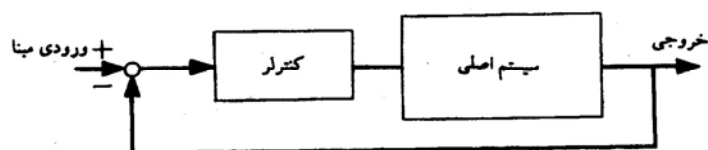
(۸-۶) - کنترل فرآیندها (تنظیم پارامترهای کنترل)^۳ :

یکی از مهمترین مسائلی که مهندسین کنترل در طراحی سیستمهای کنترلی با آن روبرو هستند " تعیین مقادیر مناسب پارامترهای کنترلر" است. در این راستا هر طراح سیستم کنترلی پس از انتخاب نوع کنترلر برای یک سیستم، باید به تعیین پارامترهای کنترلر بپردازد. واضح است که این پارامترها به سیستمی که باید کنترل شود بستگی دارند. مثلاً همانطور که در مثال (۶-۲) دیدیم اگر برای سیستمی با تابع تبدیل $G(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$ کنترلر از نوع "P-action" انتخاب شود مقدار ضریب کنترلر K_c نمی تواند از عدد ۸ بزرگتر شود زیرا در این صورت سیستم مدار بسته ناپایدار می شود. بنابراین طراح باید عددی بین صفر تا ۸ را برای K_c انتخاب نماید. از طرفی هر چه K_c کوچکتر انتخاب شود خطای حالت ماندگار بزرگتر می شود. بنابراین در

1-(Root Locus Compensation)

۲- Compensator

3-(Process Control (Parameter tuning)



شکل (۶-۳۱) - نمایش کلی سیستم فیدبک.

انتخاب ضریب کنترلر بین مقادیر صفر تا ۸ این مشکل وجود دارد که مقادیر بزرگ ضریب کنترلر، "پایداری" سیستم را تضعیف نموده و مقادیر کوچک ضریب کنترلر نیز باعث کاهش "کیفیت کنترل" سیستم می‌شوند. پاسخ به این سؤال که "علیرغم وجود چنین تناقضی در تعیین مقدار برای ضریب کنترلر، مقدار مناسب آن چه خواهد بود و بر چه اساسی انتخاب می‌شود؟" موضوع بحث ما در این بخش می‌باشد.

در سیستم مدار بسته شکل (۶-۳۱) که نمایش کلی یک سیستم کنترل فیدبک می‌باشد، با تغییر در پارامترهای کنترلر، موقعیت قطب‌های سیستم مدار بسته در صفحه مختلط تغییر نموده که نتیجه آن تغییر رفتار سیستم خواهد بود. بنابراین پارامترهای کنترلر باید طوری انتخاب شوند که سیستم مدار بسته بهترین رفتار را داشته باشد. ولی سؤالی که در اینجا مطرح می‌شود آنست که "منظور از بهترین رفتار چیست و عبارت ساده‌تر بهترین رفتار چگونه تعریف می‌شود؟" روشهای مختلفی که برای تعیین مقادیر مناسب پارامترهای کنترلر ابداع شده، هر کدام براساس تعریفی است که از بهترین رفتار سیستم پیشنهاد شده است. در میان این تعاریف پیشنهادی می‌توان به چند مورد بصورت زیر اشاره نمود.

سیستم وقتی دارای بهترین رفتار است که:

تعریف اول - عکس‌العمل سیستم مدار بسته نسبت به ورودی پله‌ای واحد دارای "کوتهایترین زمان استقرار"^۱ باشد.

تعریف دوم - "حداکثر دامنه"^۱ عکس‌العمل سیستم مدار بسته نسبت به ورودی پله‌ای واحد دارای محدودیت مقدار باشد.

تعریف سوم - در تعیین پارامترهای کنترلر توابعی از خطای سیستم مدار بسته دارای مقدار حداقل باشند. مثلاً "سطح زیرمنحنی قدر مطلق خطا"^۲ در طول زمان حداقل باشد.

$$IAE = \int_0^{\infty} |e(t)| dt \quad (59-6)$$

چند تابع دیگر خطا که حداقل بودن هر کدام از آنها می‌تواند اساس انتخاب و تعیین پارامترهای کنترلر باشد عبارتند از:

$$ISE = \int_0^{\infty} e^2(t) dt \quad (60-6)$$

$$ITAE = \int_0^{\infty} t |e(t)| dt \quad (61-6)$$

$$ITSE = \int_0^{\infty} t e^2(t) dt \quad (62-6)$$

وقتی تابع و شاخص مربوطه انتخاب شد با روشهای کامپیوتری می‌توان مقادیر بهینه پارامترهای کنترلر را بدست آورد. به طور کلی نتایج بدست آمده تنها برای یک سیستم یا حداکثر یک کلاس محدود از سیستمها که برنامه کامپیوتری برای آنها نوشته شده کاربرد دارند.

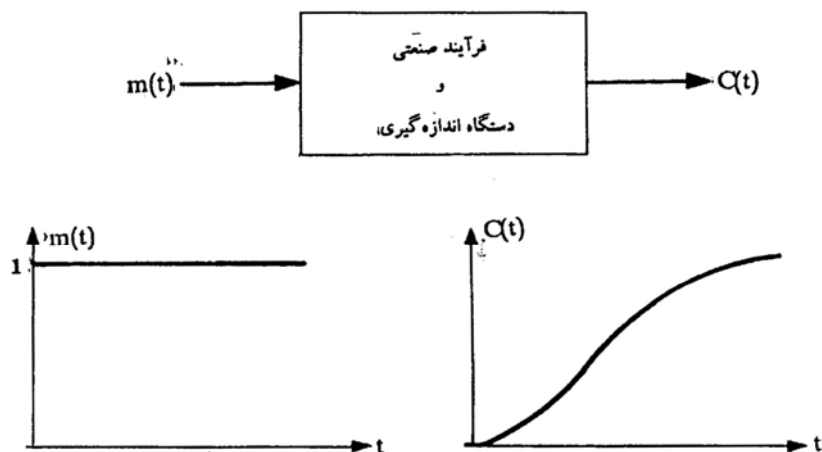
۱- Overshoot

۲- Integral of Absolute Error (IAE)

۳- Integral of Squared Error (ISE)

۴- Integral of Time multiplied by Absolute value of Error (ITAE)

۵- Integral of Time multiplied by Squared Error (ITSE)



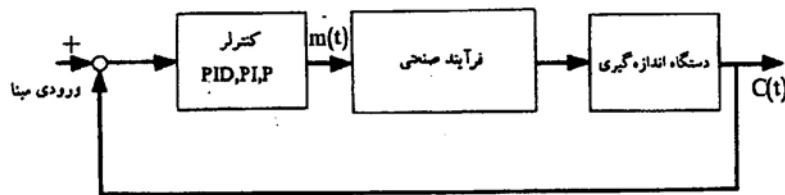
شکل (۶-۳۲). فرآیند صنعتی (بعنوان سیستم اصلی) و نمایش عکس العمل آن نسبت به ورودی پله‌ای واحد.

همچنین می‌توان شاخص‌های دیگری نظیر محدودیت در مقادیر پارامترهای کنترلر را بعنوان اساس بهینه‌سازی در نظر گرفت.

تعیین مقادیر پارامترهای کنترلر برای یک گروه خاص از سیستمهای دینامیکی توسط دو دانشمند متقدم علم کنترل بنامهای "زیگلر و نیکولز"^۱ انجام شده است. بن گروه از سیستمها که فرآیندهای صنعتی^۲ نامیده می‌شوند دارای این مشخصه مهم و اصلی هستند که عکس العمل سیستم مدار باز آنها نسبت به ورودی پله‌ای از مبدا بتدریج افزایش یافته و به یک حالت ماندگار می‌رسد و در آن حالت باقی می‌ماند. همانطور که در شکل (۶-۳۲) نمایش داده شده است، با توجه به اینکه ترسیمه عکس العمل این سیستمها مشابه حرف S می‌باشد آنها را

۱- Zigler & Nichols

۲- Process Plants



شکل (۶-۳۳). دیاگرام جعبه‌ای یک فرآیند صنعتی با کنترلرهای خطی در سیستم مدار بسته.

سیستمهای با عکس‌العمل S شکل^۱ نیز می‌نامند. سیستمهای شیمیایی، سیستمهای حرارتی، پالایشگاهها، نیروگاهها، مبدل‌های حرارتی و مثالهایی از این قبیل سیستمها هستند. شکل (۶-۳۳) سیستم مدار بسته‌ای را که سیستم اصلی آن فرآیند صنعتی و کنترلر آن از نوع خطی و به یکی از صورتهای P، PI و یا PID می‌باشد نشان می‌دهد. روشهایی که در زیر بیان می‌شود براساس آزمایشات و تجارب عملی "زیگلر" و آنالیزهای ریاضی "نیکولز" می‌باشد که پارامترهای کنترلر را برای سیستم شکل (۶-۳۳) تعیین می‌نماید و اساس کار آنها حداقل کردن انتگرال قدر مطلق خطا (IAE) طبق رابطه (۶-۵۹) می‌باشد.

(۶-۸-۱) - روشهای "زیگلر و نیکولز" برای تعیین پارامترهای کنترلر:

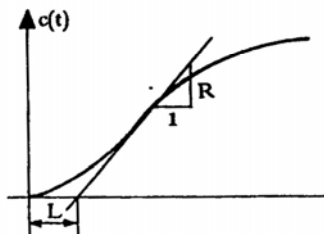
برای تعیین پارامترهای کنترلر، زیگلر و نیکولز دو روش را ارائه داده‌اند که در ذیل تشریح می‌گردند.

الف) - روش اول (روش عکس‌العمل حالت گذرا)^۲:

در این روش عکس‌العمل سیستم مدار باز نسبت به ورودی پله‌ای واحد رسم می‌شود و مطابق شکل (۶-۳۴) دو مقدار R و L اندازه‌گیری می‌شوند. کمیت R عبارت از

۱- "S" Shaped Response

۲- Transient Response Method



شکل (۳۴-۶) - عکس‌العمل سیستم مدار باز نسبت به ورودی پله‌ای واحد.

ماکزیمم شیب خط مماس بر منحنی و L عبارت است از زمانی است که خط مماس بر منحنی محور زمان را قطع می‌کند.

با در دست داشتن R و L مقادیر بهینه توصیه شده توسط زیگلر و نیکولز برای پارامترهای کنترلر در شکل (۳۳-۶) عبارتند از:
- برای کنترلر نوع "P-action":

$$K_C = \frac{1}{RL} \quad (a-۳۳-۶)$$

- برای کنترلر نوع "PI-action":

$$K_C = \frac{0.9}{RL}, \quad T_i = 3.3L \quad (b-۳۳-۶)$$

- برای کنترلر نوع "PID-action":

$$K_C = \frac{1.2}{RL}, \quad T_i = 2L, \quad T_d = 0.5L \quad (c-۳۳-۶)$$

لازم به یادآوری است که تابع تبدیل کنترلر در حالت کلی از رابطه ذیل بدست می‌آید:

$$G(s) = K_C \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad (۴۴-۶)$$

ب)- روش دوم (روش حساسیت مقدار نهائی^۱):

در این روش از اطلاعات مربوط به سیستم مدار بسته تحت تأثیر کنترلر "P-action" در مرز پایداری استفاده می‌شود. مطابق شکل (۶-۳۵) در این روش مقادیر دو کمیت K_u و P_u اساس تعیین پارامترهای کنترلر قرار می‌گیرند.

K_u عبارت از مقدار بزرگنمایی^۲ مربوط به "P-action" است که سیستم مدار بسته را در مرز پایداری قرار می‌دهد و P_u نیز عبارت از پریود ارتعاشات عکس‌العمل سیستم مدار بسته در مرز پایداری می‌باشد. با داشتن K_u و P_u مقادیر بهینه پارامترهای کنترلر عبارتند از:

- برای کنترلر نوع "P-action":

$$K_C = 0.5 K_u \quad (a-۶۵-۶)$$

- برای کنترلر نوع "PI-action":

$$K_C = 0.45 K_u, \quad T_i = 0.83 P_u \quad (b-۶۵-۶)$$

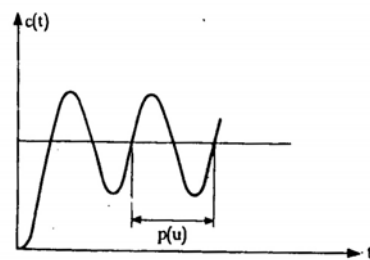
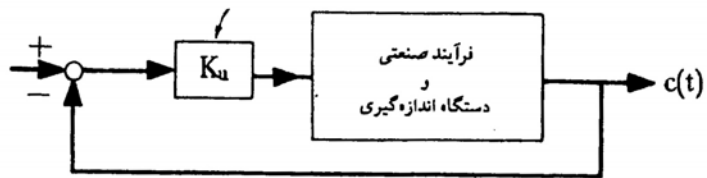
- برای کنترلر نوع "PID-action":

$$K_C = 0.6 K_u, \quad T_i = 0.5 P_u, \quad T_d = 0.125 P_u \quad (c-۶۵-۶)$$

۱- Ultimate Sensitivity Method

۲- Gain

مقدار P-action در مرز پایداری



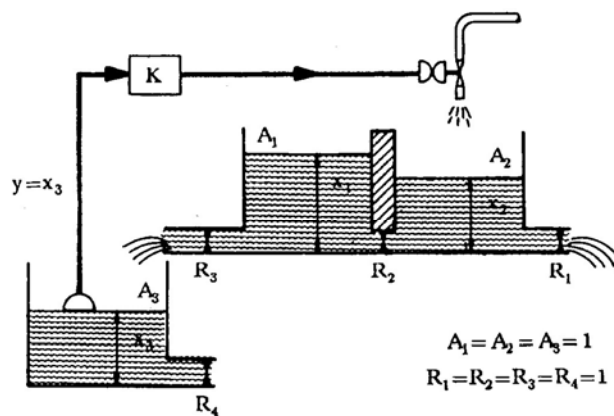
شکل (۳۵-۶). نمایش سیستم مدار بسته با "P-action" و عکس العمل سیستم در مرز پایداری در روش "حساسیت مقدار نهائی" بمنظور تعیین پارامترهای کنترلرهای خطی.



مسائل

(۱-۶) - در شکل (م-۶-۱) یک سیستم کنترل سطح مایع نشان داده شده است. با توجه به سیستم مدار بسته شکل:

- الف) - ماتریس ضرایب A برای سیستم بسته با کنترلر تناسبی K را تعیین کنید.
 ب) - محدوده مجاز K را برای پایداری سیستم مدار بسته مشخص نمایید.
 ج) - معادله دیفرانسیل سیستم را بر حسب خروجی y و مشتقات آن بدست آورید (راهنمایی: برای یافتن معادله دیفرانسیل مذکور از معادلات حالت سیستم استفاده نمایید).

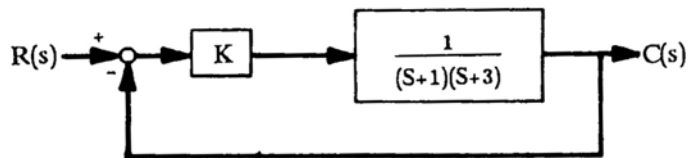


شکل (م-۶-۱)

(۲-۶) - برای سیستم مدار بسته شکل (م-۲-۶):

الف) - خطای حالت ماندگار (e_{ss}) را به ازاء ورودی پله‌ای واحد [$R(s) = \frac{1}{s}$] برای حالت‌های $K=1$ و $K=12$ بدست آورید.

ب) - عکس‌العمل سیستم مدار بسته را با فرض $K=12$ بطور تقریبی رسم نمایید.



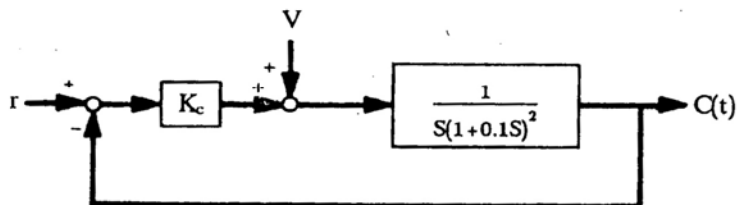
شکل (م-۲-۶)

(۳-۶) - خطای حالت ماندگار (e_{ss}) را برای سیستم مدار بسته شکل (م-۳-۶) در حالت‌های ذیل بدست آورید.

الف) $R(s) = \frac{1}{s}$, $V(s) = 0$

ب) $R(s) = 0$, $V(s) = \frac{1}{s}$

ج) $R(s) = \frac{1}{s}$, $V(s) = \frac{0.2}{s}$

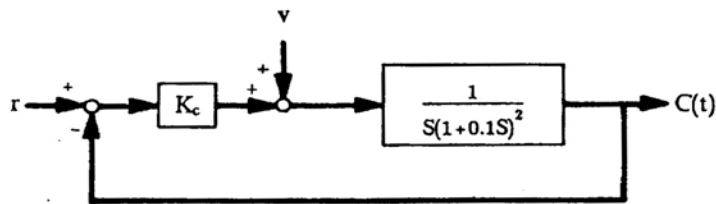


شکل (م-۳-۶)

(۴-۶) - در سیستم مدار بسته شکل (م-۴-۶) :

الف - با فرض $r(t) = v(t) = 1$ ، مقدار K_c را طوری تعیین کنید که اثر ورودی مزاحم بر خروجی کمتر از 10% اثر ورودی مبنا بر خروجی در حالت ماندگار باشد.

ب - آیا می توان به ازاء $r(t) = v(t) = 1$ مقدار K_c را چنان تعیین نمود که اثر ورودی مزاحم بر خروجی در حالت ماندگار کمتر از ۱٪ اثر ورودی مبنا بر خروجی شود؟



شکل (م-۶-۴)

(۵-۶) - منحنی مکان هندسی ریشه ها (Root Locus) را برای هر یک از توابع تبدیل ذیل رسم نمایید.

a) $G(s) = K \frac{s+2}{s+1}$

b) $G(s) = K \frac{1}{(s+1)(s+2)}$

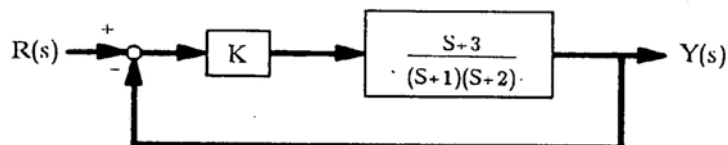
c) $G(s) = K \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}$

d) $G(s) = K \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$

e) $G(s) = K \frac{1}{s(s^2+1)}$

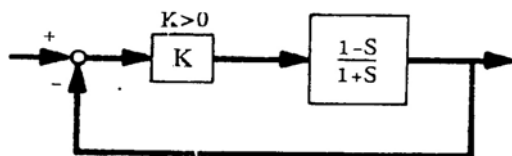
f) $G(s) = K \frac{s+2}{s^2+25s+4}$

(۶-۶) - برای سیستم مدار بسته شکل (۶-۶-م) ضریب کنترلر K را چنان تعیین کنید که نسبت میرایی ζ در سیستم مدار بسته به کمترین مقدار ممکن برسد. جواب حاصله را با استفاده از منحنی مکان هندسی ریشه‌ها مورد تحلیل قرار دهید.



شکل (۶-۶-م)

(۷-۶) - برای سیستم شکل (۷-۶-م) منحنی مکان هندسی ریشه‌ها را رسم نمایید (راهنمایی: رسم منحنی به روش متداول میسر نیست لذا از روش محاسبه منحنی را رسم نمایید).



شکل (۷-۶-م)

(۸-۶) - برای یک سیستم کنترلی که تابع تبدیل «مدار باز» آن بصورت :

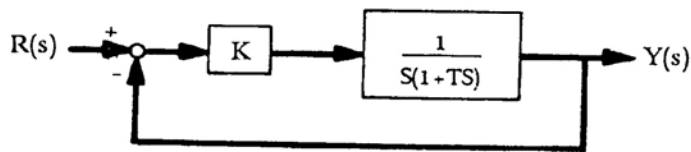
$$G(s) = K \frac{s+0.5}{s^2(s+1)^2}$$

داده شده است:

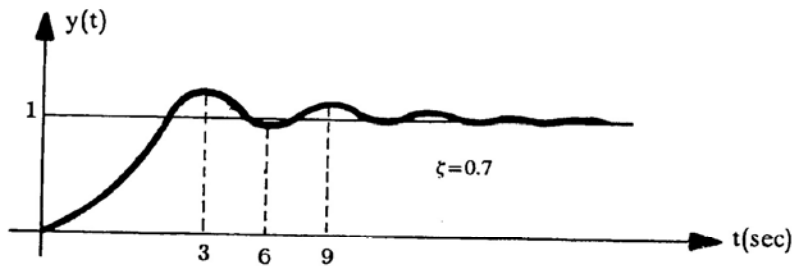
- الف) - مکان هندسی ریشه‌ها را رسم نموده و مقدار بحرانی K را بدست آورید.
 ب) - با افزایش K از مقدار صفر و قبل از رسیدن آن به مقدار بحرانی، سیستم مدار بسته بصورت نوسانی میرا درمی‌آید. مقدار تقریبی K را برای آنکه نسبت میرایی (ζ)

ماکزیمم شود تعیین نمایید.

(۹-۶) - شکل (م-۹-۶-ب) نمایش عکس‌العمل سیستم مدار بسته شکل (م-۹-۶-الف) نسبت به ورودی پله‌ای واحد $R(s) = \frac{1}{s}$ می‌باشد. پارامتر T و ضریب کنترلر K را با توجه به مشخصات عکس‌العمل سیستم مدار بسته مورد بحث بدست آورید.



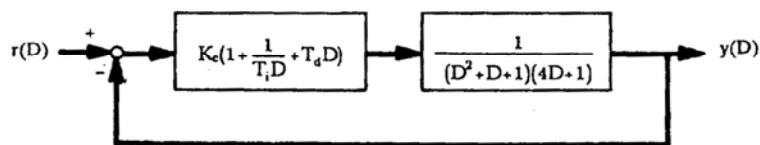
(الف)



(ب)

شکل (م-۹-۶)

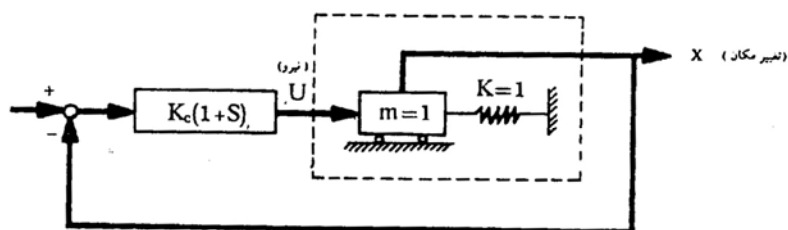
(۱۰-۶) - در سیستم مدار بسته شکل (م-۱۰-۶) از یک کنترلر PID استفاده شده است. با توجه به پارامترهای سیستم اصلی، پارامترهای مجهول کنترلر یعنی T_d ، T_i ، K_c را براساس روش حساسیت مقدار نهایی (روش دوم زیگلر - نیکولز) طراحی و تعیین نمایید.



شکل (م-۶-۱۰)

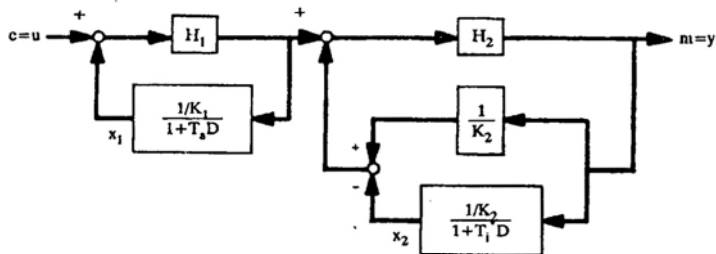
(۱۱-۶) - برای سیستم با تابع تبدیل $G(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$ ، براساس عکس‌العمل حالت گذرا (روش اول زیگلر و نیکولز) یک کنترلر PI - action طراحی نمایید.

(۱۲-۶) - در سیستم فنر و وزنه شکل (م-۶-۱۲) برای پایدار کردن سیستم، که در مرز پایداری قرار دارد، از کنترلر PD - action استفاده شده است. بدین ترتیب عکس‌العمل سیستم مدار بسته، «نوسانی مستهلک کننده» می‌شود. در این سیستم استهلاکی K_c را طوری تعیین کنید که نسبت میرایی (ξ) برابر $\frac{\sqrt{2}}{2}$ شود ($\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}$).



شکل (م-۶-۱۲)

(۱۳-۶) - با استفاده از روش حساسیت مقدار نهایی (روش دوم زیگلر و نیکولز)، پارامترهای T_d ، T_i و K_c در کنترلر PID سیستم شکل (م-۶-۱۳) را بدست آورید.



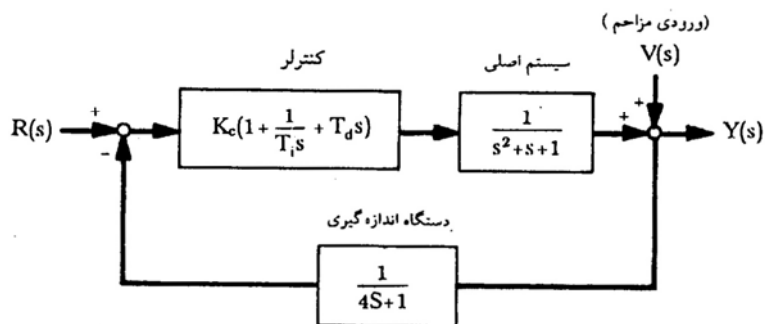
شکل (م-۶-۱۳)

(۱۴-۶) - شکل (م-۶-۱۴) دیاگرام جعبه‌ای یک کنترلر PID را برای سیستم‌های نیوماتیک

نشان می‌دهد. در این سیستم:

الف - معادلات حالت را بصورت ماتریس‌های A , b , c , d بدست آورید.

ب - چنانچه $K_1 \rightarrow \infty$ و $K_2 \rightarrow \infty$ میل کند، رابطه بین ورودی و خروجی



شکل (م-۶-۱۴)

($m = y$) به فرم کلی کنترلر PID، یعنی:

$$K_c \left(1 + \frac{1}{T_i D} + T_d D \right)$$

درمی‌آید. مقادیر K_c ، T_i و T_d را برحسب K_1 ، K_2 ، T_i^* و T_d^* بدست آورید.

*

* * *

فصل هفتم

عکس العمل فرکانسی

مقدمه :

"عکس العمل سینوسی یک سیستم در حالت ماندگار" که "عکس العمل فرکانسی"^۱ سیستم نامیده می شود، در این فصل مورد مطالعه قرار می گیرد. در "سیستم خطی با پارامترهای ثابت نسبت به زمان" اگر ورودی به سیستم یک تابع سینوسی باشد، پس از آنکه اثر رفتار گذرا از بین رفت، خروجی سیستم نیز یک تابع سینوسی با همان فرکانس تابع ورودی خواهد بود. در یک سیستم مورد مطالعه چنانچه نسبت دامنه خروجی به دامنه ورودی و اختلاف فاز بین تابع ورودی و خروجی برای تمامی محدوده فرکانس ورودی "از صفر تا بینهایت" معلوم باشد، از دیدگاه کنترل سیستم مورد نظر بطور کامل شناسائی شده و معین محسوب می گردد. بعبارت دیگر نشان خواهیم داد که برای شناسائی سیستمی که آنرا نمی شناسیم (یعنی تابع تبدیل بین ورودی و خروجی آن نامعلوم است) کافی است به سیستم یک ورودی سینوسی اعمال کرده و "دامنه و اختلاف فاز موج سینوسی خروجی را نسبت به موج ورودی" اندازه گیری کنیم. چنانچه این عمل را برای همه فرکانس ها از صفر تا ∞ انجام دهیم (عملاً با انجام تعداد زیادی آزمایش) و نتایج اندازه گیری را یادداشت نماییم، از این نتایج می توانیم تابع تبدیل سیستم را بدست آوریم.

روش عکس‌العمل فرکانسی عملاً روشی برای طراحی سیستم مدار بسته می‌باشد و ما در این فصل خواهیم دید که چگونه با استفاده از این روش می‌توان سیستم مدار بسته را طراحی نمود. عبارت دیگر نتایج حاصله از روش عکس‌العمل فرکانسی در یک سیستم نه تنها محدود به ورودی سینوسی نمی‌شود بلکه پس از طراحی سیستم براساس این روش می‌توان ورودی واقعی و عملی را به سیستم اعمال نمود.

در بخش اول این فصل عکس‌العمل حالت ماندگار یک سیستم تحت تأثیر ورودی سینوسی را مورد بررسی قرار داده و در بخش دوم نیز روشهای ترسیم عکس‌العمل فرکانسی بصورت نمایش قطبی (یا " نایکوئیست^۱ ") و لگاریتمی (یا " بود^۲ ") تشریح می‌گردد. در بخش سوم و چهارم قضیه پایداری نایکوئیست و کاربردهای آن در مسائل مهندسی را مورد مطالعه قرار داده و در بخش پنجم نیز نحوه طراحی سیستم مدار بسته با استفاده از نتایج قضیه پایداری نایکوئیست بررسی خواهد شد و بالاخره در بخش ششم به بررسی جبران‌کننده‌ها یا ترمیم‌کننده‌های مختلف پرداخته می‌شود.

(۱-۷)- ورودی و خروجی سینوسی:

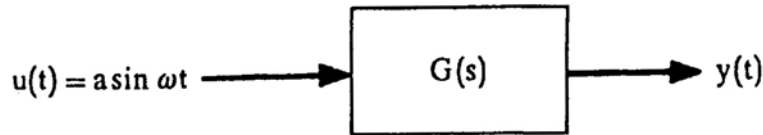
سیستم شکل (۱-۷) با تابع تبدیل $G(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$ را در نظر بگیرید. در این سیستم بازاء یک ورودی سینوسی بصورت $u(t) = a \sin \omega t$ می‌خواهیم عکس‌العمل سیستم (یا $y(t)$) در حالت ماندگار^۳ که با $y_{ss}(t)$ نمایش داده می‌شود را تعیین نموده و آنرا مورد بررسی قرار دهیم. در این حالت داریم:

$$\begin{aligned} u(t) &= a \sin \omega t \\ U(s) &= \frac{a \omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned} \quad (1-7)$$

۱- Nyquist Plot

۲- Bode Plot

۳- Steady State Response (S.S.R).



شکل (۱-۷) - سیستم با تابع تبدیل $G(s)$ تحت تأثیر ورودی سینوسی.

در اینصورت $Y(s)$ عبارت است از:

$$Y(s) = G(s) U(s) = \frac{a\omega B(s)}{(s^2 + \omega^2)A(s)} \quad (۲-۷)$$

در این رابطه $A(s)$ برحسب s از رسته n می‌باشد، یعنی سیستم مدارباز از رسته n فرض شده است. اگر ریشه‌های $A(s)$ یعنی قطب‌های سیستم مدارباز را با p_i نشان دهیم و معادله (۷-۲) را بسط دهیم، داریم:

$$Y(s) = \frac{K_0}{s - j\omega} + \frac{K_0^*}{s + j\omega} + \frac{K_1}{s - p_1} + \frac{K_2}{s - p_2} + \dots + \frac{K_n}{s - p_n} \quad (۳-۷)$$

در این رابطه K_0 و K_0^* اعداد مختلط قرینه می‌باشند. برای محاسبه K_0 و K_0^* کافی است طرفین معادله (۳-۷) را بترتیب در $s - j\omega$ و $s + j\omega$ ضرب نموده و حد توابع حاصله را بازنه $s = j\omega$ و $s = -j\omega$ بدست آوریم. مثلاً با ضرب طرفین معادله (۳-۷) در $s - j\omega$ و قراردادن $s = j\omega$ داریم:

$$K_0 = \left[\frac{a\omega G(s)}{s + j\omega} \right]_{s=j\omega} = \frac{a\omega G(j\omega)}{2j\omega} = \frac{aG(j\omega)}{2j} \quad (a-۴-۷)$$

و به همین ترتیب برای K_0^* نیز نتیجه می‌شود:

$$K_0^* = \frac{aG(-j\omega)}{-2j} \quad (b-۴-۷)$$

مقدار تابع خروجی $y(t)$ از تبدیل معکوس لاپلاس معادله (۷-۳) بدست می‌آید، یعنی:

$$y(t) = K_0 e^{j\omega t} + K_0^* e^{-j\omega t} + K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} + \dots + K_n e^{p_n t}$$

از آنجا که برای یک سیستم پایدار همه قطب‌های p_1 تا p_n در سمت چپ محور موهومی واقع می‌شوند، بجز دو عبارت اول سمت راست در حالت ماندگار ($t \rightarrow \infty$)، سایر عبارات معادله فوق حذف می‌گردند. بنابراین داریم:

$$y_{ss}(t) = K_0 e^{j\omega t} + K_0^* e^{-j\omega t} \quad (۷-۵)$$

با مقدار قراردادن از معادله (۷-۴-ا) و (۷-۴-ب) در معادله (۷-۵)، عکس‌العمل سیستم در حالت ماندگار $y_{ss}(t)$ چنین نتیجه می‌شود:

$$y_{ss}(t) = a \left[\frac{G(j\omega) e^{j\omega t}}{2j} - \frac{G(-j\omega) e^{-j\omega t}}{2j} \right] \quad (۷-۶)$$

از طرفی $G(j\omega)$ خود یک عدد مختلط است که دارای "اندازه" 1 و "فاز" 2 می‌باشد، لذا می‌توان نوشت:

$$G(j\omega) = M(\omega) / \phi(\omega) = M(\omega) e^{j\phi(\omega)} \quad (۷-۷-ا)$$

$$G(-j\omega) = M(\omega) / -\phi(\omega) = M(\omega) e^{-j\phi(\omega)} \quad (۷-۷-ب)$$

و مقادیر $M(\omega)$ و $\phi(\omega)$ عبارتند از:

$$M(\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{(\text{Re. } G(j\omega))^2 + (\text{Im. } G(j\omega))^2} \quad (۷-۸-ا)$$

$$\phi(\omega) = \angle G(j\omega) = \tan^{-1} \left[\frac{\text{Im. } G(j\omega)}{\text{Re. } G(j\omega)} \right] \quad (۷-۸-ب)$$

۱- Magnitude

۲- Phase

در این روابط Re معرف قسمت حقیقی^۱ و Im معرف قسمت موهومی^۲ یک عدد مختلط می‌باشد. با قراردادن از معادلات (a-۷-۷) و (b-۷-۷) در معادله (۶-۷) نتیجه می‌شود:

$$y_{ss}(t) = aM(\omega) \left[\frac{e^{j[\omega t + \phi(\omega)]} - e^{-j[\omega t + \phi(\omega)]}}{2j} \right]$$

با استفاده از نمایش مختلط تابع سینوسی، یعنی:

$$\sin \beta = \frac{e^{j\beta} - e^{-j\beta}}{2j}$$

رابطه^۳ $y_{ss}(t)$ بصورت ذیل نتیجه خواهد شد:

$$y_{ss}(t) = aM(\omega) \sin[\omega t + \phi(\omega)] \quad (۹-۷)$$

همچنین معادله (۹-۷) را می‌توان چنین نوشت:

$$y_{ss}(t) = b \sin[\omega t + \phi(\omega)] \quad (۱۰-۷)$$

که از مقایسه معادلات (۹-۷) و (۱۰-۷) نتیجه می‌شود:

$$M(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{b}{a} \quad (۱۱-۷)$$

بعبارت دیگر:

اگر ورودی به سیستم یک ورودی سینوسی با دامنه a و فرکانس ω باشد عکس‌العمل سیستم در حالت ماندگار نیز یک موج سینوسی با همان فرکانس و با اختلاف فاز $\phi(\omega)$ و

۱- Real Part of Complex Number

۲- Imaginary Part of Complex Number

دامنه $b=aM(\omega)$ خواهد بود. همچنین می توان گفت برای محاسبه "نسبت دامنه تابع سینوسی خروجی در حالت ماندگار به دامنه تابع سینوسی ورودی"، کافی است در تابع تبدیل $G(s)$ بجای s ، مقدار $j\omega$ را قرار داده و اندازه آن یعنی $M(\omega)=|G(j\omega)|$ را محاسبه نمائیم. عدد بدست آمده را که تابعی از فرکانس ورودی است، "نسبت دامنه" یا بزرگنمایی^۱ می نامند. از آنجا که رسته مخرج $G(s)$ معمولاً بیشتر از رسته صورت آن است می توان انتظار داشت که $M(\omega)$ یا نسبت دامنه خروجی به ورودی برای فرکانس های خیلی زیاد، بسیار کوچک شود.

برای بدست آوردن اختلاف فاز $\phi(\omega)$ بین ورودی و خروجی در حالت ماندگار کافی است در تابع تبدیل $G(s)$ بجای s مقدار $j\omega$ را قرار دهیم و زاویه مربوط به این عدد مختلط را از رابطه (b-۸-۷) بدست آوریم.

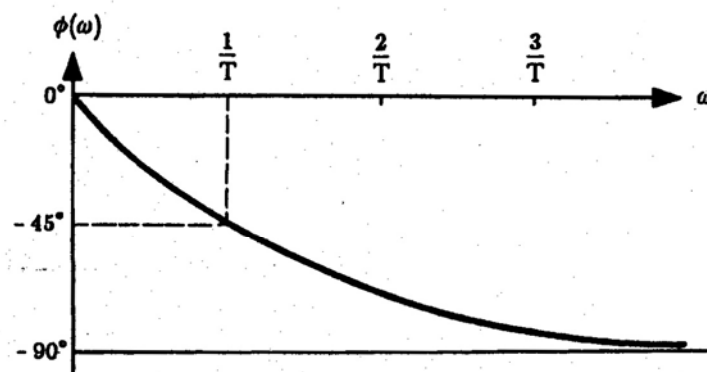
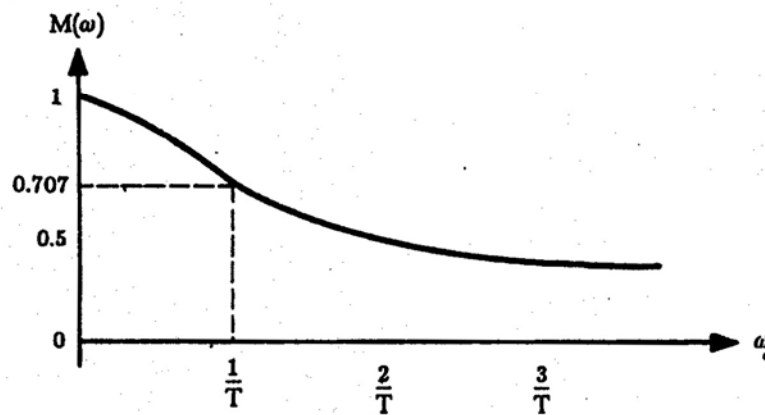
مثال (۷-۱):

سیستمی با تابع تبدیل $G(s)=\frac{1}{1+Ts}$ را در نظر می گیریم. می خواهیم برای این سیستم $M(\omega)$ و $\phi(\omega)$ را بدست آورده و تغییرات آنها را برحسب تغییرات ω نمایش دهیم. با استفاده از معادلات (a-۸-۷) و (b-۸-۷) داریم:

$$M(\omega) = |G(j\omega)| = \left| \frac{1}{1+jT\omega} \right| = \frac{1}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} \quad (a-۱۲-۷)$$

$$\phi(\omega) = \angle \left(\frac{1}{1+jT\omega} \right) = \tan^{-1}(-T\omega) = -\tan^{-1}(T\omega) \quad (b-۱۲-۷)$$

شکل (۷-۲) نمودار $M(\omega)$ و $\phi(\omega)$ برحسب ω برای این سیستم را نشان می دهد. همانطور که ملاحظه می شود اگر فرکانس تابع سینوسی ورودی بسیار کوچک (یعنی $\omega \approx 0$) باشد نسبت دامنه خروجی به ورودی مساوی واحد بوده و اختلاف فاز نیز



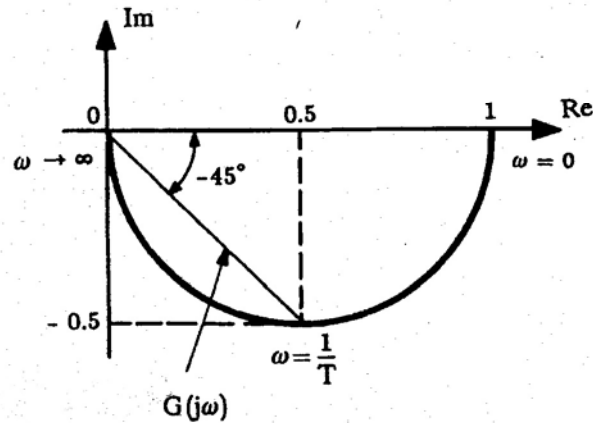
شکل (۷-۲). نمایش ترسیمی $M(\omega)$ و $\phi(\omega)$ بر حسب ω برای تابع تبدیل $G(s) = \frac{1}{1+Ts}$.

برابر صفر می‌باشد. هر چه فرکانس ورودی یعنی ω بزرگ شود، $M(\omega)$ یا نسبت دامنه

کوچک می‌شود و وقتی $\omega \rightarrow \infty$ میل کند نسبت دامنه به سمت صفر میل می‌کند.

همچنین $\phi(\omega)$ برای ω های خیلی بزرگ به سمت $-\frac{\pi}{2} = -90^\circ$ میل می‌کند.

اگر در این مثال $G(j\omega)$ را بصورت یک بردار در مختصات قطبی در نظر بگیریم



شکل (۳-۷) - نمایش قطبی $G(j\omega)$ برای ω از صفر تا ∞ (با تابع تبدیل $G(s) = \frac{1}{1+Ts}$).

می‌توانیم در صفحه مختلط، $G(j\omega)$ را برحسب مقادیر ω از صفر تا ∞ رسم کنیم که این ترسیمه در شکل (۳-۷) نشان داده شده است.

(۲-۷) - رسم عکس‌العمل فرکانسی:

در این بخش دو روش ترسیم عکس‌العمل فرکانسی برای یک ورودی سینوسی تشریح می‌گردد. این روشها، شیوه‌های کارآمدی برای بیان رفتارهای سیستمها بشمار می‌آیند که هر روش بنام واضع آن نامگذاری شده است.

(۱-۲-۷) - نمودار نایکویست:

نمودار نایکویست^۱ (یا نمودار قطبی) عبارت است از رسم بردار مختلط $G(j\omega)$ در صفحه مختلط (که آنرا صفحه $G(j\omega)$ می‌نامیم) وقتی ω از صفر تا ∞ تغییر نماید. در این نمودار مقادیر بزرگنمایی $M(\omega)$ و فاز $\phi(\omega)$ توأمأ در یک منحنی رسم می‌شوند که در این

منحنی ω عبارت از پارامتر غیرآشکاری است که منحنی را باید برحسب آن درجه‌بندی نمود. در شکل (۳-۷) نمونه‌ای از این منحنی نشان داده شده است.

مثال (۲-۷):

در سیستم فنر و وزنه و دمپر شکل (۴-۷) فرض می‌کنیم ورودی به صورت تغییر مکان $u(t) = a \sin \omega t$ به فنر وارد شود. اگر تغییر مکان جرم m را خروجی در نظر بگیریم با توجه به رابطه ماتریسی ذیل می‌خواهیم دیاگرام نایکویست را برای این سیستم رسم نمائیم.

رابطه بین خروجی $Y(s)$ و ورودی $U(s)$ را با ساده کردن روابط ماتریسی فوق می‌توان چنین نوشت:

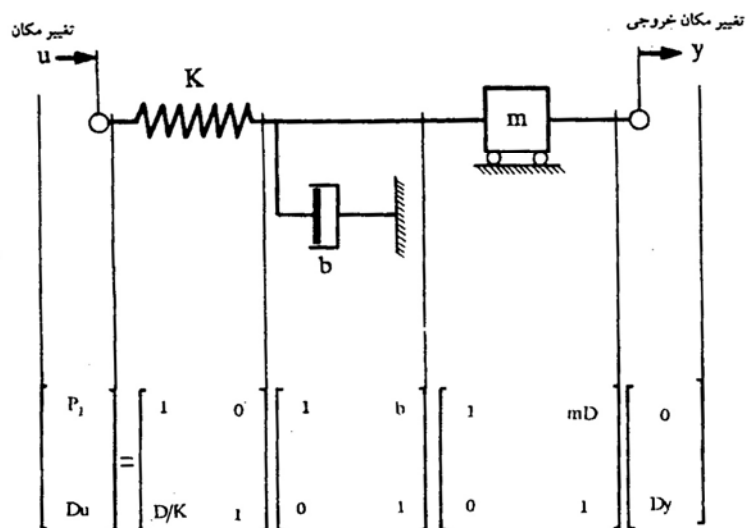
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{k}{ms^2 + bs + k} = \frac{1}{1 + \frac{b}{k}s + \frac{m}{k}s^2} \quad (۱۳-۷)$$

طبق تعریف $\frac{k}{m} = \omega_n^2$ و $\frac{b}{m} = 2\zeta\omega_n$ می‌باشد که ω_n فرکانس طبیعی حالت غیر میرا و ζ نیز نسبت میرایی نامیده می‌شود. اگر $\frac{1}{\omega_n}$ را T معرفی کنیم (T ثابت زمانی سیستم است) در اینصورت $G(s)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$G(s) = \frac{1}{1 + 2\zeta Ts + (Ts)^2} \quad (a-۱۴-۷)$$

با قراردادن $s = j\omega$ در رابطه فوق داریم:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta T(j\omega) + (j\omega T)^2}$$



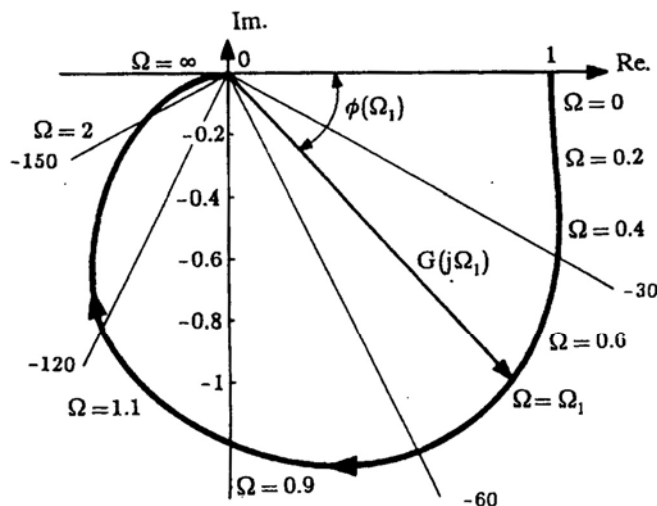
شکل (۴-۷). سیستم مکانیکی فنر، وزنه و دمپر با ورودی سینوسی.

اگر ωT را با Ω نمایش دهیم داریم:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 - 2\xi\Omega + (j\Omega)^2} \quad (b-14-7)$$

حال دیاگرام نایکویست را بازاای یک ξ دلخواه (مثلاً $\xi=0.4$) رسم می‌کنیم. همانطور که از شکل (۵-۷) ملاحظه می‌شود دیاگرام از نقطه ۱ روی محور حقیقی بازاای $\Omega=0$ با فاز صفر درجه شروع و به نقطه مبدا با فاز -180° بازاای $\omega=\infty$ ختم می‌شود. در دیاگرام نایکویست برای یک نقطه دلخواه $\Omega=\Omega_1$ مختصات نقطه p بوسیله بردار نمایش داده می‌شود که در نقطه p طول بردار نمایش دهنده مقدار $M(\Omega_1)$ بوده و زاویه نیز با $\phi(\Omega_1)$ نشان داده شده است.

نمودار نایکویست در تعیین پایداری سیستم مدار بسته از اهمیت و ارزش فراوانی برخوردار است که در بخش بعدی به آن پرداخته می‌شود. از آنجا که رسم این نمودار نسبتاً مشکل بوده و ضمناً مقادیر فرکانس ω نیز باید بصورت غیرخطی در نمودار درجه‌بندی شود



شکل (۵-۷). دیاگرام نایکوئیست برای $G(j\Omega) = \frac{1}{1+2\zeta j\Omega+(j\Omega)^2}$ با $\zeta=0.4$.

لذا در این بخش به معرفی نمودار دیگری بنام نمودار "بود" می‌پردازیم که از نظر ترسیمی و بیان مفهوم رفتار سیستم دارای تفاوتی با دیاگرام نایکوئیست می‌باشد.

(۲-۲-۷). نمودار "بود":

نمودار "بود" عبارت از ترسیمه‌های جداگانه‌ای از $M(\omega)$ و $\phi(\omega)$ بر حسب ω می‌باشد. در این نمودارها محور افقی یعنی محور ω بر حسب لگاریتم در مبنای ده درجه‌بندی شده و در محورهای عمودی آنها نیز $M(\omega)$ بر حسب $20\log_{10}$ (که یک "دسی‌بل" ^۲، با علامت db، نامیده می‌شود) و $\phi(\omega)$ بر حسب درجه مشخص شده است. مقدار db (دسی‌بل) عددی مانند

۱- Bode Plot

۲- Decible

M بصورت زیر تعریف می‌شود (علامت M(db) خوانده می‌شود M بر حسب db):

$$M(\text{db}) = 20 \log_{10} M \quad (۱۵-۷)$$

مثلاً اگر M بترتیب مقادیر 0.001، 0.01، 0.1، 1، 10، 100 و 1000 را دارا باشد، مقدار M(db) بترتیب دارای مقادیر -60، -40، -20، 0، 20، 40 و 60 خواهد بود.

برای رسم دیاگرام‌های "بود" و "نایکویست" معمولاً تابع تبدیل G(s) سیستم را بصورت معادله (۲۶-۶) نوشته و سپس دیاگرام مورد نظر را رسم می‌کنیم. این فرم از تابع تبدیل [معادله (۲۶-۶)] باین دلیل انتخاب گردیده که برای $K=1$ دیاگرام نایکویست از نقطه 1 روی محور حقیقی شروع می‌شود و همانطور که بعداً خواهیم دید "تغییرات K" باعث تغییر در میزان پایداری سیستم مدار بسته می‌شود. برای روشن شدن مطالب گفته شده در این مبحث با ارائه چند مثال، به رسم دیاگرام "بود" پرداخته و نحوه ترسیم دیاگرام نایکویست نیز با ذکر مثالهایی تشریح می‌گردد.

مثال (۳-۷):

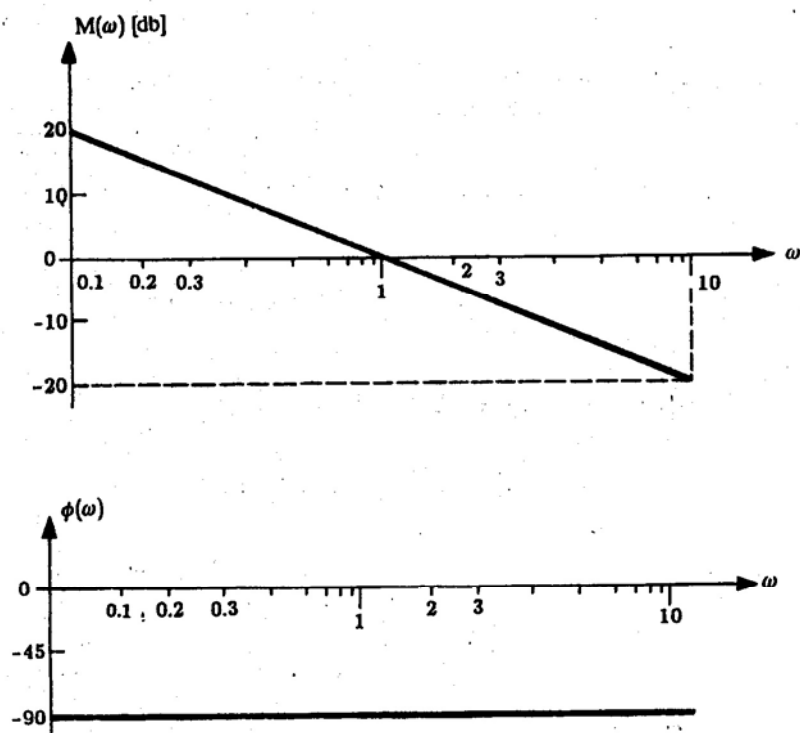
برای تابع تبدیل $G(s) = \frac{1}{s}$ می‌خواهیم دیاگرام "بود" را رسم نمائیم. مطابق تابع تبدیل فوق $G(j\omega)$ عبارت از $\frac{1}{j\omega}$ بوده لذا $M(\omega)$ و $\phi(\omega)$ مربوط به $G(j\omega)$ عبارتند از:

$$M(\omega) = \left| \frac{1}{j\omega} \right| = \frac{1}{\omega} \quad (۱۵-۷)$$

$$\phi(\omega) = \angle G(j\omega) = \angle \frac{1}{j\omega} = \angle \frac{-1}{\omega} = -\frac{\pi}{2} \quad (۱۵-۷)$$

حال مقدار لگاریتمی $M(\omega)$ را بدست می‌آوریم:

$$M(\omega) (\text{db}) = 20 \log M(\omega) = 20 \log \frac{1}{\omega} = -20 \log \omega$$



شکل (۶-۷). دیاگرام "بود" برای سیستم با تابع تبدیل $G(s) = \frac{1}{s}$.

در این رابطه اگر $\omega = 1$ باشد، $M(\omega) = 0$ db می‌شود. اگر $\omega = 10$ باشد، $M(\omega) = 20$ db و اگر $\omega = 0.1$ باشد مقدار $M(\omega) = -20$ db خواهد بود. بعبارت ساده‌تر نمایش $M(\omega)$ (برحسب db) نسبت به ω (با مقیاس لگاریتمی روی محور افقی)، بصورت خط راست با شیب $-20 \frac{\text{db}}{\text{decade}}$ (که خوانده می‌شود شیب -20 دسی‌بل بازاء 10 برابر شدن مقدار ω) خواهد بود. از طرفی با توجه به اینکه زاویه فاز همواره برای همه مقادیر ω از رابطه فوق، مساوی $-\frac{\pi}{2}$ می‌باشد لذا دیاگرام "بود" بصورت شکل (۶-۷) حاصل می‌شود.

مثال (۴-۷):

می‌خواهیم دیاگرام "بود" را برای سیستم مثال (۱-۷) که تابع تبدیل آن بصورت $G(s) = \frac{1}{1+Ts}$ می‌باشد رسم نمائیم.

در شکل (۲-۷) نمودار $M(\omega)$ و $\phi(\omega)$ بر حسب مقادیر ω رسم شده‌اند. ولی با توجه به اینکه در دیاگرام "بود" محورها لگاریتمی هستند دیاگرام "بود" با شکل (۲-۷) تفاوت خواهد داشت. با استفاده از معادله (۸-۱۲-۷) داریم:

$$\begin{aligned} M(\omega) [\text{db}] &= 20 \log M(\omega) = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} \quad (\text{a-۱۶-۷}) \\ &= 20 \left[-\frac{1}{2} \log(1+T^2\omega^2) \right] = -10 \log(1+T^2\omega^2) \end{aligned}$$

اگر ωT را با Ω نمایش دهیم معادله فوق چنین نوشته می‌شود:

$$M(\omega) = -10 \log(1+\Omega^2) \quad (\text{b-۱۶-۷})$$

اگر $\Omega = \omega T$ خیلی کوچکتر از واحد باشد (یعنی $\Omega < 1$ و یا $\omega < \frac{1}{T}$ باشد) نتیجه می‌شود:

$$M(\omega) [\text{db}] = -10 [\log(1)] = 0 \quad (\text{c-۱۶-۷})$$

به این ترتیب می‌توان گفت خط "صفر دسی‌بل"، مجانب دیاگرام برای مقادیر بسیار کوچک Ω می‌باشد.

اگر $\Omega = \omega T$ خیلی بزرگتر از واحد باشد، (یعنی $\Omega > 1$ و یا $\omega > \frac{1}{T}$ باشد) در اینصورت در طرف راست معادله (b-۱۶-۷) می‌توان از مقدار یک در مقابل Ω^2 صرف‌نظر نمود، لذا $M(\omega)$ چنین خواهد شد:

$$\begin{aligned} M(\omega) [\text{db}] &= -10 \log(\Omega^2) = -20 \log \Omega = -20 \log \omega T \quad (\text{d-۱۶-۷}) \end{aligned}$$

این معادله نمایش یک خط راست در دیاگرام "بود" می‌باشد. در معادله (d-۱۶-۷) اگر $\Omega = \omega T = 1$ باشد مقدار $M(\omega) = 0 \text{ db}$ خواهد بود و اگر Ω ده برابر (یعنی $\Omega = 10$) شود، مقدار $M(\omega) = -20 \text{ db}$ خواهد بود و اگر Ω باز هم ده برابر (یعنی $\Omega = 100$) شود، مقدار $M(\omega) = -40 \text{ db}$ حاصل می‌شود. بنابراین معادله (d-۱۶-۷) نمایش خط راستی است که شیب آن مساوی $20 \frac{\text{db}}{\text{decade}}$ خواهد بود. این خط راست مجانب دیاگرام "بود" برای مقادیر بسیار بزرگ $\Omega = \omega T$ می‌باشد. همانطور که ملاحظه می‌شود در معادله (a-۱۶-۷) یا (b-۱۶-۷) مقدار $M(\omega)$ برای مقادیری از $\Omega = \omega T$ که کوچکتر از واحد باشند نزدیک به مجانب مقادیر کوچک Ω (یعنی خط صفر دسی‌بل) و برای مقادیری از $\Omega = \omega T$ که بزرگتر از واحد باشند، مقدار $M(\omega)$ نزدیک به مجانب مقادیر بزرگ Ω یعنی معادله (d-۱۶-۷) خواهد بود. باین ترتیب می‌توان منحنی $M(\omega)$ برحسب db را در دیاگرام "بود" شکل (۷-۷) رسم نمود. مقدار $M(\omega)$ بازاء $\Omega = \omega T = 1$ را از معادله (a-۱۶-۷) یا (b-۱۶-۷) می‌توان بدست آورد. این فرکانس (یعنی $\Omega = 1$) را که بازاء آن مجانبها یکدیگر را روی دیاگرام "بود" قطع می‌کنند "فرکانس گوشه"^۱ نامیده و داریم:

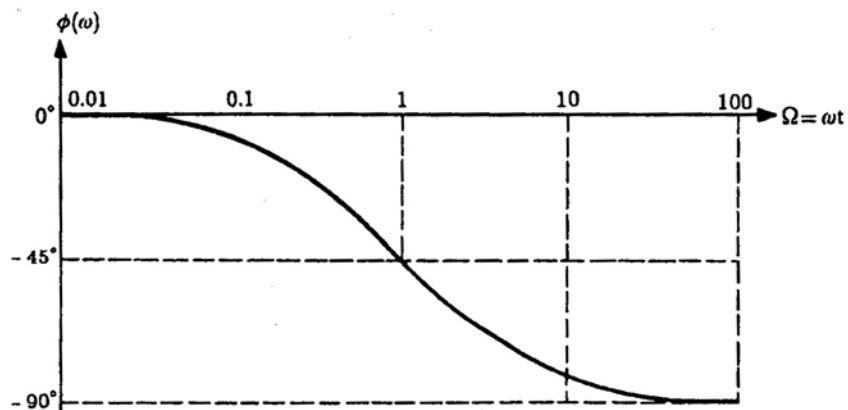
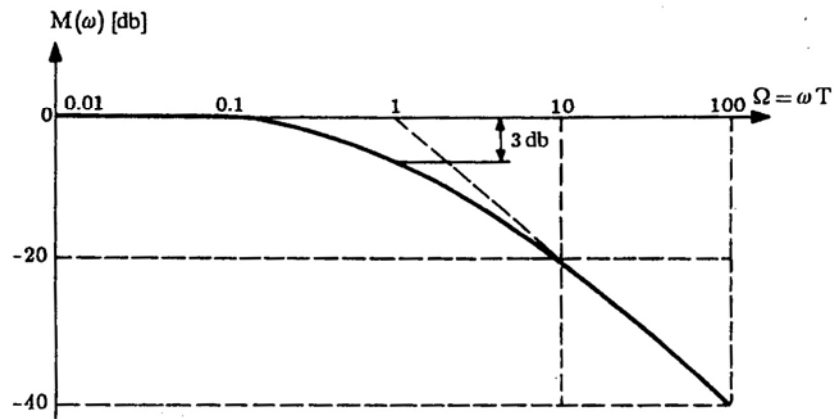
(e-۱۶-۷)

$$M(\omega) = -10 [\log(1+1)] = -10 [\log 2] = -10(0.30103) \approx -3 \text{ db}$$

بنابراین دیاگرام "بود" سیستم مورد بحث بصورت شکل (۷-۷) خواهد بود. زاویه $\phi(\omega)$ (یعنی فرکانس گوشه) نیز مطابق معادله (b-۱۲-۷) عبارت است از:

$$\phi(\omega) = -\tan^{-1}(T\omega) = -\tan^{-1}(\Omega) \quad (\text{f-۱۶-۷})$$

در این رابطه برای $\Omega = T\omega = 1$ ، یعنی برای فرکانس گوشه مقدار ϕ مساوی 45- درجه حاصل می‌شود.

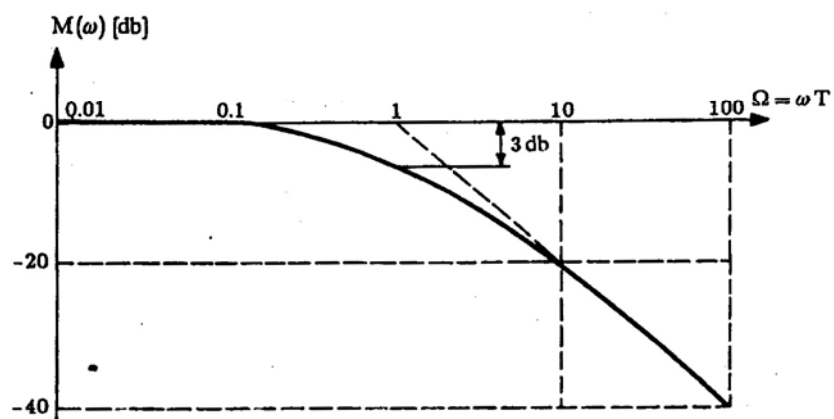


شکل (۷-۷) - دیاگرام "بود" برای سیستم با تابع تبدیل $G(s) = \frac{1}{1+Ts}$.

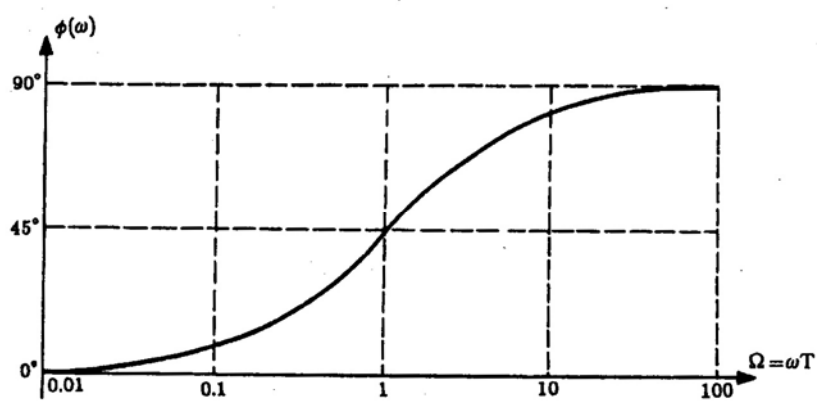
مثال (۷-۵):

می‌خواهیم دیاگرام "بود" و نایکویست را برای تابع $G(s)=1+Ts$ رسم نماییم.

$$G(j\omega) = 1 + jT\omega \quad 1 = j\Omega \quad (a-1Y-Y)$$



(a) - دیاگرام "نایکویست"



(b) - دیاگرام "بود"

شکل (۸-۷) - رسم عکس العمل سیستم با تابع تبدیل $G(s) = 1 + Ts$.

چون قسمت حقیقی همواره مساوی واحد است دیاگرام نایکویست بصورت شکل (a-۸-۷) خواهد بود. برای رسم دیاگرام "بود" مقادیر $M(\omega)$ و $\phi(\omega)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$(b-۱۷-۷)$$

$$M(\omega)[db] = 20 [\log M(\omega)] = 20 [\log \sqrt{1+T^2\omega^2}] = 10 [\log (1+T^2\omega^2)]$$

$$\phi(\omega) = \tan^{-1}(T\omega) \quad (c-۱۷-۷)$$

از مقایسه معادلات (b-۱۷-۷) با (a-۱۶-۷) و (c-۱۷-۷) با (f-۱۶-۷) ملاحظه می‌شود که این معادلات تنها در یک تغییر علامت با هم تفاوت دارند. بنابراین دیاگرام "بود" بصورت شکل (b-۸-۷) حاصل می‌شود.

مثال (۶-۷):

برای سیستم رسته دوکه دارای ریشه‌های مختلط می‌باشد، می‌خواهیم دیاگرام "بود" را رسم نماییم. تابع تبدیل چنین سیستمی که قبلاً نیز در معادله (۱۳-۷) از مثال (۲-۷) و یا معادله (a-۱۴-۷) بیان شده برحسب s عبارت است از:

$$G(s) = \frac{1}{1 + 2\xi Ts + (Ts)^2} \quad (a-۱۸-۷)$$

و برحسب $(j\omega)$ عبارت است از:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\xi T(j\omega) + (j\omega T)^2}$$

و با نمایش ωT بصورت Ω معادله (b-۱۴-۷) بصورت ذیل نوشته می‌شود:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\xi j\Omega + (j\Omega)^2} \quad (b-۱۸-۷)$$

$$M(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + (2\zeta\Omega)^2}} \quad (c-18-7)$$

$$\phi(\omega) = -\tan^{-1} \frac{2\zeta\Omega}{1-\Omega^2} \quad (d-18-7)$$

$$M(\omega)[\text{db}] = 20[\log M(\omega)] = -10[\log((1-\Omega^2)^2 + (2\zeta\Omega)^2)] \quad (e-18-7)$$

برای مقادیر $\Omega = \omega T < 1$ (مقادیر ωT خیلی کوچکتر از 1)، مقدار $M(\omega)$ برابر واحد (بعبارتی مقدار $M(\omega)$ برحسب دسی‌بل مساوی صفر) می‌شود. همچنین $\tan\phi = 2\zeta\Omega$ خواهد شد که چون مقدارش کوچک است، $\phi = 2\zeta\omega$ rad بوده* لذا برای $\Omega = 1$ نتیجه می‌شود:

$$M(\omega)[\text{db}] = -20[\log(2\zeta)] \quad (f-18-7)$$

و همچنین داریم:

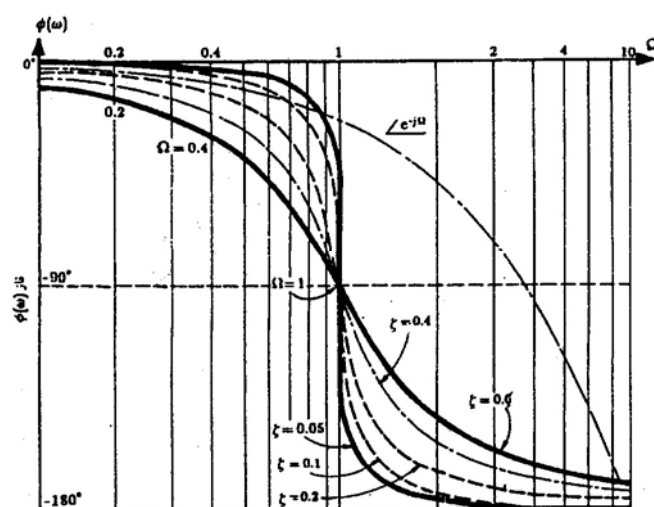
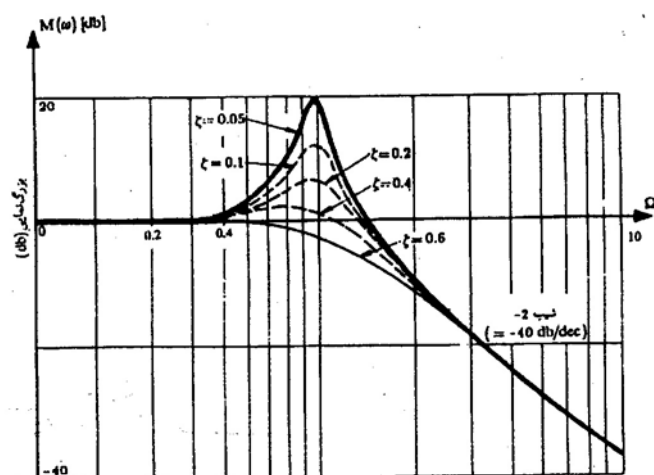
$$\phi(\omega) = -90^\circ \quad (g-18-7)$$

برای مقادیر $\Omega = \omega T > 1$ از رابطه (b-18-7) نتیجه می‌شود که $G(j\omega) = \frac{-1}{\Omega^2}$ و لذا $M(\omega) = \frac{1}{\Omega^2}$ بوده و داریم:

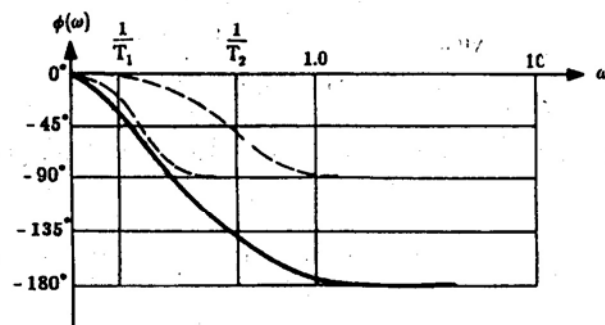
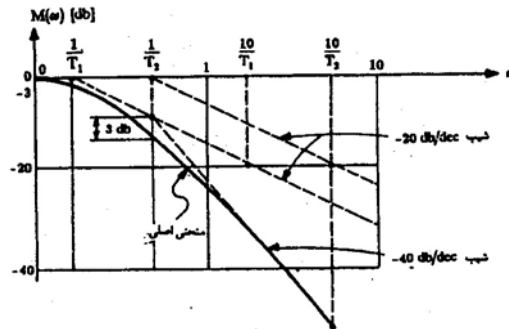
$$M(\omega) \text{ db} = -20[\log \Omega^2] = -40[\log \Omega] \quad (h-18-7)$$

بنابراین برای مقادیر خیلی بزرگ Ω وقتی Ω ده برابر می‌شود، $M(\omega) \text{ db}$ به اندازه 40(db) کاهش می‌یابد، یعنی شیب مساوی با $-40(\frac{\text{db}}{\text{dec}})$ خواهد شد. دیاگرام "بود" این سیستم برای مقادیر مختلف ζ (نسبت میرایی) در شکل (۹-۷) رسم شده است.

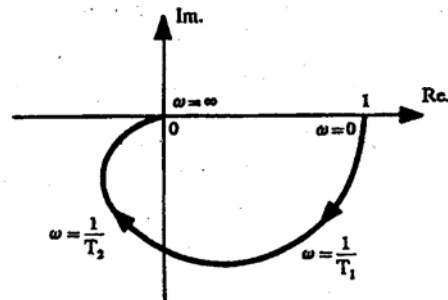
*- برای زوایای خیلی کوچک نائزات زاویه برابر خود آن زاویه برحسب رادیان در نظر گرفته می‌شود.



شکل (۹-۷). دیاگرام "بود" برای سیستم رسته دو با ریشه‌های مختلط.



(a) - دیاگرام "بود"



(b) - دیاگرام "نایکوئیست"

شکل (۷-۱۰) - دیاگرامهای "بود" و "نایکوئیست" - سیستم با تابع تبدیل مطابق رابطه (۷-۱۹) .

مثال (۷-۷):

می‌خواهیم دیاگرامهای "بود" و "ناپکوئیست" را برای سیستم با تابع تبدیل $G(s)$ ذیل که دارای دو ثابت زمانی T_1 و T_2 می‌باشد رسم نماییم.

$$G(s) = \frac{1}{(1+T_1s)(1+T_2s)}, \quad T_1 > T_2 \quad (a-19-7)$$

داریم:

$$G(j\omega) = \frac{1}{(1+jT_1\omega)(1+jT_2\omega)} \quad (b-19-7)$$

$$M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+T_1^2\omega^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+T_2^2\omega^2}} \quad (c-19-7)$$

$$M(\omega) \text{ db} = 20 [\log M(\omega)] = -10 [\log (1+T_1^2\omega^2) + \log (1+T_2^2\omega^2)]$$

همچنین:

$$\phi(\omega) = \phi_1(\omega) + \phi_2(\omega) \quad (d-19-7)$$

که در آن: (e-19-7)

$$\tan \phi_1(\omega) = -T_1\omega, \quad \tan \phi_2(\omega) = -T_2\omega$$

بوده و به این ترتیب دیاگرامهای "بود" و "ناپکوئیست" بصورت شکل‌های (a-19-7) و (b-19-7) نمایش داده می‌شوند.

مثال (۸-۷):

می‌خواهیم دیاگرامهای "بود" و "ناپکوئیست" را برای سیستم با تابع تبدیل ذیل رسم کنیم.

$$G(s) = \frac{1+T_0s}{(1+T_1s)(1+T_2s)(1+T_3s)}, \quad T_0 > T_1 > T_2 > T_3 \quad (a-20-7)$$

می‌توان نوشت:

$$G(s) = (1+T_0s) \cdot \frac{1}{1+T_1s} \cdot \frac{1}{1+T_2s} \cdot \frac{1}{1+T_3s}$$

(b.۲۰-۷)

$$M(\omega) = (1 + T_0^2 \omega^2)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1 + T_1^2 \omega^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + T_2^2 \omega^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + T_3^2 \omega^2}}$$

$$\phi(\omega) = \phi_0(\omega) - \phi_1(\omega) - \phi_2(\omega) - \phi_3(\omega) \quad (c.۲۰-۷)$$

که در آن:

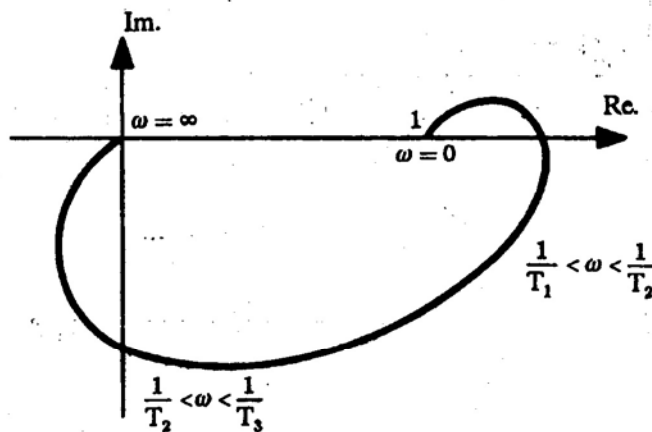
$$\phi_0(\omega) = \tan^{-1}(T_0 \omega) \quad , \quad \phi_1(\omega) = \tan^{-1}(T_1 \omega)$$

$$\phi_2(\omega) = \tan^{-1}(T_2 \omega) \quad , \quad \phi_3(\omega) = \tan^{-1}(T_3 \omega)$$

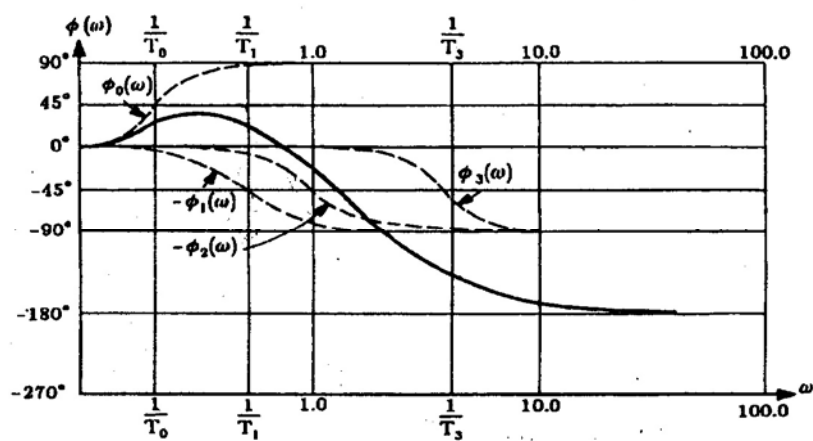
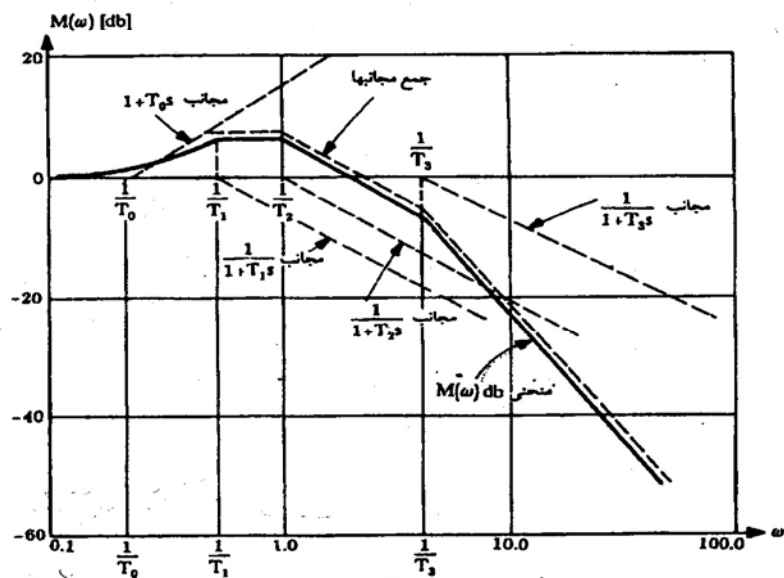
می باشد. همچنین $M(\omega)$ عبارت است از:

$$M(\omega) [db] = 20 [\log_{10} M(\omega)] = 10 [\log(1 + T_0^2 \omega^2)] - 10 [\log(1 + T_1^2 \omega^2)] \\ - 10 [\log(1 + T_2^2 \omega^2)] - 10 [\log(1 + T_3^2 \omega^2)]$$

دیاگرام "نایکویست" این سیستم در شکل (a.۱۱-۷) و دیاگرام "بود" نیز در شکل (b.۱۱-۷) رسم شده است. باید توجه داشت که شکل منحنی های اشکال فوق با توجه به ثابتهای زمانی از معادله (a.۲۰-۷) بدست آمده اند.



شکل (a.۱۱-۷). دیاگرام نایکویست سیستم با تابع تبدیل مطابق رابطه (a.۲۰-۷).



شکل (۷-۱۱-ب). دیاگرام "بود" سیستم با تابع تبدیل مطابق رابطه (۷-۲۰-ا).

مثال (۹-۷):

می‌خواهیم دیاگرامهای "نایکویست" و "بود" را برای کنترلر PI-action رسم نماییم.
برای کنترلر PI-action داریم:

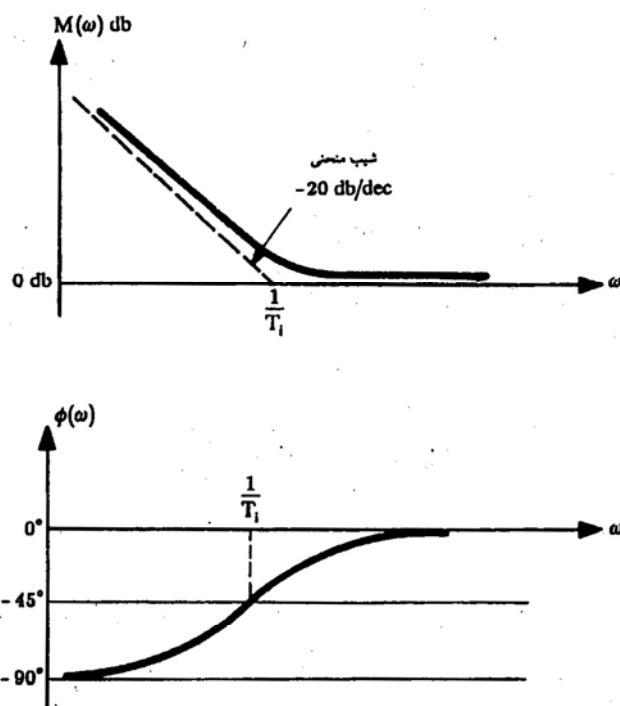
(a-۲۱-۷)

$$G(s) = 1 + \frac{1}{T_i s} \quad ; \quad G(j\omega) = 1 + \frac{1}{jT_i \omega} = 1 - j \frac{1}{T_i \omega}$$

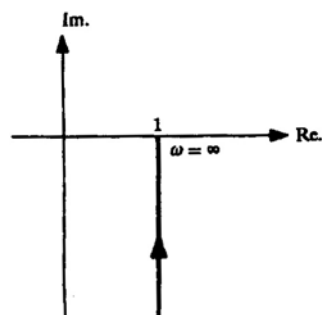
(b-۲۱-۷)

$$M(\omega) = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{T_i \omega}\right)^2} \quad , \quad \phi(\omega) = -\tan^{-1} \left(\frac{1}{T_i \omega}\right)$$

دیاگرامهای "بود" و "نایکویست" این سیستم در شکل (۱۲-۷) رسم شده است.



شکل (a-۱۲-۷) - دیاگرام "بود" کنترلر PI-action.



شکل (b-۱۲-۷) - دیاگرام "نایکوئیست" کنترلر PI-action.

مثال (۷-۱۰):

دیاگرامهای "نایکوئیست" و "بود" را برای کنترلر PID-action می‌خواهیم رسم

نمائیم.

برای کنترلر PID-action داریم:

$$G(s) = 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s, \quad T_i > T_d$$

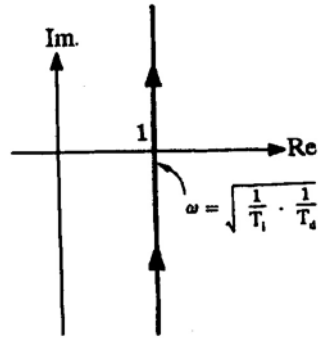
$$G(j\omega) = 1 + \frac{1}{T_i j\omega} + T_d j\omega = 1 + j\left(T_d \omega - \frac{1}{T_i \omega}\right) \quad (a-۲۲-۷)$$

$$M(\omega) = \sqrt{1 + \left(T_d \omega - \frac{1}{T_i \omega}\right)^2} \quad (b-۲۲-۷)$$

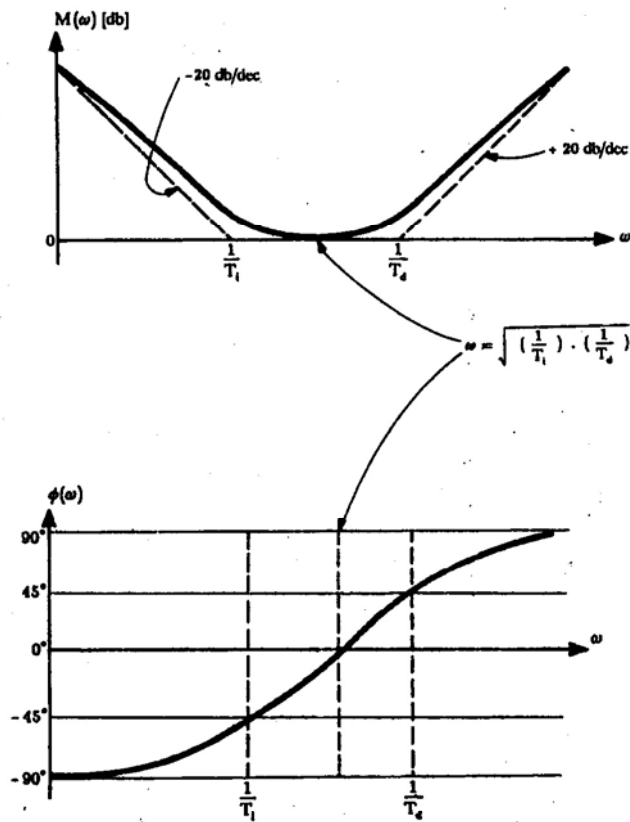
$$\phi(\omega) = \tan^{-1} \left(T_d \omega - \frac{1}{T_i \omega} \right)$$

شکل (۷-۱۳) دیاگرامهای "نایکوئیست" و "بود" را برای کنترلر PID-action نشان

می‌دهد.



شکل (۷-۱۳-۲) دیاگرام "نایکوئیست" کنترلر PID-action.



شکل (۷-۱۳-۳) دیاگرام "بود" کنترلر PID-action.

مثال (۷-۱۱):

در این مثال رسم دیاگرامهای "نایکوئیست" و "بود" برای تابع تبدیل زیر را مد

نظر قرار می دهیم:

$$G(s) = \frac{1}{(1+T_1s)(1+T_2s)(1+T_3s)} \quad , \quad T_1 > T_2 > T_3 \quad (a-23-7)$$

داریم:

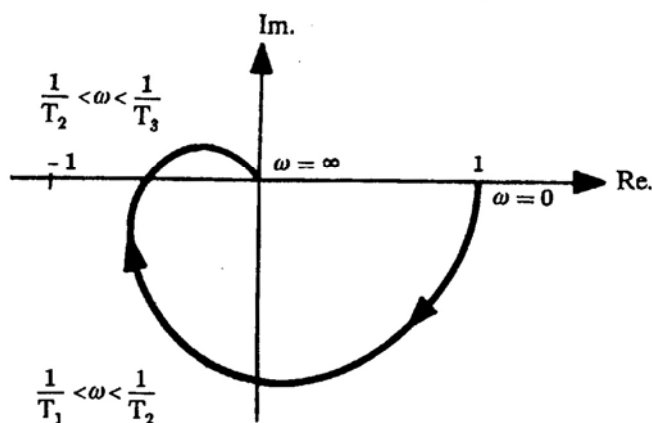
$$G(s) = \frac{1}{1+T_1s} \cdot \frac{1}{1+T_2s} \cdot \frac{1}{1+T_3s} = G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot G_3(s) \quad (b-23-7)$$

که در آن:

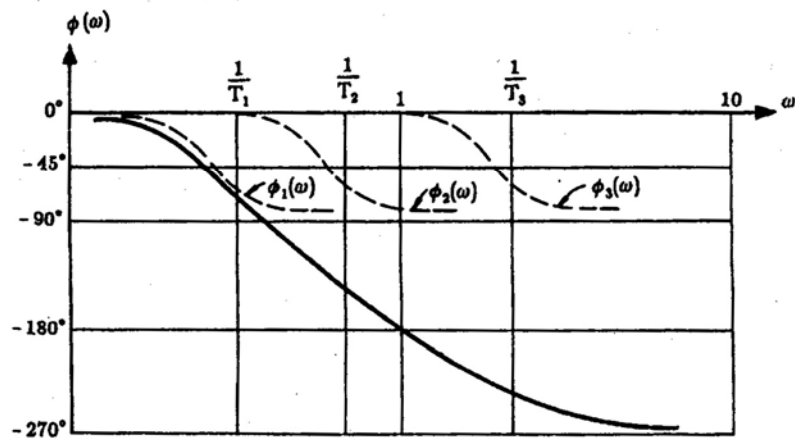
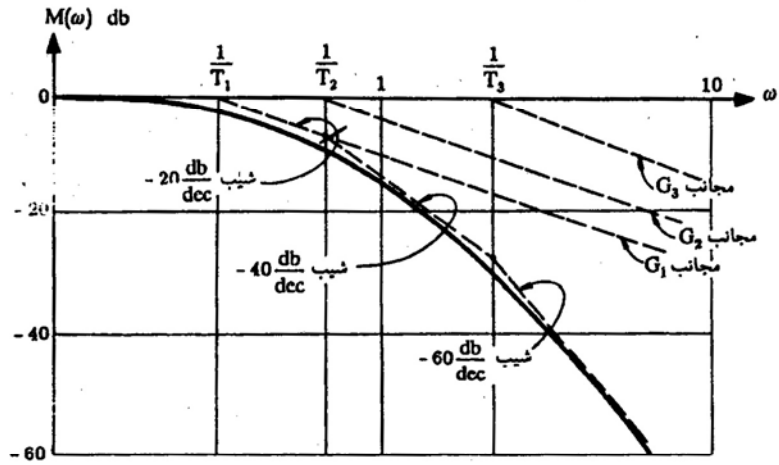
$$G_1(s) = \frac{1}{1+T_1s} \quad , \quad G_2(s) = \frac{1}{1+T_2s} \quad , \quad G_3(s) = \frac{1}{1+T_3s}$$

می باشد. همچنین:

$$M(\omega) = M_1(\omega) \cdot M_2(\omega) \cdot M_3(\omega)$$



شکل (۷-۱۴-۲) - دیاگرام "نایکوئیست" سیستم با تابع تبدیل مطابق رابطه (۷-۲۳-۲).



شکل (۷-۱۴-ب) - دیاگرام "بود" سیستم با تابع تبدیل مطابق رابطه (۷-۲۳-ا).

بوده که در آن :

$$M_1(\omega) = \sqrt{\frac{1}{1+T_1^2\omega^2}}, \quad M_2(\omega) = \sqrt{\frac{1}{1+T_2^2\omega^2}}, \quad M_3(\omega) = \sqrt{\frac{1}{1+T_3^2\omega^2}}$$

می باشد. همچنین:

$$\phi(\omega) = \phi_1(\omega) + \phi_2(\omega) + \phi_3(\omega)$$

بوده و داریم:

$$\tan \phi_1(\omega) = -T_1\omega, \quad \tan \phi_2(\omega) = -T_2\omega, \quad \tan \phi_3(\omega) = -T_3\omega$$

شکل (۷-۱۴) دیاگرامهای "بود" و "نایکویست" را برای این سیستم نشان می دهد.

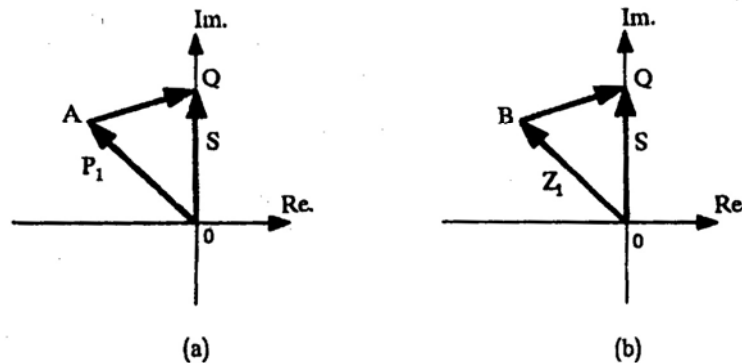
(۷-۳) - قضیه پایداری نایکویست^۱:

قضیه "پایداری نایکویست" اساس تعیین پایداری سیستمهای مدار بسته کنترلی می باشد که در آن از دیاگرام نایکویست سیستم مدار باز برای تحلیل پایداری سیستم استفاده می شود. این قضیه همچنین رکن اصلی طراحی سیستم مدار بسته با استفاده از روش عکس العمل فرکانسی نیز بشمار می آید. از آنجا که قضیه پایداری نایکویست بر مبنای تغییرات زاویه ای یک تابع تبدیل، بازاء تغییرات مشخصی از متغیر S ، پایه گذاری شده ابتدا به ذکر دو نکته مقدماتی می پردازیم.

نکته اول:

تابع $F(s) = \frac{1}{s-p_1}$ را در نظر می گیریم (p_1 که یک عدد مختلط است، قطب تابع $F(s)$ یعنی ریشه مخرج تابع $F(s)$ می باشد). می خواهیم میزان تغییرات زاویه تابع $F(s)$ را وقتی S از $-\infty$ تا $+\infty$ روی محور موهومی در صفحه مختلط حرکت می کند بدست آوریم. در شکل (۷-۱۵) موقعیت قطب در نقطه A با بردار $p=OA$ و موقعیت S روی محور موهومی

1-(The Nyquist Stability Theorem)



شکل (۱۵-۷). نمایش تغییرات زاویه‌ای تابع $F(s)$ وقتی s از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر نماید.

در نقطه Q با بردار $s=OQ$ نشان داده شده است.

مطابق شکل (a) رابطه برداری $p_1 + AQ = s$ برقرار می‌باشد، بنابراین $AQ = s - p_1$ بوده لذا AQ مخرج کسر $F(s)$ خواهد بود. اگر تغییر زاویه (فاز) مثبت، مطابق جهت مثلثاتی (خلاف جهت عقربه‌های ساعت) و نسبت به محور Re (حقیقی) سنجیده شود، وقتی s روی محور موهومی از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر نماید (بعبارتی Q از $-\infty$ تا $+\infty$ روی محور موهومی حرکت کند) بردار AQ از $\frac{-\pi}{2}$ تا $\frac{+\pi}{2}$ تغییر فاز می‌دهد. بنابراین فاز AQ باندازه $+\pi$ تغییر می‌کند در نتیجه $F(s) = \frac{1}{AQ}$ باندازه $-\pi$ تغییر فاز می‌دهد. این نتایج مربوط به حالتی است که نقطه A در نیم صفحه سمت چپ (LHP)^۱ قرار گرفته باشد. اگر موقعیت نقطه A در نیم صفحه سمت راست (RHP)^۲ در نظر گرفته شود واضح است که AQ باندازه $-\pi$ و $F(s)$ باندازه $+\pi$ تغییر زاویه می‌دهد. بنابراین در تابع $F(s) = \frac{1}{s-p_1}$ اگر ریشه مخرج در نیم صفحه چپ (LHP) واقع شده باشد، وقتی s روی محور موهومی از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر می‌کند، $F(s)$ باندازه $-\pi$ تغییر زاویه می‌دهد و اگر ریشه در نیم صفحه سمت راست (RHP) واقع شده باشد $F(s)$ باندازه $+\pi$ تغییر زاویه می‌دهد.

حال تابع $F(s) = s - z_1$ را در نظر می‌گیریم [شکل (b-۱۵-۷)]. اگر موقعیت z_1 در صفحه

۱- Left Hand Plane (LHP)

۲- Right Hand Plane (RHP)

را با نقطه B نمایش دهیم از رابطه برداری شکل مذکور، $z_1 + BQ = S$ و یا $F(s) = BQ = S - z_1$ می‌باشد. اگر Q از $-\infty$ تا $+\infty$ روی محور موهومی تغییر کند بردار BQ در نتیجه $F(s)$ باندازه $+\pi$ تغییر زاویه می‌دهد. این نتایج مربوط به حالتی است که z_1 در LHP واقع شده باشد و برای حالتی که z_1 در RHP باشد، $F(s)$ باندازه $-\pi$ تغییر فاز می‌دهد.

اگر $F(s)$ تابع ساده‌ای نظیر $\frac{1}{s-p_1}$ و یا $s-z_1$ نبوده بلکه بصورت کسری باشد که صورت و مخارج آن را توابع ساده فوق تشکیل دهند، وقتی s محور موهومی را طی می‌کند (از $-\infty$ تا $+\infty$) تغییر فاز $F(s)$ را می‌توان از جمع اجزاء ساده بدست آورد. مثلاً تغییر فاز تابع $F(s) = \frac{s-z_1}{s-p_1}$ را در نظر می‌گیریم در اینصورت:

- اگر z_1 و p_1 هر دو در LHP باشند* تغییر فاز $F(s)$ مساوی صفر خواهد بود.
- اگر z_1 و p_1 هر دو در RHP باشند تغییر فاز $F(s)$ مساوی صفر خواهد بود.
- اگر z_1 در RHP و p_1 در LHP باشد تغییر فاز $F(s)$ مساوی -2π خواهد بود.
- اگر z_1 در LHP و p_1 در RHP باشد تغییر فاز $F(s)$ مساوی $+2\pi$ خواهد بود.

نکته دوم:

چگونگی تشکیل تابع $F(s)$ در یک سیستم مدار بسته را در این قسمت مورد بررسی قرار می‌دهیم. معادله مشخصه سیستم مدار بسته را در حالت کلی مانند آنچه برای سیستم شکل (۲-۶) بدست آوردیم، می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$F(s) = 1 + G_c(s) G_p(s) H(s) = 0 \quad (۲۴-۷)$$

در این معادله عبارت $G_c(s) G_p(s) H(s)$ تابع تبدیل مدار باز سیستم است که می‌توان آنرا بصورت زیر بیان نمود:

$$G_c(s) G_p(s) H(s) = \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (۲۵-۷)$$

* - z_1 عبارت از صفر تابع $F(s) = \frac{s - z_1}{s - p_1}$ و p_1 عبارت از قطب این تابع می‌باشد.

در این رابطه p_i ($i=1,2,\dots,n$) عبارت از قطب‌های مدار باز و z_j ($j=1,2,\dots,m$) معرف صفرهای مدار باز می‌باشد.

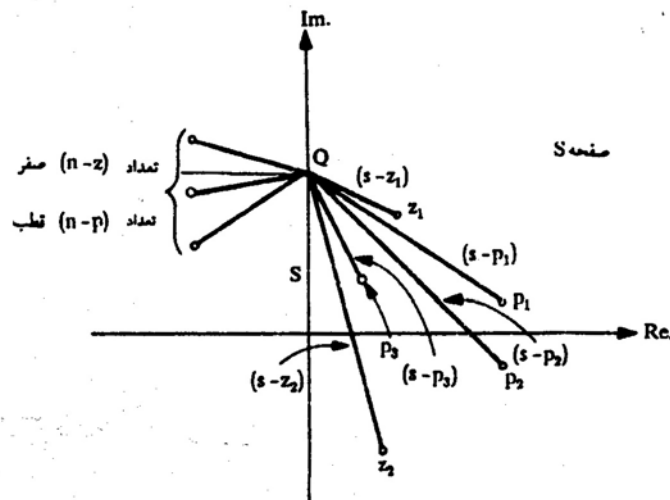
با قراردادن از معادله (۲۵-۷) در معادله (۲۴-۷) داریم:

$$F(s) = 1 + \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{A(s)+B(s)}{A(s)} = 0 \quad (26-7)$$

$$F(s) = \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \quad (27-7)$$

واضح است که رسته صورت و مخرج کسر $F(s)$ مساوی n می‌باشد. همچنین ملاحظه می‌شود که z_j عبارت از n ریشه معادله مشخصه سیستم مدار بسته و یا عبارتی قطب‌های سیستم مدار بسته و p_i نیز عبارت از n ریشه معادله مشخصه مدار باز و یا قطب‌های مدار باز می‌باشد. در مباحث گذشته گفته شد که شرط پایدار بودن سیستم مدار بسته آن است که تمامی ریشه‌های معادله مشخصه سیستم مدار بسته یعنی تمامی z_j ها در معادله (۲۷-۷) در سمت چپ محور موهومی یعنی در LHP واقع شوند. عبارت دیگر برای آنکه سیستم مدار بسته پایدار باشد، صفرهای تابع $F(s)$ در معادله (۲۷-۷) باید در LHP قرار گیرند. در اینجا این سؤال مطرح است که آیا از آنچه در "نکته اول" بعنوان میزان تغییر زاویه تابعی مانند $F(s)$ بیان شد و از آنچه در "نکته دوم" بعنوان فرم تابع $F(s)$ ذکر گردید، شرط یا شرایطی را می‌توان برای پایداری سیستم مدار بسته نتیجه‌گیری نمود؟ حال با این مقدمات به تشریح قضیه پایداری نایکوئیست می‌پردازیم.

فرض می‌کنیم تابع $F(s)$ در معادله (۲۷-۷) دارای تعداد Z صفر و P قطب در نیم صفحه سمت راست (RHP) باشد. بنابراین تابع مذکور تعداد $(n-Z)$ صفر و $(n-P)$ قطب در LHP خواهد داشت (شکل ۷-۱۶). حال اگر نقطه Q روی محور موهومی از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر کند و بخواهیم تغییر فاز $F(s)$ را بدست آوریم، کافی است تغییر فاز صورت و مخرج کسر $F(s)$ را بازاء قطب‌ها و صفرهایی که در سمت راست و چپ صفحه قرار دارند تعیین و نتیجه را محاسبه نمائیم.



شکل (۷-۱۶). موقعیت قطبها و صفرهای تابع $F(s)$ در صفحه S .

بنابراین مطابق آنچه گفته شد داریم:

$$(n-Z) \pi = \text{تغییر فاز مثبت } F(s) \text{ در اثر وجود } (n-Z) \text{ عدد صفر در LHP.}$$

$$P \cdot \pi = \text{تغییر فاز مثبت } F(s) \text{ در اثر وجود } P \text{ عدد قطب در RHP.}$$

$$-Z \pi = \text{تغییر فاز منفی } F(s) \text{ در اثر وجود } Z \text{ عدد صفر در RHP.}$$

$$-(n-P) \pi = \text{تغییر فاز منفی } F(s) \text{ در اثر وجود } (n-P) \text{ عدد قطب در LHP.}$$

$$F(s) \text{ تغییر فاز مثبت} = 2(P-Z) \pi$$

با تقسیم طرفین معادله فوق بر 2π تعداد دوران تابع $F(s)$ نسبت به مبدا 0 حاصل می‌شود، یعنی:

$$N = (P-Z) \quad (۷-۲۸) \quad \text{تعداد دوران (خلاف جهت عقربه‌های ساعت) نسبت به مبدا } 0$$

بنابراین می‌توان گفت:

اگر تابع مشخصه $F(s)$ در معادله (۷-۲۷) دارای تعداد Z صفر و P قطب در نیم‌صفحه سمت راست (RHP) باشد و متغیر s روی محور موهومی از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر نماید تابع $F(s)$ باندازه $N=P-Z$ دور درخلاف جهت عقربه‌های ساعت حول مبدا O خواهد چرخید. حال این سؤال را می‌توان مطرح نمود که نتیجه‌گیری فوق چه ارتباطی با پایداری سیستم مدار بسته دارد؟

همانطور که گفته شد در معادله (۷-۲۸)، عدد P معرف تعداد قطب‌های سیستم مدار باز در RHP و عدد Z نیز معرف تعداد صفرهای $F(s)$ یعنی تعداد قطب‌های سیستم مدار بسته در RHP می‌باشد. از طرفی می‌دانیم که سیستم مدار بسته وقتی پایدار است که تمامی قطب‌های مدار بسته در سمت چپ محور موهومی (یعنی در LHP) قرار داشته باشند، پس برای آنکه سیستم مدار بسته پایدار باشد باید Z مساوی صفر باشد. عبارت دیگر شرط پایداری سیستم مدار بسته آن است که در معادله (۷-۲۸)، $Z=0$ باشد بنابراین $N=P$ خواهد شد.

از طرفی P (تعداد قطب‌های مدار باز در RHP) مشخص‌کننده تعداد قطب‌های ناپایدار سیستم مدار باز می‌باشد که معمولاً از تست "راوث" بر روی $A(s)$ که معادله مشخصه مدار باز است تعیین می‌شود. باید توجه داشت که در بیشتر مسائل مهندسی $P=0$ بوده یعنی سیستم مدار باز نیز پایدار است. بنابراین نتیجه می‌گیریم که در چنین شرایطی برای آنکه سیستم مدار بسته پایدار باشد باید $N=P=0$ بوده و این تساوی بعنوان شرط پایداری سیستم مدار بسته در قضیه نایکوئیست^۱ شناخته می‌شود.

بطور خلاصه:

اگر سیستم مدار باز دارای P قطب ناپایدار (یعنی P ریشه در RHP) باشد شرط پایدار بودن سیستم مدار بسته آن است که $N=P$ باشد. اگر سیستم مدار باز پایدار باشد (در اینصورت $P=0$ است)، شرط پایدار بودن سیستم مدار بسته آن است که $N=0$ باشد. حال این سؤال پیش می‌آید که N یا تعداد دوران $F(s)$ حول مبدا O را چگونه باید تعیین نمود؟ به

عبارت دیگر برای بررسی پایداری سیستم مدار بسته با در اختیار داشتن تابع سیستم مدار باز، مقدار P معلوم بوده و اگر بتوانیم N را نیز به طریقی مشخص کنیم، با قراردادن آنها در معادله (۷-۲۸) مجهول Z بدست می‌آید که اگر $Z=0$ شود سیستم مدار بسته پایدار و اگر عدد مثبتی حاصل شود سیستم مدار بسته ناپایدار است و این عدد Z معرف تعداد قطب‌های ناپایدار می‌باشد. بنابراین در اینجا سعی می‌کنیم تعداد دوران تابع $F(s)$ از معادله (۷-۲۷) را حول مبدا 0 وقتی s روی محور موهومی از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر می‌کند بدست آوریم.

معنی عبارت فوق آن است که اگر در تابع $F(s)$ بجای s ، متغیر $j\omega$ را قرار دهیم و منحنی تغییرات تابع $F(j\omega)$ را وقتی ω از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر می‌کند رسم کنیم، می‌خواهیم بدانیم این منحنی چند دور حول مبدا 0 چرخیده است.

مثال (۷-۱۲):

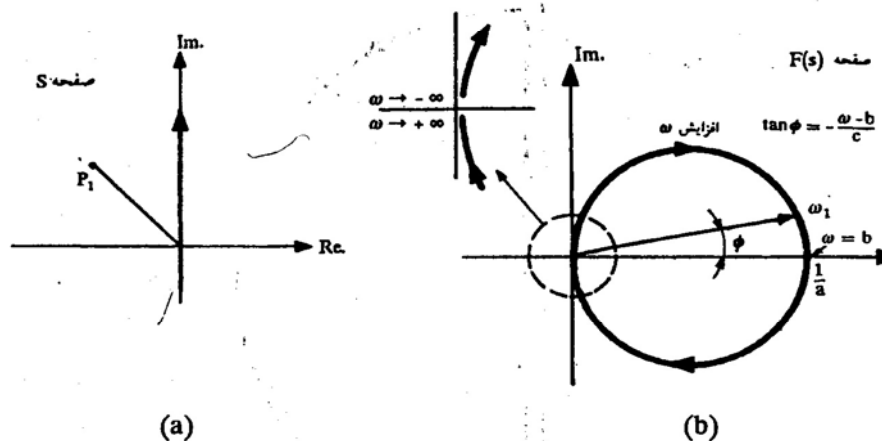
تابع $F(s) = \frac{1}{s-p_1}$ را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم پایداری این سیستم را براساس قضیه پایداری نایکویست با فرض آنکه p_1 در LPH باشد بررسی نمائیم. در اینجا داریم:

$$p_1 = -a + jb \quad (a \text{ و } b \text{ حقیقی و مثبت})$$

بجای s متغیر $j\omega$ را قرار می‌دهیم:

$$F(j\omega) = \frac{1}{j\omega - p_1} = \frac{1}{a + j(\omega - b)}$$

حال وقتی ω از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر می‌کند، در صفحه مختلط $F(s)$ منحنی تغییرات $F(s)$ را رسم می‌کنیم. شکل (۷-۱۷-ا) صفحه مختلط s و شکل (۷-۱۷-ب) صفحه مختلط $F(s)$ را نشان می‌دهد. همانطور که ملاحظه می‌شود مکان $F(s)$ دایره‌ای است که با بردار $F(j\omega)$ مشخص شده است. وقتی ω منفی و مقدارش خیلی بزرگ است، ϕ نزدیک به $+\frac{\pi}{2}$ خواهد بود. بازاء $\omega = b$ مقدار ϕ مساوی صفر و برای مقادیر مثبت بسیار بزرگ ω ، مقدار ϕ به سمت $-\frac{\pi}{2}$ میل می‌کند.



شکل (۱۷-۷) - نمایش تابع $F(s) = \frac{1}{s-p_1}$ در:

(a) - صفحه مختلط s

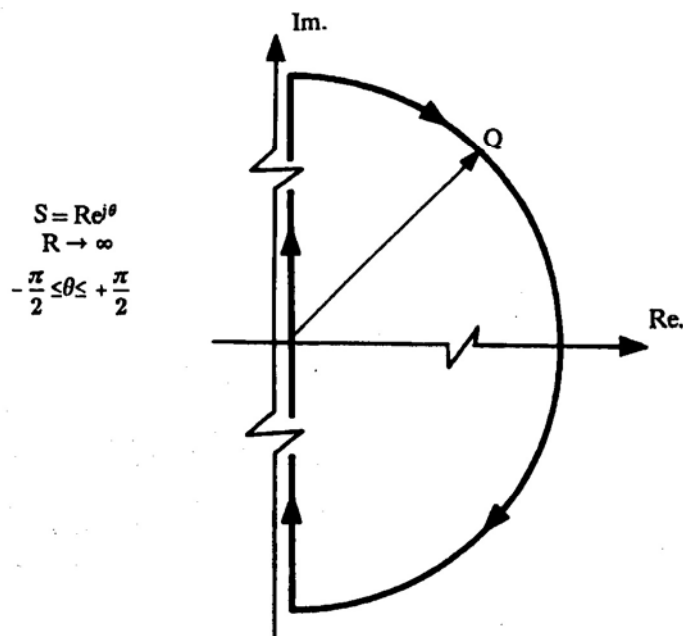
(b) - صفحه مختلط $F(s)$

همانطور که از مثال فوق ملاحظه می شود منحنی ترسیم شده در صفحه $F(s)$ یک منحنی بسته^۱ می باشد. حال این سؤال را مطرح می کنیم که آیا می توان بجای آنکه "رسم منحنی $F(s)$ در صفحه مختلط وقتی s از $-\infty$ تا $+\infty$ روی محور موهومی حرکت می کند را مورد بحث قرار دهیم"، سعی کنیم "یک منحنی بسته در صفحه مختلط s را به یک منحنی بسته در صفحه مختلط $F(s)$ تصویر کنیم"^۲؟

وقتی منحنی $F(s)$ بدست آمد واضح است که با محاسبه دوران آن حول نقطه مبدا 0 به روشی که بیان خواهد شد N تعیین می شود. همچنین با تعیین منحنی بسته در صفحه s ، در شکل منحنی $F(s)$ و در نتیجه در مقدار N نیز نباید تغییری حاصل شود. در شکل (۷-۱۸) منحنی بسته مذکور در صفحه مختلط s نشان داده شده است. این منحنی که محور موهومی را

۱- Closed Contour

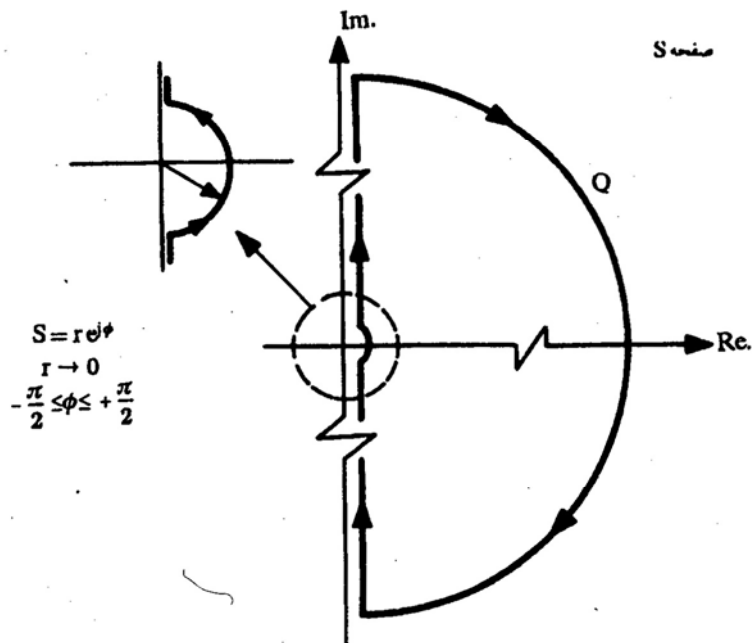
۲- one-to-one mapping of a closed contour in the s -Plane into a closed contour in the $F(s)$ -Plane



شکل (۱۸-۷) - نمایش منحنی بسته مسیر تغییرات S در صفحه مختلط S .

(که قبلاً بحث کردیم) شامل می‌شود بصورت نیم دایره‌ای به شعاع ∞ در RHP (از $\omega = +\infty$ به $\omega = -\infty$) است که مرکز آن بر مبداء مختصات منطبق می‌باشد. وقتی نقطه متحرک Q در روی نیم دایره‌ای به شعاع ∞ حرکت نماید فاز $F(s)$ تغییر نمی‌کند زیرا برای این وضعیت تمامی قطب‌ها و صفرهای $F(s)$ در سمت چپ این نیم دایره به شعاع ∞ قرار می‌گیرند، و از طرفی چون رسته صورت و مخرج $F(s)$ نیز برابر است پس تغییر زاویه‌ای برای $F(s)$ نخواهیم داشت.

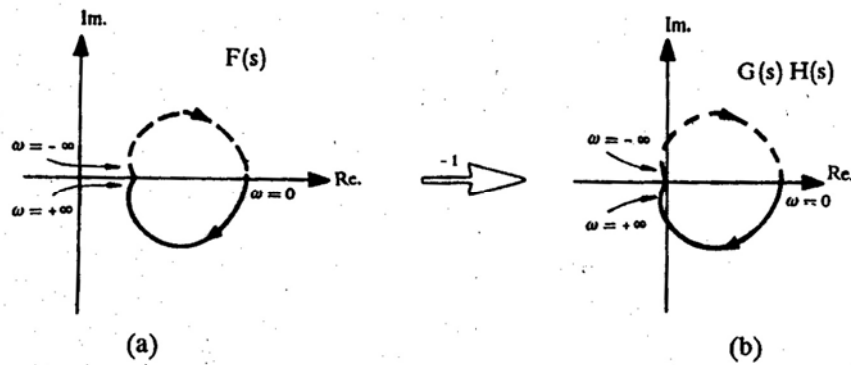
نکته مهم دیگر آنکه اگر یکی از قطب‌های $F(s)$ روی محور موهومی قرار گیرد این سؤال مطرح می‌شود که "در معادله (۲۸-۷) این قطب را که نه در RHP و نه در LHP قرار گرفته تحت چه عنوان باید معرفی نمود؟" لذا در این حالت بنظر می‌رسد که در منحنی بسته صفحه مختلط S یک ناپیوستگی ایجاد می‌شود. برای جلوگیری از این ناپیوستگی، مسیر منحنی در اطراف آن نقطه بجای آنکه بصورت خط راست باشد دارای انحنایی خواهد بود تا نقطه مزبور



شکل (۷-۱۹) - نمایش منحنی مسیر بسته در صفحه S برای تابع $F(s)$ با یک قطب در $s=0$.

در داخل یا خارج منحنی قرار گیرد (در واقع مسیر منحنی نقطه را دور می‌زند). شکل (۷-۱۹) منحنی بسته صفحه S را برای وقتی که $F(s)$ دارای یک قطب در مبدأ مختصات ($S=0$) است نشان می‌دهد. با توجه به شکل (۷-۱۹) چون قطب مذکور در این حالت در LHP قرار گرفته تغییری در تعداد P داده نمی‌شود (زیرا P مربوط به تعداد قطب‌های مدار باز است که در RHP قرار دارند). باید توجه داشت که اگر نیم‌دایره کوچک اطراف $S=0$ در سمت چپ نیز در نظر گرفته می‌شد، قطب مدار باز مذکور را می‌بایست بعنوان یکی از قطب‌های RHP بشمار آورد. ولی نکته مهم آنست که در این حالت نیز تغییری در تحلیل پایداری مدار بسته داده نمی‌شود و عبارتی در رابطه (۷-۲۸) مقدار Z تغییر نمی‌کند، زیرا عملاً در این حالت N تغییر می‌کند (برای روشن شدن مطلب به مسائل (۷-۱۱) و (۷-۱۲) مراجعه کنید).

برای سهولت امر، در معادله (۷-۲۴) مقدار $G_p(s)G_c(s)$ را با $G(s)$ نشان داده در اینصورت



شکل (۷-۲۰). انتقال از صفحه $F(s)$ به صفحه $G(s)H(s)$.

(a) - صفحه $F(s)$

(b) - صفحه $G(s)H(s)$

داریم:

$$F(s) = 1 + G(s)H(s) = 0 \quad (۷-۲۹)$$

که در آن:

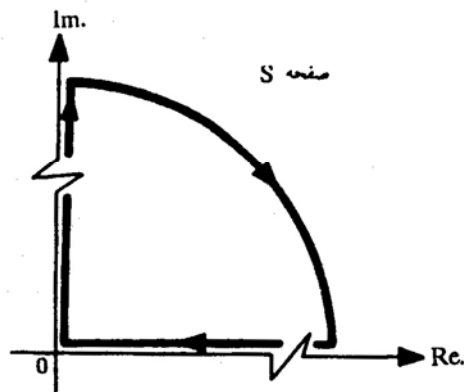
$$G(s) = G_p(s)G_c(s) \quad (۷-۳۰)$$

در نظر گرفته شده است.

می‌توان بجای رسم تابع $F(s) = 1 + G(s)H(s)$ را رسم نمود. در اینصورت کافی است عدد ۱ را از $F(s)$ کم کرده و بجای آنکه تعداد دور یا تغییر فاز $F(s)$ را حول نقطه صفر در نظر بگیریم تعداد دور یا تغییر فاز $G(s)H(s)$ را حول نقطه -1 منظور نماییم. شکل (۷-۲۰) یک نمونه از چنین انتقالی را نشان می‌دهد.

نکته دیگر آنکه منحنی‌های $F(s)$ و $G(s)H(s)$ در صفحه مختلط نسبت به محور حقیقی قرینه می‌باشند (بازاء تغییرات s از $-\infty$ تا ∞ روی محور موهومی). یعنی داریم:

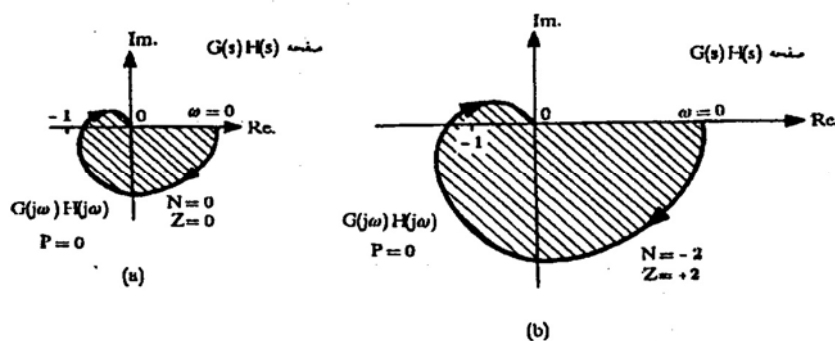
$$G(j\omega)H(j\omega) = [G(-j\omega)H(-j\omega)]^* \quad (۷-۳۱)$$



شکل (۲۱-۷)- نمایش منحنی مسیر بسته در صفحه S برای عکس‌العمل فرکانسی مدار باز.

که علامت * نشانگر مزدوج بودن تابع فوق می‌باشد. بنابراین تابع $G(s)H(s)$ را تنها برای مقادیر مثبت ω (از صفر تا ∞) رسم نموده و برای مقادیر منفی ω ، قرینه شکل حاصله را نسبت به محور حقیقی رسم می‌نمائیم. باین ترتیب برای منحنی رسم شده در صفحه $G(s)H(s)$ تنها نصف مقدار N پیدا می‌شود. بنابراین بعد از رسم $G(j\omega)H(j\omega)$ کافی است تعداد دوران آن حول نقطه 1- را تعیین نموده و در 2 ضرب نماییم تا N بدست آید. باین ترتیب منحنی بسته مسیر S در صفحه مختلط S بصورت شکل (۲۱-۷) حاصل می‌شود.

از طرفی رسم تابع $G(j\omega)H(j\omega)$ برای مقادیر ω بین صفر تا ∞ عبارت از عکس‌العمل فرکانسی مدار باز می‌باشد که در قسمت قبل راجع به آن بحث شد. البته یک تفاوت اساسی بین این دو وجود دارد. در این مبحث S را مساوی $j\omega$ قرار می‌دهیم تا تصویر منحنی بسته صفحه S را در صفحه $G(s)H(s)$ بدست آوریم. حال آنکه در مبحث گذشته S را برابر $j\omega$ قرار دادیم که عکس‌العمل فرکانسی سیستم را محاسبه نمائیم و اینکه قطعاً محاسبات ریاضی هر دو به یک نتیجه برسد یک خوش شانس ریاضی محسوب می‌شود. حال پس از رسم $G(j\omega)H(j\omega)$ می‌خواهیم بدانیم دوران آن را حول نقطه 1- چگونه باید محاسبه نماییم. شکل (۲۲-۷) را (که نمایش دیاگرام نایکویست یک سیستم مدار باز می‌باشد) در نظر می‌گیریم که در آن $P=0$ بوده یعنی این سیستم "مدار باز پایدار" است.



شکل (۷-۲۲). کاربرد قضیه پایداری نایکوئیست در:

(a) - یک سیستم مدار بسته پایدار

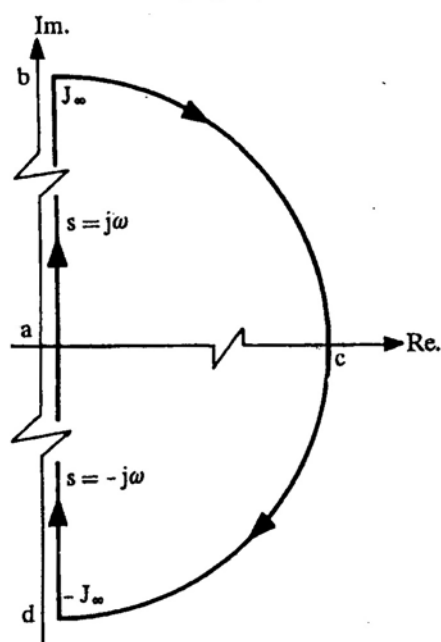
(b) - یک سیستم مدار بسته ناپایدار

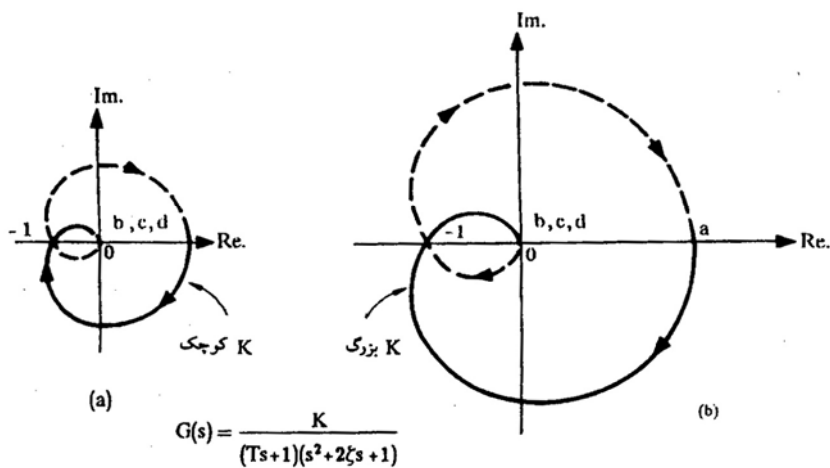
یک راه محاسبه N آن است که فرض کنیم شاخصی روی منحنی از $\omega=0$ تا $\omega=\infty$ حرکت کند بطوریکه مرکز این شاخص روی نقطه -1 قرار داشته باشد. حال اگر تعداد دوران خلاف جهت عقربه‌های ساعت این شاخص را بدست آورده و در ۲ ضرب کنیم، N حاصل می‌شود. در مورد شکل (۷-۲۲a) که در آن، $P=0$ است اگر N را بطریق فوق محاسبه کنیم $N=0$ حاصل می‌شود. در اینصورت از رابطه (۷-۲۸) نیز $Z=0$ نتیجه می‌شود، یعنی سیستم مدار بسته پایدار است. در شکل (۷-۲۲b) نیز $P=0$ بوده ولی تعداد دوران خلاف جهت عقربه‌های ساعت (با محاسبه از روش فوق) -1 بدست می‌آید که پس از ضرب کردن آن در عدد ۲، مقدار $N=-2$ حاصل می‌شود. بنابراین از رابطه (۷-۲۸)، $Z=2$ بدست می‌آید، یعنی اولاً سیستم مدار بسته ناپایدار بوده و ثانیاً دارای دو قطب ناپایدار می‌باشد.

راه دیگر برای آنکه بگوئیم N باید مساوی صفر باشد (برای حالتی که $P=0$ یعنی سیستم مدار باز پایدار است) آن است که نقطه -1 در خارج منحنی $G(j\omega)H(j\omega)$ قرار گیرد. باین منظور مطابق شکل‌های فوق سطح محصورکننده $G(j\omega)H(j\omega)$ را طوری سایه می‌زنیم که نقطه -1 در خارج این سطح سایه خورده قرار گیرد تا سیستم مدار بسته پایدار باشد.

مثال (۷-۱۳):

می‌خواهیم با رسم دیاگرام نایکویست برای تابع $G(s) = \frac{K}{(Ts+1)(s^2+2\zeta s+1)}$ در مورد پایداری سیستم مدار بسته شکل (۶-۲۴) بحث کنیم. فرض می‌کنیم پارامترهای T و ζ طوری هستند که بازاء آنها سیستم مدار باز فوق پایدار است (یعنی $P=0$ است). چون $G(s)$ روی محور موهومی دارای قطب نیست منحنی بسته مسیر S ، در صفحه مختلط S بصورت شکل (۷-۲۳) خواهد بود. وقتی S روی نیم‌دایره bcd حرکت می‌کند شعاع نیم‌دایره ∞ است. دیاگرام نایکویست این سیستم برای دو حالت برحسب مقادیر بزرگ و کوچک K در شکل (۷-۲۴) رسم شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود نقاط متناظر b و c و d که در صفحه S در ∞ قرار گرفته‌اند در صفحه $G(s)$ در مبدا O قرار می‌گیرند.

شکل (۷-۲۳). منحنی بسته مسیر S در صفحه S .



شکل (۷-۲۴) - کاربرد قضیه پایداری نایکوئیست در :

(a) - سیستم پایدار (b) - سیستم ناپایدار

مثال (۷-۱۴):

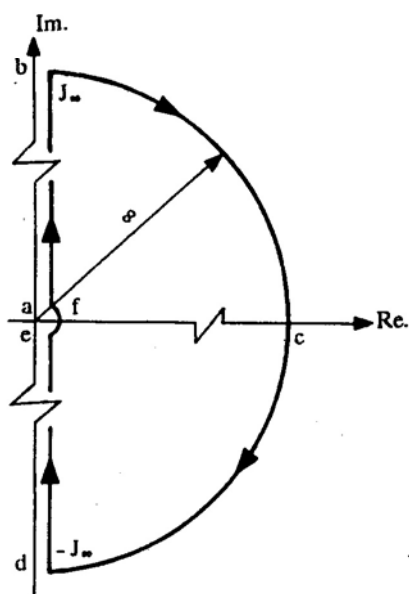
در این مثال نیز می‌خواهیم با رسم دیاگرام مربوط به $G(s)$ در صفحه مختلط برای

تابع $G(s) = \frac{K}{s(s^2+2\zeta s+1)}$ در مورد پایداری سیستم مدار بسته شکل (۶-۲۴) بحث کنیم.

در این مثال $G(s)$ یک قطب در $s=0$ دارد که در صفحه s باید این نقطه را دور

بزنیم، بنابراین ابتدا مسیر منحنی بسته s را در صفحه s بصورت شکل (۷-۲۵) رسم می‌کنیم.

معادله نیم‌دایره کوچک $cf a$ عبارت از $s = re^{j\theta}$ می‌باشد که در آن $r \rightarrow 0$ و θ از 0 تا $\frac{\pi}{2}$ شروع، سپس به صفر رسیده و نهایتاً به $\frac{\pi}{2} +$ ختم می‌شود. واضح است که شعاع نیم‌دایره bcd مساوی ∞ است [نظیر مثال (۷-۱۳)]. حال معادله نیم‌دایره $G(s)$ را وقتی $s \rightarrow 0$ میل



شکل (۲۵-۷) - مسیر منحنی بسته S در صفحه S برای تابع:

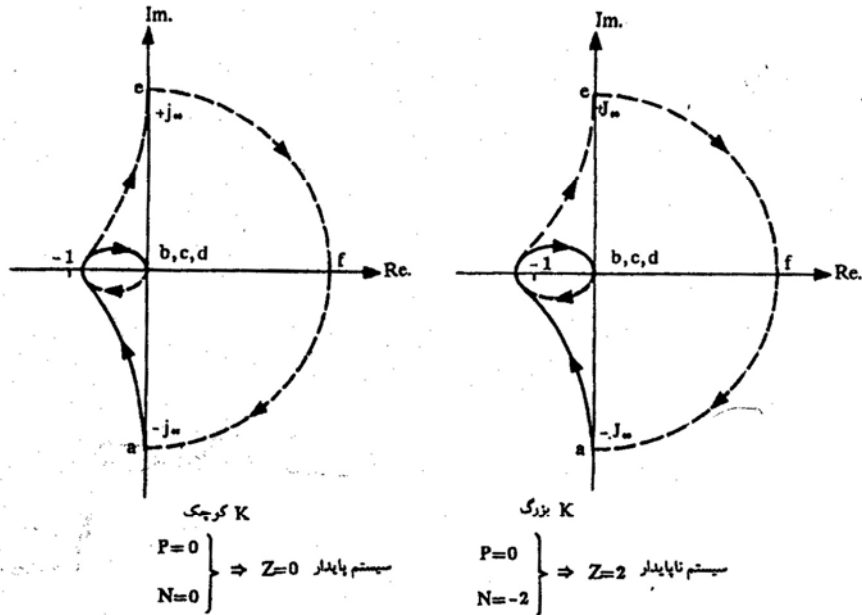
$$G(S) = \frac{K}{S(S^2 + 2\zeta S + 1)}$$

می‌کند محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s(s^2 + 2\zeta s + 1)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s}$$

اما می‌دانیم برای نیم‌دایره cfa مقدار S برابر $re^{j\theta}$ می‌باشد که در معادله فوق با قرار دادن بجای S داریم:

$$\lim_{S \rightarrow 0} G(s) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{K}{r} e^{-j\theta} = \frac{K}{r} e^{-j\theta}$$



شکل (۷-۲۶). دیاگرام نایکوئیست سیستم با تابع تبدیل $G(s) = \frac{K}{s(s^2 + 2\zeta s + 1)}$ برای:

(a) - مقادیر کوچک K (b) - مقادیر بزرگ K

در این معادله θ از -90° به صفر و سپس به $+90^\circ$ می‌رسد. بازاء این تغییرات θ ، در دیاگرام نایکوئیست نیم‌دایره‌ای به شعاع $\frac{K}{r} \rightarrow \infty$ ظاهر می‌شود که از زاویه $+90^\circ$ شروع و به -90° ختم می‌شود. این نیم‌دایره در دیاگرام نایکوئیست شکل (۷-۲۶) با efa نمایش داده شده است. در شکل (۷-۲۶) دیاگرام نایکوئیست برای مقادیر بزرگ و مقادیر کوچک K رسم شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود وقتی مقدار K کوچک است [دیاگرام (a) از شکل (۷-۲۶)] نقطه ۱- خارج منحنی قرار می‌گیرد و $N=0$ خواهد شد.

و لذا $Z=0$ حاصل شده و در نتیجه سیستم مدار بسته پایدار است. وقتی K بزرگ است [دیاگرام (b) از شکل (۷-۲۶)] نقطه ۱- داخل منحنی قرار گرفته و با محاسبه تعداد دوران منحنی حول نقطه ۱- مقدار $N=-2$ بدست می‌آید، در نتیجه با قراردادن $P=0$

$N=2$ در معادله (۷-۲۸) مقدار $Z=2$ حاصل گردیده بنابراین نتیجه می شود که سیستم مدار بسته ناپایدار است.

(۷-۴) کاربرد قضیه پایداری نایکویست در مسائل مهندسی:

اکثر سیستمهای مهندسی مشتمل بر مکانیزمهایی هستند که مدار باز تشکیل دهنده آنها دارای "ریشه یا قطبی با قسمت حقیقی مثبت" می باشند. یعنی در سیستمهای مهندسی مقادیر ویژه (یعنی قطبهای مدار باز که همان ریشههای معادله مشخصه مدار باز هستند) یا اعداد حقیقی منفی (و یا صفر) هستند و یا در صورت مختلط بودن بصورت ریشههای مزدوجی هستند که قسمت حقیقی آنها منفی (یا صفر) است. عبارت دیگر سیستم مدار باز یا پایدار است و یا در مرز پایداری قرار دارد. از اینرو ما در بررسی سیستمهای فیدبک هیچ ریشه ای با قسمت حقیقی مثبت برای تابع تبدیل مدار باز در نظر نمی گیریم. به همین دلیل، قرارداد $P=0$ در معادله $N=P-Z$ [(۷-۲۸)] یک روش معمول برای بررسی سیستمهای مهندسی بشمار می آید. به این ترتیب در بررسی پایداری چنین سیستمهای مدار بسته ای آن قسمت از دیاگرام نایکویست که به ناحیه کوچک اطراف نقطه $(-1+0j)$ محدود می شود، حائز اهمیت خواهد بود. در جدول (۷-۱) دیاگرامهای "نایکویست" و "بود" برای یک سیستم در حالت های پایدار، مرز پایداری و ناپایدار رسم شده است و تعاریف هر یک از حالت های مذکور نیز مطابق اشکال جدول فوق به شرح ذیل می باشد.

الف) پایداری سیستم مدار بسته:

یک سیستم "مدار بسته" پایدار است اگر: نقطه ۱- در سمت چپ "دیاگرام نایکویست سیستم مدار باز آن" قرار گیرد [شکل (۷-۱)]. در این حالت نقطه ۱- در خارج سطح زیر منحنی نایکویست واقع می شود.

ب) مرز پایداری در سیستم مدار بسته:

یک سیستم "مدار بسته" در مرز پایداری قرار دارد اگر: "دیاگرام نایکویست سیستم مدار باز آن" از نقطه ۱- بگذرد [شکل (۷-۲)]. برای حالت مرز پایداری، معادله

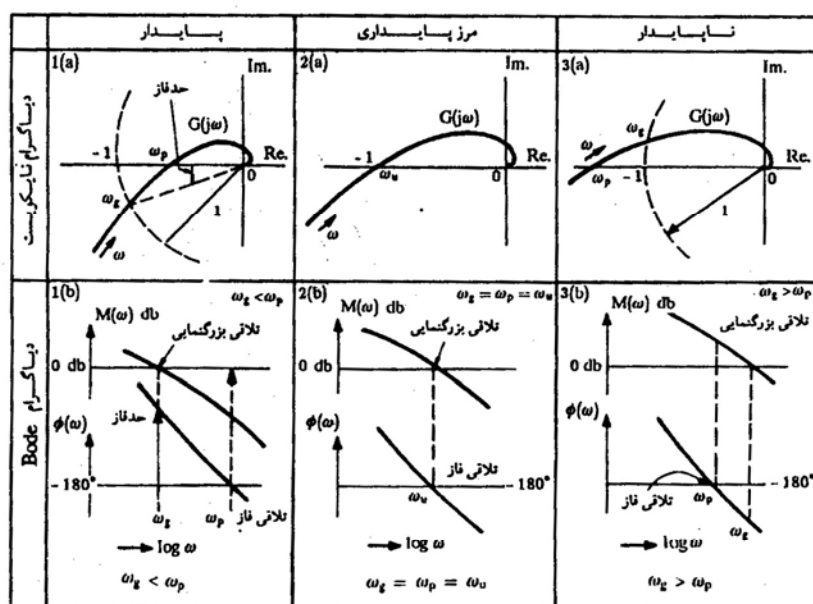
مشخصه سیستم مدار بسته دارای ریشه موهومی (قطب مدار بسته) $j\omega_u$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$1 + G(j\omega_u) = 0 \quad , \quad p_u = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad (۳۲-۷)$$

(ج) - ناپایداری سیستم مدار بسته:

یک سیستم "مدار بسته" ناپایدار است اگر: نقطه -1 در سمت راست "دیاگرام نایکویست سیستم مدار باز" آن قرار گیرد [شکل (۳۲-۸) از جدول (۱-۷)]. در این حالت نقطه -1 در داخل سطح زیرمنحنی دیاگرام نایکویست واقع می‌شود.

جدول (۱-۷) - دیاگرام‌های «نایکویست و بود» برای سیستم‌های "پایدار، در مرز پایداری و ناپایدار".



(۵-۷) - طراحی سیستم کنترلی با استفاده از عکس العمل فرکانسی سیستم مدار باز:

مطابق مطالب مبحث اخیر و با توجه به شکل (۱-۵) از جدول (۱-۷) برای سیستمی که مدار باز و مدار بسته آن پایدار است نتیجه می شود که دیاگرام نایکویست، دایره ای به شعاع واحد و به مرکز مبدا مختصات را [که از نقطه $(-1+0j)$ می گذرد] در ربع سوم (که مقدار فاز در محدوده -90° و -180° است) قطع می کند. دیاگرام "بود" این سیستم نیز در شکل (۱-۵) از جدول (۱-۷) رسم شده است. مقادیری که در شکل های (۱-۵) و (۱-۵) با عناوین حد بزرگنمایی^۱ و حد فاز^۲ بیان شده اند میزان پایداری این سیستم را نشان می دهند. در شکل (۱-۵) فرکانس مربوط به موقعیتی که در آن $M(\omega)=1$ [یا معادل $M(\omega)=0\text{db}$ در دیاگرام "بود" شکل (۱-۵)] می باشد با ω_g نشان داده شده است. همچنین فرکانس مربوط به موقعیتی که در آن $\phi(\omega)=-180^\circ$ است در شکل های (۱-۵) و (۱-۵) با ω_p نمایش داده شده است. با توجه به اشکال (۱-۵) و (۱-۵) کمیت های "حد فاز" و "حد بزرگنمایی" را بشرح ذیل می توان معرفی و اندازه گیری نمود:

"حد فاز" در جایی اندازه گیری می شود که $M(\omega)=1$ [و یا $M(\omega)=0\text{db}$] باشد. در دیاگرام نایکویست [شکل (۱-۵) از جدول (۱-۷)] کافی است دایره ای به شعاع واحد و به مرکز مختصات رسم کنیم تا منحنی را در نقطه ای با فرکانس ω_g قطع کند. در این نقطه از منحنی نایکویست، فاز $\phi(\omega)$ را مشخص می کنیم و تفاوت فاز این نقطه تا فاز -180° را "حد فاز" می نامیم. این کمیت همانطور که در شکل (۱-۵) مشخص شده مقداری مثبت است. در دیاگرام "بود" [شکل (۱-۵) از جدول (۱-۷)] برای نشان دادن "حد فاز"، فرکانس ω_g مربوط به نقطه ای را که منحنی $M(\omega)\text{db}$ در آنجا محور 0db (صفر دسی بل) را قطع می کند مشخص نموده و در منحنی فاز بازاء این مقدار ω (یعنی ω_g) از -180° بطرف بالا حرکت می کنیم تا به منحنی $\phi(\omega)$ برسیم. فاصله -180° تا نقطه بدست آمده "زاویه حد فاز" نام دارد

۱- Gain Margin

۲- Phase Margin

و بطور خلاصه می‌توان گفت:

"حد فاز" عبارت از زاویه‌ای است که از -180° بطرف بالا در فرکانس ω_g مربوط به $M(\omega)=0\text{db}$ تا $\phi(\omega_g)$ ادامه دارد. عبارتی:

$$\text{حد فاز} = 180 + \phi(\omega_g) \quad (۳۳-۷)$$

به همین ترتیب کمیت "حد بزرگنمایی" نیز در فرکانس ω_p (یعنی جاییکه $\phi(\omega)$ مساوی -180° است) اندازه‌گیری می‌شود. یعنی:

$$\text{حد بزرگنمایی} = -M(\omega_p)\text{db} \quad (۳۴-۷)$$

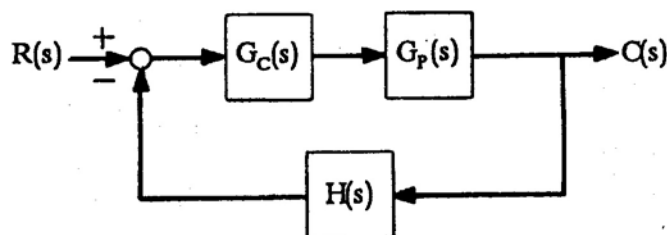
همانطور که برای سیستم پایدار در دیاگرام "بود" شکل (۱-b) از جدول (۱-۷) پیداست مقدار $M(\omega_p)$ منفی بوده، لذا $-M(\omega_p)$ که حد بزرگنمایی است مقداری مثبت می‌باشد. عبارت دیگر برای سیستم پایدار دو کمیت "حد بزرگنمایی و حد فاز" با تعاریف (۳۳-۷) و (۳۴-۷) مثبت خواهند بود. از دیاگرام نایکویست شکل (۱-a) در جدول (۱-۷) نیز ملاحظه می‌شود که چون برای سیستم پایدار، بازاء زاویه -180° دیاگرام نایکویست در سمت راست نقطه 1- قرار می‌گیرد پس بازاء فرکانس ω_p مقدار $M(\omega_p)$ عددی کوچکتر از واحد بوده در نتیجه $M(\omega)\text{db}$ عددی منفی خواهد بود. اگر سیستم مدار بسته در مرز پایداری قرار داشته باشد، [شکلهای (۲-a) و (۲-b) از جدول (۱-۷)] کمیت‌های حد فاز و حد بزرگنمایی بطور آنی و بلافاصله صفر می‌شوند و برای سیستم ناپایدار این کمیت‌ها وجود ندارند.

همانگونه که از تعاریف فوق برمی‌آید کمیت‌های حد بزرگنمایی و حد فاز میزان پایداری یک سیستم مدار بسته را نشان می‌دهند. عبارت دیگر هر چه این کمیت‌ها بزرگتر باشند سیستم مدار بسته پایدارتر است. از طرفی مقادیر بسیار بزرگ حد بزرگنمایی و حد فاز از نظر کنترلی سیستم فیدبک را ضعیف و غیر مؤثر می‌نمایند. لذا باید مقادیر مناسبی را برای این کمیت‌ها تعیین نمود تا هم سیستم مدار بسته پایدار بوده و هم رفتار سیستم کنترلی مطلوب باشد. بعنوان یک دستورالعمل کلی برای طراحی سیستم مدار بسته توصیه می‌شود که برای سیستم شکل (۲۷-۷) کنترلر $G_c(s)$ طوری طراحی شود که $G(s)$ مدار باز واجد یکی از دو شرط زیر باشد.

$$\text{شرط اول:} \quad 30^\circ \leq \text{حد فاز} \quad (۳۵-۷)$$

$$\text{شرط دوم:} \quad 8\text{db} \leq \text{حد بزرگنمایی} \quad (۳۶-۷)$$

$$G(s) = G_C(s) G_P(s) H(s)$$

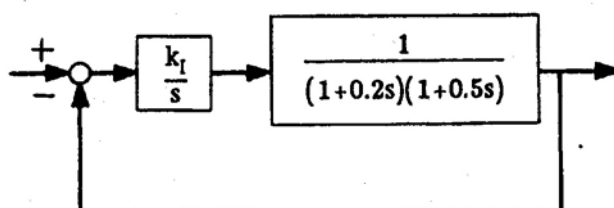


شکل (۷-۲۷). نمایش یک سیستم مدار بسته برای طراحی کنترلر.

در سیستمهای مهندسی اگر "حد فاز" مساوی 30° انتخاب شود شرط دوم خودبخود صادق خواهد بود. یعنی حد بزرگنمایی بزرگتر یا مساوی 8db می شود و اگر حد بزرگنمایی مساوی 8db باشد شرط اول خودبخود صادق است.

مثال (۷-۱۵):

فرض کنید می خواهیم مقدار K_I یا بزرگنمایی مربوط به کنترلر "I-action" را در سیستم مدار بسته شکل (۷-۲۸) تعیین نماییم. عبارت دیگر می خواهیم پارامتر "ضریب کنترلر" را بر مبنای روابط (۷-۳۵) و (۷-۳۶) طراحی کنیم.



شکل (۷-۲۸). سیستم مدار بسته برای طراحی ضریب K_I کنترلر.

برای این منظور ابتدا تابع تبدیل مدار باز $G(j\omega) = G_c(j\omega)G_p(j\omega)$ را با $K_I = 1$ در نظر گرفته و دیاگرام "بود" را رسم می‌کنیم. داریم:

$$G(s) = \frac{1}{S(1 + 0.2S)(1 + 0.5S)}$$

$$M(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (0.2\omega)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (0.5\omega)^2}}$$

$$M(\omega) \text{ db} = 20[\log M(\omega)] = -20 \log \omega - 20 \left[\log \sqrt{1 + (0.2\omega)^2} \right] - 20 \left[\log \sqrt{1 + (0.5\omega)^2} \right]$$

$$M(\omega) \text{ db} = -20[\log \omega] - 10[\log(1 + (0.2\omega)^2)] - 10[\log(1 + (0.5\omega)^2)]$$

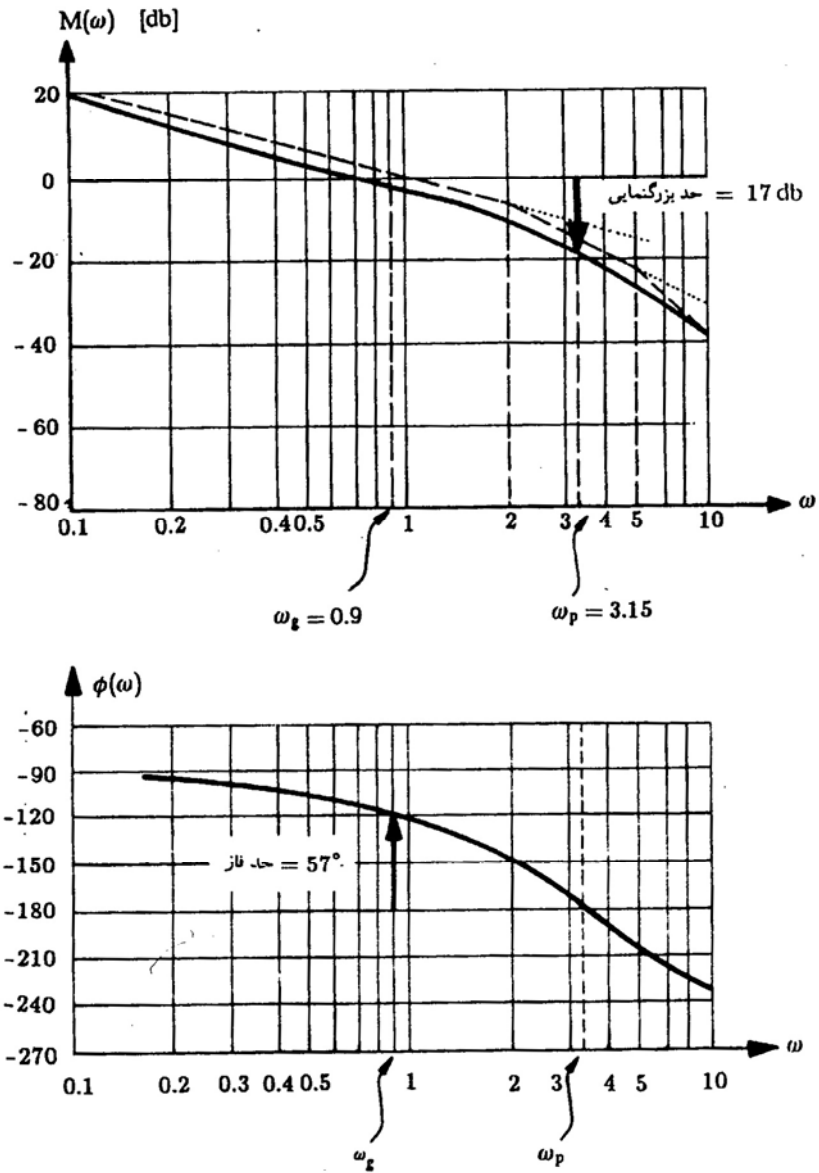
$$\phi(\omega) = -\phi_1(\omega) - \phi_2(\omega) - \phi_3(\omega)$$

که در آن:

$$\phi_1(\omega) = -90^\circ, \quad \phi_2(\omega) = \tan^{-1}(0.2\omega), \quad \phi_3(\omega) = \tan^{-1}(0.5\omega)$$

می‌باشند. با توجه به روابط فوق دیاگرام "بود" این سیستم در شکل (۷-۲۹) رسم شده است. همانطور که در این شکل ملاحظه می‌شود برای $K_I = 1$ مقدار حد فاز در فرکانس $\omega_g = 0.9$ و برابر 57° است و مقدار حد بزرگنمایی نیز در فرکانس $\omega_p = 3.15$ برابر 17 db می‌باشد. بنابراین برای $K_I = 1$ مقادیر حد فاز و حد بزرگنمایی بزرگتر از مقادیر توصیه شده در روابط (۷-۳۵) و (۷-۳۶) هستند و ما می‌توانیم مقدار K_I را افزایش دهیم.

وقتی K_I زیاد می‌شود $\phi(\omega)$ یا فاز تغییر ننموده ولی $M(\omega)$ تغییر می‌کند و منحنی $M(\omega) \text{ db}$ به سمت بالا جابجا می‌شود. در نتیجه حد فاز و حد بزرگنمایی هر دو کاهش یافته و در این حالت باید تا جایی که مجاز هستیم K_I را افزایش دهیم. عبارتی K_I را باید آنقدر زیاد کنیم تا یکی از دو کمیت حد فاز یا حد بزرگنمایی به مقدار مورد نظر برسند (یعنی به 30° یا 8 db). بعنوان مثال اگر K_I مساوی ۲ انتخاب شود منحنی $M(\omega)$ به اندازه $20(\log 2) = 6 \text{ db}$ به بالا منتقل می‌شود و اگر K_I مساوی ۳ باشد $M(\omega)$ به اندازه $20(\log 3) = 9.5 \text{ db}$ به بالا منتقل می‌شود. در این مسأله اگر $K_I = 2.5$ انتخاب



شکل (۲۹-۷). دیاگرام بود و مقادیر "حد فاز" و "حد بزرگنمایی" برای سیستم
باتایع تبدیل:

$$G(s) = \frac{1}{s(1+0.2s)(1+0.5s)}$$

شود، منحنی $M(\omega)$ به اندازه $20(\log 2.5) = 8\text{db}$ به بالا منتقل می‌گردد و برای این مقدار K_I کمیت حد فاز برابر 30° می‌شود و همچنین حد بزرگنمایی نیز برابر $17 - 8 = 9\text{db}$ خواهد بود. بنابراین بازاء $K_I = 2.5$ داریم:

$$9\text{db} = \text{حد بزرگنمایی} \quad \text{و} \quad 30^\circ = \text{حد فاز}$$

حال این سؤال را می‌توان مطرح نمود که در این مسأله اگر مقدار K_I را باز هم بزرگتر انتخاب نماییم چه اتفاقی می‌افتد؟ با توجه به اینکه حد بزرگنمایی بازاء $K_I = 1$ مساوی 17db است، اگر K_I آنقدر بزرگ شود تا حد بزرگنمایی به صفر برسد در اینصورت حد فاز هم صفر می‌شود و این عمل در فرکانس $\omega_p = \omega_g = \omega_u = 3.15$ اتفاق می‌افتد. در اینصورت سیستم به مرز پایداری رسیده و سیستم مدار بسته دارای یک حرکت نوسانی غیرمیرا با پریود $P_u = \frac{2\pi}{\omega_u} = \frac{2\pi}{3.15}$ خواهد بود [معادله (۷-۳۲)]. مقدار K_I در این حالت از معادله زیر بدست می‌آید:

$$20[\log K_I] = 17\text{db} \Rightarrow K_I = 7$$

همین نتیجه یعنی $\omega_u = 3.15$ و $K_I = 7$ (که بترتیب مقادیر فرکانس و بزرگنمایی مربوط به حالت مرز پایداری هستند) را می‌توان از معادله مشخصه مدار بسته وقتی بجای s ، $j\omega$ قرار دهیم نیز بدست آورد [معادله (۷-۳۲)].

$$1 + G(j\omega_u) = 0$$

$$1 + \frac{K_I}{s(1+0.2s)(1+0.5s)} = 0 \quad (a)$$

$$\Rightarrow s^3 + 7s^2 + 10s + 10K_I = 0$$

با قراردادن $z\omega_u$ بجای s داریم:

$$-j\omega_u^3 - 7\omega_u^2 + 10j\omega_u + 10K_I = 0$$

$$-j\omega_u^2(\omega_u^2 - 10) + (10K_I - 7\omega_u^2) = 0$$

هر یک از قسمتهای حقیقی و موهومی را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\omega_u^2 - 10 = 0 \Rightarrow \omega_u = \sqrt{10} = 3.15$$

$$10K_I - 7\omega_u^2 = 0 \Rightarrow 10K_I = 7\omega_u^2 = 70 \Rightarrow K_I = 7$$

نظیر همین نتیجه را (برای تعیین K_I) می‌توانستیم از روش "راوت" نیز برای معادله مشخصه (a) بدست آوریم.

(۶-۷) - جبران کننده‌ها یا ترمیم کننده‌ها^۱:

به منظور تغییر شکل دیاگرام «بود» از مدارهای تقدم فاز^۲ و تاخیر فاز^۳ که به عنوان جبران کننده به سیستم اضافه می‌شوند، استفاده می‌گردد. در شکل (۷-۳۰) نمایش الکتریکی مدارهای فوق ارائه شده است. عناصر غیرفعال^۴ نشان داده شده در شکل مذکور اغلب در سروومکانیزم‌ها بکار می‌روند تا نمایش عکس العمل فرکانسی سیستمهای مذکور را به شکل مطلوب درآورند.

در این بخش ابتدا مدارهای تقدم فاز و اثر آن در رفتار سیستم مورد بررسی قرار می‌گیرد. سپس مدارهای تاخیر فاز و در انتها نیز مدارهای ترکیبی تقدم و تاخیر فاز مورد بحث قرار می‌گیرند.

(۱-۶-۷) - مدارهای تقدم فاز:

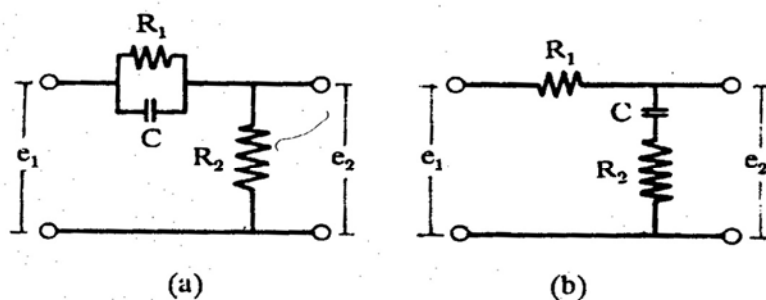
مدار تقدم فاز عبارت از یک سیستم کمکی است که وقتی به صورت سری به سیستم اصلی افزوده شود، فاز سیستم را افزایش می‌دهد و در نتیجه حد فاز سیستم بهبود یافته و

۱ - Compensators

۲ - Lead Network

۳ - Lag Network

۴ - Passive



شکل (۷-۳۰) مدارهای الکتریکی: (a) تقدم فاز و (b) تأخير فاز.

بزرگتر می شود. سیستم الکتریکی متشکل از یک مدار تقدم فاز در شکل (۷-۳۰-ا) نشان داده شده است.

تابع تبدیل بین ورودی e_1 و خروجی e_2 در مدار تقدم فاز شکل (۷-۳۰-ب) عبارت است از:

$$G(s) = \frac{e_2}{e_1} = \alpha \frac{1 + Ts}{1 + \alpha Ts} \quad (۷-۳۷)$$

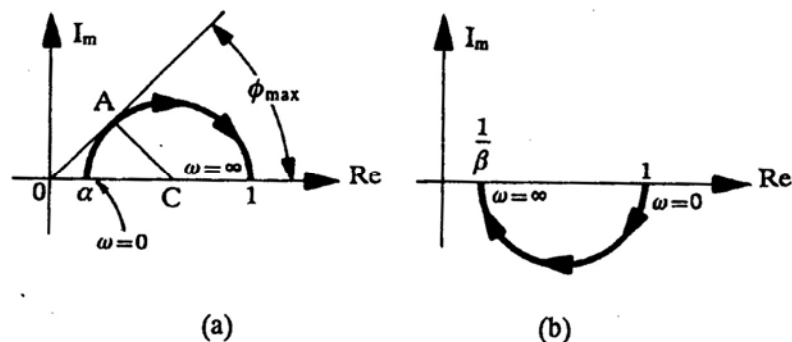
که در آن T و α معرف عبارت های ذیل هستند:

$$\alpha = \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad T = R_1 C \quad (۷-۳۸)$$

حداقل مقدار ثابت α حدود ۰.۰۷ می باشد و بطور معمول مقدار آن ۰.۱۰ انتخاب می شود. همانطور که از رابطه (۷-۳۷) ملاحظه می شود اگر مقدار α خیلی کوچک شود این جبران کننده به سمت یک کنترل کننده PD میل می کند.

برای آنکه نشان داده شود چرا این سیستم را مدار تقدم فاز یا افزایش فاز می نامند ابتدا دیاگرام نایکوئیست مربوط به سیستم معادله (۷-۳۷) را بدست می آوریم. برای سیستم مذکور داریم:

$$G(j\omega) = \alpha \frac{1 + j\omega T}{1 + j\omega \alpha T} \quad (۷-۳۹)$$



شکل (۳۱-۷) دیاگرام‌های نایکوئیست برای: (a) تقدم فاز و (b) تأخیر فاز.

چنانکه در شکل (۳۱-۷-ا) نشان داده شده است، دیاگرام نایکوئیست. این سیستم بصورت یک نیم‌دایره با زوایای فاز مثبت می‌باشد. برای تعیین حداکثر زاویه فاز (یعنی ϕ_m) و اندازه $M(\omega)$ مربوطه که در شکل (۳۱-۷-الف) مشخصات نقطه A را بیان می‌کند، ابتدا طول OC و شعاع AC نیم‌دایره را در مثلث قائم‌الزاویه OAC محاسبه می‌کنیم:

$$OC = \frac{1}{2}(1+\alpha) \quad , \quad AC = \frac{1}{2}(1-\alpha) \quad (۴۰-۷)$$

بنابراین داریم:

$$\sin \phi_m = \frac{\frac{1}{2}(1-\alpha)}{\frac{1}{2}(1+\alpha)} \quad (۴۱-۷)$$

با توجه به اینکه حداقل مقدار α حدود ۰.۰۷ انتخاب می‌شود، حداکثر مقدار ϕ_m از رابطه زیر تعیین می‌گردد:

$$\sin \phi_m = \frac{1-0.07}{1+0.07} \approx 0.86 \quad (۴۲-۷)$$

$$\phi_m \approx 60^\circ$$

بنابراین مقدار حداکثر زاویه فاز در یک مدار تقدم فاز می‌تواند تا حدود ۶۰ درجه باشد. با

توجه به مثلث OAC داریم:

$$(OA)^2 + (AC)^2 = (OC)^2$$

با جایگزینی از روابط (۷-۴۰) در این رابطه خواهیم داشت:

$$(OA)^2 = \frac{1}{4}(1+\alpha)^2 - \frac{1}{4}(1-\alpha)^2 \quad (۷-۴۳)$$

$$(OA)^2 = \alpha$$

$$(OA)^2 = \sqrt{\alpha}$$

می توان از رابطه زیر بدست آورد:

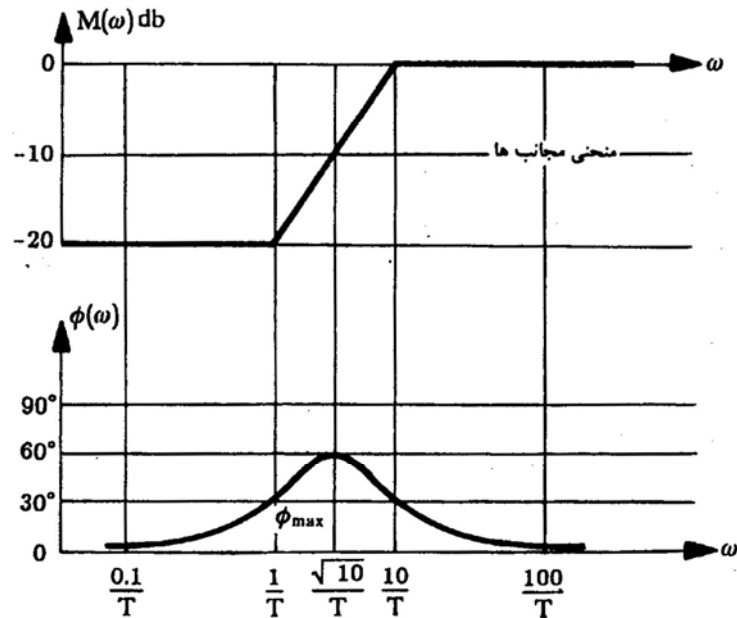
$$M(\omega) = \sqrt{\alpha} = \alpha \frac{(1+T^2\omega^2)^2}{(1+\alpha^2T^2\omega^2)^{\frac{1}{2}}}$$

و یا:

$$\omega = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} \quad (۷-۴۴)$$

دیاگرام «بود» مربوط به یک مدار تقدم فاز با تابع تبدیل $G(s) = 0.1 \frac{1+Ts}{1+0.1Ts}$ به ازاء $\alpha = 0.1$ در شکل (۷-۳۲) نشان داده شده است. همانطور که در ترسیمه مجانب‌های شکل (۷-۳۲-ا) نشان داده شده است، برای فرکانس‌های کمتر از $\frac{1}{T}$ مقدار مجانب $M(\omega)$ مساوی ۰db و برای فرکانس‌های بیشتر از $\frac{10}{T}$ مقدار آن مساوی ۰db (مفرد سیل) است. مقدار فرکانس مربوط به حداکثر زاویه فاز [نقطه A از شکل (۷-۳۱-ا)] از رابطه (۷-۴۴) تعیین می شود. در این مثال به ازاء $\alpha = 0.1$ مقدار این فرکانس برابر $\omega = \frac{\sqrt{10}}{T}$ حاصل می شود.

معادل مکانیکی یک سیستم تقدم فاز در شکل (۷-۳۳-ا) نشان داده شده است.



شکل (۷-۳۲) - دیاگرام «بود» مربوط به یک سیستم تقدم فاز به ازاء $\alpha = 0.1$.

برای سیستم شکل (۷-۳۳-الف) داریم:

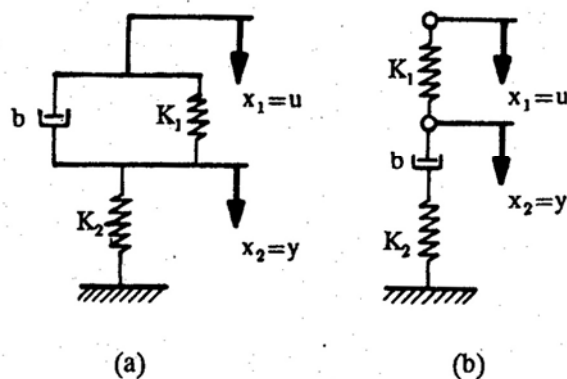
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \alpha \frac{1+Ts}{1+\alpha Ts}$$

که در آن:

$$\alpha = \frac{\frac{1}{K_2}}{\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}} = \frac{K_1}{K_1 + K_2} \quad (۷-۴۵)$$

$$T = \frac{b}{K_1} \quad (۷-۴۶)$$

می‌باشد. K_1 و K_2 به ترتیب معرف ضریب فنریت دو فنر و b نیز معرف ضریب مستهلک کننده



شکل (۷-۳۳) معادل مکانیکی سیستم‌های:

(a) - تقدم فاز.

(b) - تأخير فاز.

در سیستم شکل (۷-۳۳-a) می‌باشد. برای نشان دادن تأثیر افزودن «مدار تقدم فاز» در یک سیستم کنترلی به ذکر مثالی می‌پردازیم.

مثال (۷-۱۶):

سرژ مکانیزمی را که تابع تبدیل مدار باز آن به صورت زیر داده شده است در نظر

می‌گیریم.

$$G(s) = \frac{K}{s(1 + 0.2s)(1 + 0.08s)} \quad (a)$$

دیاگرام «بود» این سیستم به ازاء $K=1$ در شکل (۷-۳۴) رسم شده است.

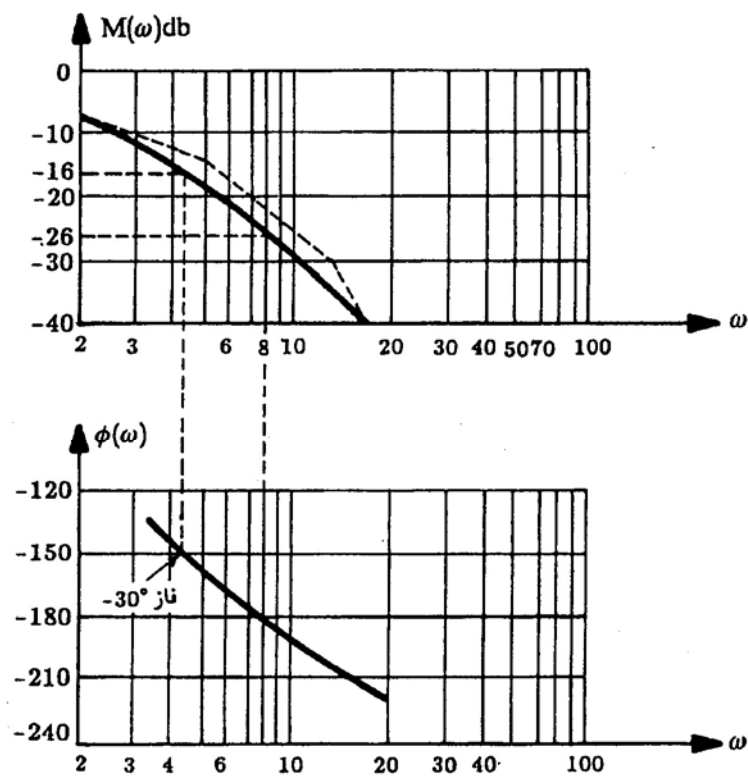
همانطور که ملاحظه می‌شود به ازاء $K=1$ وقتی فاز مساوی 150° است مقدار

$M(\omega)$ برابر -16db می‌باشد و همچنین در زاویه فاز 180° مقدار $M(\omega)$ برابر

-26db است. بنابراین به ازاء $K=1$ ، حدبهره (حدبزرگنمایی) مساوی 26db

می‌باشد و واضح است که این مقدار بسیار بزرگتر از مقدار مورد نظر برای طراحی است.

بنابراین K را می‌توان بزرگ اختیار نمود. با توجه به اینکه وقتی $K=16\text{db}=6.3$



شکل (۷-۳۴) - دیاگرام بود سیستم سرومکانیزم با تابع تبدیل معادله (a).

است، فاز مساوی 150- درجه می باشد، چنانچه طراحی را برای حد فاز مساوی 30 درجه انجام دهیم داریم:

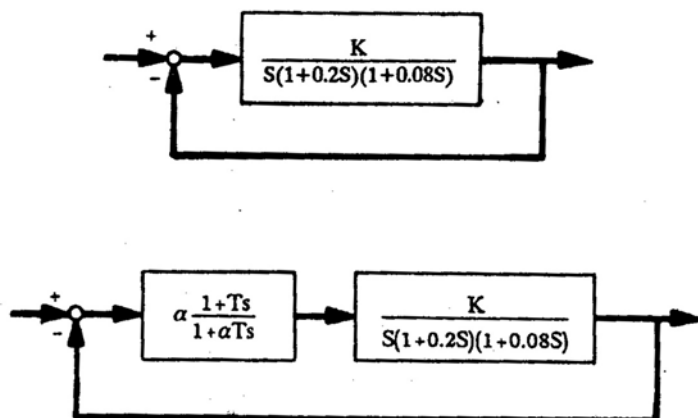
$$K = 16 \text{ db} = 6.3$$

$$\text{حد فاز} = 30 \quad (b)$$

$$\text{حد بهره (حد بزرگنمایی)} = 26 - 16 = 10 \text{ db}$$

$$\omega_p = 8$$

بنابراین در سیستم مذکور می توان K را مساوی 6.3 انتخاب نمود و در این حالت



شکل (۷-۳۵) - مدار فیدبک برای سرو مکانیزم:

(الف) - بدون جبران کننده.

(ب) - با جبران کننده تقدم فاز.

سیستم مدار بسته شکل (۷-۳۵-الف) دارای حدهای برابر 30 درجه و حد بهره معادل 10 db خواهد بود.

مثال (۷-۱۷):

برای بهبود ولتاژ سیستم مثال (۷-۱۶)، از یک مدار تقدم فاز مطابق

شکل (۷-۳۵-ب) استفاده می‌کنیم.

دیاگرام «بود» سیستم مدار باز جدید که حاصل ضرب توابع تبدیل سیستم

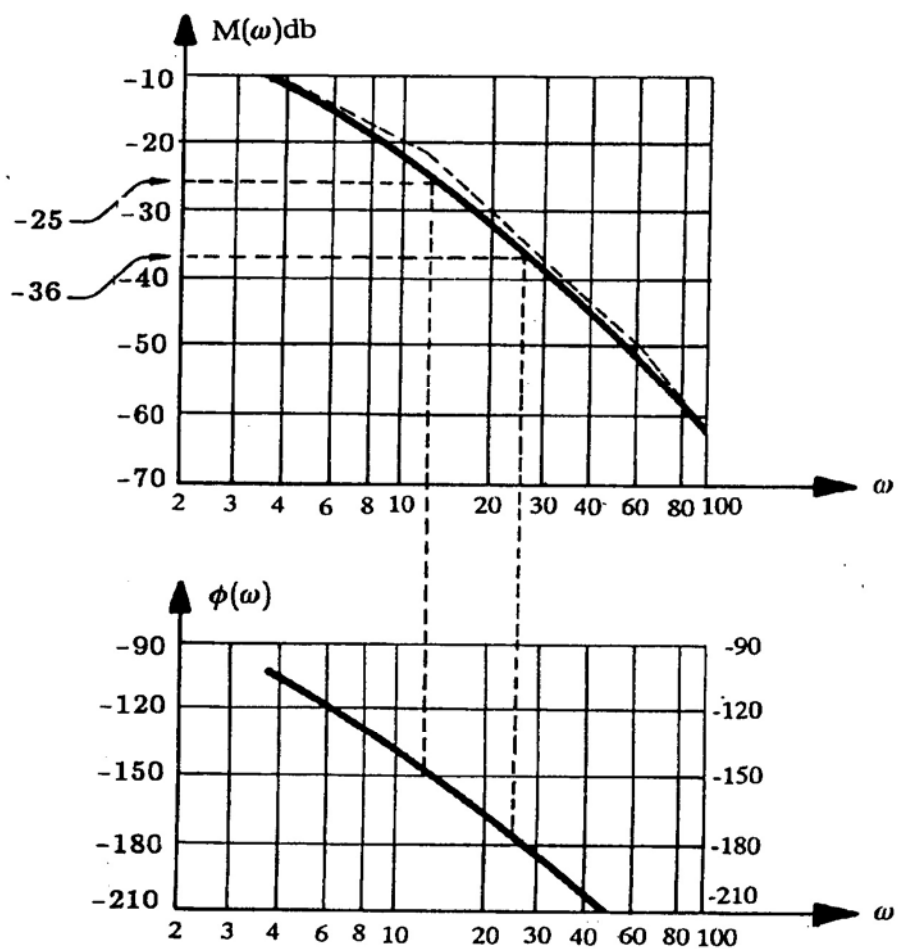
سرو مکانیزم و سیستم تقدم فاز است به ازاء $k=1$ ، $\alpha=0.1$ و $T=0.2$ در شکل

(۷-۳۶) رسم شده است.

همانطور که از دیاگرام مذکور ملاحظه می‌شود به ازاء $K=1$ وقتی فاز مساوی

150- درجه است مقدار $M(\omega)$ مساوی 25db و وقتی فاز برابر 180- درجه

می‌شود مقدار $M(\omega)$ مساوی 36 db حاصل می‌گردد. پس به ازاء $K=1$ مقدار حد



شکل (۷-۳۶) - دیاگرام «بود» سیستم سرو مکانیزم دارای سیستم تقدم فاز.

بهره (حدبزرگنمایی) مساوی 36 db است. با توجه به شکل (۷-۳۵-ب) که

بزرگنمایی سیستم از K به $K\alpha$ تغییر کرده است، چنانچه حد فاز مطلوب مساوی 30 درجه انتخاب شود، مقدار $K\alpha$ می تواند تا 25 db بزرگ شود. پس در این حالت داریم:

$$K\alpha = 25 \text{ db} = 19$$

$$\text{حد فاز} = 30 \quad (C)$$

$$\text{حد بزرگنمایی} = 11 \text{ db}$$

$$\omega_p = 25$$

از مقایسه معادلات (b) و (c) نتیجه میشود که مقدار بزرگنمایی سیستم و فرکانسی که به ازاء آن فاز برابر 180- درجه می شود تقریباً سه برابر شده اند. افزایش ω_p به معنای سرعت بخشیدن به عکس العمل سیستم و افزایش بزرگنمایی K به معنای بهتر شدن رفتار سیستم است.

(۷-۶-۲) - مدارهای تأخیر فاز:

همانند مدار تقدم فاز، یک مدار تأخیر فاز نیز عبارت از یک سیستم کمکی است که وقتی به سیستم اصلی به صورت سری افزوده شود باعث بهبود رفتار سیستم می گردد. شکل (۷-۳۰-b) سیستم متشکل از یک مدار تأخیر فاز الکتریکی را نشان می دهد، تابع تبدیل بین ورودی e_1 و خروجی e_2 در مدار تأخیر فاز شکل (۷-۳۰-b) عبارت است از:

$$G(s) = \frac{e_2}{e_1} = \frac{1+TS}{1+\beta TS} = \frac{1}{\beta} \frac{S + \frac{1}{T}}{S + \frac{1}{\beta T}} \quad (۷-۴۷)$$

که در آن مقادیر β و T عبارتند از:

$$\beta = \frac{R_1 + R_2}{R_2}, \quad T = R_2 C \quad (۷-۴۸)$$

دیagram نایکویست این سیستم در شکل (۷-۳۱-b) نشان داده شده است. همانطور که از این شکل ملاحظه می شود این سیستم باعث کاهش فاز می شود. برای نشان دادن تأثیر اضافه کردن

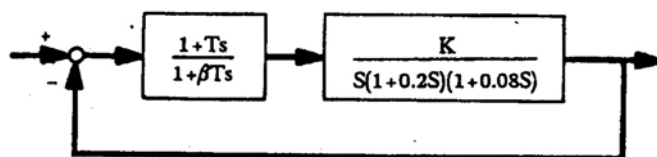
این جبران‌کننده در رفتار سیستم فیدبک به ذکر مثالی می‌پردازیم.

مثال (۷-۱۸):

سرومکانیزم معرفی شده در مثال (۷-۱۶) را در نظر گرفته و برای بهبود رفتار آن از یک سیستم تأخیر فاز مطابق شکل (۷-۳۷) استفاده می‌کنیم. مقادیر T و β را چنین انتخاب می‌نماییم:

$$T = 3, \quad \beta = 10$$

دیاگرام «بود» این سیستم در شکل (۷-۳۸) رسم شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود به ازاء $K=1$ وقتی فاز مساوی ۱۵۰- درجه می‌باشد مقدار $M(\omega)$ مساوی ۳۵ db و وقتی فاز ۱۸۰- درجه می‌شود مقدار $M(\omega)$ مساوی ۴۴db می‌گردد. پس



شکل (۷-۳۷) - مدار فیدبک سرومکانیزم با جبران‌کننده تأخیر فاز.

به ازاء $K=1$ مقدار حدبزرگنمایی برابر ۴۴db است. چنانچه حد فاز مطلوب مساوی ۳۰ درجه انتخاب شود مقدار K می‌تواند تا ۳۵ db افزایش یابد. پس داریم:

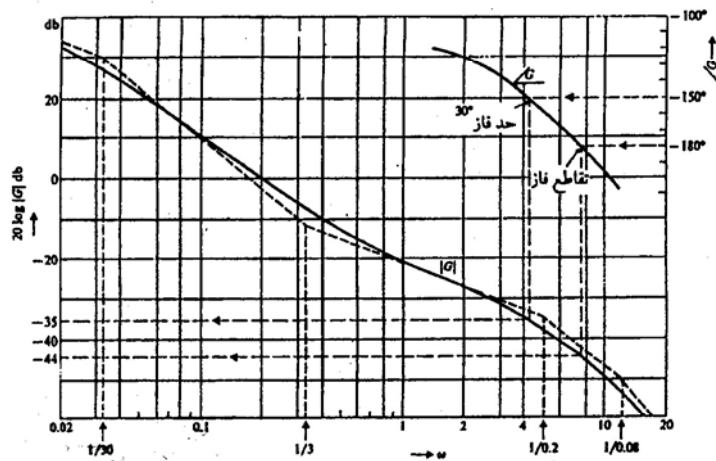
$$K = 35 \text{ db} = 56$$

$$\text{حد فاز} = 30^\circ$$

$$\text{حد بهره} = 44 - 35 = 9 \text{ db}$$

$$\omega_p = 7.6$$

از مقایسه این نتایج با روابط (b) مثال (۷-۱۶) نتیجه می‌شود که بهره یا K ، ۹ برابر بزرگتر شده ولی سرعت عکس‌العمل که با ω_p بیان می‌شود اندکی آهسته‌تر شده است. معادل مکانیکی یک سیستم تأخیر فاز در شکل (۷-۳۳-b) نمایش داده شده است.



شکل (۷-۳۸) - دیاگرام «بود» سیستم سرومکانیزم با جبران کننده تأخیر فاز.

$\pi \pi \pi$

مسائل

(۱-۷) - دیاگرام‌های «بود» و «نایکویست» را برای هر یک از توابع تبدیل ذیل رسم نمایید.

a) $G_1(s) = s+1$, $G_2(s) = \frac{1}{s+1}$

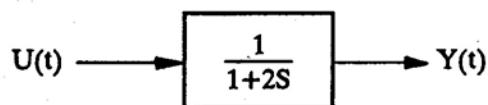
b) $G(s) = \frac{K}{s+1}$

c) $G_1(s) = s^2 + s + 1$, $G_2(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$

d) $G(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}$

e) $G(s) = \frac{1/2(1+0.5s)}{s(1+0.8s+s^2)}$

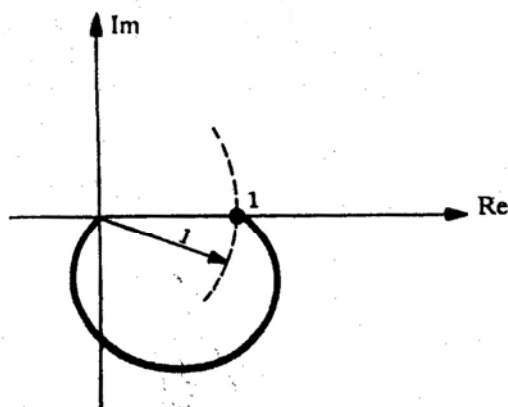
(۲-۷) - برای سیستم رسته یک شکل (م-۷-۲) که ورودی آن $U(t) = \sin \sqrt{2} t$ می‌باشد، عکس العمل $y(t)$ در حالت ماندگار ($y_{ss}(t)$) را بدست آورید.



شکل (م-۷-۲)

(۳-۷) - تابع تبدیل $G(s) = \frac{1+T_1s}{1+T_2s}$ ، به ازاء $T_1 < T_2$ معرف یک مدار تأخیر فاز^۱ و به ازاء $T_1 > T_2$ معرف یک مدار تقدم فاز^۲ می باشد. در هر یک از حالت های فوق، دیاگرام های «بود» و «نایکویست» را رسم نمایید و براساس دیاگرام های فاز دو حالت مذکور (در نمودارهای بود)، علت چنین نامگذاری را بیابید.

(۴-۷) - تابع تبدیل یک سیستم مدار باز بصورت $G(s) = \frac{1+Ts}{(1+s)^2}$ داده شده است. مقدار T در این تابع تبدیل را چنان تعیین کنید تا دیاگرام نایکویست آن مطابق شکل (۴-۷-م) باشد.

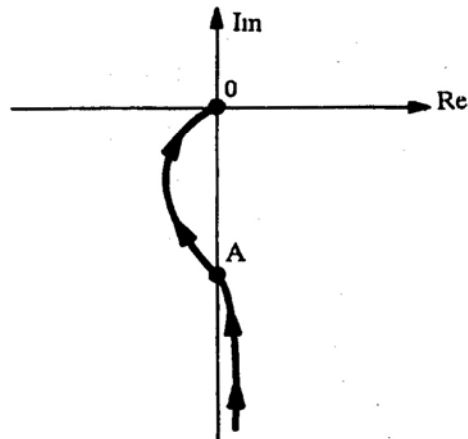


شکل (۴-۷-م)

(۵-۷) - برای سیستمی با تابع تبدیل $G(s) = \frac{1+3s}{s(1+s)^2}$ ، دیاگرام نایکویست بصورت شکل (۵-۷-م) رسم شده است. با توجه به این دیاگرام، طول OA را بدست آورید.

۱ - Phase Lag - Network

۲ - Phase Lead - Network

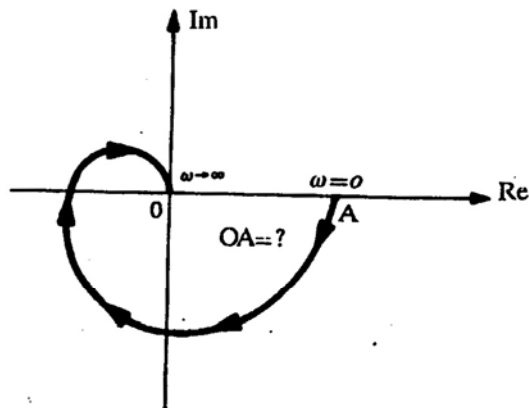


شکل (۵-۷-م)

(۶-۷) - برای تابع تبدیل:

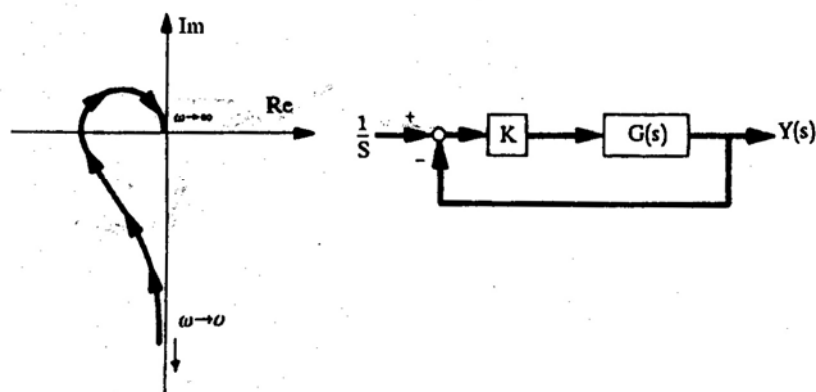
$$G(s) = \frac{(s+Z_1)(s+Z_2) \dots (s+Z_m)}{(s+P_1)(s+P_2) \dots (s+P_n)}, \quad n > m$$

دیاگرام نایکوئیست بصورت شکل (۶-۷-م) رسم شده است. در این دیاگرام به شرط آنکه هیچ صفر و قطبی از سیستم در نیم صفحه سمت راست (RHP) واقع نشده باشد، طول OA را بدست آورید.



شکل (۶-۷-م)

(۷-۷) - دیاگرام نایکویست تابع تبدیل $G(S)$ در شکل (م-۷-۷-الف) ارائه شده است. با توجه به دیاگرام جعبه‌ای شکل (م-۷-۷-ب)، چنانچه $G(S)$ در مدار فیدبک قرار گیرد، خطای حالت ماندگار (e_{ss}) در سیستم فیدبک با ورودی پله‌ای واحد را (با استدلال لازم) بدست آورید.



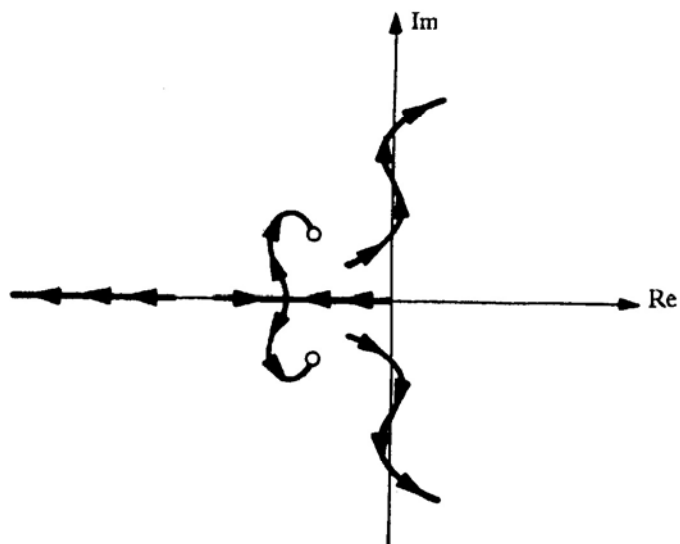
شکل (م-۷-۷)

(۸-۷) - منحنی مکان هندسی ریشه‌ها برای تابع تبدیل $G(S)$ در شکل (م-۷-۸) ارائه شده است. با توجه به این ترسیمه، دیاگرام نایکویست تابع تبدیل $G(S)$ را رسم نمایید.

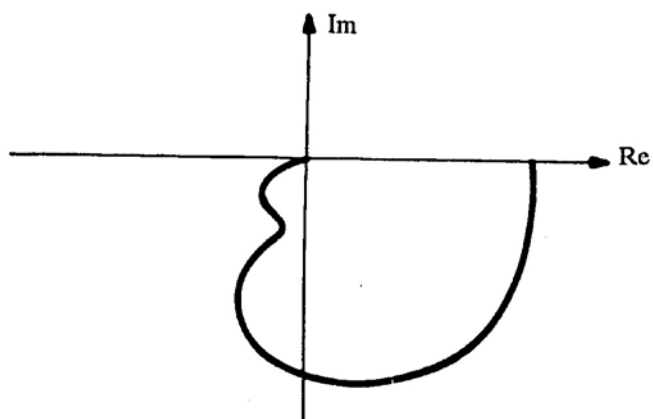
(۹-۷) - دیاگرام نایکویست تابع تبدیل:

$$G(s) = \frac{1 + T_1 s}{(1 + T_2 s)(1 + T_3 s)(1 + T_4 s)}$$

مطابق شکل (م-۷-۹) ارائه شده است. با توجه به آنکه $T_2 > T_3 > T_4$ می‌باشد، موقعیت پارامتر T_1 را در این نامساوی مشخص نمایید.

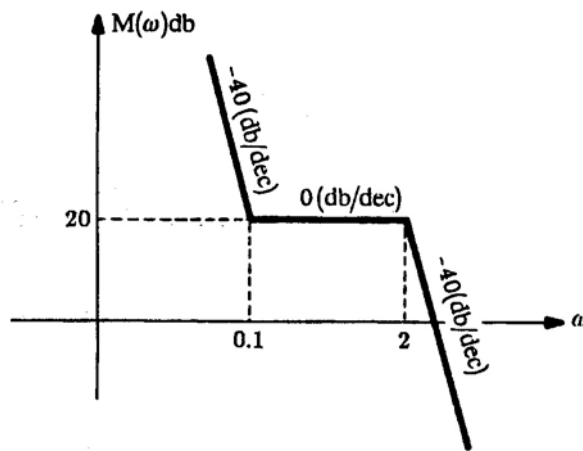


شكل (م-٧-٨)



شكل (م-٧-٩)

(۱۰-۷) - در شکل (م-۷-۱۰)، خطوط مجانب در ترسیم $M(\omega)$ db از دیاگرام «بود» مربوط به تابع تبدیل $G(S)$ نشان داده شده است. با فرض آنکه $G(S)$ هیچ صفر و قطبی در نیم صفحه سمت راست (RHP) نداشته باشد، تابع تبدیل $G(S)$ را بدست آورید.



شکل (م-۷-۱۰)

(۱۱-۷) - برای یک سیستم با تابع تبدیل $G(S)$ ، دیاگرام «بود» را بطور تجربی بدست آورده‌ایم که این دیاگرام دارای مشخصات ذیل می‌باشد:

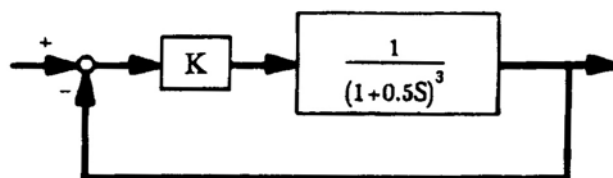
الف - شیب اولیه در دیاگرام برابر $20 \frac{db}{dec}$ است.

ب - در فرکانس $\omega = 1 \frac{rad}{sec}$ دیاگرام به نقطه $0db$ (صفر دسیبل) می‌رسد و یک شیب جدید برابر با $40 \frac{db}{dec}$ پیدا می‌کند.

ج - در فرکانس $\omega = 100 \frac{rad}{sec}$ ، شیب دیاگرام به $20 \frac{db}{dec}$ می‌رسد.

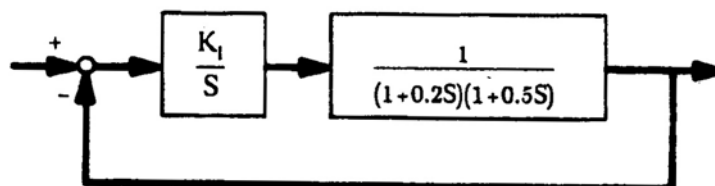
با فرض آنکه $G(S)$ هیچ صفر و قطبی در نیم صفحه سمت راست (RHP) نداشته باشد، تابع تبدیل $G(S)$ را بدست آورده و دیاگرام نایکویست را برای آن رسم نمایید.

(۱۲-۷) - در سیستم مدار بسته شکل (م-۷-۱۲) به ازاء چه مقداری از ضریب کنترلر K ، حد بزرگنمایی برابر $10db$ خواهد شد؟



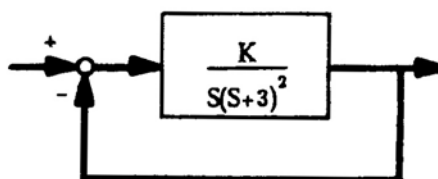
شکل (م-۷-۱۲)

(۷-۱۳) - برای سیستم مدار بسته شکل (م-۷-۱۳) ضریب کنترلر K_I را طوری تعیین کنید که به ازاء آن حد فاز برابر با 30 درجه باشد.



شکل (م-۷-۱۳)

(۷-۱۴) - مقدار K را در سیستم مدار بسته شکل (م-۷-۱۴) چنان بیابید که به ازاء آن حد فاز برابر با 60 درجه حاصل شود.

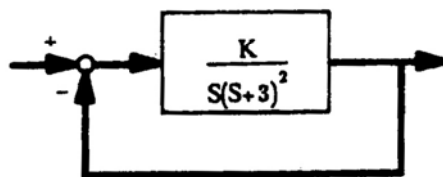


شکل (م-۷-۱۴)

(۱۵-۷) - در سیستم مدار بسته شکل (م-۷-۱۵):

الف) - به ازاء حد فاز برابر با 30 درجه ضریب K را بدست آورید.

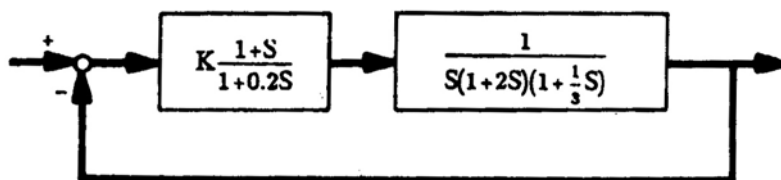
ب) - به ازاء حد بزرگنمایی (بهره) برابر با 8db مقدار K را تعیین نمایید.



شکل (م-۷-۱۵)

(۱۶-۷) - مقدار ضریب کنترل K را برای سیستم شکل (م-۷-۱۶) چنان بیابید که به ازاء آن

حد بزرگنمایی برابر 8db باشد.



شکل (م-۷-۱۶)

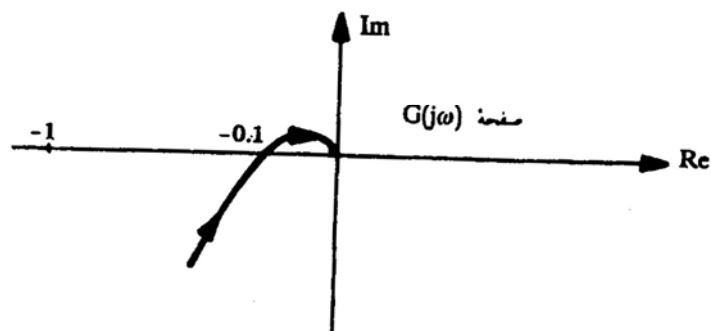
(۱۷-۷) - قسمتی از دیساگرام نایکویست تابع تبدیل مدار باز $G(S)$ سیستمی در

شکل (م-۷-۱۷-الف)، (ناحیه اطراف زاویه 180-درجه) رسم شده است. همانطور که در

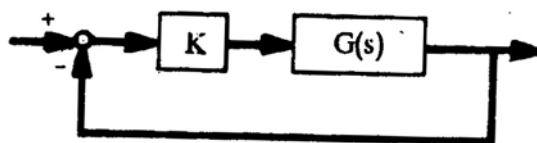
شکل مذکور دیده می‌شود، $\phi(\omega_p) = -180$ و $M(\omega_p) = 0.1 \text{ db}$ می‌باشد. با قراردادن این

سیستم در مدار بسته شکل (م-۷-۱۷-ب)، مقدار K را چنان تعیین کنید که به ازاء آن حد

بزرگنمایی (بهره) برابر با 8 db شود.



شکل (م-۷-۱۷-الف)



شکل (م-۷-۱۷-ب)

(۱۸-۷) - برای یک سیستم با تابع تبدیل :

$$G(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

الف) - دیاگرام «بود» را رسم کنید.

ب) - به ازاء حد بزرگنمایی برابر با 6 db مقدار K را با استفاده از روش تحلیلی بدست آورده و پاسخ را بر اساس ترسیمه‌های «بود» تحلیل نمایید.

ج) - حدفاز را در این حالت تعیین کنید.

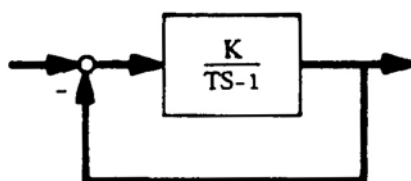
د) - ضریب K_c را در مرز پایداری مشخص نمایید.

ه) - دیاگرام نایکویست تابع تبدیل $G(s)$ را رسم کنید.

(۱۹-۷) - تابع تبدیل مدار باز یک سیستم بصورت $G(s) = \frac{K}{Ts-1}$ ارائه شده است:

الف) - دیاگرام نایکویست را به ازاء $K=1$ رسم نمایید.

ب) - با استفاده از قضیه پایداری نایکویست، محدوده مجاز K را چنان تعیین کنید که به ازاء آن، سیستم مدار بسته شکل (م-۷-۱۹) پایدار باشد.



شکل (م-۷-۱۹)

۴۴۴