

Fachhochschule Regensburg
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Fahrzeugdynamik



©2002, Prof. Dr.-Ing. G.Rill

download unter <http://homepages.fh-regensburg.de/~rig39165/>

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	I
1. Einleitung	1
1.1. Systemgrenzen	1
1.1.1. Fahrdynamik	1
1.1.2. Fahrer	2
1.1.3. Fahrzeug	2
1.1.4. Beladung	3
1.1.5. Umwelt	3
1.2. Literatur (Auswahl)	4
2. Definitionen	5
2.1. Koordinatensysteme	5
2.1.1. Kräfte und Momente im Latsch	5
2.1.2. Kontaktgeometrie	6
2.1.2.1. Kontaktpunkt	6
2.1.2.2. Lokale Fahrbahnebene	8
2.1.2.3. Dynamischer Rollradius	9
2.1.2.4. Kontaktpunktsgeschwindigkeiten	10
2.2. Vorspur- und Sturzwinkel	11
2.2.1. Definition nach DIN 70 000	11
2.2.2. Berechnung	12
2.3. Lenkgeometrie	12
2.3.1. Spreizachse	12
2.3.2. Nachlauf- und Spreizwinkel	14
2.3.3. Nachlauf und Lenkrollradius	14

3. Reifenkräfte und -momente	16
3.1. Radlast	16
3.2. Umfangskraft und Längsschlupf	16
3.3. Querschlupf, Seitenkraft und Reifenrückstellmoment	20
3.4. Bohrmoment	21
3.5. Kippmoment	24
3.6. Rollwiderstand	25
3.7. Radeigendrehung	26
3.8. Verallgemeinertes Reifenkennfeld	27
3.8.1. Summenschlupf	27
3.8.2. Summenkraft	28
3.8.3. Parameter	29
3.9. Modellerweiterungen	30
3.9.1. Veränderter Kraftschluß	30
4. Längsdynamik	33
4.1. Antreiben und Bremsen	33
4.1.1. Einfaches Längsdynamikmodell	33
4.1.2. Maximale Beschleunigung	34
4.1.3. Antrieb über eine Achse	35
4.1.4. Bremsen an einer Achse	35
4.1.5. Zahlenbeispiel	36
4.1.6. Optimale Antriebs- und Bremskraftverteilung	36
4.1.7. Verschiedene Bremskraftverteilungen	38
4.1.8. Anti-Blockier-Systeme	39
4.2. Anfahr- und Bremsnicken	40
4.2.1. Ebenes Fahrzeugmodell	40
4.2.2. Lagebeschreibung	41
4.2.3. Geschwindigkeitszustand bei kleinen Auslenkungen	42
4.2.4. Richtungsvektoren und Bewegungsgleichung	43
4.2.5. Statisches Gleichgewicht	44
4.2.6. Anfahren und Bremsen	45
4.2.7. Brems-Nickpol bei realen Achsaufhängungen	46

5. Querdynamik	47
5.1. Stationäre Kurvenfahrt	47
5.1.1. Kippgrenze	47
5.1.2. Wankabstützung und Sturzkompensation	50
5.1.3. Wankpol und Rollachse	51
5.1.4. Wankwinkel und Radlasten	51
5.2. Kinematische Betrachtung	54
5.2.1. Kinematisches Reifenmodell	54
5.2.2. Ackermanngeometrie	54
5.2.3. Kinematisches Einspurmodell mit Anhänger	55
5.2.3.1. Lagebeschreibung	55
5.2.3.2. Fahrzeugbewegungen	57
5.2.3.3. Einfahrt in eine Kurve	58
5.2.3.4. Anhängerbewegungen	59
5.2.3.5. Kursberechnungen	60
5.3. Lineares Einspurmodell	61
5.3.1. Kräfte	61
5.3.2. Kinematik	61
5.3.3. Querschlüpfе	62
5.3.4. Bewegungsgleichungen	63
5.3.5. Stabilitätsverhalten	65
5.3.5.1. Eigenwerte	65
5.3.5.2. Langsam fahrende Fahrzeuge	65
5.3.5.3. Schnell fahrende Fahrzeuge	65
5.3.6. Stationäre Lösung	66
5.3.6.1. Schwimmwinkel und Giergeschwindigkeit	66
5.3.6.2. Steuertendenz	68
5.3.6.3. Schräglaufwinkelbedarf	69
5.3.7. Radlasteinfluss auf Schräglaufsteifigkeiten	70
5.3.7.1. Linearer Radlasteinfluss	70
5.3.7.2. Degressiver Radlasteinfluss	70
5.3.7.3. Querbeschleunigungsabhängige Steuertendenz	71

6. Vertikaldynamik	72
6.1. Ziele	72
6.2. Grundabstimmung mit einfachen Modellen	72
6.2.1. Bewegungsgleichungen	72
6.2.2. Fahrbahn	73
6.2.2.1. Beschreibung im Orts- und Zeitbereich	73
6.2.2.2. Waschbrettprobe	74
6.2.3. Statische Belastung	74
6.2.4. Eigenschwingungen	74
6.2.4.1. Eigenwerte	74
6.2.4.2. Ausschlagverhalten	76
6.2.5. Periodische Erregung	78
6.2.5.1. Aufbaubewegungen	78
6.2.5.2. Radbewegungen	80
6.2.6. Zusammenfassung	81
6.3. Nichtlineare Kraftelemente	82
6.3.1. Viertelfahrzeugmodell	82
6.3.2. Regellose Unebenheiten	83
6.3.3. Fahrzeugdaten	84
6.3.4. Gütekriterien	84
6.3.5. Optimale Parameter	85
6.4. Dynamische Kraftelemente	88
6.4.1. Systemantwort im Frequenzbereich	88
6.4.1.1. Grundharmonische Anteile	88
6.4.1.2. Erregung durch Gleitsinus	89
6.4.2. Elastische Dämpferlager	91
6.4.3. Modell eines Hydrolagers	92
6.5. Gesamtfahrzeug	94
6.5.1. Modell	94
6.5.2. Simulationsergebnisse	96
6.5.3. Verschiedene Einflüsse auf Komfort und Sicherheit	96

7. Ein virtuelles Fahrzeug	98
7.1. Grundmodell	98
7.2. Lenkgestänge	100
7.2.1. Überblick	100
7.2.2. Zahnstangenlenkung	100
7.2.3. Drehhebellenkung	101
7.2.4. Lenkviereck	102
7.3. Achskinematik	103
7.3.1. Überblick	103
7.3.2. Allgemeine Angaben	104
7.3.3. Schräglenkerachse	105
7.3.4. Doppeldreieckslenkerachse	106
7.3.5. Feder-/Dämpferbeinachse	107
7.3.6. Lenkergeführte Starrachse	108
7.4. Reifen	110
7.4.1. Parameter	110
7.4.2. Dynamik 1. Ordnung	111
7.5. Fahrbahn	113
7.6. Steuereingriffe	114
8. Fahrverhalten von Solofahrzeugen	116
8.1. Klassische Fahrmanöver	116
8.1.1. Stationäre Kreisfahrt	116
8.1.2. Lenkwinkelsprung	117
8.1.3. Geradeausfahrt	118
8.1.3.1. Regellose Fahrbahnunebenheiten	118
8.1.3.2. Lenkaktivität	120
8.2. Reisebus mit unterschiedlicher Beladung	121
8.2.1. Systemparameter	121
8.2.2. Eigenlenkverhalten	121
8.2.3. Stationäre Kreisfahrt	122
8.2.4. Lenkwinkelsprung	123
8.3. Verschiedene Hinterachskonzepte für einen Pkw	123

A. Arbeitsblätter	125
A.1. Grundlagen	125
A.2. Reifen	126
A.3. Längsdynamik 1	127
A.4. Längsdynamik 2	128
A.5. Querdynamik 1	129
A.6. Querdynamik 2	130
A.7. Vertikaldynamik	131

1. Einleitung

1.1. Systemgrenzen

1.1.1. Fahrdynamik

Der Begriff "Fahrzeugdynamik" umfaßt das Zusammenspiel zwischen

- Fahrer,
- Fahrzeug,
- Ladung und
- Umwelt.

Die Fahrzeugdynamik beschäftigt sich hauptsächlich mit

- der Verbesserung der aktiven Sicherheit und des Fahrkomforts sowie
- der Verringerung der Straßenzerstörung.

In der Fahrzeugdynamik werden

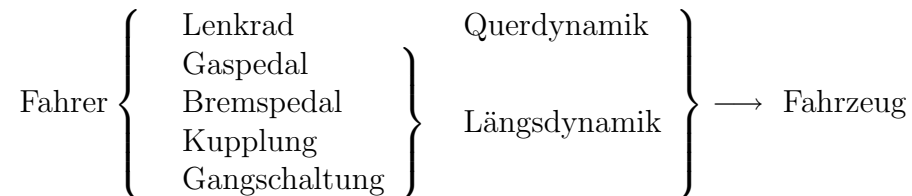
- Computerberechnungen,
- Prüfstandsmessungen und
- Fahrversuche

durchgeführt.

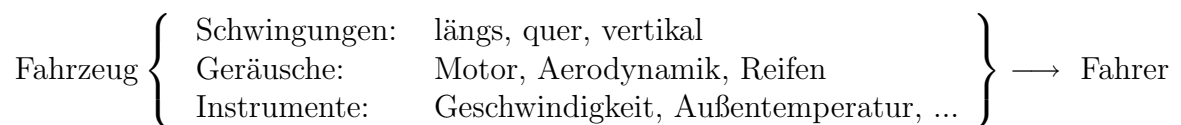
Die Wechselwirkungen zwischen den einzelnen Systemen und die Probleme bei der Durchführung von Berechnungen und/oder Messungen sollen im folgenden kurz diskutiert werden.

1.1.2. Fahrer

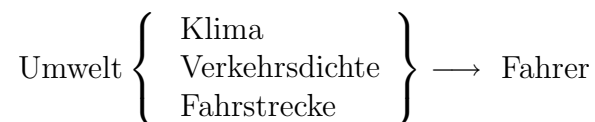
Durch verschiedene Eingriffsmöglichkeiten kann der Fahrer in das Fahrverhalten eingreifen:



Das Fahrzeug stellt dem Fahrer einige Informationen zur Verfügung:



Auch die Umwelt beeinflusst den Fahrer:



Die Reaktionen eines Fahrers sind sehr komplex. Um objektive Ergebnisse zu erhalten, verwendet man bei Computerberechnungen einen "idealen" Fahrer und im Fahrversuch wird ein automatischer Fahrer (z.B.: Lenkmaschine) eingesetzt.

Führt man Fahrversuche mit Test-Fahrern durch, dann sind die Ergebnisse oft nur schwer auf den Normal-Fahrer zu übertragen. Fahrversuche mit normalen Fahrern müssen statistisch ausgewertet werden. Bei allen Fahrversuchen muß die Sicherheit des Fahrers absolute Priorität haben!

Fahr simulatoren bieten eine perfekte Möglichkeit, das Verhalten von Fahrern auch im Grenzbereich gefahrlos zu untersuchen.

Seit einigen Jahren versucht man, mit komplexen Fahrermodellen das Zusammenspiel zwischen Fahrer und Fahrzeug näher zu ergründen.

1.1.3. Fahrzeug

In der ISO 3833 Richtlinie sind folgende Fahrzeuge aufgeführt:

- Motorräder,
- Pkw,
- Busse,
- Lkw,

- landwirtschaftliche Traktoren,
- Pkw mit Anhänger,
- Lkw mit Anhänger / Sattelzüge,
- road trains.

Für Computerberechnungen müssen diese Fahrzeuge in mathematisch beschreibbare Ersatzsysteme abgebildet werden. Die Erstellung der Bewegungsgleichungen und die numerische Lösung sowie die Datenbeschaffung sind mit großem Aufwand verbunden.

Im Zeitalter von PCs und Workstations fallen Rechenkosten kaum mehr ins Gewicht.

Im frühen Entwicklungsstadium stehen oft nur Prototypen zur Durchführung von Fahr- und/oder Prüfstandsversuchen zur Verfügung.

Sicherheitsvorkehrungen, z.B.: Stützräder bei Lkw's, können die Ergebnisse verfälschen.

1.1.4. Beladung

Lkw's werden zur Aufnahme von Ladung konzipiert. Dadurch ändert sich auch das Fahrverhalten.

$$\text{Ladung} \left\{ \begin{array}{l} \text{Masse, Trägheit, Schwerpunktslage} \\ \text{dynamisches Verhalten (flüssige Ladung)} \end{array} \right\} \longrightarrow \text{Fahrzeug}$$

Bei Computerberechnungen bereitet die Bestimmung der Trägheitsmomente sowie die Modellierung flüssiger Ladung Probleme.

Allein das Be- und Entladen von Versuchsfahrzeugen ist mit Aufwand verbunden. Bei Fahrversuchen mit Tankfahrzeugen müssen brennbare Flüssigkeiten durch Wasser ersetzt werden. Die dadurch gewonnenen Ergebnisse können dann nicht ohne weiteres auf reale Beladungen übertragen werden.

1.1.5. Umwelt

Die Umwelt wirkt in erster Linie auf das Fahrzeug:

$$\text{Umwelt} \left\{ \begin{array}{ll} \text{Fahrbahn:} & \text{Unebenheiten, Reibwert} \\ \text{Luft:} & \text{Widerstand, Seitenwind} \end{array} \right\} \longrightarrow \text{Fahrzeug}$$

beeinflusst aber auch den Fahrer

$$\text{Umwelt} \left\{ \begin{array}{l} \text{Klima} \\ \text{Sichtbarkeit} \end{array} \right\} \longrightarrow \text{Fahrer}$$

Durch die Wechselwirkung zwischen Fahrzeug und Fahrbahn kann es zu einer raschen Zerstörung von Fahrbahnen kommen.

Die mangelnde Reproduzierbarkeit von Umwelteinflüssen stellt im Fahr- und Prüfstandsversuch das größte Problem dar. Mit Hilfe von HIL-Simulatoren (hardware-in-the-loop) werden deshalb heute komplizierte Steuergeräte in einer Simulationsumgebung getestet.

Die Beschreibung von regellosen Fahrbahnunebenheiten und die Interaktion zwischen Reifen und Fahrbahn sowie die Berechnung aerodynamischer Kräfte und Momente bilden die Hauptprobleme in der Computer-Simulation.

1.2. Literatur (Auswahl)

- **ATZ:** Automobiltechnische Zeitschrift
- **Fachbuchgruppe Fahrwerktechnik:**
Jörnsen Reimpell, Hrsg. Vogel Buchverlag Würzburg
 - Grundlagen
 - Lenkung
 - Radaufhängungen
 - Fahrzeugmechanik
 - Reifen und Räder
 - Stoß- und Schwingungsdämpfer
 - Antriebsarten
 - Fahrverhalten
- **Dynamik der Kraftfahrzeuge:** M. Mitschke, Bde. A,B,C; Springer-Verlag
- **Simulation von Kraftfahrzeugen:** G. Rill, Vieweg-Verlag
- **ISO-Standards:** (International Organisation for Standardization)
z.B.: ISO 4138 Steady State Circular Test Procedure
- **Kraftfahrtechnisches Handbuch:** Robert Bosch GmbH (Hrsg.), 23. Aufl., Vieweg-Verlag
- **Tagungsbände:**
 - VDI-Tagungen: z.B.: Berechnung im Automobilbau
 - SAE-Congress (Society of Automotive Engineers)
 - FISITA (Féd. Internat. des Sociétés d'Ingénieurs de Techniques de l'Automobile)
 - IAVSD (International Assosiation for Vehicle System Dynamics)

2. Definitionen

2.1. Koordinatensysteme

In der Fahrzeugdynamik werden mehrere Koordinatensysteme verwendet, Abb 2.1.

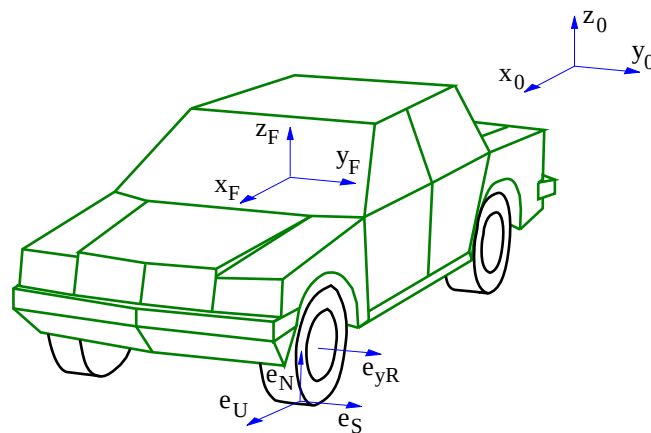


Abbildung 2.1.: Koordinatensysteme

Das Inertialsystem mit den Achsen x_0 , y_0 , z_0 ist fahrbahnfest. Beim fahrzeugfesten System zeigt die x_F -Achse nach vorne, die y_F -Achse nach links und die z_F -Achse nach oben. Die Stellung des Rades wird durch den Einheitsvektor e_{yR} in Richtung der Raddrehachse angegeben. Die Einheitsvektoren in Richtung der Umfangs- und Seitenkraft e_U und e_S sowie die Fahrbahnnormale e_N folgen aus der Kontaktgeometrie.

2.1.1. Kräfte und Momente im Latsch

In jedem Punkt, wo der Reifen Kontakt zur Fahrbahn hat, werden Normal- und Reibungskräfte übertragen. Die Kontaktfläche zwischen Reifen und Fahrbahn wird als Latsch bezeichnet. Entsprechend der Profilgestaltung des Reifens, bildet der Latsch nicht unbedingt eine zusammenhängende Fläche. Die Wirkung der Kontaktkräfte kann durch einen Kraft- und Momentenvektor bezüglich eines Punktes im Latsch, dem "Kontaktpunkt", vollständig beschrieben werden. Die Vektoren werden zunächst in einem fahrbahnfesten Koordinatensystem

dargestellt. Die z -Achse ist dabei normal zur Fahrbahn, die x -Achse ist senkrecht zur z -Achse und senkrecht zur Raddrehachse. Die Forderung nach einem rechtshändigen System legt dann auch die y -Achse fest.

F_x	Längskraft oder Umfangskraft (U)
F_y	Seitenkraft (S)
F_z	Vertikalkraft, Radlast oder Radaufstandskraft (P)
M_x	Kippmoment
M_y	Rollwiderstandsmoment
M_z	Rückstell- und Bohrmoment

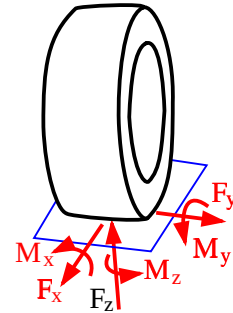


Abbildung 2.2.: Kontaktkräfte und -momente

Die Komponenten der Kontaktkraft werden entsprechend den Achsrichtungen bezeichnet, Abb. 2.2.

Unsymmetrische Druckverteilungen im Latsch erzeugen Momente um die x - und y -Achse. Das Kippmoment M_x tritt bei Schrägstellung (Sturz) des Reifens auf. In M_y ist der Rollwiderstand des Reifens enthalten. Das Moment um die z -Achse ist besonders für die Fahrdynamik von Bedeutung. Es setzt sich aus zwei Anteilen zusammen,

$$M_z = M_B + M_S . \quad (2.1)$$

Drehbewegungen des Reifens um die z -Achse erzeugen das Bohrmoment M_B . Das Reifenrückstellmoment M_S berücksichtigt die Tatsache, daß bei der Querbewegung eines rotierenden Reifens die Wirkungslinie der resultierenden Seitenkraft im allgemeinen nicht durch den Kontaktpunkt läuft.

2.1.2. Kontaktgeometrie

2.1.2.1. Kontaktpunkt

Die aktuelle Position eines Rades gegenüber dem festen x_0 -, y_0 - z_0 -System ist festgelegt durch die Radmitte M und den Einheitsvektor e_{yR} in Richtung der Raddrehachse. Die Unebenheiten der Fahrbahn werden durch eine beliebige Funktion

$$z = z(x, y) \quad (2.2)$$

beschrieben.

Bei unebener Fahrbahn kann der Kontaktpunkt P nicht direkt angegeben werden. Einen Schätzwert erhält man zunächst mit dem Vektor

$$r_{MP^*} = -r_0 e_{zB} , \quad (2.3)$$

wobei r_0 der unverformte Reifenradius und e_{zB} der Einheitsvektor in z -Richtung des aufbau-festen Bezugssystems ist.

Die Lage von P^* gegenüber dem festen System x_0, y_0, z_0 ist durch

$$r_{0P^*} = r_{0M} + r_{MP^*} \quad (2.4)$$

bestimmt, wobei der Vektor r_{0M} die Lage des Felgenmittelpunktes M angibt. Im allgemeinen liegt der Punkt P^* nicht auf der Fahrbahn. Der zugehörige Fahrbahnpunkt P_0 folgt aus

$$r_{0P_0,0} = \begin{bmatrix} r_{0P^*,0}(1) \\ r_{0P^*,0}(2) \\ z(r_{0P^*,0}(1), r_{0P^*,0}(2)) \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

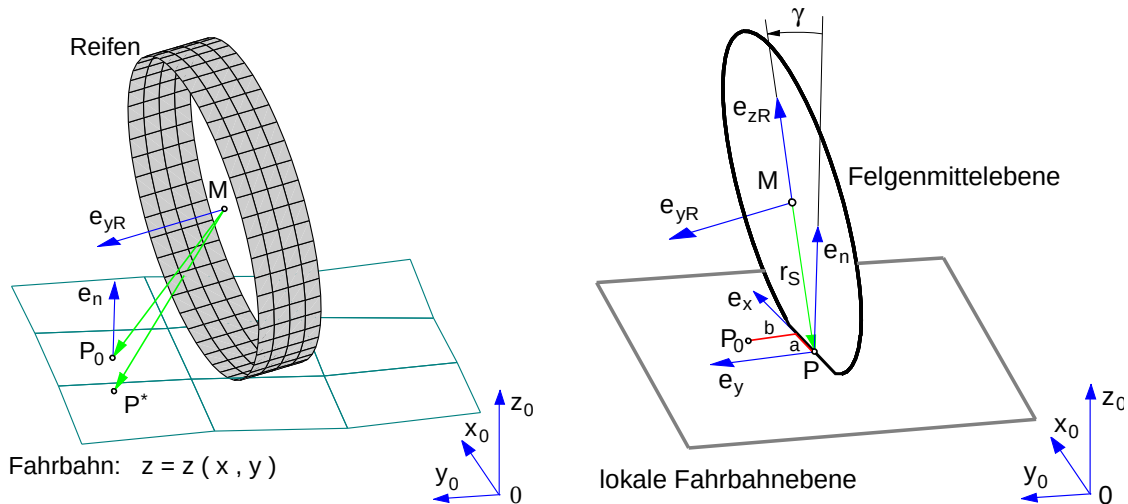


Abbildung 2.3.: Kontaktgeometrie

Im Punkt P_0 wird nun die Fahrbahnnormale e_n errichtet. Dann können die Einheitsvektoren in Umfangsrichtung und in Reifenquerrichtung berechnet werden

$$e_x = \frac{e_{yR} \times e_n}{|e_{yR} \times e_n|}, \quad \text{und} \quad e_y = e_n \times e_x. \quad (2.6)$$

Bei der Berechnung von e_x ist eine Normierung erforderlich, da der Einheitsvektor in Richtung der Raddrehachse e_{yR} nicht immer senkrecht zur Fahrbahn steht. Der Reifensturzwinkel

$$\gamma = \arcsin(e_{yR}^T e_n) \quad (2.7)$$

beschreibt die Neigung der Raddrehachse gegenüber der Fahrbahnnormalen.

Der Vektor von der Felgenmitte M zum Fahrbahnpunkt P_0 wird nun in drei Anteile aufgespalten

$$r_{MP_0} = -r_S e_{zR} + a e_x + b e_y, \quad (2.8)$$

wobei r_S den statischen Reifenradius bezeichnet und a , b Verschiebungen in Umfangs- und Querrichtung angeben. Der Einheitsvektor

$$e_{zR} = \frac{e_x \times e_{yR}}{|e_x \times e_{yR}|} . \quad (2.9)$$

steht senkrecht auf e_x und e_{yR} .

Da die Einheitsvektoren e_x und e_y senkrecht zu e_n sind, liefert die skalare Multiplikation von (2.8) mit e_n

$$e_n^T r_{MP_0} = -r_S e_n^T e_{zR} \quad \text{oder} \quad r_S = -\frac{e_n^T r_{MP_0}}{e_n^T e_{zR}} . \quad (2.10)$$

Nun kann auch die Reifeneinfederung angegeben werden

$$\Delta r = r_0 - r_S , \quad (2.11)$$

wobei r_0 den unverformten Reifenradius bezeichnet.

Der durch den Vektor

$$r_{MP} = -r_S e_{zR} \quad (2.12)$$

festgelegte Punkt P liegt in der Felgenmittelebene. Der Übergang von P^0 nach P erfolgt gemäß (2.8) durch Anteile $a e_x$ und $b e_y$, die senkrecht zur Fahrbahnnormalen stehen. Die Fahrbahnnormale e_n wurde aber im Punkt P^0 errichtet. Deshalb liegt P bei unebener Fahrbahn nicht mehr auf der Fahrbahn.

Mit $P^* = P$ als neuem Schätzwert können nun die Gleichungen (2.5) bis (2.12) solange durchlaufen werden, bis die Abweichung von P zu P_0 genügend klein geworden ist.

Reifenmodelle, die mit vertretbarer Rechenzeit simuliert werden können, setzen voraus, daß der Latsch in sich eben ist. Bei einem Pkw-Reifen hat der Latsch bei normaler Belastung in etwa eine Größe von ca. $15 \times 20 \text{ cm}$. Es macht also wenig Sinn, einen fiktiven Kontaktpunkt auf Bruchteile von Millimetern genau zu berechnen, wenn anschließend die reale Fahrbahn im Bereich von Zentimetern durch eine Ebene approximiert wird.

Ersetzt man die Fahrbahn im Bereich des Latsches durch eine Ebene, dann ist bei dem hier verwendeten Startwert keine iterative Verbesserung mehr erforderlich.

2.1.2.2. Lokale Fahrbahnebene

Eine Ebene ist durch drei Punkte festgelegt. Mit der Reifenbreite b , dem unverformten Reifenradius r_0 und der Latschlänge L_N bei Nennlast können analog zu (2.4) Schätzwerte für drei Fahrbahnpunkte angegeben werden

$$\begin{aligned} r_{ML^*} &= \frac{b}{2} e_{yR} - r_0 e_{zB} , \\ r_{MR^*} &= -\frac{b}{2} e_{yR} - r_0 e_{zB} , \\ r_{MV^*} &= \frac{L_N}{2} e_{xB} - r_0 e_{zB} , \end{aligned} \quad (2.13)$$

die links, bzw. rechts und vor einem Punkt unterhalb der Felgenmitte M liegen. Die Einheitsvektoren e_{xB} und e_{zB} zeigen in Fahrzeug-Längs- und -Vertikalrichtung. Die Raddrehachse ist durch e_{yR} gegeben. Entsprechend (2.5) können dann die auf der Fahrbahn liegenden Punkte L , R und V bestimmt werden.

Die Vektoren

$$r_{RV} = r_{0V} - r_{0R} \quad \text{und} \quad r_{RL} = r_{0L} - r_{0R} \quad (2.14)$$

liegen in der Fahrbahnebene. Der gemäß

$$e_n = \frac{r_{RV} \times r_{RL}}{|r_{RV} \times r_{RL}|} \quad (2.15)$$

berechnete Einheitsvektor steht senkrecht auf die durch die Punkte L , R und V definierte Ebene und gibt eine über den Latschbereich gemittelte Fahrbahnnormale an.

Sprünge oder Knicke in der Fahrbahn, die bei stufen- und rampenförmigen Hindernissen auftreten, werden dadurch geglättet.

Natürlich wäre es naheliegend, in (2.13) L_N durch die tatsächliche Latschlänge L und e_{zB} durch den Einheitsvektor e_{zR} in Richtung der Radmittelebene zu ersetzen. Die Größen können jedoch erst aus der aktuellen Fahrbahnnormalen berechnet werden. Auch hier wäre eine iterative Lösung möglich. Trotz erhöhtem Rechenaufwand kann dadurch die Modellgüte nicht verbessert werden, da Näherungen bei der Kontaktrechnung und im Reifenmodell der Abbildungsgenauigkeit Grenzen setzen.

2.1.2.3. Dynamischer Rollradius

Nimmt man an, daß die Profiltelchen im Latsch auf der Fahrbahn haften, dann bewegt sich der eingefederte Reifen bei einer Winkeldrehung $\Delta\varphi$ um die Strecke x weiter, Abb. 2.4.

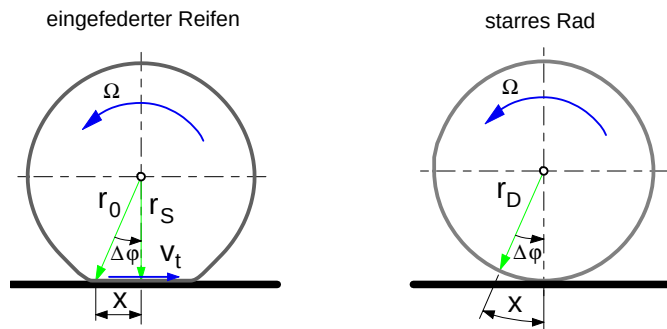


Abbildung 2.4.: Dynamischer Rollradius

Mit r_0 als unverformtem und $r_S = r_0 - \Delta r$ als statischem Reifenradius gilt

$$r_0 \sin \Delta\varphi = x \quad (2.16)$$

und

$$r_0 \cos \Delta\varphi = r_S. \quad (2.17)$$

Vergleicht man die Fortbewegung des Reifens mit dem Abrollen eines starren Rades, dann muß dessen Radius r_D so gewählt werden, daß bei der Winkeldrehung $\Delta\varphi$ wieder die Strecke x zurückgelegt wird,

$$x = r_D \Delta\varphi . \quad (2.18)$$

Aus (2.16) und (2.18) erhält man

$$r_D = \frac{r_0 \sin \Delta\varphi}{\Delta\varphi} , \quad (2.19)$$

woraus bei $\Delta\varphi \rightarrow 0$ die triviale Lösung $r_D = r_0$ folgt.

Bei kleinen, aber endlichen Winkeldrehungen kann die Sinus-Funktion in eine Reihe entwickelt werden. Aus (2.19) wird dann

$$r_D = r_0 \frac{\Delta\varphi - \frac{1}{6}\Delta\varphi^3}{\Delta\varphi} = r_0 \left(1 - \frac{1}{6}\Delta\varphi^2 \right) . \quad (2.20)$$

Mit der entsprechenden Näherung für die Kosinus-Funktion folgt aus (2.17)

$$\frac{r_S}{r_0} = \cos \Delta\varphi = 1 - \frac{1}{2}\Delta\varphi^2 \quad \text{oder} \quad \Delta\varphi^2 = 2 \left(1 - \frac{r_S}{r_0} \right) . \quad (2.21)$$

Eingesetzt in (2.20) bleibt

$$r_D = r_0 \left(1 - \frac{1}{3} \left(1 - \frac{r_S}{r_0} \right) \right) = \frac{2}{3} r_0 + \frac{1}{3} r_S . \quad (2.22)$$

Der Radius r_D hängt wegen $r_S = r_S(F_z)$ von der Radlast F_z ab und wird deshalb als dynamischer Reifenradius bezeichnet. In 1. Näherung kann er gemäß (2.22) aus dem unverformten Radius r_0 und dem statischen Radius r_S berechnet werden.

Rotiert der Reifen mit der Winkelgeschwindigkeit Ω , dann werden die Profiltelchen mit der mittleren Geschwindigkeit

$$v_t = r_D \Omega \quad (2.23)$$

durch den Latsch transportiert.

2.1.2.4. Kontaktpunktgeschwindigkeiten

Die Absolutgeschwindigkeit des Kontaktpunktes erhält man aus der Ableitung des Lagevektors

$$v_{0P,0} = \dot{r}_{0P,0} = \dot{r}_{0M,0} + \dot{r}_{MP,0} . \quad (2.24)$$

Dabei ist $\dot{r}_{0M,0} = v_{0M,0}$ die Absolutgeschwindigkeit der Radmitte und $r_{MP,0}$ der Vektor von der Radmitte M zum Kontaktpunkt P , dargestellt im Inertialsystem 0. Mit (2.12) erhält man

$$\dot{r}_{MP,0} = \frac{d}{dt} (-r_S e_{zR,0}) = -\dot{r}_S e_{zR,0} - r_S \dot{e}_{zR,0} . \quad (2.25)$$

Aus (2.11) folgt mit $r_0 = \text{const.}$

$$-\dot{r}_S = \Delta\dot{r} \quad (2.26)$$

Der Einheitsvektor e_{zR} ist radkörperfest. Seine Änderung gegenüber dem Inertialsystem 0 ist damit durch

$$\dot{e}_{zR,0} = \omega_{0RK,0} \times e_{zR,0} \quad (2.27)$$

gegeben, wobei ω_{0RK} die Winkelgeschwindigkeit des Radkörpers RK gegenüber dem Inertialsystem 0 ist. Mit $r_{MP,0} = -r_S e_{zR,0}$ und den Beziehungen (2.26) und (2.27) lautet (2.25)

$$\dot{r}_{MP,0} = \Delta\dot{r} e_{zR,0} + \omega_{0RK,0} \times r_{MP,0} . \quad (2.28)$$

Die Geschwindigkeit des Kontaktpunktes ist dann durch

$$v_{0P,0} = v_{0M,0} + \Delta\dot{r} e_{zR,0} + \omega_{0RK,0} \times r_{MP,0} \quad (2.29)$$

gegeben, wobei die Geschwindigkeitskomponenten aus der Radeigendrehung hier noch nicht berücksichtigt wurden.

Da der Punkt P auf der Fahrbahn liegt, dürfen in (2.29) keine Anteile normal zur Fahrbahn enthalten sein

$$e_n^T v_{0P} = 0 . \quad (2.30)$$

Durch diese Forderung ist die Reifendeformationsgeschwindigkeit bestimmt

$$\Delta\dot{r} = \frac{-e_n^T (v_{0M} + \omega_{0RK} \times r_{MP})}{e_n^T e_{zR}} . \quad (2.31)$$

Für die Geschwindigkeitsanteile in Längs- und Querrichtung erhält man dann

$$v_x = e_x^T v_{0P} = e_x^T (v_{0M} + \omega_{0RK} \times r_{MP}) \quad (2.32)$$

und

$$v_y = e_y^T v_{0P} = e_y^T (v_{0M} + \Delta\dot{r} e_{zR} + \omega_{0RK} \times r_{MP}) , \quad (2.33)$$

wobei der durch die Orthogonalitätsbeziehung $e_{zR} \perp e_x$ entfallende Term in v_{0P} wurde in (2.32) bereits weggelassen wurde.

2.2. Vorspur- und Sturzwinkel

2.2.1. Definition nach DIN 70 000

Der Winkel zwischen der Fahrzeugmittelebene in Längsrichtung und der Schnittgeraden der Reifenmittelebene mit der Fahrbahnebene wird als Vorspurwinkel bezeichnet. Er ist positiv, wenn der vordere Teil des Rades der Fahrzeugmittelebene zugekehrt ist.

Der Sturzwinkel ist der Winkel zwischen der Radmittelebene und der Fahrbahnnormalen. Er ist positiv, wenn das Rad oben nach außen geneigt ist.

Weitere Erläuterungen sowie typische Einstellwerte können der Literatur¹ entnommen werden.

¹siehe z.B.: Jörnßen Reimpell: Fahrwerktechnik: Grundlagen. Vogel Buchverlag Würzburg, 1988

2.2.2. Berechnung

Die Berechnung kann über den Einheitsvektor e_{yR} in Richtung der Raddrehachse erfolgen.

Zur Berechnung des Vorspurwinkels wird der Einheitsvektor e_{yR} im fahrzeugfesten Koordinatensystem F dargestellt, Abb. 2.5

$$e_{yR,F} = \begin{bmatrix} e_{yR,F}^{(1)} & e_{yR,F}^{(2)} & e_{yR,F}^{(3)} \end{bmatrix}^T, \quad (2.34)$$

wobei die Achsen x_F und z_F die Fahrzeugmittelebene aufspannen. Die x_F -Achse zeigt nach vorne und die z_F -Achse nach oben.

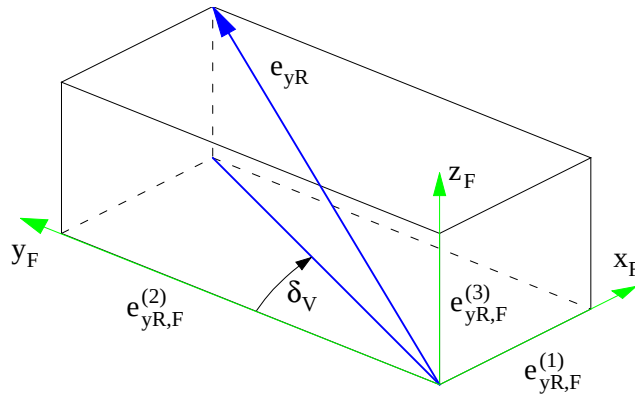


Abbildung 2.5.: Vorspurwinkel

Der Vorspurwinkel δ_V kann dann aus

$$\tan \delta_V = \frac{e_{yR,F}^{(1)}}{e_{yR,F}^{(2)}} \quad (2.35)$$

berechnet werden.

Der Sturzwinkel folgt aus dem Skalarprodukt zwischen den Einheitsvektoren in Richtung der Raddrehachse und in Richtung der Fahrbahnnormalen

$$\sin \gamma = e_{yR}^T e_n. \quad (2.36)$$

Bei Achskinematik-Untersuchungen wird häufig die Fahrbahnnormale e_n durch den Einheitsvektor e_{z_F} in Richtung der fahrzeugfesten z_F -Achse ersetzt.

2.3. Lenkgeometrie

2.3.1. Spreizachse

An der gelenkten Vorderachse werden bei PKW häufig die McPherson-Dämpferbeinachse, die Doppelquerlenker-Achse und die Mehrlenker- oder aufgelöste Doppelquerlenker-Achse eingesetzt, Abb. 2.6 und Abb. 2.7.

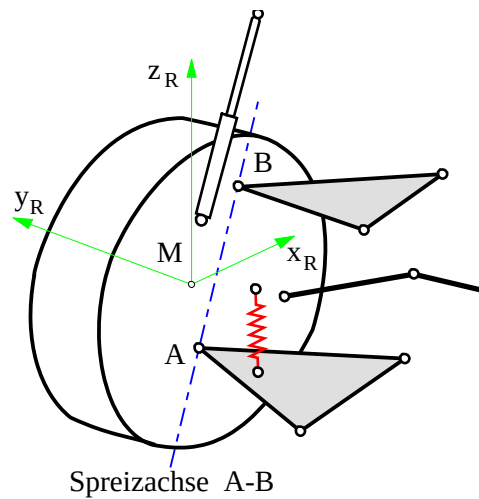


Abbildung 2.6.: Doppelquerlenker Radaufhängung

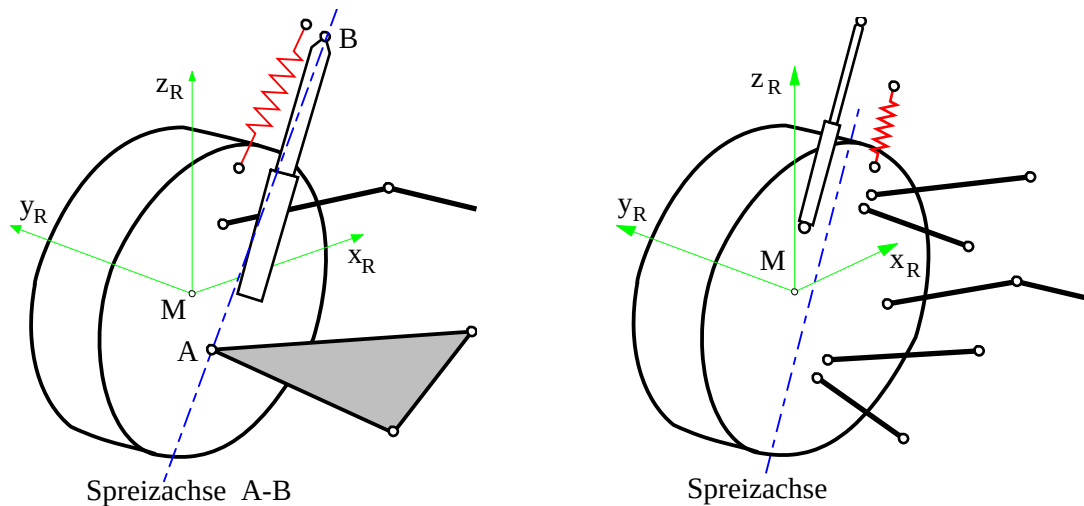


Abbildung 2.7.: McPherson und Mehrlenker Radaufhängungen

Der Radkörper dreht bei Lenkbewegungen um die Spreizachse.

Bei der Doppelquerlenkerachse sind die Gelenkpunkte A und B , die die Spreizachse festlegen, radkörperfest.

Der Gelenkpunkt A ist bei der klassischen McPherson Radaufhängung weiterhin radkörperfest, aber der Punkt B ist aufbaufest.

Bei einer Mehrlenkerachse ist die Spreizachse nicht mehr durch reale Gelenkpunkte definiert. Hier, und auch bei der McPherson Radaufhängung, ändert die Spreizachse bei Federbewegungen ihre Lage gegenüber dem Radkörper.

2.3.2. Nachlauf- und Spreizwinkel

Die momentane Richtung der Spreizachse kann im fahrzeugfesten Koordinatensystem durch zwei Winkel festgelegt werden, Abb. 2.8.

Projiziert man die Spreizachse in die y_F -, z_F -Ebene, dann kann der Spreizwinkel σ als Winkel zwischen der z_F -Achse und der Spreizachsprojektion abgelesen werden.

Die Projektion der Spreizachse in die x_F -, z_F -Ebene liefert mit dem Winkel zwischen der z_F -Achse und der Spreizachsprojektion den Nachlaufwinkel ν .

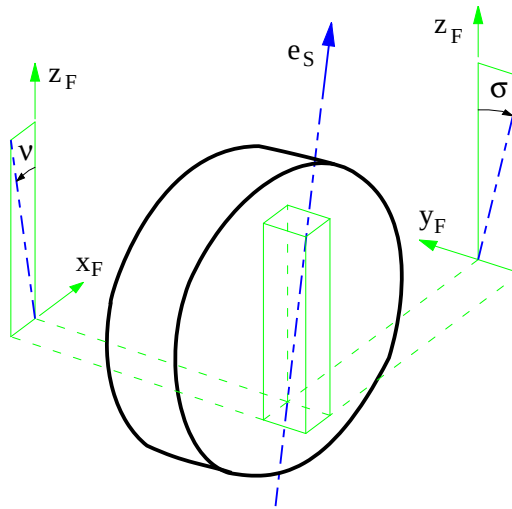


Abbildung 2.8.: Spreiz- und Nachlaufwinkel

Bei vielen Achsen können Spreiz- und Nachlaufwinkel nicht mehr direkt ermittelt werden.

Die momentane Drehachse bei Lenkbewegungen, die aus Kinematikberechnungen entnommen werden kann, liefert hier die Spreizachse. Aus den Komponenten des im fahrzeugfesten System dargestellten Einheitsvektors in Richtung der Spreizachse

$$e_{S,F} = \begin{bmatrix} e_{S,F}^{(1)} & e_{S,F}^{(2)} & e_{S,F}^{(3)} \end{bmatrix}^T \quad (2.37)$$

können dann mit

$$\tan \nu = \frac{-e_{S,F}^{(1)}}{e_{S,F}^{(3)}} \quad \text{und} \quad \tan \sigma = \frac{-e_{S,F}^{(2)}}{e_{S,F}^{(3)}} \quad (2.38)$$

die momentanen Werte für den Nachlauf- ν und Spreizachswinkel σ berechnet werden.

2.3.3. Nachlauf und Lenkrollradius

Im allgemeinen fällt der Durchstoßpunkt S der Spreizachse durch die Fahrbahnebene nicht mit dem Kontaktpunkt P , vgl. Abschnitt 2.1.2.1, zusammen, Abb. 2.9.

Stößt die Spreizachse vor dem Kontaktpunkt durch die Fahrbahnebene, dann ist der kinematische Nachlauf positiv, $n_K > 0$. Der Lenkrollradius ist positiv, $r_S > 0$, wenn der Kontaktpunkt P außerhalb von S liegt.

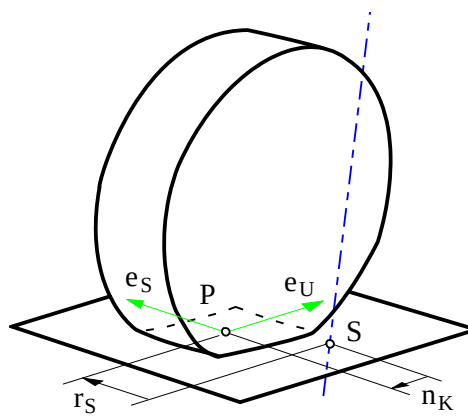


Abbildung 2.9.: Nachlauf und Lenkrollradius

3. Reifenkräfte und -momente

3.1. Radlast

Die Radlast P oder die vertikale Reifenkraft F_z kann als Funktion der Reifeneinfederung Δr und der Einfedergeschwindigkeit $\Delta \dot{r}$ berechnet werden

$$F_z = F_z(\Delta r, \Delta \dot{r}) . \quad (3.1)$$

Mit der radialen Reifensteifigkeit c_R und dem Dämpfungswert d_R erhält man in erster Näherung

$$F_z = c_R \Delta r + d_R \Delta \dot{r} . \quad (3.2)$$

Da der Reifen nur Druckkräfte auf die Fahrbahn übertragen kann, gilt die Einschränkung $F_z \geq 0$.

Versuche zeigen, daß sich die Steifigkeits- und Dämpfungsparameter eines stehenden Reifens von denen eines bewegten Reifens unterscheiden. Beim Vorliegen entsprechender Meßwerte kann dies durch eine Geschwindigkeitsabhängigkeit der Parameter c_R und d_R berücksichtigt werden.

Bei der hier durchgeführten Kontaktrechnung wurde der Latsch als ebene Fläche approximiert. Dadurch kann z.B. das Überfahren einer Stufe, wo sogar Mehrfachkontakte auftreten, nur qualitativ nachgebildet werden.

Mit der Berechnung der Radlast über die Reifeneindrückung am Kontaktpunkt werden Unebenheiten so registriert, als ob ein dünner Stift über die Fahrbahn geführt wird. Um die räumliche Ausdehnung des Reifens zumindest qualitativ zu erfassen, wurde deshalb die Fahrbahn im Bereich des Latsches durch eine Ebene approximiert, die durch drei Fahrbahnpunkte festgelegt ist.

3.2. Umfangskraft und Längsschlupf

Um den Mechanismus bei der Entstehung von Umfangskräften verstehen zu können, wird zunächst nur ein einziges Profiltteilchen betrachtet, Abb. 3.1.

Das Profiltteilchen erreicht zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ die Kontaktzone. Rotiert der Reifen mit der Winkelgeschwindigkeit Ω um die eigene Achse, dann wird das Teilchen beim Abrollen des

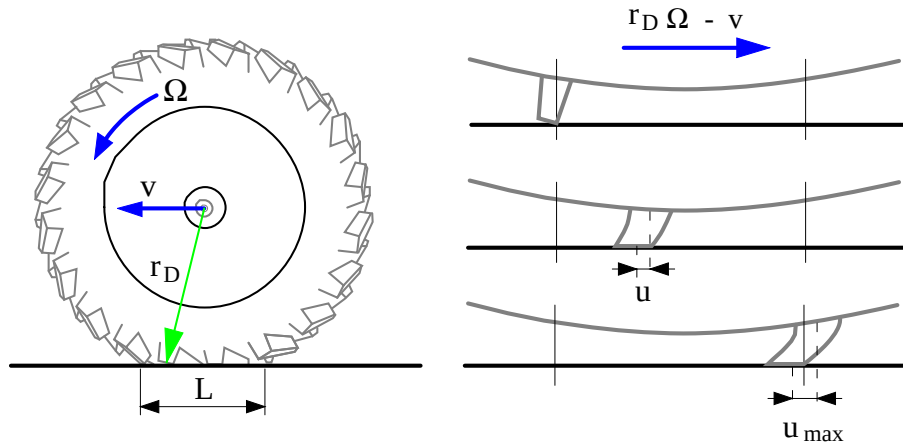


Abbildung 3.1.: Profilverformungen im Latsch

Reifens mit der mittleren Geschwindigkeit $v_t = r_D \Omega$ durch die Kontaktzone (den Latsch) transportiert. Bezeichnet L die Latschlänge, dann ergibt sich für die Verweildauer im Latsch

$$T = \frac{L}{r_D |\Omega|} . \quad (3.3)$$

Die Verweildauer ist unabhängig von der Drehrichtung stets positiv, $T > 0$. Wegen $L > 0$ muß deshalb in (3.3) der Betrag der Winkelgeschwindigkeit Ω eingesetzt werden.

Bewegt sich der Radmittelpunkt mit der Geschwindigkeit v nur in Längsrichtung, dann hat die Geschwindigkeit des Teilchens gegenüber der Fahrbahn hier nur eine Komponente in Umfangsrichtung, $v_x = v$. Setzt man voraus, daß das Teilchen auf der Fahrbahn haftet, dann wird es entsprechend der Verweildauer im Latsch in Längsrichtung verformt

$$u = (r_D \Omega - v_x) t , \quad (3.4)$$

wobei mit $r_D \Omega > v_x$ ein treibendes Rad angenommen wurde.

Mit (3.3) erhält man schließlich die maximale Verformung bei $t = T$

$$u_{max} = (r_D \Omega - v_x) \frac{L}{r_D |\Omega|} . \quad (3.5)$$

Setzt man in erster Näherung lineares Materialverhalten voraus, dann überträgt ein Profilverformung in Längsrichtung die Kraft

$$F_x^t = c_x^t u . \quad (3.6)$$

Dabei bezeichnet c_x^t die Steifigkeit eines Profilverformung in Umfangsrichtung.

Im normalen Fahrbetrieb haben gleichzeitig mehrere Profilverformungen Kontakt mit der Fahrbahn, Abb. 3.2a. Die Anzahl p der Profilverformungen im Latsch ergibt sich aus

$$p = \frac{L}{s + a} . \quad (3.7)$$

Wobei s die Länge eines Profiltteilchens und a den Abstand zwischen den Teilchen angibt.

Die in den Latsch einlaufenden Profiltteilchen sind unverformt. Teilchen, die den Latsch verlassen, haben die maximal mögliche Verformung. Über den Latsch betrachtet, resultiert (3.6) in einer linearen Kraftverteilung für die Profiltteilchen, Abb. 3.2b.

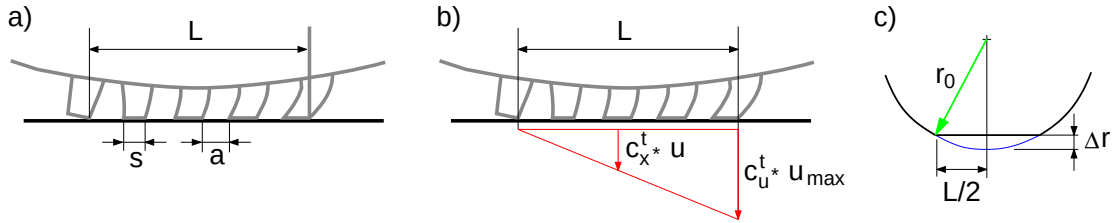


Abbildung 3.2.: a) Teilchen im Latsch, b) Verteilung der Umfangskräfte, c) Reifeneindrückung

Bei p Teilchen im Latsch ergibt das die Gesamtkraft

$$F_x = \frac{1}{2} p c_x^t u_{max} . \quad (3.8)$$

Mit (3.7) und (3.5) bleibt

$$F_x = \frac{1}{2} \frac{L}{s+a} c_x^t (r_D \Omega - v_x) \frac{L}{r_D |\Omega|} . \quad (3.9)$$

Die Latschlänge L hängt von der Reifeneinfederung Δr und damit auch von der Radlast F_z ab. Aus Abb. 3.2c folgt eine einfache Näherung für die Latschlänge

$$(L/2)^2 = r_0^2 - (r_0 - \Delta r)^2 . \quad (3.10)$$

Mit $\Delta r \ll r_0$ bleibt schließlich

$$L^2 \approx 8 r_0 \Delta r . \quad (3.11)$$

Nimmt man weiter an, daß die Reifeneindrückung proportional zur Radlast F_z ist, dann ergibt das mit der Reifensteifigkeit in radialer Richtung c_R den Zusammenhang

$$\Delta r = F_z / c_R . \quad (3.12)$$

Eingesetzt in (3.8) und umgestellt bleibt dann

$$F_x = 4 \frac{r_0}{s+a} \frac{c_x^t}{c_R} F_z \frac{r_D \Omega - v_x}{r_D |\Omega|} . \quad (3.13)$$

Das dimensionslose Verhältnis aus der Gleitgeschwindigkeit in Umfangsrichtung $v_x^G = v_x - r_D \Omega$ zur Transportgeschwindigkeit $r_D |\Omega|$ wird als Längsschlupf bezeichnet

$$s_x = \frac{-(v_x - r_D \Omega)}{r_D |\Omega|} \quad \text{oder} \quad s_x = \frac{-v_x^G}{r_D |\Omega|} . \quad (3.14)$$

Das Vorzeichen von v_x^G orientiert sich dabei an der Längsbewegung des Radmittelpunktes.

Die Umfangskraft F_x ist also in erster Näherung proportional zur Radlast F_z und zum Längsschlupf s_x

$$F_x = k F_z s_x, \quad (3.15)$$

wobei entsprechend (3.13) in k die Konstanten r_0 , s , a , c_x^t und c_R zusammengefaßt wurden.

Die Beziehung (3.15) gilt nur, solange die Profiltailchen auf der Fahrbahn haften. Beim Erreichen der Haftgrenze beginnen die Teilchen auf der Fahrbahn zu gleiten. Die Gleitreibungskraft F_G ist dabei meist deutlich geringer als die Haftreibungskraft, $F_G < F_H$.

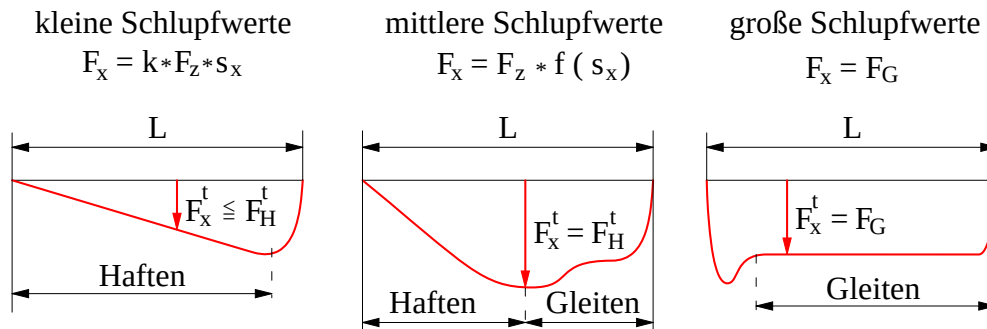


Abbildung 3.3.: Umfangskraftverteilung im Latsch bei verschiedenen Schlupfwerten

Der in Abb. 3.3 angenommene lineare Anstieg der Umfangskräfte über der Latschlänge ist also nur gültig, solange die am Latschende erreichte maximale Kraft zwischen Profiltailchen und Fahrbahn nicht die maximal mögliche Haftkraft übersteigt

$$F_{x_{max}}^t = c_x^t u_{max} \leq F_H^t. \quad (3.16)$$

Die maximal mögliche Haftkraft F_H^t hängt dabei von den Reibeigenschaften und dem Anpreßdruck ab.

Gemäß (3.5) und (3.16) steigt aber die maximal mögliche Auslenkung der Profiltailchen und damit auch die maximale Kraft mit zunehmenden Schlupfwerten. Berücksichtigt man noch die Tatsache, daß die Druckverteilung im Latsch nicht konstant ist, sondern in den Randbereichen abfällt, dann ergibt sich die in Abb. 3.3 skizzierte Verteilung der Umfangskräfte über der Latschlänge.

Daraus ergibt sich der in Abb. 3.4 dargestellte typische Verlauf der Umfangskraft in Abhängigkeit vom Längsschlupf.

Charakteristische Kurvenparameter sind die Anfangssteigung dF_x^0 , Ort s_x^M und Größe F_x^M des Maximums, Lage des Gleitbereichs s_x^G und die Gleitkraft F_x^G .

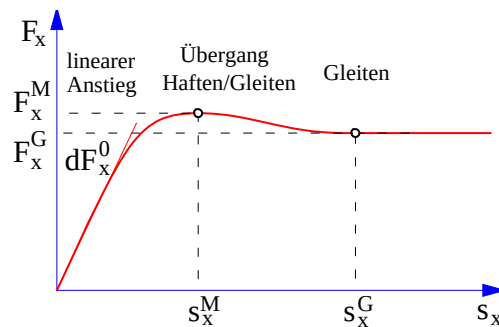


Abbildung 3.4.: Typische Umfangskraftkennlinie

3.3. Querschlupf, Seitenkraft und Reifenrückstellmoment

Die Geschwindigkeitskomponente der Profiltailchen gegenüber der Fahrbahn in Reifenquer- richtung ist durch v_y^G gegeben. Analog zum Längsschlupf (3.14) kann damit der Querschlupf definiert werden

$$s_y = \frac{-v_y^G}{r_D |\Omega|} . \quad (3.17)$$

Anstelle des Querschlupfes wird in der Fahrdynamik meist der Schräglaufwinkel α_S verwendet. Es gilt der Zusammenhang

$$\tan \alpha_S = s_y . \quad (3.18)$$

Solange die Profiltailchen auf der Fahrbahn haften (kleine Schlupfwerte), ergibt sich wieder eine annähernd lineare Verteilung der Kräfte über der Latschlänge L . Bei mittleren Schlupfwerten beginnen die Tailchen im hinteren Latschbereich zu gleiten und bei großen Schlupfwerten haften nur noch die Tailchen am Latscheinlauf, Abb. 3.5.

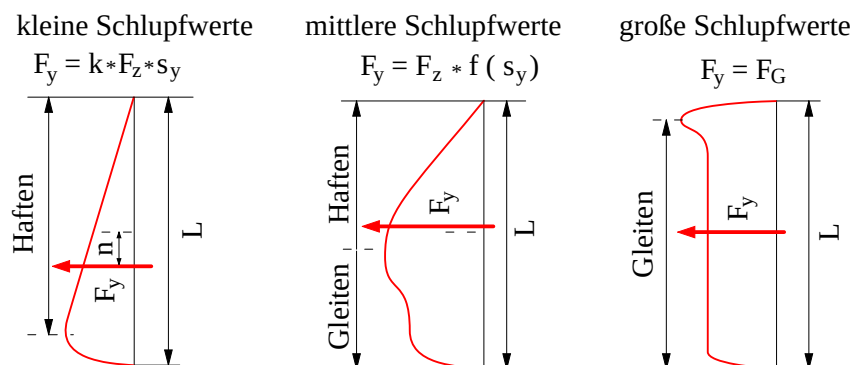


Abbildung 3.5.: Seitenkraftverteilung bei verschiedenen Schlupfwerten

Die Verteilung der Seitenkräfte über der Latschlänge bestimmt auch den Angriffspunkt der resultierenden Kraft. Bei kleinen Schlupfwerten liegt der Angriffspunkt hinter der Latschmitte

(Kontaktpunkt). Mit zunehmenden Schlupfwerten wandert er nach vorne, zum Teil sogar vor die Latschmitte. Bei extremen Schlupfwerten, wenn praktisch alle Teilchen gleiten, greift die resultierende Kraft in der Latschmitte an.

Die resultierende Seitenkraft F_y mit dem dynamischen Reifennachlauf n als Hebelarm erzeugt das Reifenrückstellmoment

$$M_S = -n F_y . \quad (3.19)$$

Sowohl die Seitenkraft F_y als auch der dynamische Reifennachlauf sind Funktionen vom Querschlupf s_y .

Die typischen Verläufe dieser Größen zeigt die Abb 3.6.

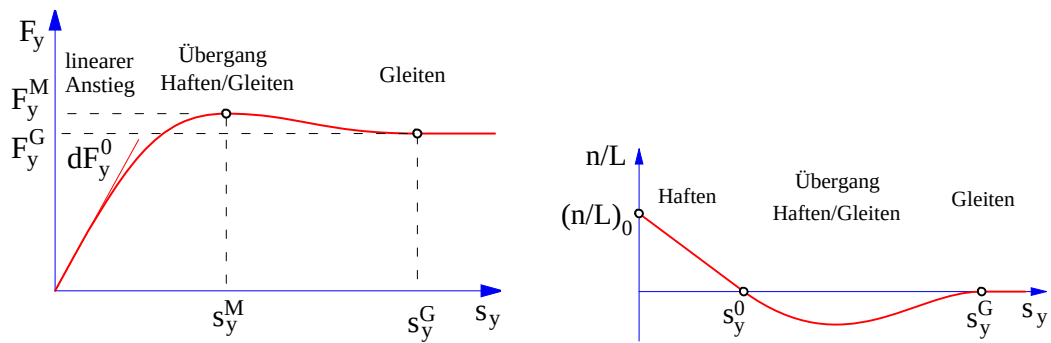


Abbildung 3.6.: Typische Seitenkraft- und Nachlaufkennlinie

Die durch Seitenkräfte hervorgerufenen Deformationen des Reifens beeinflussen die Druckverteilung im Latsch. Einige Reifen zeigen deshalb kein oder nur ein schwach ausgeprägtes Maximum in der Seitenkraftkennlinie. Häufig ist dann auch die maximale Seitenkraft deutlich kleiner als die maximale Umfangskraft.

Charakteristische Kurvenparameter für die Seitenkraftkennlinie sind die Anfangssteigung (cornering stiffness) dF_y^0 , Ort s_y^M und Größe F_y^M des Maximums, Lage des Gleitbereichs s_y^G und die Gleitkraft F_y^G .

Der dynamische Nachlauf wurde auf die Latschlänge L bezogen. Der Anfangswert $(n/L)_0$ sowie die Schlupfwerte s_y^0 und s_y^G charakterisieren den Kurvenverlauf.

3.4. Bohrmoment

Ein Bohrmoment im Latsch entsteht, wenn die Winkelgeschwindigkeit des Rades

$$\omega_{0R} = \omega_{0RK} + \Omega e_{yR} \quad (3.20)$$

eine Komponente in Richtung der Fahrbahnnormalen e_n hat:

$$\omega_n = e_n^T \omega_{0R} \neq 0 . \quad (3.21)$$

Aufgrund der Latschdrehung hat nun jedes Profiltteilchen eine andere Geschwindigkeit. Bei allgemeinem Schlupfzustand $s_x \neq 0$, $s_y \neq 0$ und einer Bohrgeschwindigkeit $\omega_n \neq 0$ erhält man im Latsch ein kompliziertes Auslenkungsprofil.

Für eine genaue Berechnung des Bohrmoments müßte der Latsch diskretisiert werden. Der Aufwand für so ein Reifenmodell ist beträchtlich. Deshalb wird hier, entsprechend der bisherigen Vorgehensweise, das Bohrmoment über eine vereinfachte Modellvorstellung approximiert.

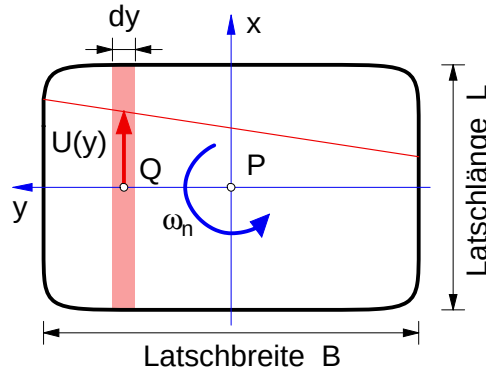


Abbildung 3.7.: Entstehung des Reifenbohrmomentes

Abb 3.7 zeigt die Latschfläche im normalen Fahrbetrieb, d.h. bei verschwindendem Sturzwinkel ($\gamma = 0$) und kleinen Schlüpfen ($s_x \approx 0$, $s_y \approx 0$).

Unterteilt man nun den Latsch über die Reifenbreite in mehrere Streifen der Breite dy , dann ergeben sich bei einer bohrenden Bewegung in den einzelnen Streifen unterschiedliche Gleitgeschwindigkeiten. Als Folge davon erhält man in jedem Streifen eine andere Umfangskraft, $F_x = F_x(y)$.

Der Längsschlupf im Punkt Q ist durch

$$s_x(y) = \frac{-(v_x^G - \omega_n y)}{r_D |\Omega|} \quad (3.22)$$

gegeben, wobei v_x^G die Längskomponente der Gleitgeschwindigkeit im Kontaktpunkt P angibt.

Im Reifenmodell werden die Umfangskräfte in Abhängigkeit vom Längsschlupf beschrieben, $F_x = F_x(s_x)$. In erster Näherung gilt dann

$$F_x(y) = F_x^0 + \frac{dF_x}{ds_x} \frac{ds_x}{dy} y, \quad (3.23)$$

wobei F_x^0 die Umfangskraft im Kontaktpunkt P angibt.

Mit (3.22) erhält man

$$F_x(y) = F_x^0 + \frac{dF_x}{ds_x} \frac{\omega_n}{r_D |\Omega|} y. \quad (3.24)$$

Die Umfangskräfte in den einzelnen Streifen erzeugen bezüglich P ein Moment

$$M_B = -\frac{1}{B} \int_{-\frac{B}{2}}^{+\frac{B}{2}} y F_x(y) dy . \quad (3.25)$$

Mit (3.24) erhält man aus (3.25) als Abschätzung für das Reifenbohrmoment

$$M_B = \frac{1}{12} B^2 \frac{dF_x}{ds_x} \frac{-\omega_n}{r_D |\Omega|} = \frac{1}{12} B \frac{dF_x}{ds_x} \frac{B}{R} \frac{-\omega_n}{|\Omega|} . \quad (3.26)$$

Das Bohrmoment M_B ergibt sich demnach als Funktion des Bohrschlupfes

$$s_B = \frac{-\omega_n}{|\Omega|} . \quad (3.27)$$

Über die Größe dF_x/ds_x ist das Bohrmoment mit den aktuellen Reib- und Schlupfverhältnissen gekoppelt.

Die Gleichung (3.26) stellt nur eine erste Näherung dar. So ist insbesondere der Einfluß der Querbewegung nur indirekt, nämlich über die Kopplung zwischen Umfangs- und Seitenkraft, enthalten. Eine Querbewegung des Reifens verändert die Druckverteilung im Latsch. Bei der Überlagerung von Quer- und Drehbewegungen stellt sich ferner ein sehr kompliziertes Auslenkungsprofil über der Latschlänge ein. Diese Einflüsse auf das Bohrmoment können mit vereinfachten Modellvorstellungen nicht mehr erfaßt werden.

Eine weitere Einschränkung für die Gültigkeit von (3.26) folgt aus dem Ansatz für die Umfangskraftverteilung in Reifenquerrichtung. Gleichung (3.23) ist nur für kleine Längsschlupfänderungen gültig. Bei kleinen Raddrehgeschwindigkeiten $|\Omega| \rightarrow 0$ werden Längs- und Bohrschlupf beliebig groß $s_x \rightarrow \infty$ und $s_B \rightarrow \infty$. In diesem Fall kann (3.26) bei $dF_x/ds_x \neq 0$ unrealistisch große Bohrmomente ergeben, $M_B \rightarrow \infty$. Für diesen Fall muß das Bohrmoment nach oben abgeschätzt werden.

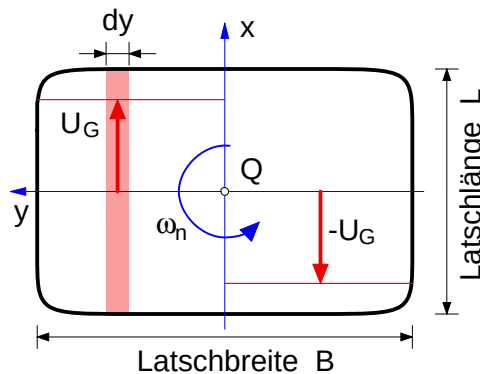


Abbildung 3.8.: Umfangskraftverteilung bei extremen Bohrbewegungen

Im Grenzfall, wenn die Bohrbewegung gegenüber allen anderen Bewegungen dominiert, werden die Profiltelchen in der einen Latschhälfte nach vorne und in der anderen nach hinten bewegt.

Nimmt man an, daß alle Profiltelchen gleiten, dann ergibt sich die in Abb 3.8 dargestellte Verteilung der Umfangskräfte.

Das maximale Bohrmoment ergibt sich dann betragsmäßig zu

$$M_{B_{max}} = 2 \frac{1}{B} \int_0^{+\frac{B}{2}} y F_x^G dy = \frac{1}{4} B F_x^G, \quad (3.28)$$

wobei F_x^G die Umfangskraft im Gleitbereich bezeichnet.

Beschränkt man nun das gemäß (3.26) berechnete Bohrmoment mit (3.28), dann erhält man eine physikalisch sinnvolle und qualitativ richtige Approximation für das Reifenbohrmoment.

3.5. Kippmoment

Unterschiedliche Reifeneinfederungen über die Latschbreite, hervorgerufen durch einen Sturzwinkel $\gamma \neq 0$, erzeugen ein Kippmoment, Abb 3.9.

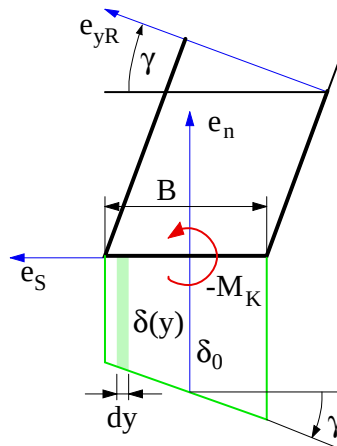


Abbildung 3.9.: Reifeneindrückung unter Sturz

Das Kippmoment wirkt um eine Achse in Richtung der Umfangskraft. Die Einheitsvektoren in Richtung der Umfangs- e_x , und Seitenkraft e_y sowie die Fahrbahnnormale e_n bilden ein rechtshändiges Koordinatensystem. Ein positives Kippmoment dreht dann e_y in Richtung von e_n . Ein positiver Sturzwinkel hat aber ein negatives Kippmoment zur Folge. Dieser Sachverhalt wird in Abb 3.9 durch die Bezeichnung $-M_K$ zum Ausdruck gebracht.

Nimmt man an, daß die Reifendeformation $\delta(y)$ in erster Näherung proportional zum Sturzwinkel γ verläuft, dann erhält man das Kippmoment aus

$$-M_K = \frac{1}{B} \int_{-\frac{B}{2}}^{+\frac{B}{2}} c_R \delta(y) dy. \quad (3.29)$$

Dabei wurde weiter vorausgesetzt, daß die in einem Latschstreifen der Breite dy auftretende Normalkraft durch die radiale Reifensteifigkeit c_R und die dort auftretende Reifendeformation $\delta(y)$ berechnet werden kann. Mit

$$\delta(y) = \delta_0 - \gamma y \quad (3.30)$$

erhält man aus (3.29)

$$-M_K = \frac{1}{12} B^2 c_R \gamma \quad \text{oder} \quad M_K = -c_\gamma \gamma. \quad (3.31)$$

Die Kippsteifigkeit des Reifens

$$c_\gamma = \frac{1}{12} B^2 c_R \quad (3.32)$$

kann also durch die radiale Reifensteifigkeit und die Reifenbreite abgeschätzt werden.

Beim Abheben des Reifens muß natürlich auch das Kippmoment verschwinden, d.h. $M_K = 0$, bei Radlast $F_z = 0$.

3.6. Rollwiderstand

Beim stehenden Reifen ist die Druckverteilung im Latsch symmetrisch, Abb 3.10. Die Wirkungslinie der resultierenden Aufstandskraft läuft durch die Radmitte.

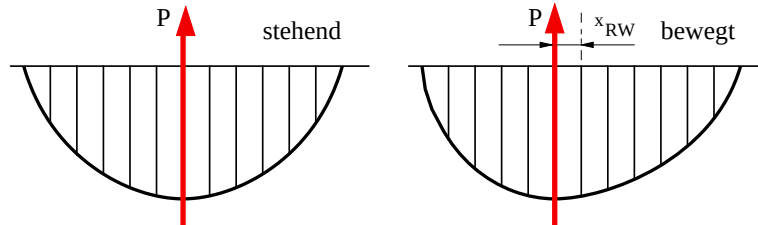


Abbildung 3.10.: Druckverteilung beim stehenden und bewegten Reifen

Wird der Reifen bewegt, dann kommt es im vorderen Latschbereich zu einer Drucküberhöhung, Abb 3.10. Grund dafür sind elastische und dissipative Verformungswiderstände. Die resultierende Aufstandskraft greift jetzt vor der Radmitte an. Dadurch entsteht das Rollwiderstandsmoment

$$M_{RW} = F_z x_{RW}. \quad (3.33)$$

In der Literatur (z.B. bei Mitschke: Dynamik der Kraftfahrzeuge) findet man insbesondere für Pkw-Reifen Angaben für den dimensionslosen Rollwiderstandsbeiwert

$$f_R = x_{RW}/r_0, \quad (3.34)$$

wobei r_0 der Reifenradius ist. Der Rollwiderstandsbeiwert liegt dabei in einem Bereich von $0.010 \leq f_R \leq 0.025$. Er nimmt mit zunehmender Fahrgeschwindigkeit v zu.

Der Rollwiderstand spielt bei fahrdynamischen Berechnungen eine untergeordnete Rolle. Wichtig ist er für die Ermittlung des Kraftstoffverbrauchs.

3.7. Radeigendrehung

Das Rad rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit Ω um die Raddrehachse, Abb. 3.11. Mit r_S als

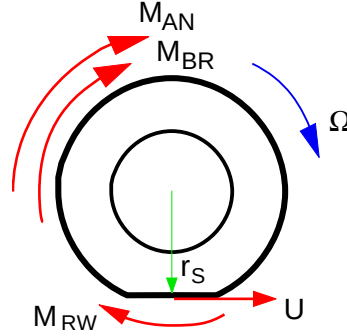


Abbildung 3.11.: Raddrehung

statischem Reifenradius und Θ_R als Radträgheitsmoment lautet der Drallsatz für die Radeigendrehung

$$\Theta_R \dot{\omega}_R = M_{AN} + M_{BR} + M_{RW} - r_S U, \quad (3.35)$$

wobei alle Momente in positiver Drehrichtung angetragen wurden, M_{AN} das Antriebsmoment, M_{RW} das Rollwiderstandsmoment und U die Umfangskraft bezeichnen.

Das Antriebsmoment wird hier als Zeitfunktion vorgegeben

$$M_{AN} = M_{AN}(t). \quad (3.36)$$

Die Umfangskraft U folgt aus dem Reifenmodell.

Das Bremsmoment M_{BR} und das Rollwiderstandsmoment M_{RW} wirken stets entgegen der Raddrehung und entgegengesetzt zu den restlichen Momenten.

Mit dem Ansatz

$$M_{BR} + M_{RW} = -M_0 - d\omega_R, \quad (3.37)$$

wird dies gewährleistet.

Der Anteil M_0 sorgt dafür, daß das Rad auch im blockierten Zustand festgehalten, also nicht beschleunigt wird. Aus (3.35) und (3.37) folgt dann mit $\Omega = 0$ und $\dot{\Omega} = 0$

$$0 = M_{AN} - M_0 - r_S U \quad \text{oder} \quad M_0 = M_{AN} - r_S U, \quad (3.38)$$

Solange das Rad dreht, $\Omega \neq 0$, sorgt eine entsprechend groß gewählte, positive Konstante $d > 0$ für das richtige Vorzeichen der bremsenden Momente.

Maximalwerte für das Rollwiderstands- und Bremsmoment beschränken die bremsenden Momente

$$|M_{BR} + M_{RW}| \leq M_{BR}^{max} + M_{RW}^{max}, \quad (3.39)$$

wobei das maximale Rollwiderstandsmoment M_{RW}^{max} aus dem Reifenmodell folgt und das maximale Bremsmoment M_{BR}^{max} durch das Bremspedal oder den Bremsregler vorgegeben wird.

3.8. Verallgemeinertes Reifenkennfeld

3.8.1. Summenschlupf

Die Umfangskraft als Funktion des Längsschlupfs, $F_x = F_x(s_x)$ und die Seitenkraft als Funktion des Querschlupfs können durch ihre charakteristischen Kurvenparameter Anfangssteigung dF_x^0 , dF_y^0 , Ort s_x^M , s_y^M und Größe des Maximums F_x^M , F_y^M sowie Gleitgrenze s_x^G , s_y^G und Gleitkraft F_x^G , F_y^G festgelegt werden, Abb 3.12. Die Kurvenparameter können wegen ihrer

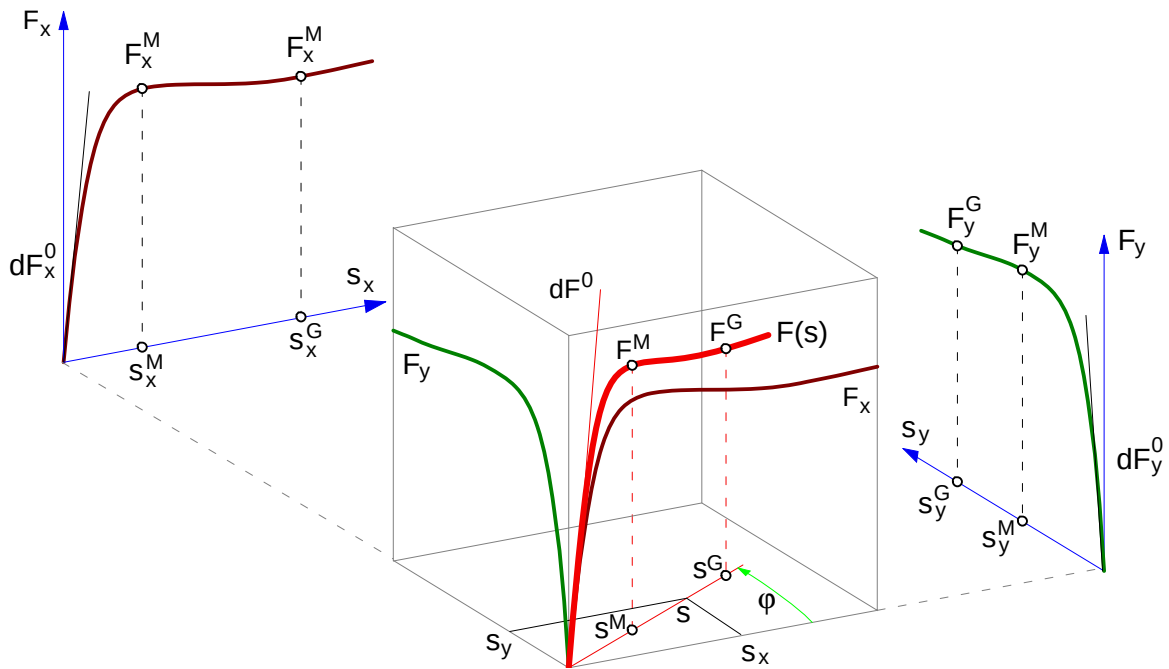


Abbildung 3.12.: Verallgemeinertes Reifenkennfeld

physikalischen Bedeutung bei fehlenden Messwerten leicht geschätzt werden.

Im allgemeinen Fahrbetrieb, z.B. Antreiben oder Bremsen in der Kurve, treten gleichzeitig Längs- s_x und Querschlupf s_y auf. Sie werden vektoriell zu einem Summenschlupf s addiert

$$s = \sqrt{\left(\frac{s_x}{\hat{s}_x}\right)^2 + \left(\frac{s_y}{\hat{s}_y}\right)^2}, \quad (3.40)$$

wobei die Schlüpfе s_x und s_y mit s_x^N und s_y^N normiert wurden, so daß auch stark unterschiedliche Umfangs- und Seitenkraftkennlinien einigermaßen gleich gewichtet in s zusammengefaßt werden können. Mit den Normierungsfaktoren

$$\hat{s}_x = \frac{s_x^M}{\sqrt{(s_x^M)^2 + (s_y^M)^2}} + \frac{F_x^M/dF_x^0}{\sqrt{(F_x^M/dF_x^0)^2 + (F_y^M/dF_y^0)^2}} \quad (3.41)$$

und

$$\hat{s}_y = \frac{s_y^M}{\sqrt{(s_x^M)^2 + (s_y^M)^2}} + \frac{F_y^M/dF_y^0}{\sqrt{(F_x^M/dF_x^0)^2 + (F_y^M/dF_y^0)^2}} \quad (3.42)$$

werden Ort und Größe der Maxima sowie die Anfangssteigungen berücksichtigt.

3.8.2. Summenkraft

Aus dem Verlauf der Umfangs- und Seitenkraft wird nun der Verlauf einer verallgemeinerten Reifenkraft berechnet. Die Funktion $F = F(s)$ wird wieder durch die charakteristischen Kurvenparameter dF^0 , s^M , F^M , s^G und F^G beschrieben. Die Kurvenparameter werden aus den entsprechenden Werten der Umfangs- und Seitenkraftkennlinie ermittelt

$$\begin{aligned} dF^0 &= \sqrt{(dF_x^0 \hat{s}_x \cos \varphi)^2 + (dF_y^0 \hat{s}_y \sin \varphi)^2}, \\ s^M &= \sqrt{(s_x^M/\hat{s}_x \cos \varphi)^2 + (s_y^M/\hat{s}_y \sin \varphi)^2}, \\ F^M &= \sqrt{(F_x^M \cos \varphi)^2 + (F_y^M \sin \varphi)^2}, \\ s^G &= \sqrt{(s_x^G/\hat{s}_x \cos \varphi)^2 + (s_y^G/\hat{s}_y \sin \varphi)^2}, \\ F^G &= \sqrt{(F_x^G \cos \varphi)^2 + (F_y^G \sin \varphi)^2}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

wobei die Schlupfnormierungen auch bei der Anfangssteigung berücksichtigt werden müssen. Die Winkelfunktionen

$$\cos \varphi = \frac{s_x/\hat{s}_x}{s} \quad \text{und} \quad \sin \varphi = \frac{s_y/\hat{s}_y}{s} \quad (3.44)$$

gewährleisten im Bereich $\varphi = 0$ bis $\varphi = 90^\circ$ einen glatten Übergang von der Umfangs- zur Seitenkraftkennlinie.

Die Funktion $F = F(s)$ wird nun abschnittsweise durch eine gebrochen rationale Funktion, ein kubisches Polynom und eine Konstante beschrieben

$$F(s) = \begin{cases} s^M dF^0 \frac{\sigma}{1 + \sigma \left(\sigma + F^0 \frac{s^M}{F^M} - 2 \right)}, & \sigma = \frac{s}{s^M}, \quad 0 \leq s \leq s^M; \\ F^M - (F^M - F^G) \sigma^2 (3 - 2\sigma), & \sigma = \frac{s - s^M}{s^G - s^M}, \quad s^M < s \leq s^G; \\ F^G, & s > s^G; \end{cases} \quad (3.45)$$

Bei der Festlegung der Kurvenparameter muß lediglich die Bedingung $F^0 \geq 2 \frac{F^M}{s^M}$ beachtet werden, da sonst bei der gebrochen rationalen Funktion im Bereich $0 < s \leq s^M$ ein Wendepunkt auftritt.

Umfangs- und Seitenkraft folgen nun aus den entsprechenden Projektionen in Längs- und Querrichtung.

$$F_x = F \cos \varphi \quad \text{und} \quad F_y = F \sin \varphi. \quad (3.46)$$

3.8.3. Parameter

Der Widerstand eines realen Reifens gegenüber Verformungen führt dazu, daß mit steigender Radlast die Druckverteilung im Latsch ungleichmäßiger wird. Die Profiltailchen werden erst beim Transport durch den Latsch ausgelenkt. Die Drucküberhöhung im vorderen Latschbereich, die auch die maximale Haftgrenze erhöht, kann nicht genutzt werden, da die Profiltailchen aufgrund der geringen Auslenkungen dort noch weit von der Haftgrenze entfernt sind. Im hinteren Latschbereich führt der Druckabfall zu einer Reduzierung der maximal übertragbaren Reibkräfte. Mit zunehmender Imperfektion bei der Druckverteilung im Latsch verringert sich das Vermögen, Reibkräfte zwischen Reifen und Fahrbahn zu übertragen.

In der Praxis führt das zu einem degressiven Einfluß der Radlast auf die Umfangs- und Seitenkraftkennlinien.

Um dies im Reifenmodell berücksichtigen zu können, werden die charakteristischen Kenndaten für die Radlasten $F_z = F_z^N$ und $F_z = 2 F_z^N$ angegeben.

Umfangskraft F_x		Seitenkraft F_y	
$F_z = F_z^N = 3.2 \text{ kN}$	$F_z = 2 F_z^N = 6.4 \text{ kN}$	$F_z = F_z^N = 3.2 \text{ kN}$	$F_z = 2 F_z^N = 6.4 \text{ kN}$
$dF_x^0 = 90 \text{ kN}$	$dF_x^0 = 160 \text{ kN}$	$dF_y^0 = 70 \text{ kN}$	$dF_y^0 = 100 \text{ kN}$
$s_x^M = 0.090$	$s_x^M = 0.110$	$s_y^M = 0.180$	$s_y^M = 0.200$
$F_x^M = 3.30 \text{ kN}$	$F_x^M = 6.50 \text{ kN}$	$F_y^M = 3.10 \text{ kN}$	$F_y^M = 5.40 \text{ kN}$
$s_x^G = 0.400$	$s_x^G = 0.500$	$s_y^G = 0.600$	$s_y^G = 0.800$
$F_x^G = 3.20 \text{ kN}$	$F_x^G = 6.00 \text{ kN}$	$F_y^G = 3.10 \text{ kN}$	$F_y^G = 5.30 \text{ kN}$

Tabelle 3.1.: Reifenkenndaten mit degressivem Radlasteinfluß

Aus den Funktionswerten $f_1 = f(F_z^N)$ und $f_2 = f(2 F_z^N)$ werden dann gemäß der quadratischen Funktion

$$f(F_z) = \frac{F_z}{F_z^N} \left[2 f_1 - \frac{1}{2} f_2 - \left(f_1 - \frac{1}{2} f_2 \right) \frac{F_z}{F_z^N} \right] \quad (3.47)$$

die Anfangssteigung, die maximale Kraft und die Gleitkraft für beliebige Radlasten berechnet. Mit $f_2 = 2 f_1$ vermittelt (3.47) wieder die lineare Abhängigkeit $f(F_z) = F_z / F_z^N f_1$.

Die Lage der Maxima und die Schlupfwerte, bei denen vollständiges Gleiten auftritt, werden als lineare Funktionen der Radlast F_z dargestellt,

$$f(F_z) = f_1 + (f_2 - f_1)(F_z / F_z^N - 1). \quad (3.48)$$

Mit den Zahlenwerten aus der Tabelle 3.8.3 wird bei steigender Radlast eine leichte Verschiebung der Maxima zu höheren Schlupfwerten modelliert, Abb 3.13.

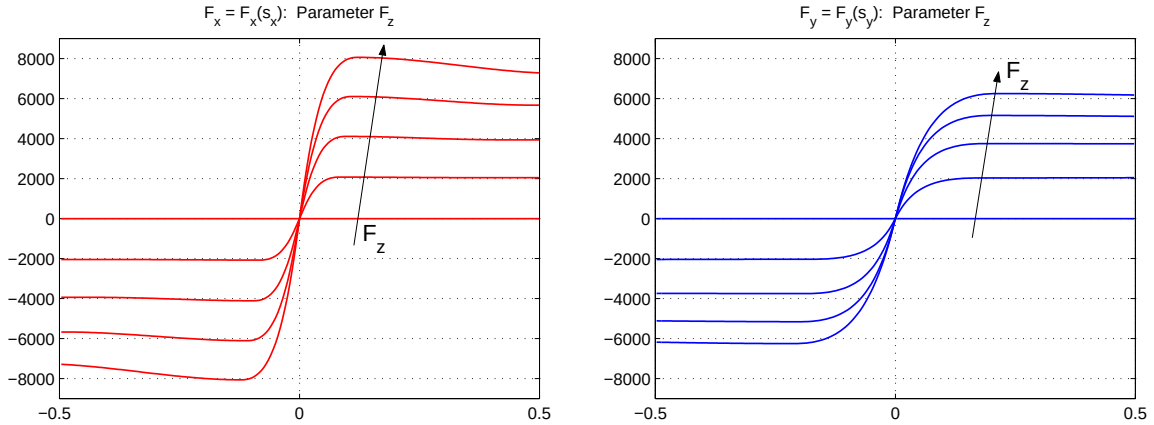


Abbildung 3.13.: Degressiver Radlasteinfluß auf F_x und F_y bei $F_z = 0, 2, 4, 6, 8 \text{ kN}$

Der wechselseitige Einfluß von Längs- s_x und Querschlupf s_y auf die Umfangs- F_x und Seitenkraft F_y ist in Abb. 3.14 dargestellt, wobei mit $F_z = F_z^N = 3200 \text{ N}$ gerechnet wurde.

Mit den 20 Parametern, die gemäß Tabelle 3.8.3 zur Darstellung der Umfangs- und Seitenkraftkennlinie benötigt werden, kann das Reifenmodell an gemessene Kennfelder sehr gut angepaßt werden.

Da zur Beschreibung der Umfangs- und Seitenkraftkennlinie lediglich charakteristische Kurvenparameter verwendet wurden, kann mit diesem Reifenmodell auch sehr leicht ein gezieltes Reifenverhalten konstruiert werden.

3.9. Modellerweiterungen

3.9.1. Veränderter Kraftschluß

Die Reifenkennfelder gelten jeweils nur für einen Reifentyp auf einer bestimmten Fahrbahn. Unterschiedliche Reifen/Fahrbahn Paarungen müßten demnach durch verschiedene Reifenkennfelder und damit auch durch verschiedene Parametersätze beschrieben werden.

Bei verändertem Kraftschluß werden in 1. Näherung die maximale Reifenkraft und die Gleitkraft nicht aber die Anfangssteigung beeinflusst. Multipliziert man die entsprechenden Parameter der Summenkraft-Kennlinie mit einem Kraftschlußbeiwert μ_F

$$\begin{aligned} s^M &\rightarrow \mu_F s^M, & F^M &\rightarrow \mu_F F^M, \\ s^G &\rightarrow \mu_F s^G, & F^G &\rightarrow \mu_F F^G, \end{aligned} \quad (3.49)$$

dann kann damit der Einfluß veränderter Reibwerte auf die Reifenkräfte näherungsweise nachgebildet werden, Abb. 3.15.

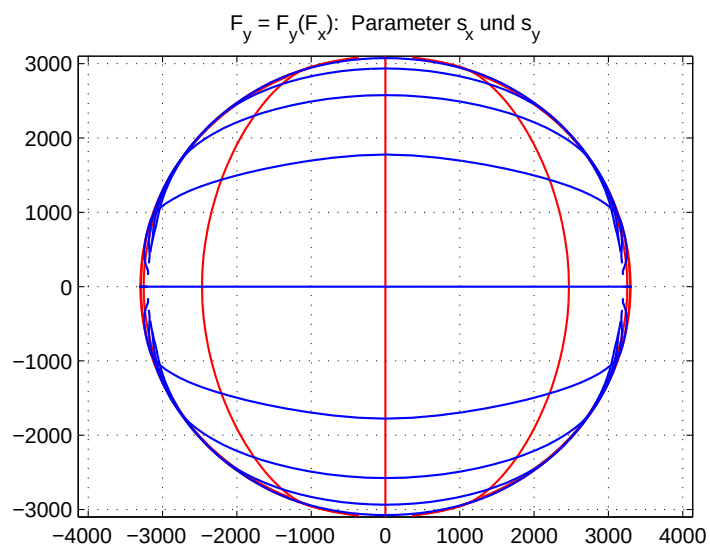
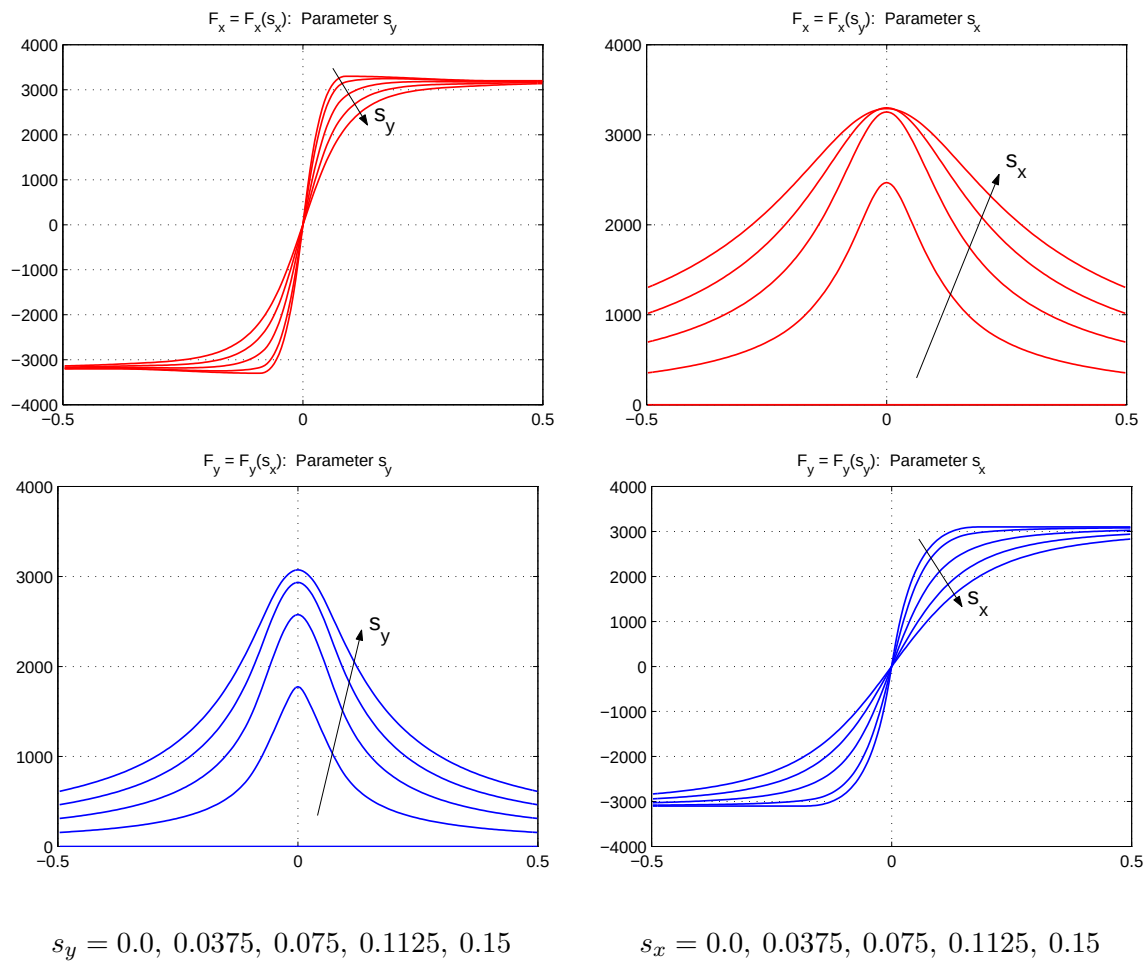


Abbildung 3.14.: Reifenkräfte bei Längs- und Querschleif: $F_z = 3.2 \text{ kN}$

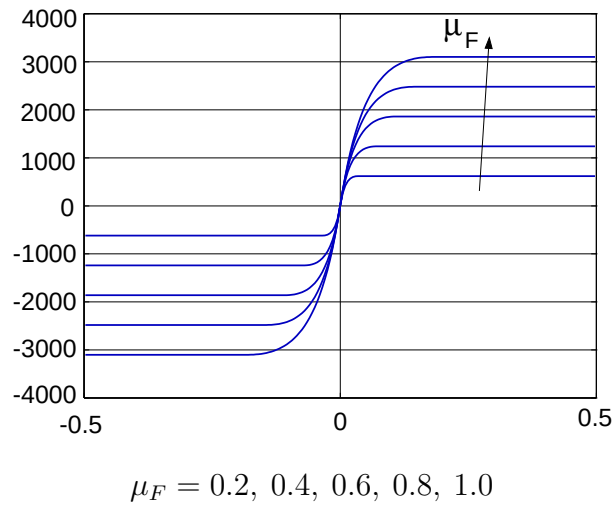


Abbildung 3.15.: Vereinfachter Reibwerteinfluß auf Seitenkraft bei $F_z = 3.2 \text{ kN}$

Mit einer erweiterten Fahrbahnbeschreibung, die nicht nur die Unebenheiten $z = z(x, x)$ zur Verfügung stellt, sondern auch den lokalen Kraftschlußbeiwert $\mu_F = \mu_F(x, y)$ liefert, kann dann zum Beispiel auch eine μ -split Bremsung simuliert werden.

4. Längsdynamik

4.1. Antreiben und Bremsen

4.1.1. Einfaches Längsdynamikmodell

Abb 4.1 zeigt ein einfaches Längsdynamikmodell. Das Fahrzeug mit der Gesamtmasse m wird als ein starrer Körper betrachtet. Die Schwerpunktslage S ist durch die Abmessungen a_1 , a_2 und h festgelegt.

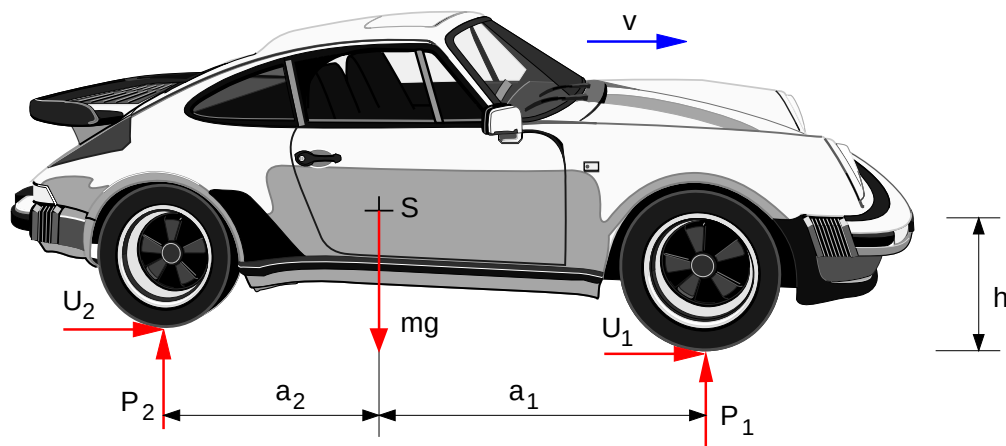


Abbildung 4.1.: Einfaches Längsdynamik-Modell

Die Kräfte in den Radaufstandspunkten werden pro Achse zu einer Normalkraft und einer Umfangskraft zusammengefaßt. Aerodynamische Kräfte (Luftwiderstand und Auftriebs- oder Abtriebskräfte) werden vernachlässigt.

Die Fahrbahn verläuft horizontal und sei ideal eben. Dann treten keine Vertikal-Beschleunigungen und auch keine Drehbeschleunigungen um die Fahrzeugquerachse auf:

$$0 = P_1 + P_2 - m g \quad (4.1)$$

und

$$0 = P_1 a_1 - P_2 a_2 + (U_1 + U_2) h . \quad (4.2)$$

Der Impulssatz in Längsrichtung liefert:

$$m \dot{v} = U_1 + U_2, \quad (4.3)$$

wobei $\dot{v}$ die Beschleunigung des Fahrzeugs bezeichnet.

Setzt man nun (4.3) in (4.2) ein, dann erhält man:

$$0 = P_1 a_1 - P_2 a_2 + m \dot{v} h. \quad (4.4)$$

Die Gleichungen (4.1) und (4.4) können nun nach den Achslasten aufgelöst werden

$$P_1 = m g \left[\frac{a_2}{a_1 + a_2} - \frac{h}{a_1 + a_2} \frac{\dot{v}}{g} \right] \quad (4.5)$$

und

$$P_2 = m g \left[\frac{a_1}{a_1 + a_2} + \frac{h}{a_1 + a_2} \frac{\dot{v}}{g} \right]. \quad (4.6)$$

Das Eigengewicht $m g$ des Fahrzeugs verteilt sich entsprechend der Schwerpunktslage auf die Achsen. Beim Beschleunigen $\dot{v} > 0$ wird die Vorder- beim Abbremsen $\dot{v} < 0$ die Hinterachse entlastet.

4.1.2. Maximale Beschleunigung

Normale Straßenfahrzeuge können nur Druckkräfte auf die Fahrbahn übertragen. Die Forderungen $P_1 \geq 0$ und $P_2 \geq 0$ führen gemäß (4.6) auf die Kippbedingungen

$$-\frac{a_1}{h} \leq \frac{\dot{v}}{g} \leq \frac{a_2}{h}. \quad (4.7)$$

Die maximale Beschleunigung wird jedoch auch durch die Reibungsungleichungen

$$|U_1| \leq \mu P_1 \quad \text{und} \quad |U_2| \leq \mu P_2 \quad (4.8)$$

begrenzt, wobei an der Vorder- und Hinterachse der gleiche Reibwert μ angenommen wurde.

Im Grenzfall

$$|U_1| = \mu P_1 \quad \text{und} \quad |U_2| = \mu P_2 \quad (4.9)$$

folgt aus (4.3) und (4.1) die maximal erreichbare Beschleunigung bzw. Verzögerung

$$|\dot{v}_{max}| = \mu g. \quad (4.10)$$

Entsprechend den Fahrzeugabmessungen und den Reibwerten wird die maximale Beschleunigung oder die maximale Verzögerung entweder durch (4.7) oder (4.10) eingeschränkt.

4.1.3. Antrieb über eine Achse

Bei angetriebener Hinterachse gilt im Grenzfall

$$U_1 = 0 \quad \text{und} \quad U_2 = \mu P_2 . \quad (4.11)$$

Damit erhält man aus (4.3)

$$m \dot{v}_{0+} = \mu P_2 . \quad (4.12)$$

Mit 4.6 bleibt

$$m \dot{v}_{0+} = -\mu m g \left[\frac{a_1}{a_1 + a_2} + \frac{h}{a_1 + a_2} \frac{\dot{v}_{0+}}{g} \right] . \quad (4.13)$$

oder

$$\frac{\dot{v}_{0+}}{g} = \frac{\mu}{1 - \mu \frac{h}{a_1 + a_2}} \frac{a_1}{a_1 + a_2} . \quad (4.14)$$

Bei Frontantrieb erhält man mit

$$U_1 = \mu P_1 \quad \text{und} \quad U_2 = 0 \quad (4.15)$$

die maximale Beschleunigung

$$\frac{\dot{v}_{+0}}{g} = \frac{\mu}{1 + \mu \frac{h}{a_1 + a_2}} \frac{a_2}{a_1 + a_2} . \quad (4.16)$$

4.1.4. Bremsen an einer Achse

Bei ungebremster Hinterachse gilt im Grenzfall

$$U_1 = -\mu P_1 \quad \text{und} \quad U_2 = 0 . \quad (4.17)$$

Damit erhält man aus (4.3)

$$m \dot{v}_{-0} = -\mu P_1 . \quad (4.18)$$

Mit 4.5 bleibt

$$m \dot{v}_{-0} = -\mu m g \left[\frac{a_2}{a_1 + a_2} - \frac{h}{a_1 + a_2} \frac{\dot{v}_{-0}}{g} \right] . \quad (4.19)$$

oder

$$\frac{\dot{v}_{-0}}{g} = - \frac{\mu}{1 - \mu \frac{h}{a_1 + a_2}} \frac{a_2}{a_1 + a_2} . \quad (4.20)$$

Bremst man nur an der Hinterachse, dann erhält man durch analoges Vorgehen, jetzt mit

$$U_1 = 0 \quad \text{und} \quad U_2 = -\mu P_2 , \quad (4.21)$$

die maximale Verzögerung

$$\frac{\dot{v}_{0-}}{g} = - \frac{\mu}{1 + \mu \frac{h}{a_1 + a_2}} \frac{a_1}{a_1 + a_2} . \quad (4.22)$$

4.1.5. Zahlenbeispiel

Typische Werte für einen Pkw sind:

$$a_1 = 1.25 \text{ m}; a_2 = 1.25 \text{ m}; h = 0.55 \text{ m}$$

Mit einem Reibwert von $\mu = 1$ erhält man damit die maximalen Beschleunigungen aus (4.14) und (4.16) zu

$$\frac{\dot{v}_{0+}}{g} = \frac{1}{1 - 1 \frac{0.55}{1.25 + 1.25}} \frac{1.25}{1.25 + 1.25} = 0.64$$

und

$$\frac{\dot{v}_{+0}}{g} = \frac{1}{1 + 1 \frac{0.55}{1.25 + 1.25}} \frac{1.25}{1.25 + 1.25} = 0.41$$

Die maximalen Verzögerungen folgen aus (4.20) und (4.22)

$$\frac{\dot{v}_{-0}}{g} = - \frac{1}{1 - 1 \frac{0.55}{1.25 + 1.25}} \frac{1.25}{1.25 + 1.25} = -0.64$$

und

$$\frac{\dot{v}_{0-}}{g} = - \frac{1}{1 + 1 \frac{0.55}{1.25 + 1.25}} \frac{1.25}{1.25 + 1.25} = -0.41$$

Da hier eine Achslastverteilung von 50/50 angenommen wurde sind die maximalen Beschleunigungen und die maximalen Verzögerungen betragsmäßig gleich.

Wird nur die Vorderachse gebremst, dann liegt die erreichbare Verzögerung immerhin noch bei fast $2/3$ der maximal möglichen von $\dot{v}_{--}/g = -\mu = -1$. Das Bremsen an der Hinterachse alleine reicht meist nicht aus, da hier nur ca. 40% der maximal möglichen Verzögerung erreicht werden.

Bei Fahrzeugen mit Frontantrieb wird die maximale Beschleunigung durch Verlagerung des Schwerpunktes nach vorne vergrößert. Im Gegenzug kann bei heckgetriebenen Fahrzeugen die maximale Beschleunigung durch Verlagerung des Schwerpunktes nach hinten ebenfalls vergrößert werden.

4.1.6. Optimale Antriebs- und Bremskraftverteilung

Die Summe der Umfangskräfte beschleunigt oder verzögert das Fahrzeug. In dimensionsloser Schreibweise lautet (4.3)

$$\frac{\dot{v}}{g} = \frac{U_1}{m g} + \frac{U_2}{m g}. \quad (4.23)$$

Eine bestimmte Beschleunigung oder Verzögerung kann nun durch verschiedene Kombinationen der Umfangskräfte U_1 und U_2 erreicht werden. Allerdings sind die Umfangskräfte gemäß (4.9) durch Radlast und Reibwert beschränkt.

Eine optimale Kombination von U_1 und U_2 erhält man, wenn an der Vorder- und Hinterachse jeweils die gleiche Sicherheit $\nu < 1$ gegen Durchrutschen besteht

$$U_1 = \pm \nu \mu P_1 \quad \text{und} \quad U_2 = - \pm \nu \mu P_2 . \quad (4.24)$$

Mit (4.5) und (4.6) erhält man

$$\frac{U_1}{m g} = \pm \nu \mu \left(\frac{a_2}{h} - \frac{\dot{v}}{g} \right) \frac{h}{a_1 + a_2} \quad (4.25)$$

und

$$\frac{U_2}{m g} = \pm \nu \mu \left(\frac{a_1}{h} + \frac{\dot{v}}{g} \right) \frac{h}{a_1 + a_2} . \quad (4.26)$$

Mit (4.25) und (4.26) erhält man aus (4.23)

$$\frac{\dot{v}}{g} = \pm \nu \mu , \quad (4.27)$$

wobei vorausgesetzt wurde, dass U_1 und U_2 jeweils das gleiche Vorzeichen haben. Setzt man (4.27 in (4.25) und (4.26) ein, dann bleibt

$$\frac{U_1}{m g} = \frac{\dot{v}}{g} \left(\frac{a_2}{h} - \frac{\dot{v}}{g} \right) \frac{h}{a_1 + a_2} \quad (4.28)$$

und

$$\frac{U_2}{m g} = \frac{\dot{v}}{g} \left(\frac{a_1}{h} + \frac{\dot{v}}{g} \right) \frac{h}{a_1 + a_2} . \quad (4.29)$$

In Abhängigkeit von der gewünschten Beschleunigung $\dot{v} > 0$ oder Verzögerung $\dot{v} < 0$ können damit die Umfangskräfte berechnet werden, die an beiden Achsen die gleiche Sicherheit gegen Durchrutschen liefern.

Abb.4.2 zeigt die Kurve optimaler Antriebs- und Bremskräfte für typische Werte eines Pkw's.

An den Kippgrenzen $\dot{v}/g = -a_1/h$ und $\dot{v}/g = +a_2/h$ kann an der abhebenden Achse keine Umfangskraft mehr übertragen werden.

Die Anfangssteigung hängt nur von der statischen Achslastverteilung ab. Aus (4.28) und (4.29) folgt

$$\frac{d \frac{U_1}{m g}}{d \frac{\dot{v}}{g}} = \left(\frac{a_2}{h} - 2 \frac{\dot{v}}{g} \right) \frac{h}{a_1 + a_2} \quad (4.30)$$

und

$$\frac{d \frac{U_2}{m g}}{d \frac{\dot{v}}{g}} = \left(\frac{a_1}{h} + 2 \frac{\dot{v}}{g} \right) \frac{h}{a_1 + a_2} . \quad (4.31)$$

Für $\dot{v}/g = 0$ bleibt als Anfangssteigung

$$\left. \frac{d U_2}{d U_1} \right|_0 = \frac{a_1}{a_2} . \quad (4.32)$$

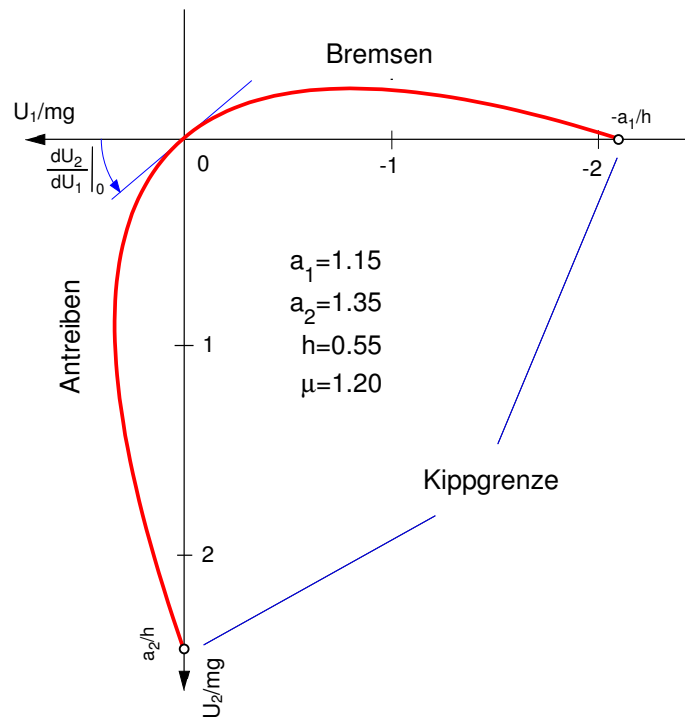


Abbildung 4.2.: Optimale Antriebs- und Bremskraftverteilung

4.1.7. Verschiedene Bremskraftverteilungen

In der Praxis versucht man die optimale Bremskraftverteilung durch konstante Bremskraftverteilung, Bremskraftbegrenzung oder durch Bremskraftreduzierung bestmöglich anzunähern, Abb. 4.3.

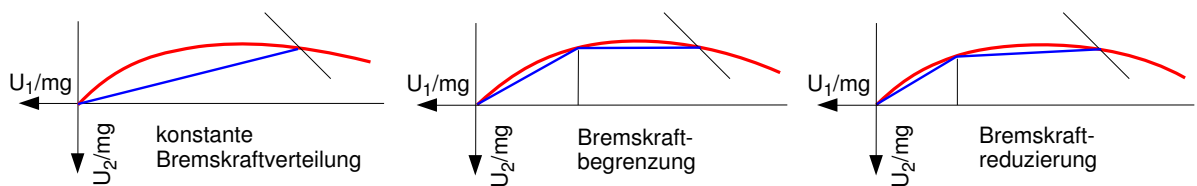


Abbildung 4.3.: Verschiedene Bremskraftverteilungen

Die Stabilität des Fahrzeugs hängt beim Bremsen vom Seitenkraftpotential an der Hinterachse ab. Deshalb realisiert man in der Praxis an der Hinterachse eine größere Sicherheit gegen Durchrutschen (Blockieren) als an der Vorderachse. Die Bremskraftabstimmungen verlaufen deshalb im physikalisch relevanten Bereich alle unterhalb der optimalen Kurve. Das schränkt insbesondere bei niedrigen Reibwerten die tatsächlich erreichbare Verzögerung ein.

Da die optimale Kurve stark von der Schwerpunktslage des Fahrzeugs abhängt, müssen bei der Festlegung tatsächlicher Bremskraftverteilungen zusätzliche Sicherheiten eingebaut werden.

Häufig wird die Bremskraftverteilung an die Achslasten angepaßt. Der Einfluß der Schwerpunkthöhe, die bei Lkw's ebenfalls stark schwanken kann, bleibt dabei unberücksichtigt und muß durch einen Sicherheitsabstand von der optimalen Kurve kompensiert werden.

Nur die Bremsdruckregelung bei Anti-Blockier-Systemen sorgt unabhängig von der Beladung für eine optimale Verteilung der Bremskräfte.

4.1.8. Anti-Blockier-Systeme

Treten beim Verzögern eines Fahrzeugs große Längsschlupfwerte auf, dann können kaum mehr Seitenkräfte übertragen werden. Die Stabilität und/oder Lenkfähigkeit des Fahrzeugs ist dann nicht mehr gewährleistet.

Durch Regelung des Bremsmomentes, bzw. des Bremsdruckes kann der Längsschlupf auf Werte begrenzt werden, die bei zusätzlichem Schräglauf noch nennenswerte Seitenkräfte ermöglichen.

Als Regelgröße wird dabei zunächst die Raddrehbeschleunigung $\dot{\Omega}$ verwendet. Die Raddrehbeschleunigungen erhält man durch Differenzieren der gemessenen Raddrehgeschwindigkeiten. Bei Längsschlupf $s_L = 0$ ist die Rollbedingung erfüllt. Es gilt dann

$$R\dot{\Omega} = \ddot{x} \quad (4.33)$$

wobei R den Reifenradius und $\ddot{x}$ die Fahrzeugbeschleunigung bezeichnet. Die maximale Verzögerung $b_{max} = -\dot{v}$ eines Fahrzeugs hängt gemäß (4.10) vom Reibwert μ ab. Bei bekanntem Reibwert könnte mit der aus (4.33) abgeleiteten Bedingung

$$|\dot{\Omega}| \leq \frac{1}{R} b_{max} \quad (4.34)$$

für jedes Rad eine einfache Regelung auf kleine Längsschlupfwerte durchgeführt werden.

Da bis heute keine Möglichkeit gefunden wurde, den lokalen Reibwert zwischen Reifen und Fahrbahn zuverlässig zu bestimmen, liefert (4.34) nur bei optimalen Verhältnissen $\mu = \mu_{max} \approx 1$ brauchbare Informationen. Als zweite Regelgröße wird deshalb der Längsschlupf verwendet.

Zur Berechnung der Längsschlüpfen wird aus allen gemessenen Raddrehgeschwindigkeiten eine Referenzgeschwindigkeit gebildet, die dann zur Berechnung der Schlüpfen an den Rädern herangezogen wird. Dieses Verfahren wird bei kleinen Geschwindigkeiten zu ungenau. Unterhalb einer Grenzgeschwindigkeit wird deshalb nicht geregelt. Probleme gibt es auch, wenn z.B. bei glatter Fahrbahn alle Räder gleichzeitig blockieren.

Der Eingriff auf das Bremsmoment erfolgt über den Bremsdruck, der durch ein 3-Wege Ventil *aufgebaut*, *gehalten* oder *abgebaut* werden kann. Zur Vermeidung von Schwingungen erfolgt der Abbau in der Regel langsamer als der Aufbau.

Als Konzepte kommen die *Einzelradregelung*, oder pro Achse *select high* oder *select low* Regelungen zum Einsatz.

Zur Vermeidung einer starken Gierreaktion bei μ -split Bremsungen wird an der Hinterachse häufig das Prinzip *select low* angewendet. Der Bremsdruck wird dabei an beiden Rädern auf den geringeren Reibwert eingeregelt. Dadurch erzeugen die Bremskräfte an der Hinterachse kein Giermoment. Die maximal erreichbare Verzögerung wird dabei allerdings etwas reduziert.

4.2. Anfahr- und Bremsnicken

4.2.1. Ebenes Fahrzeugmodell

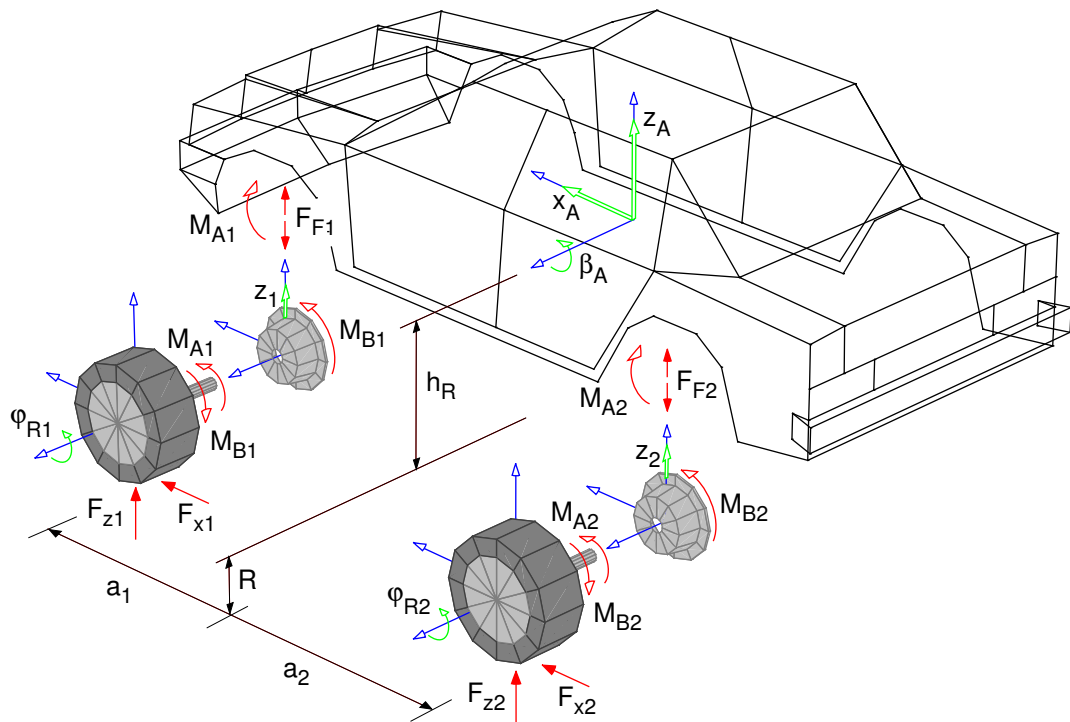


Abbildung 4.4.: Ebenes Fahrzeugmodell

Das in Abb. 4.4 skizzierte Fahrzeugmodell besteht aus fünf starren Körpern. Der Aufbau hat drei freie Bewegungsmöglichkeiten: Längsbewegung x_A , Vertikalbewegung z_A und Nickbewegung β_A . Die Koordinaten z_1 und z_2 beschreiben die Vertikalbewegungen der Rad/Achskörper relativ zum Aufbau. Die Längs- und Drehbewegungen der Radkörper relativ zum Aufbau können über die Aufhängungskinematik als Funktionen der Federbewegungen dargestellt werden:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(z_1), \quad \beta_1 = \beta_1(z_1); \\ x_2 &= x_2(z_2), \quad \beta_2 = \beta_2(z_2). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Die Drehwinkel φ_{R1} und φ_{R2} beschreiben die Raddrehungen relativ zu den Radkörpern.

Die Kräfte zwischen Radkörper und Aufbau werden mit F_{F1} und F_{F2} bezeichnet. An den Rädern greifen Antriebs- M_{A1} , M_{A2} und Bremsmomente M_{B1} , M_{B2} , Umfangskräfte U_1 , U_2

sowie die Radlasten P_1 , P_2 an. Die Bremsmomente stützen sich an den Radkörpern, die Antriebsmomente über den Antriebsstrang direkt am Fahrzeug ab. Die auf die einzelnen Körper wirkenden Kräfte und Momente sind in der letzten Spalte der Tabellen 4.1 und 4.2 aufgeführt.

4.2.2. Lagebeschreibung

Ortsvektor und Drehmatrix

$$r_{0A,0} = \begin{bmatrix} x_A \\ 0 \\ R + h_R + z_A \end{bmatrix}; \quad A_{0A} = \begin{bmatrix} \cos \beta_A & 0 & \sin \beta_A \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta_A & 0 & \cos \beta_A \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

beschreiben die Lage des Aufbauschwerpunktes relativ zu einem ortsfesten System 0.

Mit $R = \text{const.}$ und $h_R = \text{const.}$ erhält man daraus sofort die Geschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit des Aufbaus

$$v_{0A,0} = \begin{bmatrix} \dot{x}_A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{z}_A \end{bmatrix}; \quad \omega_{0A,0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\beta}_A \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.37)$$

Die Lage der Radkörper ist durch

$$r_{0RK_1,0} = r_{0A,0} + A_{0A} r_{ARK_1,A} \quad \text{mit} \quad r_{ARK_1,A} = \begin{bmatrix} a + x_1 \\ 0 \\ -h_R + z_1 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

und

$$A_{0RK_1} = A_{0A} A_{ARK_1} \quad \text{mit} \quad A_{ARK_1} = \begin{bmatrix} \cos \beta_1 & 0 & \sin \beta_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta_1 & 0 & \cos \beta_1 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

sowie

$$r_{0RK_2,0} = r_{0A,0} + A_{0A} r_{ARK_2,A} \quad \text{mit} \quad r_{ARK_2,A} = \begin{bmatrix} -b + x_2 \\ 0 \\ -h_R + z_2 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

und

$$A_{0RK_2} = A_{0A} A_{ARK_2} \quad \text{mit} \quad A_{ARK_2} = \begin{bmatrix} \cos \beta_2 & 0 & \sin \beta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta_2 & 0 & \cos \beta_2 \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

gegeben.

Bei gut ausgewuchteten Rädern geben die Ortsvektoren $r_{ARK_1,A}$ und $r_{ARK_2,A}$ auch die Lage der Radschwerpunkte an. Vernachlässigt man Vorspur- und Sturzwinkel, dann gilt für die Drehmatrizen der Räder

$$A_{0R_1} = A_{0A} A_{ARK_1} A_{RRK_1} \quad \text{mit} \quad A_{RRK_1} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{R1} & 0 & \sin \varphi_{R1} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi_{R1} & 0 & \cos \varphi_{R1} \end{bmatrix}, \quad (4.42)$$

$$A_{0R_2} = A_{0A} A_{ARK_2} A_{RRK_2} \quad \text{mit} \quad A_{RRK_2} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{R2} & 0 & \sin \varphi_{R2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi_{R2} & 0 & \cos \varphi_{R2} \end{bmatrix}. \quad (4.43)$$

4.2.3. Geschwindigkeitszustand bei kleinen Auslenkungen

Bei kleinen Drehbewegungen des Aufbaus und bei kleinen Federbewegungen erhält man für die Geschwindigkeit der Radkörper und Räder

$$v_{0RK_1,0} = v_{0R_1,0} = \begin{bmatrix} \dot{x}_A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{z}_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -h_R \dot{\beta}_A \\ 0 \\ -a \dot{\beta}_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial z_1} \dot{z}_1 \\ 0 \\ \dot{z}_1 \end{bmatrix}; \quad (4.44)$$

$$v_{0RK_2,0} = v_{0R_2,0} = \begin{bmatrix} \dot{x}_A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{z}_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -h_R \dot{\beta}_A \\ 0 \\ +b \dot{\beta}_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial z_2} \dot{z}_2 \\ 0 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix}. \quad (4.45)$$

Die Winkelgeschwindigkeiten der Radkörper und Räder sind durch

$$\omega_{0RK_1,0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\beta}_A \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\beta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \omega_{0R_1,0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\beta}_A \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\beta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\varphi}_{R1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

sowie

$$\omega_{0RK_2,0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\beta}_A \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\beta}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \omega_{0R_2,0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\beta}_A \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\beta}_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\varphi}_{R2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

gegeben.

Mit den verallgemeinerten Geschwindigkeiten

$$z = [\dot{x}_A \quad \dot{z}_A \quad \dot{\beta}_A \quad \dot{\beta}_1 \quad \dot{\varphi}_{R1} \quad \dot{\beta}_2 \quad \dot{\varphi}_{R2}]^T \quad (4.48)$$

können die Geschwindigkeiten und die Winkelgeschwindigkeiten (4.37), (4.44), (4.45), (4.46), (4.47) in der Form

$$v_{0i} = \sum_{j=1}^7 \frac{\partial v_{0i}}{\partial z_j} z_j \quad \text{und} \quad \omega_{0i} = \sum_{j=1}^7 \frac{\partial \omega_{0i}}{\partial z_j} z_j \quad (4.49)$$

angeschrieben werden.

4.2.4. Richtungsvektoren und Bewegungsgleichung

Die Richtungsvektoren der Translation $\frac{\partial v_{0i}}{\partial z_j}$ und Rotation $\frac{\partial \omega_{0i}}{\partial z_j}$ für die 5 Körper $i = 1(1)5$ und für die 7 verallgemeinerten Geschwindigkeiten $j = 1(1)7$ sind in den Tabellen 4.1 und 4.2 zusammengestellt.

einzelne Körper	Richtungsvektoren der Translation $\partial v_{0i}/\partial z_j$							eingep. Kräfte F_i^e
	$\dot{x}_A$	$\dot{z}_A$	$\dot{\beta}_A$	$\dot{z}_1$	$\dot{\varphi}_{R1}$	$\dot{z}_2$	$\dot{\varphi}_{R2}$	
Aufbau m_A	1	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	1	0	0	0	0	0	$F_{F1} + F_{F2} - m_A g$
Radkörper vorne m_{RK1}	1	0	$-h_R$	$\frac{\partial x_1}{\partial z_1}$	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	1	$-a$	1	0	0	0	$-F_{F1} - m_{RK1} g$
Rad vorne m_{R1}	1	0	$-h_R$	$\frac{\partial x_1}{\partial z_1}$	0	0	0	U_1
	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	1	$-a$	1	0	0	0	$P_1 - m_{R1} g$
Radkörper hinten m_{RK2}	1	0	$-h_R$	0	0	$\frac{\partial x_2}{\partial z_2}$	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	1	b	0	0	1	0	$-F_{F2} - m_{RK2} g$
Rad hinten m_{R2}	1	0	$-h_R$	0	0	$\frac{\partial x_2}{\partial z_2}$	0	U_2
	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	1	b	0	0	1	0	$P_2 - m_{R2} g$

Tabelle 4.1.: Richtungsvektoren der Translation mit eingepprägten Kräften

Mit Hilfe der Richtungsvektoren der Translation und der Rotation können die Elemente der Massenmatrix M und die Komponenten des Vektors der verallgemeinerten Kräfte und Momente Q berechnet werden:

$$M(i, j) = \sum_{k=1}^5 \left(\frac{\partial v_{0k}}{\partial z_i} \right)^T m_k \frac{\partial v_{0k}}{\partial z_j} + \sum_{k=1}^5 \left(\frac{\partial \omega_{0k}}{\partial z_i} \right)^T \Theta_k \frac{\partial \omega_{0k}}{\partial z_j}; \quad i, j = 1(1)7; \quad (4.50)$$

$$Q(i) = \sum_{k=1}^5 \left(\frac{\partial v_{0k}}{\partial z_i} \right)^T F_k^e + \sum_{k=1}^5 \left(\frac{\partial \omega_{0k}}{\partial z_i} \right)^T M_k^e; \quad i = 1(1)7. \quad (4.51)$$

Die Bewegungsgleichungen für das ebene Fahrzeugmodell ist dann durch

$$M \dot{z} = Q \quad (4.52)$$

gegeben.

einzelne Körper	Richtungsvektoren der Rotation $\partial\omega_{0i}/\partial z_j$							eingeprägte Momente M_i^e
	$\dot{x}_A$	$\dot{z}_A$	$\dot{\beta}_A$	$\dot{z}_1$	$\dot{\varphi}_{R1}$	$\dot{z}_2$	$\dot{\varphi}_{R2}$	
Aufbau Θ_A	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	1	0	0	0	0	$-M_{A1}-M_{A2}-a F_{F1}+b F_{F2}$
	0	0	0	0	0	0	0	0
Radkörper vorne Θ_{RK1}	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	1	$\frac{\partial\beta_1}{\partial z_1}$	0	0	0	M_{B1}
	0	0	0	0	0	0	0	0
Rad vorne Θ_{R1}	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	1	$\frac{\partial\beta_1}{\partial z_1}$	1	0	0	$M_{A1}-M_{B1}-R U_1$
	0	0	0	0	0	0	0	0
Radkörper hinten Θ_{RK2}	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	1	0	0	$\frac{\partial\beta_2}{\partial z_2}$	0	M_{B2}
	0	0	0	0	0	0	0	0
Rad hinten Θ_{R2}	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	1	0	0	$\frac{\partial\beta_2}{\partial z_2}$	1	$M_{A2}-M_{B2}-R U_2$
	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabelle 4.2.: Richtungsvektoren der Rotation mit eingepägten Momenten

4.2.5. Statisches Gleichgewicht

Mit den Abkürzungen

$$m_1 = m_{RK1} + m_{R1}; \quad m_2 = m_{RK2} + m_{R2}; \quad m_G = m_A + m_1 + m_2 \quad (4.53)$$

und

$$h = h_R + R \quad (4.54)$$

lauten die Komponenten des Vektors der verallgemeinerten Kräfte und Momente

$$\begin{aligned} Q(1) &= U_1 + U_2; \\ Q(2) &= P_1 + P_2 - m_G g; \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$Q(3) = -aP_1 + bP_2 - h(U_1 + U_2) + a m_1 g - b m_2 g;$$

$$\begin{aligned} Q(4) &= P_1 - F_{F1} + \frac{\partial x_1}{\partial z_1} U_1 - m_1 g + \frac{\partial \beta_1}{\partial z_1} (M_{A1} - R U_1); \\ Q(5) &= M_{A1} - M_{B1} - R U_1; \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} Q(6) &= P_2 - F_{F2} + \frac{\partial x_2}{\partial z_2} U_2 - m_2 g + \frac{\partial \beta_2}{\partial z_2} (M_{A2} - R U_2); \\ Q(7) &= M_{A2} - M_{B2} - R U_2. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Ohne Antriebs- und Bremsmomente

$$M_{A1} = 0; \quad M_{A2} = 0; \quad M_{B1} = 0; \quad M_{B2} = 0 \quad (4.58)$$

erhält man durch Nullsetzen der Gleichungen (4.55), (4.56) und (4.57) die statischen Umfangskräfte, die Federvorspannungen und die Radlasten

$$\begin{aligned} U_1^0 &= 0; & U_2^0 &= 0; \\ F_{F1}^0 &= \frac{b}{a+b} m_A g; & F_{F2}^0 &= \frac{a}{a+b} m_A g; \\ P_1^0 &= m_1 g + \frac{b}{a+b} m_A g; & P_2^0 &= m_2 g + \frac{a}{a+b} m_A g. \end{aligned} \quad (4.59)$$

4.2.6. Anfahren und Bremsen

Nimmt man an, daß bei einer Beschleunigung des Fahrzeugs $\ddot{x}_A \neq 0$ die Räder weder durchdrehen noch blockieren, sondern rollen, dann gilt

$$\begin{aligned} R \dot{\varphi}_{R1} &= \dot{x}_A - h_R \dot{\beta}_A + \frac{\partial x_1}{\partial z_1} \dot{z}_1; \\ R \dot{\varphi}_{R2} &= \dot{x}_A - h_R \dot{\beta}_A + \frac{\partial x_2}{\partial z_2} \dot{z}_2. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Im stationären Fall erreichen die Nickbewegung des Aufbaus und die Federwege konstante Werte

$$\beta_A = \beta_A^{stat} = const.; \quad z_1 = z_1^{stat} = const.; \quad z_2 = z_2^{stat} = const. \quad (4.61)$$

und (4.60) vereinfacht sich zu

$$R \dot{\varphi}_{R1} = \dot{x}_A; \quad R \dot{\varphi}_{R2} = \dot{x}_A. \quad (4.62)$$

Mit (4.61), (4.62) und (4.54) liefert die Bewegungsgleichung (4.52)

$$\begin{aligned} m_G \ddot{x}_A &= U_1^b + U_2^b; \\ 0 &= P_1^b + P_2^b; \\ -h_R(m_1 + m_2) \ddot{x}_A + \Theta_{R1} \frac{\ddot{x}_A}{R} + \Theta_{R2} \frac{\ddot{x}_A}{R} &= -a P_1^b + b P_2^b - (h_R + R)(U_1^b + U_2^b); \end{aligned} \quad (4.63)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial z_1} m_1 \ddot{x}_A + \frac{\partial \beta_1}{\partial z_1} \Theta_{R1} \frac{\ddot{x}_A}{R} &= P_1^b - F_{F1}^b + \frac{\partial x_1}{\partial z_1} U_1^b + \frac{\partial \beta_1}{\partial z_1} (M_{A1} - R U_1^b); \\ \Theta_{R1} \frac{\ddot{x}_A}{R} &= M_{A1} - M_{B1} - R U_1^b; \end{aligned} \quad (4.64)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_2}{\partial z_2} m_2 \ddot{x}_A + \frac{\partial \beta_2}{\partial z_2} \Theta_{R2} \frac{\ddot{x}_A}{R} &= P_2^b - F_{F2}^b + \frac{\partial x_2}{\partial z_2} U_2^b + \frac{\partial \beta_2}{\partial z_2} (M_{A2} - R U_2^b); \\ \Theta_{R2} \frac{\ddot{x}_A}{R} &= M_{A2} - M_{B2} - R U_2^b; \end{aligned} \quad (4.65)$$

wobei zur Vereinfachung der Gleichungen die stationären Federkräfte, Umfangskräfte und Radlasten in statische und beschleunigungsbedingte Terme unterteilt wurden

$$U_i^{stat} = U_i^0 + U_i^b; \quad P_i^{stat} = P_i^0 + P_i^b; \quad F_{Fi}^{stat} = F_{Fi}^0 + F_{Fi}^b; \quad i = 1, 2. \quad (4.66)$$

Bei vorgegebenen Antriebs- und Bremsmomenten können aus (4.63), (4.64) und (4.65) die Fahrzeugbeschleunigung $\ddot{x}_A$, und die Reifenkräfte U_1^b , U_2^b , P_1^b , P_2^b sowie die Federkräfte F_{F1}^b , F_{F2}^b berechnet werden.

Über die Kraftgesetze, die hier linear angenommen werden, erzeugen die beschleunigungsbedingten Kräfte neben Vertikalbewegungen der Radkörper auch eine Vertikalverschiebung und eine Nickbewegung des Aufbaus

$$\begin{aligned} F_{F1}^b &= c_{A1} z_1^b, \\ F_{F2}^b &= c_{A2} z_2^b, \\ P_1^b &= -c_{R1} (z_A^b - a \beta_A^b + z_1^b), \\ P_2^b &= -c_{R2} (z_A^b + b \beta_A^b + z_2^b). \end{aligned} \quad (4.67)$$

Insbesondere das durch Antreiben oder Bremsen hervorgerufene Nicken des Fahrzeugs $\beta_A^b \neq 0$ wird, wenn es zu stark ausgeprägt ist, als störend empfunden.

4.2.7. Brems-Nickpol bei realen Achsaufhängungen

Sowohl die Drehung der Radkörper als auch die Längsverschiebung der Radmitten beeinflussen den beim Bremsen auftretenden Aufbaunickwinkel. Tatsächlich kommt es auf die Bewegung des Radaufstandspunktes an. Minimale Bremsnickwinkel erhält man, wenn sich die Radaufstandspunkte beim Einfedern an der Vorderachse nach vorne und an der Hinterachse nach hinten bewegen.

Aus den Bewegungen der Radaufstandspunkte in der x -, z -Ebene können die Abstützwinkel und der (Brems-)Nickpol ermittelt werden, Abb. 4.5.

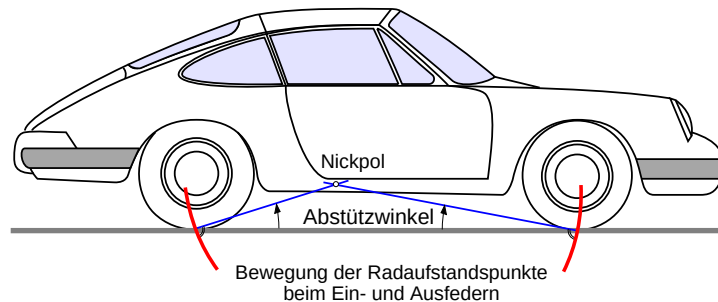


Abbildung 4.5.: Abstützwinkel und Nickpol

Je höher der Nickpol über der Fahrbahn liegt, desto geringer ist der Nickwinkel des Aufbaus beim Bremsen.

5. Querdynamik

5.1. Stationäre Kurvenfahrt

5.1.1. Kippgrenze

Die Kippgefahr eines Fahrzeugs wird in erster Linie durch die Spurweite und die Schwerpunkthöhe bestimmt. Bei Nutzfahrzeugen müssen jedoch auch die Reifeneinfederung und das Aufbauwanken berücksichtigt werden, Abb. 5.1.

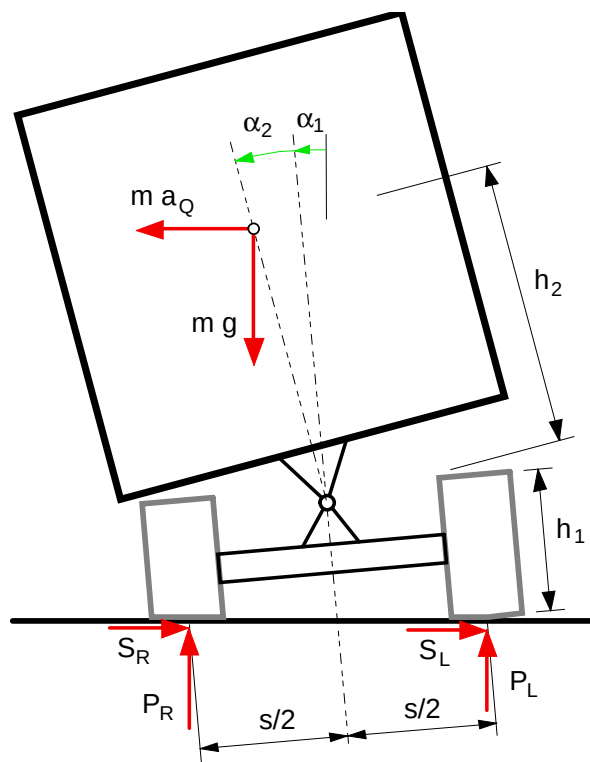


Abbildung 5.1.: Kippgefahr bei Nutzfahrzeugen

Das Momentengleichgewicht am bereits geneigten Fahrzeug liefert

$$(P_R - P_L) \frac{s}{2} \cos \alpha_1 = m a_Q [h_1 \cos \alpha_1 + h_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2)] + m g [h_1 \sin \alpha_1 + h_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2)], \quad (5.1)$$

wobei a_Q die Querschleunigung und m die anteilige Fahrzeugmasse angeben. Für kleine Winkel $\alpha_1 \ll 1$ und $\alpha_2 \ll 1$ bleibt

$$(P_R - P_L) \frac{s}{2} = m a_Q (h_1 + h_2) + m g [(h_1 + h_2) \alpha_1 + h_2 \alpha_2] . \quad (5.2)$$

Wenn das Fahrzeug nach rechts kippt, hebt der linke Reifen ab

$$P_L^K = 0 \quad (5.3)$$

und der rechte Reifen trägt das gesamte Gewicht des Fahrzeugs

$$P_R^K = m g . \quad (5.4)$$

Mit (5.3) und (5.4) folgt aus (5.2)

$$\frac{a_Q^K}{g} = \frac{\frac{s}{2}}{h_1 + h_2} - \alpha_1^K - \frac{h_2}{h_1 + h_2} \alpha_2^K . \quad (5.5)$$

Das Fahrzeug kippt, wenn die Querschleunigung a_Q den Grenzwert a_Q^K überschreitet.

Achs- und Aufbauneigung reduzieren die Kippgrenze. Die Winkel α_1^K und α_2^K können aus der Reifensteifigkeit c_R und der Wanksteifigkeit des Aufbaus berechnet werden.

Bei der Geradeausfahrt verteilt sich das anteilige Fahrzeuggewicht auf beide Reifen

$$P_L^{stat} = P_R^{stat} = \frac{1}{2} m g . \quad (5.6)$$

Mit der Aufteilung

$$P_R^K = P_R^{stat} + \Delta P \quad (5.7)$$

und den Beziehungen (5.4), (5.6) erhält man für die Erhöhung der Radlast an der Kippgrenze

$$\Delta P = \frac{1}{2} m g . \quad (5.8)$$

Die daraus resultierende Reifeneindrückung folgt dann aus

$$\Delta P = c_R \Delta r . \quad (5.9)$$

Da der linke Reifen gleichzeitig um den selben Betrag ausfedert, gilt für den Neigungswinkel der Achse

$$2 \Delta r = s \alpha_1^K \quad \text{oder} \quad \alpha_1^K = \frac{2 \Delta r}{s} = \frac{m g}{s c_R} . \quad (5.10)$$

Analog zu (5.2) liefert das Momentengleichgewicht am Aufbau

$$c_W * \alpha_2 = m a_Q h_2 + m g h_2 (\alpha_1 + \alpha_2) , \quad (5.11)$$

wobei c_W die Wanksteifigkeit der Aufbaufederung bezeichnet.

An der Kippgrenze $a_Q = a_Q^K$ gilt demnach

$$\alpha_2^K = \frac{a_Q^K}{g} \frac{mgh_2}{c_W - mgh_2} + \frac{mgh_2}{c_W - mgh_2} \alpha_1^K. \quad (5.12)$$

Damit das Fahrzeug nicht bereits bei $a_Q^K = 0$ umkippt, ist mit $c_W > c_W^{min} = mgh_2$ ein Mindestmaß an Wanksteifigkeit erforderlich.

Mit (5.10) und (5.12) lautet die Kippbedingung (5.5)

$$(h_1 + h_2) \frac{a_Q^K}{g} = \frac{s}{2} - (h_1 + h_2) \frac{1}{c_R^*} - h_2 \frac{a_Q^K}{g} \frac{1}{c_W^* - 1} - h_2 \frac{1}{c_W^* - 1} \frac{1}{c_R^*}, \quad (5.13)$$

wobei zur Abkürzung die dimensionslosen Steifigkeiten

$$c_R^* = \frac{c_R}{\frac{m \cdot g}{s}} \quad \text{und} \quad c_W^* = \frac{c_W}{m \cdot g \cdot h_2} \quad (5.14)$$

verwendet wurden. Nach der bezogenen Querbeschleunigung aufgelöst bleibt

$$\frac{a_Q^K}{g} = \frac{\frac{s}{2}}{h_1 + h_2 + \frac{h_2}{c_W^* - 1}} - \frac{1}{c_R^*}. \quad (5.15)$$

Bei schweren Nutzfahrzeugen kann eine zwillingsbereifte Achse mit $m = 13\,000 \text{ kg}$ belastet werden. Die Vertikalsteifigkeit eines Reifens beträgt $c_R = 800\,000 \text{ N/m}$ und die Spurweite kann mit $s = 2 \text{ m}$ angesetzt werden. Die Werte $h_1 = 0.8 \text{ m}$ und $h_2 = 1.0 \text{ m}$ gelten bei Hochlastbeladung. Mit diesen Werten erhält man die in Abb. 5.2 dargestellten Ergebnisse.

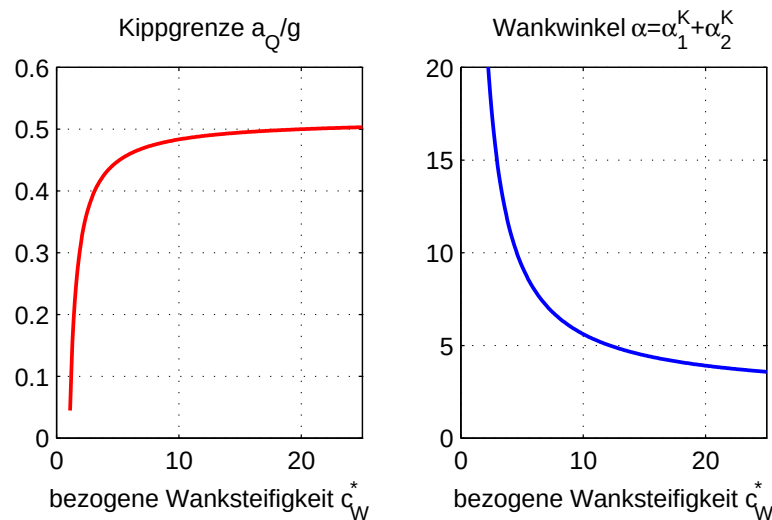
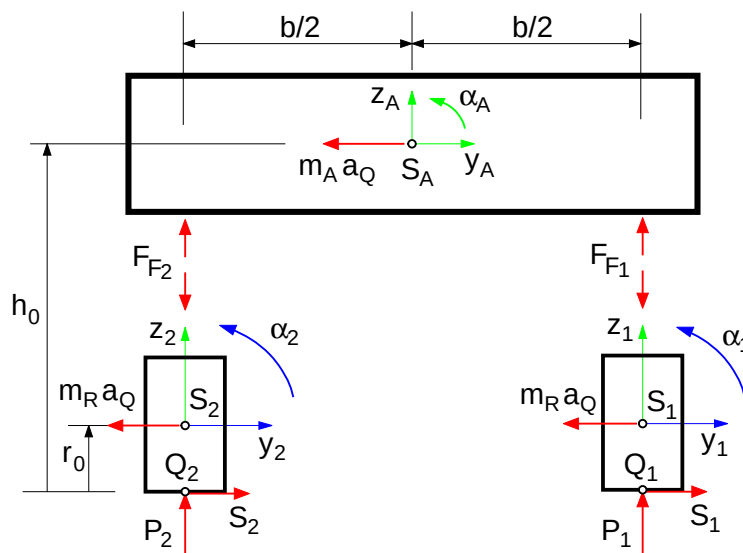


Abbildung 5.2.: Kippgrenze für ein Nutzfahrzeug bei stationärer Kurvenfahrt

Bei einer bezogenen Wanksteifigkeit von $c_W^* = 5$ liegt die Kippgrenze bei $a_Q \approx 0.45 \text{ g}$ und erreicht damit bereits 90% des Maximalwertes. Das Fahrzeug kippt dann bei einem Wankwinkel von $\alpha \approx 10^\circ$.

Durchfährt ein Fahrzeug eine Kurve mit der Querschleunigung a_Q , dann werden auf die einzelnen Massen Zentrifugalkräfte ausgeübt. Bei dem ebenen Wankmodell in Abb. 5.3 sind das die Kräfte $m_A a_Q$ und $m_R a_Q$, wobei m_A die Aufbau- und m_R die Radmasse bezeichnet.



Durch die, am Aufbauschwerpunkt S_A angreifende, Zentrifugalkraft $m_A a_y$ entsteht ein Wankmoment, das den Aufbau um den Winkel α_A neigt und zu einem wechselseitigen Einfedern der Räder führt, $z_1 = -z_2$.

Durch die Sturzwinkel $\gamma_1 > 0$ und $\gamma_2 > 0$ ergibt sich eine ungünstige Druckverteilung im Latsch, was eine Reduktion der maximal übertragbaren Seitenkräfte zur Folge hat.

Bei sportlicheren Fahrzeugen verwendet man deshalb eine Achskinematik, bei der die Räder beim Ein- und Ausfedern um die Längsachse gedreht werden, $\alpha_1 = \alpha_1(z_1)$ und $\alpha_2 = \alpha_2(z_2)$. Damit kann dann eine "Sturzkompensation" mit $\gamma_1 \approx 0$ und $\gamma_2 \approx 0$ erreicht werden, Abb. 5.4 b. Durch die Drehbewegung der Räder um die Fahrzeuglängsachse werden die Radauflandpunkte beim Einfedern des Rades nach außen, d.h. gegen die Seitenkraft, bewegt. Dadurch wird eine "Wankabstützung" erzielt, die den Wankwinkel des Aufbaus reduziert.

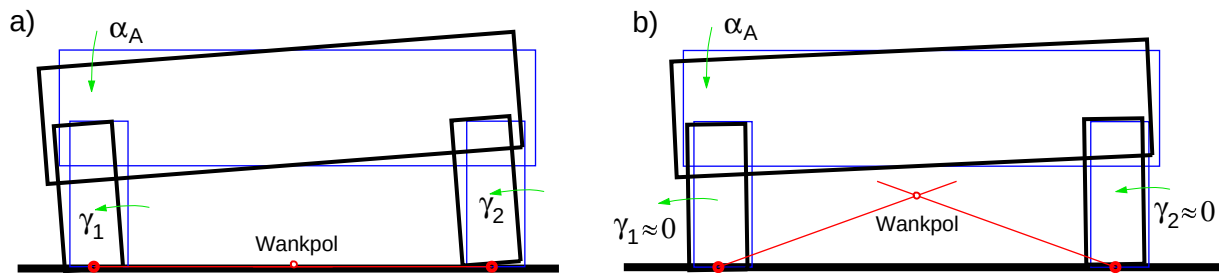


Abbildung 5.4.: Wankverhalten bei Kurvenfahrt: a) ohne und b) mit Sturzkompensation

5.1.3. Wankpol und Rollachse

Aus der Querbewegung der Radaufstandspunkte Q_1 und Q_2 kann der "Wankpol" konstruiert werden, Abb. 5.4.

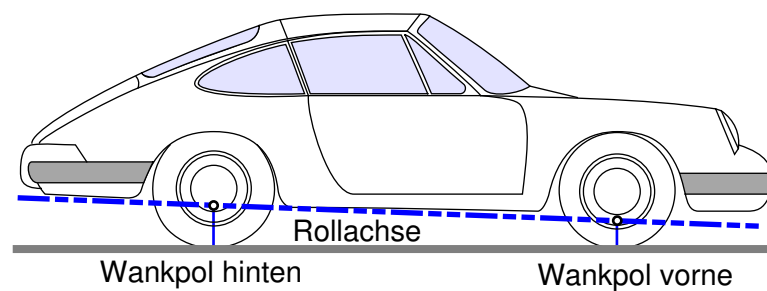


Abbildung 5.5.: Rollachse

Die Linie durch die Wankpole an der Vorder- und Hinterachse wird als "Rollachse" bezeichnet, Abb. 5.5.

5.1.4. Wankwinkel und Radlasten

Bei stationärer Kreisfahrt ist das Fahrzeug im Gleichgewicht. Mit dem Prinzip der virtuellen Arbeit

$$\delta W = 0 \quad (5.16)$$

kann die Gleichgewichtslage berechnet werden.

Bei dem ebenen Fahrzeugmodell in Abb. 5.3 werden die Aufbaukräfte F_{F1} , F_{F2} und Reifenkräfte S_1 , P_1 , S_2 , P_2 , durch lineare Federelemente mit den Konstanten c_A und c_Q , c_R angenähert. Die Arbeit W dieser Kräfte kann direkt oder mit $W = -V$ über das Potential V

berechnet werden. Bei kleinen Auslenkungen mit linearisierter Kinematik erhält man

$$\begin{aligned}
 W = & -m_A a_Q y_A \\
 & -m_R a_Q (y_A + h_R \alpha_A + y_1)^2 - m_R a_Q (y_A + h_R \alpha_A + y_2)^2 \\
 & -\frac{1}{2} c_A z_1^2 - \frac{1}{2} c_A z_2^2 \\
 & -\frac{1}{2} c_S (z_1 - z_2)^2 \\
 & -\frac{1}{2} c_Q (y_A + h_0 \alpha_A + y_1 + r_0 \alpha_1)^2 - \frac{1}{2} c_Q (y_A + h_0 \alpha_A + y_2 + r_0 \alpha_2)^2 \\
 & -\frac{1}{2} c_R \left(z_A + \frac{b}{2} \alpha_A + z_1\right)^2 - \frac{1}{2} c_R \left(z_A - \frac{b}{2} \alpha_A + z_2\right)^2,
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

wobei die Abkürzung $h_R = h_0 - r_0$ verwendet wurde und c_S die, auf die vertikale Verschiebung der Radmitten umgerechnete, Federkonstante des Stabilisators angibt.

Die Kinematik der Radaufhängung ist symmetrisch. Mit den linearen Ansätzen

$$y_1 = \frac{\partial y}{\partial z} z_1, \quad \alpha_1 = \frac{\partial \alpha}{\partial z} \alpha_1 \quad \text{und} \quad y_2 = -\frac{\partial y}{\partial z} z_2, \quad \alpha_2 = -\frac{\partial \alpha}{\partial z} \alpha_2 \tag{5.18}$$

kann die Arbeit W als Funktion des Lagevektors

$$y = [y_A, z_A, \alpha_A, z_1, z_2]^T \tag{5.19}$$

dargestellt werden. Mit

$$W = W(y) \tag{5.20}$$

folgt aus dem Prinzip der virtuellen Arbeit (5.16) über

$$\delta W = \frac{\partial W}{\partial y} \delta y = 0 \tag{5.21}$$

wegen $\delta y \neq 0$ ein lineares Gleichungssystem der Form

$$K y = b, \tag{5.22}$$

wobei die Matrix K und der Vektor b durch

$$K = \begin{bmatrix}
 2c_Q & 0 & 2c_Q h_0 & \frac{\partial y^Q}{\partial z} c_Q & -\frac{\partial y^Q}{\partial z} c_Q \\
 0 & 2c_R & 0 & c_R & c_R \\
 2c_Q h_0 & 0 & c_\alpha & \frac{b}{2} c_R + h_0 \frac{\partial y^Q}{\partial z} c_Q & -\frac{b}{2} c_R - h_0 \frac{\partial y^Q}{\partial z} c_Q \\
 \frac{\partial y^Q}{\partial z} c_Q & c_R & \frac{b}{2} c_R + h_0 \frac{\partial y^Q}{\partial z} c_Q & c_A^* + c_S + c_R & -c_S \\
 -\frac{\partial y^Q}{\partial z} c_Q & c_R & -\frac{b}{2} c_R - h_0 \frac{\partial y^Q}{\partial z} c_Q & -c_S & c_A^* + c_S + c_R
 \end{bmatrix} \tag{5.23}$$

und

$$b = - \begin{bmatrix} m_A + 2m_R \\ 0 \\ (m_1 + m_2) h_R \\ m_R \partial y / \partial z \\ -m_R \partial y / \partial z \end{bmatrix} a_Q \quad (5.24)$$

gegeben sind. Folgende Abkürzungen wurden dabei verwendet

$$\frac{\partial y^Q}{\partial z} = \frac{\partial y}{\partial z} + r_0 \frac{\partial \alpha}{\partial z}, \quad c_A^* = c_A + c_Q \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)^2, \quad c_\alpha = 2c_Q h_0^2 + 2c_R \left(\frac{b}{2} \right)^2. \quad (5.25)$$

Das lineare Gleichungssystem (5.22) kann numerisch, z.B. mit MATLAB, gelöst werden. Damit kann dann der Einfluss der Aufbaufederung und der Achskinematik auf das Wankverhalten des Fahrzeugs untersucht werden.

Der Wankwinkel eines Fahrzeugs bei Kurvenfahrt hängt von der Wanksteifigkeit der Achsaufhängung und der Lage der Wankpole ab. Werden Vorder- und Hinterachse unterschiedlich ausgelegt, führt dies zu einer Verwindung des Aufbaus.

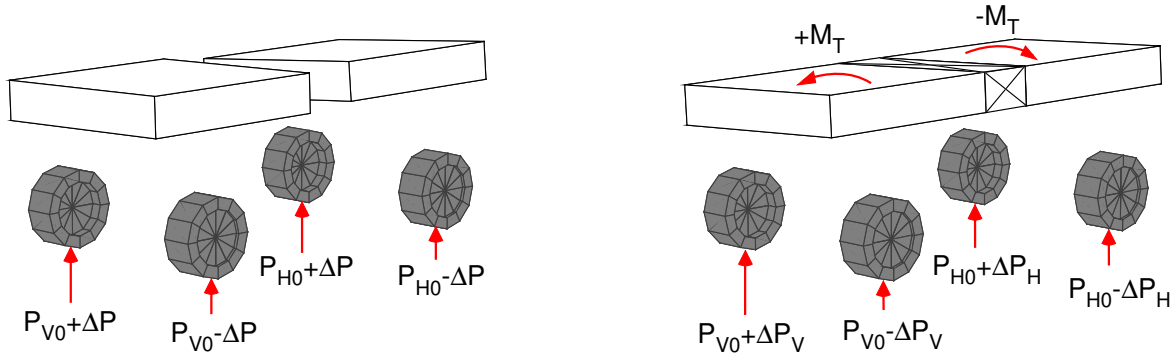


Abbildung 5.6.: Radlastdifferenzen bei torsionsweichem und starrem Aufbau

In Abb. 5.6 wurde angenommen, dass die Wankneigung an der Vorderachse kleiner als an der Hinterachse ist. Bei torsionsweichem Rahmen sind die Radlastdifferenzen an der Vorder- und Hinterachse gleich.

Das Torsionsmoment M_T im Rahmen sorgt für unterschiedliche Radlastdifferenzen an der Vorder- und Hinterachse. Über den degressiven Radlasteinfluss auf die Reifenkräfte kann damit die Steuertendenz eines Fahrzeugs beeinflusst werden.

5.2. Kinematische Betrachtung

5.2.1. Kinematisches Reifenmodell

Fährt ein Fahrzeug mit geringer Querbewegung durch die Kurve, dann werden zur Kurshaltung auch nur geringe Seitenkräfte benötigt. An den Rädern tritt dann kaum Querschlepp auf. Im Idealfall, bei verschwindendem Querschlepp, bewegen sich die Räder nur in Umfangsrichtung. Die Geschwindigkeitskomponente des Kontaktpunktes in Reifenquerrichtung verschwindet dann

$$v_S = e_S^T v_{0P} = 0. \quad (5.26)$$

Diese kinematische Bindungsgleichung kann zur Kursberechnung langsam fahrender Fahrzeuge verwendet werden.

5.2.2. Ackermanngeometrie

Im Gültigkeitsbereich des kinematischen Reifenmodells können über einen vorgegebenen momentanen Drehpol M die notwendigen Einschlagwinkel der Vorderräder konstruiert werden, Abb 5.7.

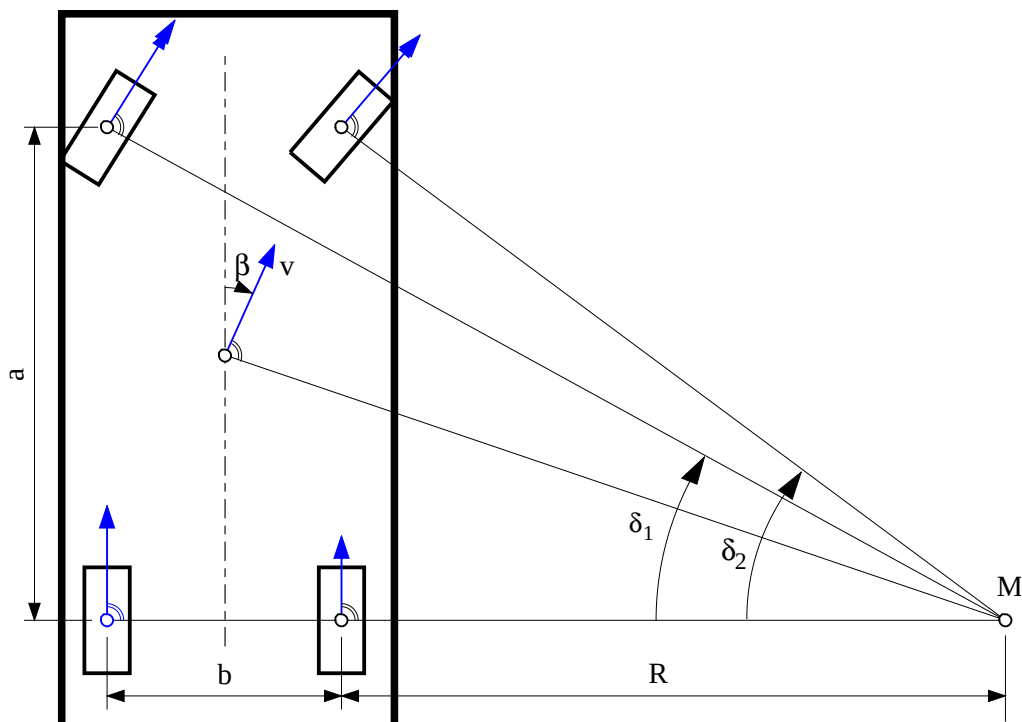


Abbildung 5.7.: Ackermann-Lenkgeometrie an einem zweiachsigen Fahrzeug

Bei langsam fahrenden Fahrzeugen wird das Lenkgestänge in der Regel nach der Ackermanngeometrie ausgelegt. Gibt man den Einschlagwinkel eines Rades, z.B. δ_2 vor, dann legt der

Achsabstand a den momentan gefahrenen Kurvenradius R fest

$$\tan \delta_2 = \frac{a}{R}; \quad \text{oder} \quad R = \frac{a}{\tan \delta_2}. \quad (5.27)$$

Für das zweite Rad gilt aber

$$\tan \delta_1 = \frac{a}{R + b}, \quad (5.28)$$

wobei b die Spurbreite bezeichnet.

Mit (5.27) lautet (5.28)

$$\tan \delta_1 = \frac{a}{\frac{a}{\tan \delta_2} + b} \quad (5.29)$$

oder umgeformt

$$\tan \delta_1 = \frac{\tan \delta_2}{1 + \frac{b}{a} \tan \delta_2}. \quad (5.30)$$

Die Abweichungen des tatsächlichen Einschlagwinkels δ_1^{ist} vom Ackermann-Lenkswinkel δ_1^A , der aus (5.30) folgt, werden als Lenkwinkelfehler bezeichnet $\Delta \delta_1 = \delta_1^{ist} - \delta_1^A$ und zur Beurteilung einer Lenkung herangezogen.

Bei der Drehung um den Momentanpol M liegt für jeden Punkt des Fahrzeugs die Geschwindigkeitsrichtung fest. Der Winkel β zwischen dem Geschwindigkeitsvektor v und der Fahrzeuglängsachse wird als Schwimmwinkel bezeichnet.

5.2.3. Kinematisches Einspurmodell mit Anhänger

5.2.3.1. Lagebeschreibung

Abb 5.8 zeigt ein einfaches Querdynamikmodell für ein zweiachsiges Fahrzeug mit einachsigem Anhänger. Fahrzeug und Anhänger bewegen sich auf einer horizontalen Fahrbahn.

Die Position des Fahrzeugs gegenüber dem fahrbahnfesten System x_0, y_0, z_0 -System wird durch den Ortsvektor zur Hinterachsmittle

$$r_{0A_2,0} = \begin{bmatrix} x_F \\ y_F \\ R \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

und die Drehmatrix

$$A_{02} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

festgelegt. Dabei ist $R = \text{const}$ der Reifenradius und x_F, y_F sowie γ sind verallgemeinerte Koordinaten.

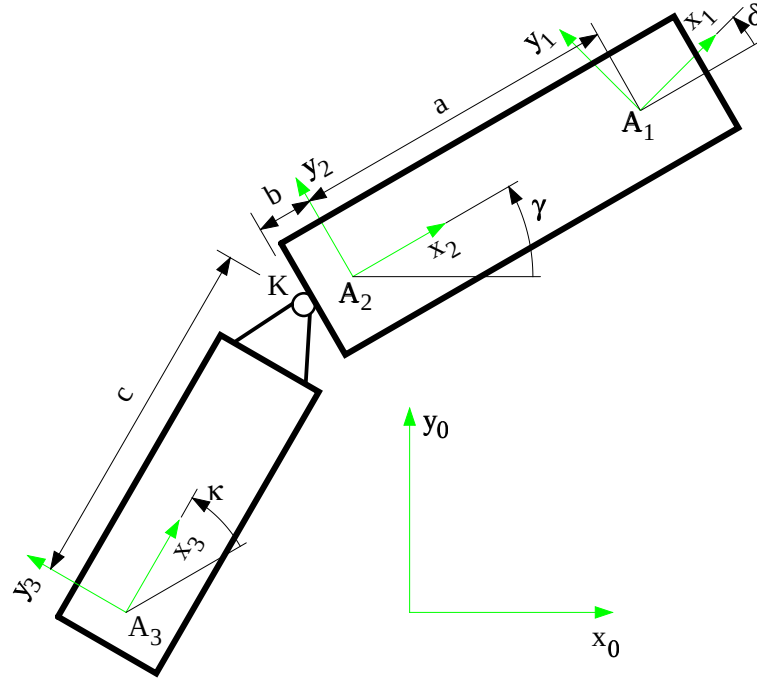


Abbildung 5.8.: Einfaches Querdynamik-Modell mit Anhänger

Der Ortsvektor

$$r_{0A_1,0} = r_{0A_2,0} + A_{02} r_{A_2A_1,2} \quad \text{mit} \quad r_{A_2A_1,2} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

und die Drehmatrix

$$A_{01} = A_{02} A_{21} \quad \text{mit} \quad A_{21} = \begin{bmatrix} \cos \delta & -\sin \delta & 0 \\ \sin \delta & \cos \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

beschreiben die Lage der Vorderachse, wobei $a = \text{const}$ den Achsabstand und δ den Lenkwinkel bezeichnet.

Der Ortsvektor

$$r_{0A_3,0} = r_{0A_2,0} + A_{02} (r_{A_2K,2} + A_{23} r_{KA_3,3}) \quad (5.35)$$

mit

$$r_{A_2K,2} = \begin{bmatrix} -b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad r_{KA_3,2} = \begin{bmatrix} -c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

und die Drehmatrix

$$A_{03} = A_{02} A_{23} \quad \text{mit} \quad A_{23} = \begin{bmatrix} \cos \kappa & -\sin \kappa & 0 \\ \sin \kappa & \cos \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

legen die Lage der Anhängerachse fest, wobei κ den Knickwinkel zwischen Fahrzeug und Anhänger bezeichnet und b, c die Abstände von der Hinterachse A_2 zum Kupplungspunkt K und vom Kupplungspunkt K zur Anhängerachse A_3 angeben.

5.2.3.2. Fahrzeugbewegungen

Dem kinematischen Reifenmodell entsprechend, vgl. Abschnitt 5.2.1, kann die Geschwindigkeit an der Hinterachse nur eine Komponente in Fahrzeuginnenrichtung haben

$$v_{0A_2,2} = \begin{bmatrix} v_{x2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.38)$$

Aus (5.31) folgt durch Differentiation

$$v_{0A_2,0} = \dot{r}_{0A_2,0} = \begin{bmatrix} \dot{x}_F \\ \dot{y}_F \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.39)$$

Mit der Transformation von (5.38) in das System 0

$$v_{0A_2,0} = A_{02} v_{0A_2,2} = A_{02} \begin{bmatrix} v_{x2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma v_{x2} \\ \sin \gamma v_{x2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

erhält man durch Gleichsetzen mit (5.39) zwei Differentialgleichungen 1. Ordnung für die Lagekoordinaten x_F und y_F

$$\begin{aligned} \dot{x}_F &= \cos \gamma v_{x2}, \\ \dot{y}_F &= \sin \gamma v_{x2}. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Die Geschwindigkeit an der Vorderachse folgt aus (5.33)

$$v_{0A_1,0} = \dot{r}_{0A_1,0} = \dot{r}_{0A_2,0} + \omega_{02,0} \times A_{02} r_{A_2A_1,2}. \quad (5.42)$$

Transformiert ins fahrzeugfeste System x_2, y_2, z_2 bleibt

$$v_{0A_1,2} = \underbrace{\begin{bmatrix} v_{x2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_{0A_2,2}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}}_{\omega_{02,2}} \times \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{r_{A_2A_1,2}} = \begin{bmatrix} v_{x2} \\ a \dot{\gamma} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.43)$$

Die Einheitsvektoren

$$e_{x1,2} = \begin{bmatrix} \cos \delta \\ \sin \delta \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad e_{y1,2} = \begin{bmatrix} -\sin \delta \\ \cos \delta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

legen die Längs- und Querrichtung an der Vorderachse fest.

Die Geschwindigkeitskomponente quer zum Rad muss gemäß (5.26) verschwinden

$$e_{y1,2}^T v_{0A1,2} = -\sin \delta v_{x2} + \cos \delta a \dot{\gamma} = 0. \quad (5.45)$$

In Längsrichtung bleibt dann

$$e_{x1,2}^T v_{0A1,2} = \cos \delta v_{x2} + \sin \delta a \dot{\gamma} = v_{x1}. \quad (5.46)$$

Aus (5.45) folgt eine Differentialgleichung 1. Ordnung für den Gierwinkel

$$\dot{\gamma} = \frac{v_{x2}}{a} \tan \delta. \quad (5.47)$$

5.2.3.3. Einfahrt in eine Kurve

Analog zu (5.27) kann der Lenkwinkel δ auf den momentanen Bahnradius R oder mit $k = 1/R$ auf die momentane Bahnkrümmung zurückgeführt werden

$$\tan \delta = \frac{a}{R} = a k. \quad (5.48)$$

Die Differentialgleichung für den Gierwinkel γ lautet dann

$$\dot{\gamma} = v_{x2} k. \quad (5.49)$$

Mit dem Krümmungsverlauf

$$k = k(t) = k_K \frac{t}{T} \quad (5.50)$$

wird die Einfahrt in eine Kurve als kontinuierlicher Übergang von einer Geraden mit der Krümmung $k = 0$ in einen Kreis mit der Krümmung $k = k_K$ beschrieben.

Der Gierwinkel des Fahrzeugs kann nun durch einfache Integration berechnet werden

$$\gamma(t) = \frac{v_{x2} k_K}{T} \frac{t^2}{2}, \quad (5.51)$$

wobei zum Zeitpunkt $t = 0$ mit $\gamma(t = 0) = 0$ ein verschwindender Gierwinkel angenommen wurde.

Die Fahrzeugposition folgt dann mit (5.51) aus den Differentialgleichungen (5.41)

$$\begin{aligned} x_F &= v_{x2} \int_{t=0}^{t=T} \cos \left(\frac{v_{x2} k_K}{T} \frac{t^2}{2} \right) dt, \\ y_F &= v_{x2} \int_{t=0}^{t=T} \sin \left(\frac{v_{x2} k_K}{T} \frac{t^2}{2} \right) dt. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Bei konstanter Fahrgeschwindigkeit $v_{x2} = \text{const.}$ ist (5.52) die Parameterdarstellung einer Klothoide oder Spinnlinie.

Aus (5.48) kann dann auch der erforderliche Lenkeinschlag berechnet werden. Sind zum Befahren der Kurve nur kleine Lenkeinschläge erforderlich, dann kann der Tangens durch das Argument angenähert werden und es gilt

$$\delta = \delta(t) \approx a k = a k_K \frac{t}{T}, \quad (5.53)$$

d.h.: das Befahren einer Klothoide ist durch kontinuierliches Einlenken zu bewerkstelligen.

5.2.3.4. Anhängerbewegungen

Die Geschwindigkeit der Anhängerachse erhält man durch Differenzieren des Ortsvektors (5.35)

$$v_{0A3,0} = \dot{r}_{0A3,0} = \dot{r}_{0A2,0} + \omega_{02,0} \times A_{02} r_{A2A3,2} + A_{02} \dot{r}_{A2A3,2}. \quad (5.54)$$

Mit

$$r_{A2A3,2} = r_{A2K,2} + A_{23} r_{KA3,3} = \begin{bmatrix} -b - c \cos \kappa \\ -c \sin \kappa \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.55)$$

und

$$\dot{r}_{A2A3,2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\kappa} \end{bmatrix}}_{\omega_{23,2}} \times \underbrace{\begin{bmatrix} -c \cos \kappa \\ -c \sin \kappa \\ 0 \end{bmatrix}}_{A_{23} r_{KA3,3}} = \begin{bmatrix} c \sin \kappa \dot{\kappa} \\ -c \cos \kappa \dot{\kappa} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.56)$$

bleibt, wenn (5.54) in das fahrzeugfeste System x_2, y_2, z_2 transformiert wird,

$$v_{0A3,2} = \underbrace{\begin{bmatrix} v_{x2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_{0A2,2}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}}_{\omega_{02,2}} \times \underbrace{\begin{bmatrix} -b - c \cos \kappa \\ -c \sin \kappa \\ 0 \end{bmatrix}}_{r_{A2A3,2}} + \underbrace{\begin{bmatrix} c \sin \kappa \dot{\kappa} \\ -c \cos \kappa \dot{\kappa} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\dot{r}_{A2A3,2}} = \begin{bmatrix} v_{x2} + c \sin \kappa (\dot{\kappa} + \dot{\gamma}) \\ -b \dot{\gamma} - c \cos \kappa (\dot{\kappa} + \dot{\gamma}) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.57)$$

Längs- und Querrichtung an der Anhängerachse werden durch die Einheitsvektoren

$$e_{x3,2} = \begin{bmatrix} \cos \kappa \\ \sin \kappa \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad e_{y3,2} = \begin{bmatrix} -\sin \kappa \\ \cos \kappa \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.58)$$

festgelegt.

Auch an der Hänger-Achse muss die Quergeschwindigkeit verschwinden

$$e_{y3,2}^T v_{0A3,2} = -\sin \kappa (v_{x2} + c \sin \kappa (\dot{\kappa} + \dot{\gamma})) + \cos \kappa (-b \dot{\gamma} - c \cos \kappa (\dot{\kappa} + \dot{\gamma})) = 0. \quad (5.59)$$

In Längsrichtung bleibt

$$e_{x3,2}^T v_{0A3,2} = \cos \kappa (v_{x2} + c \sin \kappa (\dot{\kappa} + \dot{\gamma})) + \sin \kappa (-b \dot{\gamma} - c \cos \kappa (\dot{\kappa} + \dot{\gamma})) = v_{x3} \quad (5.60)$$

Setzt man (5.47) in (5.59) ein, dann erhält man auch für den Knickwinkel eine Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\dot{\kappa} = -\frac{v_{x2}}{a} \left(\frac{a}{c} \sin \kappa + \left(\frac{b}{c} \cos \kappa + 1 \right) \tan \delta \right). \quad (5.61)$$

Die Differentialgleichungen (5.41) und (5.47) beschreiben Lage und Orientierung des Fahrzeugs in der x_0, y_0 Ebene. Die Stellung des Anhängers (Knickwinkel) relativ zum Fahrzeug folgt aus (5.61).

5.2.3.5. Kursberechnungen

Gibt man die Fahrzeuggeschwindigkeit und den Lenkwinkelverlauf vor, $v_{x2} = v_{x2}(t)$ und $\delta = \delta(t)$, dann kann durch numerische Integration der Differentialgleichungen (5.41), (5.47) und (5.61) für gegebene Parameter a, b, c der Kurs von Fahrzeug und Anhänger und damit z.B. der Platzbedarf eines Gespanns berechnet werden.

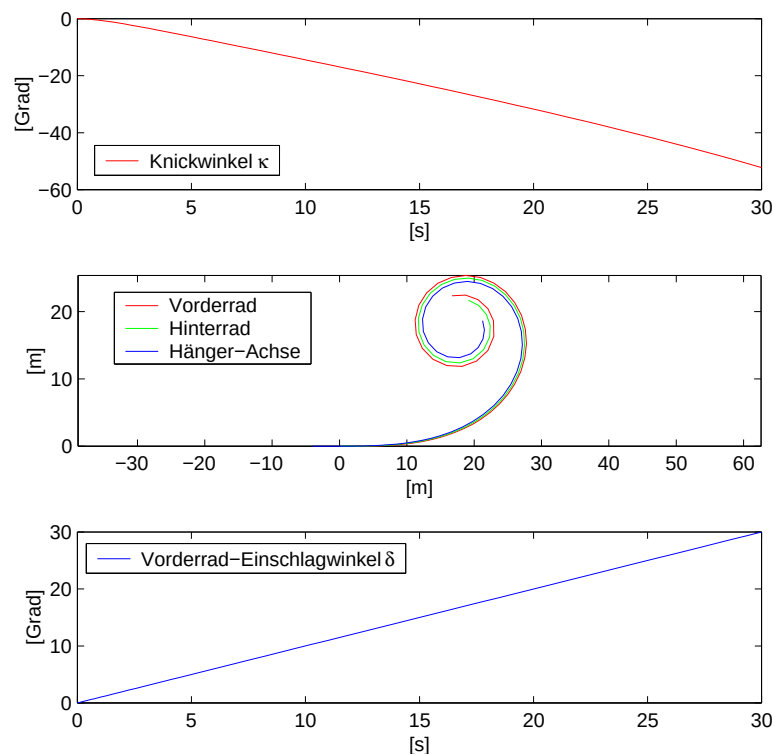


Abbildung 5.9.: Langsames Lenkradzuziehen

Wird bei konstanter Fahrgeschwindigkeit das Lenkrad langsam zugezogen, dann durchfährt das Fahrzeug eine klothoidenähnliche Figur, Abb 5.9.

5.3. Lineares Einspurmodell

5.3.1. Kräfte

Die Reifenkräfte an den Rädern einer Achse werden zu einer Resultierenden zusammengefasst. Reifenmomente, der Rollwiderstand und am Fahrzeug angreifende Luftkräfte und -momente bleiben unberücksichtigt.

Anders wie beim kinematischen Reifenmodell werden jetzt kleine Querbewegungen in den Kontaktpunkten zugelassen. Bei kleinen Querschlüpfen kann die Seitenkraft durch einen linearen Ansatz

$$S = k_P s_Q \quad (5.62)$$

angenähert werden, wobei k_P eine von der Radlast abhängige Konstante und der Querschlupf durch (3.17) definiert ist.

Da das Fahrzeug weder angetrieben noch gebremst wird, ist an jedem Rad die Rollbedingung

$$R\Omega = e_x^T v_{0P} \quad (5.63)$$

erfüllt. Dabei ist R der Reifenradius, v_{0P} die Kontaktpunktsgeschwindigkeit und e_x der Einheitsvektor in Umfangsrichtung.

Mit der Reifenquergeschwindigkeit

$$v_S = e_y^T v_{0P} \quad (5.64)$$

und der Rollbedingung (5.63) kann der Querschlupf aus

$$s_Q = \frac{-e_y^T v_{0P}}{|e_x^T v_{0P}|} \quad (5.65)$$

berechnet werden, wobei e_y den Einheitsvektor in Reifenquerrichtung angibt.

Die Bewegungen des Fahrzeugmodells, Abb. 5.10, in der x_0, y_0 Ebene werden also nur durch die Seitenkräfte

$$S_1 = k_{P_1} s_{Q_{A_1}}; S_2 = k_{P_2} s_{Q_{A_2}} \quad (5.66)$$

beeinflusst.

5.3.2. Kinematik

Bei dem in Abb. 5.10 skizzierten Einspurmodell wird die Gierbewegung des Fahrzeugs durch den Winkel γ beschrieben. Die Geschwindigkeit des Fahrzeugschwerpunktes wird als konstant vorgegeben

$$v = \text{const.} \quad (5.67)$$

Mit dem Schwimmwinkel β kann die Schwerpunktsgeschwindigkeit im fahrzeugfesten System x_F, y_F, z_F angeschrieben werden

$$v_{S_F, F} = \begin{bmatrix} v \cos \beta \\ v \sin \beta \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.68)$$

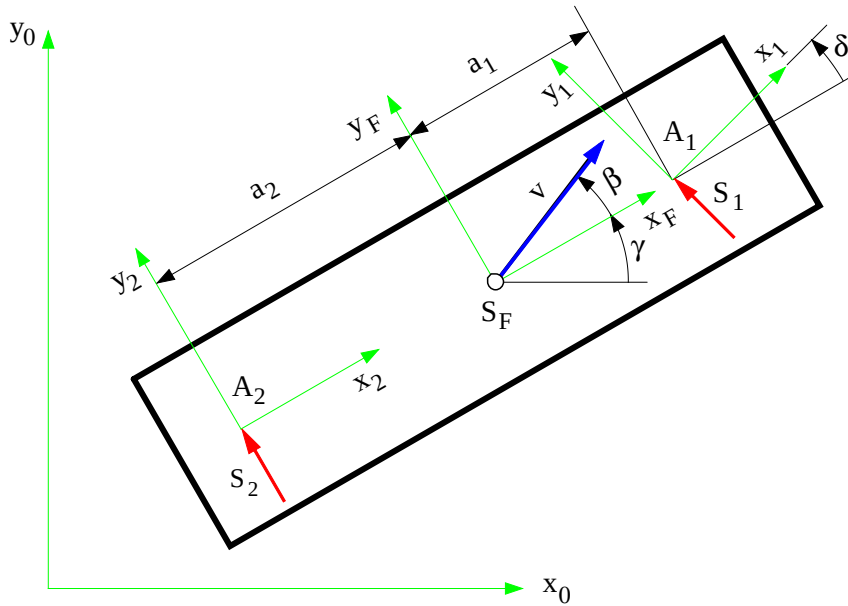


Abbildung 5.10.: Lineares Einspurmodell

Zur Berechnung der Querschlüpfen werden die Geschwindigkeitsvektoren und die Einheitsvektoren in Längs- und Querrichtung an den einzelnen Achsen benötigt. Man erhält

$$e_{x1,F} = \begin{bmatrix} \cos \delta \\ \sin \delta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_{y1,F} = \begin{bmatrix} -\sin \delta \\ \cos \delta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_{0A1,F} = \begin{bmatrix} v \cos \beta \\ v \sin \beta + a_1 \dot{\gamma} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.69)$$

und

$$e_{x2,F} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_{y2,F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_{0A2,F} = \begin{bmatrix} v \cos \beta \\ v \sin \beta - a_2 \dot{\gamma} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.70)$$

5.3.3. Querschlüpfen

Mit (5.70) folgt aus (5.65) der Querschlupf an der Vorderachse

$$s_{QA1} = \frac{+\sin \delta (v \cos \beta) - \cos \delta (v \sin \beta + a_1 \dot{\gamma})}{|\cos \delta (v \cos \beta) + \sin \delta (v \sin \beta + a_1 \dot{\gamma})|}. \quad (5.71)$$

Der Querschlupf an der Hinterachse ist durch

$$s_{QA2} = -\frac{v \sin \beta - a_2 \dot{\gamma}}{|v \cos \beta|} \quad (5.72)$$

gegeben.

Die Drehgeschwindigkeit des Fahrzeugs $\dot{\gamma}$, der Schwimmwinkel β und der Lenkwinkel δ werden als klein angenommen

$$|a_1 \dot{\gamma}| \ll |v|; \quad |a_2 \dot{\gamma}| \ll |v| \quad (5.73)$$

$$|\beta| \ll 1 \quad \text{und} \quad |\delta| \ll 1. \quad (5.74)$$

Da der Schwimmwinkel immer den kleineren Winkel zwischen Geschwindigkeitsvektor und Fahrzeuglängsachse angibt, muss anstelle von $v \sin \beta \approx v \beta$ die Näherung

$$v \sin \beta \approx |v| \beta \quad (5.75)$$

verwendet werden.

Unter Berücksichtigung von (5.73), (5.74) und (5.75) folgen aus (5.71) und (5.72)

$$s_{Q_{A_1}} = -\beta - \frac{a_1}{|v|} \dot{\gamma} + \frac{v}{|v|} \delta \quad (5.76)$$

und

$$s_{Q_{A_2}} = -\beta + \frac{a_2}{|v|} \dot{\gamma} \quad (5.77)$$

5.3.4. Bewegungsgleichungen

Zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen werden die Geschwindigkeiten, Winkelgeschwindigkeiten und die entsprechenden Beschleunigungen benötigt.

Für kleine Schwimmwinkel $\beta \ll 1$ kann (5.68) durch

$$v_{S_F, F} = \begin{bmatrix} v \\ |v| \beta \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.78)$$

angenähert werden. Die Winkelgeschwindigkeit ist durch

$$\omega_{0F, F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \quad (5.79)$$

gegeben.

Stellt man die Fahrzeugbeschleunigungen ebenfalls im fahrzeugfesten System x_F, y_F, z_F dar, dann findet man bei konstanter Fahrgeschwindigkeit $v = \text{const}$ und unter Vernachlässigung quadratisch kleiner Terme

$$a_{S_F, F} = \omega_{0F, F} \times v_{S_F, F} + \dot{v}_{S_F, F} = \begin{bmatrix} 0 \\ v \dot{\gamma} + |v| \dot{\beta} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.80)$$

Die Winkelbeschleunigung ist durch

$$\omega_{0F,F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\gamma} \end{bmatrix} \quad (5.81)$$

gegeben.

Mit der Substitution

$$\dot{\gamma} = \omega \quad (5.82)$$

lautet der Impulssatz in Fahrzeugquerrichtung

$$m_F (v \omega + |v| \dot{\beta}) = S_1 + S_2, \quad (5.83)$$

wobei infolge des kleinen Lenkwinkels der Term $S_1 \cos \delta$ durch S_1 angenähert wurde und m_F die Masse des Fahrzeugs beschreibt.

Unter Verwendung von (5.82) liefert der Drallsatz

$$\Theta_F \dot{\omega} = a_1 S_1 - a_2 S_2, \quad (5.84)$$

wobei Θ_F das Massenträgheitsmoment des Fahrzeugs um die Hochachse angibt.

Mit der linearen Beschreibung der Seitenkräfte (5.66) und den Querschläpfen (5.76), (5.77) erhält man aus (5.83) und (5.84) zwei gekoppelte Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$\dot{\beta} = \frac{k_{P1}}{m_F |v|} \left(-\beta - \frac{a_1}{|v|} \omega + \frac{v}{|v|} \delta \right) + \frac{k_{P2}}{m_F |v|} \left(-\beta + \frac{a_2}{|v|} \omega \right) - \frac{v}{|v|} \omega, \quad (5.85)$$

$$\dot{\omega} = \frac{a_1 k_{P1}}{\Theta_F} \left(-\beta - \frac{a_1}{|v|} \omega + \frac{v}{|v|} \delta \right) - \frac{a_2 k_{P2}}{\Theta_F} \left(-\beta + \frac{a_2}{|v|} \omega \right), \quad (5.86)$$

die in Form einer Zustandsgleichung angeschrieben werden können

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{k_{P1} + k_{P2}}{m_F |v|} & -\frac{v}{|v|} - \frac{a_1 k_{P1} - a_2 k_{P2}}{m_F |v| |v|} \\ -\frac{a_1 k_{P1} - a_2 k_{P2}}{\Theta_F} & -\frac{a_1^2 k_{P1} + a_2^2 k_{P2}}{\Theta_F |v|} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} \beta \\ \omega \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{v}{|v|} \frac{k_{P1}}{m_F |v|} \\ \frac{v}{|v|} \frac{a_1 k_{P1}}{\Theta_F} \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} \delta \end{bmatrix}}_u. \quad (5.87)$$

Kann ein System, zumindest näherungsweise durch eine lineare Zustandsgleichung beschrieben werden, dann können mit Hilfe klassischer Methoden der Systemdynamik die Eigendynamik, stationäre Lösungen, das Störverhalten und optimale Reglerabstimmungen berechnet werden.

5.3.5. Stabilitätsverhalten

5.3.5.1. Eigenwerte

Die homogene Differentialgleichung

$$\dot{x} = A x \quad (5.88)$$

beschreibt die Eigendynamik des Systems. Setzt man den Lösungsansatz

$$x_h(t) = x_0 e^{\lambda t} \quad (5.89)$$

in (5.88) ein, dann bleibt das homogene Gleichungssystem

$$(\lambda E - A) x_0 = 0. \quad (5.90)$$

Nichttriviale Lösungen $x_0 \neq 0$ erhält man für

$$\det |\lambda E - A| = 0. \quad (5.91)$$

Die Eigenwerte λ geben dann Aufschluss über die Stabilität des Systems.

5.3.5.2. Langsam fahrende Fahrzeuge

Die Systemmatrix

$$A_{v \rightarrow 0} = \begin{bmatrix} -\frac{k_{P_1} + k_{P_2}}{m_F |v|} & -\frac{v}{|v|} - \frac{a_1 k_{P_1} - a_2 k_{P_2}}{m_F |v| |v|} \\ 0 & -\frac{a_1^2 k_{P_1} + a_2^2 k_{P_2}}{\Theta_F |v|} \end{bmatrix} \quad (5.92)$$

approximiert bei $v \rightarrow 0$ die Eigendynamik von langsam fahrenden Fahrzeugen. Die Matrix (5.92) hat die Eigenwerte

$$\lambda_{1_{v \rightarrow 0}} = -\frac{k_{P_1} + k_{P_2}}{m_F |v|} \quad \text{und} \quad \lambda_{2_{v \rightarrow 0}} = -\frac{a_1^2 k_{P_1} + a_2^2 k_{P_2}}{\Theta_F |v|}. \quad (5.93)$$

Die Eigenwerte sind reell und unabhängig von der Fahrtrichtung stets negativ.

Langsam fahrende Fahrzeuge verfügen damit über ein asymptotisch stabiles Fahrverhalten!

5.3.5.3. Schnell fahrende Fahrzeuge

Bei großen Fahrgeschwindigkeiten $v \rightarrow \infty$ kann die Systemmatrix durch

$$A_{v \rightarrow \infty} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{v}{|v|} \\ -\frac{a_1 k_{P_1} - a_2 k_{P_2}}{\Theta_F} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.94)$$

angenähert werden. Mit (5.94) erhält man aus (5.91) die Beziehung

$$\lambda_{v \rightarrow \infty}^2 - \frac{v}{|v|} \frac{a_1 k_{P_1} - a_2 k_{P_2}}{\Theta_F} = 0 \quad (5.95)$$

mit den Lösungen

$$\lambda_{1,2v \rightarrow \infty} = \pm \sqrt{\frac{v}{|v|} \frac{a_1 k_{P_1} - a_2 k_{P_2}}{\Theta_F}}. \quad (5.96)$$

Bei Vorwärtsfahrt mit $v > 0$ ist der Ausdruck unter der Wurzel positiv, wenn

$$a_1 k_{P_1} - a_2 k_{P_2} > 0 \quad \text{oder} \quad a_1 k_{P_1} > a_2 k_{P_2} \quad (5.97)$$

gilt. Dann ist aber ein Eigenwert größer Null und das System ist instabil.

Zwei Nulleigenwerte $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 0$ erhält man für

$$a_1 k_{P_1} - a_2 k_{P_2} = 0 \quad \text{oder} \quad a_1 k_{P_1} = a_2 k_{P_2}. \quad (5.98)$$

Das Fahrverhalten ist dann indifferent. Geringe Parameterabweichung könnten jedoch auf ein instabiles Verhalten führen.

Bei

$$a_1 k_{P_1} - a_2 k_{P_2} < 0 \quad \text{oder} \quad a_1 k_{P_1} < a_2 k_{P_2} \quad (5.99)$$

und $v > 0$ wird der Ausdruck unter der Wurzel in (5.96) negativ. Die Eigenwerte sind dann rein imaginär. Störungen bei extrem hohen Fahrgeschwindigkeiten führen dann zu ungedämpften Schwingungen. Das Fahrverhalten ist dann zumindest grenzstabil.

Schnellfahrende Fahrzeuge müssen demnach aus Stabilitätsgründen der Bedingung (5.99) gehorchen.

Der Ausdruck unter der Wurzel in (5.96) ändert bei Rückwärtsfahrt $v < 0$ das Vorzeichen. Ein Fahrzeug, das bei Vorwärtsfahrt stabiles Fahrverhalten zeigt, wird bei schneller Rückwärtsfahrt instabil!

5.3.6. Stationäre Lösung

5.3.6.1. Schwimmwinkel und Giergeschwindigkeit

Gibt man einen konstanten Lenkwinkel $\delta = \delta_0$ vor, dann erreicht ein stabiles System nach einer gewissen Zeit einen stationären Zustand, der durch konstante Zustandsgrößen $x_{st} = \text{const.}$ gekennzeichnet ist. Wegen $\dot{x}_{st} = 0$ reduziert sich die Zustandsgleichung (5.87) auf ein lineares Gleichungssystem

$$A x_{st} = -B u. \quad (5.100)$$

Mit den Elementen der Systemmatrix A und des Vektors B erhält man aus (5.100) zwei Gleichungen zur Bestimmung des stationären Schwimmwinkels β_{st} und der stationären Winkelgeschwindigkeit ω_{st} bei konstanter Lenkwinkelvorgabe $\delta = \delta_0$

$$|v| (k_{P_1} + k_{P_2}) \beta_{st} + (m_F v |v| + a_1 k_{P_1} - a_2 k_{P_2}) \omega_{st} = v k_{P_1} \delta_0, \quad (5.101)$$

$$|v| (a_1 k_{P_1} - a_2 k_{P_2}) \beta_{st} + (a_1^2 k_{P_1} + a_2^2 k_{P_2}) \omega_{st} = v a_1 k_{P_1} \delta_0, \quad (5.102)$$

wobei die erste Gleichung mit $-m_F |v| |v|$ und die zweite mit $-\Theta_F |v|$ durchmultipliziert wurde. Die Lösung erhält man aus

$$\beta_{st} = \frac{\begin{vmatrix} v k_{P_1} \delta_0 & m_F v |v| + a_1 k_{P_1} - a_2 k_{P_2} \\ v a_1 k_{P_1} \delta_0 & a_1^2 k_{P_1} + a_2^2 k_{P_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} |v| (k_{P_1} + k_{P_2}) & m_F v |v| + a_1 k_{P_1} - a_2 k_{P_2} \\ |v| (a_1 k_{P_1} - a_2 k_{P_2}) & a_1^2 k_{P_1} + a_2^2 k_{P_2} \end{vmatrix}} \quad (5.103)$$

und

$$\omega_{st} = \frac{\begin{vmatrix} |v| (k_{P_1} + k_{P_2}) & v k_{P_1} \delta_0 \\ |v| (a_1 k_{P_1} - a_2 k_{P_2}) & v a_1 k_{P_1} \delta_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} |v| (k_{P_1} + k_{P_2}) & m_F v |v| + a_1 k_{P_1} - a_2 k_{P_2} \\ |v| (a_1 k_{P_1} - a_2 k_{P_2}) & a_1^2 k_{P_1} + a_2^2 k_{P_2} \end{vmatrix}} \quad (5.104)$$

Ausmultipliziert und zusammengefasst ergibt die Nennerdeterminante

$$\det_N = |v| (k_{P_1} k_{P_2} (a_1 + a_2)^2 - m_F v |v| (a_1 k_{P_1} - a_2 k_{P_2})) \quad (5.105)$$

Setzt man voraus, dass die Nennerdeterminante nicht verschwindet $\det_N \neq 0$, dann erhält man mit (5.105) aus (5.103) und (5.104) die Lösungen

$$\beta_{st} = \frac{v}{|v|} \frac{a_2 - m_F v |v| \frac{a_1}{k_{P_2} (a_1 + a_2)}}{a_1 + a_2 - m_F v |v| \frac{a_1 k_{P_1} - a_2 k_{P_2}}{k_{P_1} k_{P_2} (a_1 + a_2)}} \delta_0, \quad (5.106)$$

$$\omega_{st} = \frac{v}{a_1 + a_2 - m_F v |v| \frac{a_1 k_{P_1} - a_2 k_{P_2}}{k_{P_1} k_{P_2} (a_1 + a_2)}} \delta_0. \quad (5.107)$$

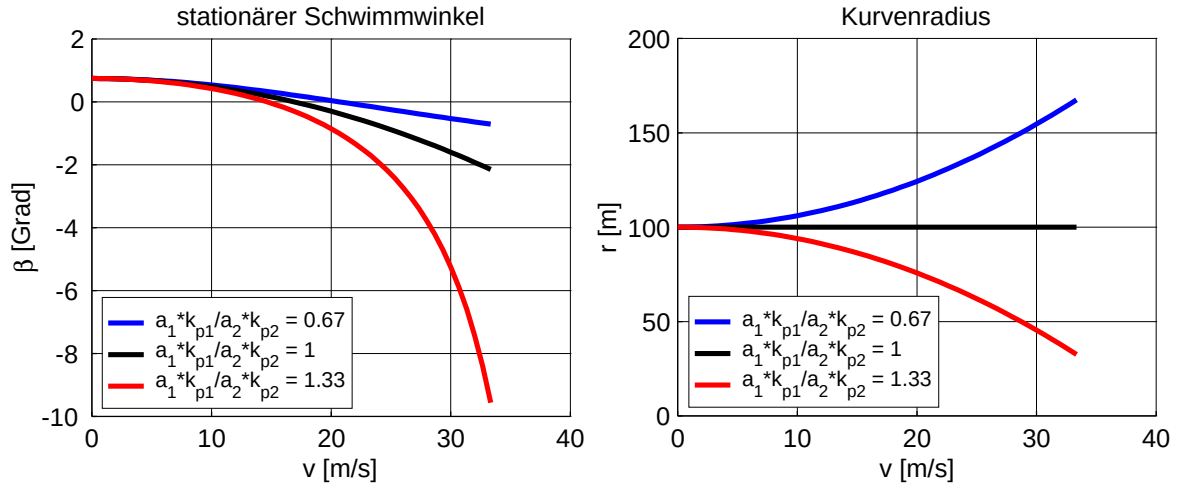
Bei vorwärtsfahrenden Fahrzeugen $v > 0$ wird der stationäre Schwimmwinkel, ausgehend vom kinematischen Wert

$$\beta_{st}^{v \rightarrow 0} = \frac{v}{|v|} \frac{a_2}{a_1 + a_2} \delta_0 \quad \text{und} \quad \omega_{st}^{v \rightarrow 0} = \frac{v}{a_1 + a_2} \delta_0 \quad (5.108)$$

mit zunehmender Geschwindigkeit kleiner und erreicht bei

$$v_{\beta_{st}=0} = \sqrt{\frac{a_2 k_{P_2} (a_1 + a_2)}{a_1 m_F}} \quad (5.109)$$

den Wert Null.



$$\begin{array}{llll}
 m_F = 700 \text{ kg}; & a_1 = 1.2 \text{ m}; & k_{P1} = 80\,000 \text{ Nm}; & k_{P2} = 110\,770 \text{ Nm} \\
 \Theta_F = 1000 \text{ kg m}^2; & a_2 = 1.3 \text{ m}; & & 73\,846 \text{ Nm} \\
 & & & 55\,385 \text{ Nm}
 \end{array}$$

Abbildung 5.11.: Stationäre Kurvenfahrt mit einem Einspurmodell

Da die Hinterräder nicht gelenkt werden, können größere Schräglaufwinkel an der Hinterachse nur durch Schrägstellen des Fahrzeugs erreicht werden.

In Abb. 5.11 sind der Verlauf des Schwimmwinkels β und der gefahrene Kurvenradius R in Abhängigkeit von der Fahrgeschwindigkeit aufgetragen.

Der Lenkeinschlag wurde $\delta_0 = 1.4321^\circ$ so vorgegeben, dass das Fahrzeug bei $v \rightarrow 0$ einen Kreis mit dem Radius $R_0 = 100 \text{ m}$ befährt.

Der tatsächlich gefahrene Kreisradius R wurde mit der Beziehung

$$\omega_{st} = \frac{v}{R}, \quad (5.110)$$

aus (5.107) berechnet.

Einige Konzepte für eine Hinterachszusatzlenkung versuchten durch geeignete Steuerung oder Regelung den Schwimmwinkel des Fahrzeugs auf Null zu halten. Aufgrund zahlreicher Probleme konnte jedoch bis heute keine Serienreife erreicht werden.

5.3.6.2. Steuertendenz

Nach dem Erreichen der stationären Lösung fährt das Fahrzeug auf einem Kreis. Setzt man (5.110) in (5.107) ein und löst nach dem Lenkwinkel auf, dann erhält man

$$\delta_0 = \frac{a_1 + a_2}{R} - m_F \frac{v^2}{R} \frac{v}{|v|} \frac{a_1 k_{P1} - a_2 k_{P2}}{k_{P1} k_{P2} (a_1 + a_2)}. \quad (5.111)$$

Der erste Term stellt dabei den Ackermann-Lenkswinkel $\delta_0^A = (a_1 + a_2)/R$ dar, der mit dem Achsabstand $a = a_1 + a_2$ und der Näherung für kleine Lenkwinkel $\tan \delta_0 \approx \delta_0$ aus (5.27) folgt. Der Ackermann-Lenkswinkel stellt für langsam fahrende Fahrzeuge eine gute Näherung dar, da bei $v \rightarrow 0$ der zweite Ausdruck in (5.111) verschwindend klein wird.

Bei größeren Geschwindigkeiten weicht, je nach Größe des Terms $a_1 k_{P_1} - a_2 k_{P_2}$ und abhängig von der Fahrtrichtung (vorwärts: $v > 0$, rückwärts: $v < 0$), der erforderliche Lenkeinschlag vom Ackermann-Lenkswinkel ab. Die Abweichung ist proportional zur Querschleunigung

$$a_Q = \frac{v^2}{R}. \quad (5.112)$$

Bei $v > 0$ wird die Steuertendenz eines Fahrzeugs durch die Schwerpunktslage a_1 , a_2 und die Schräglauftiefigkeiten an den Achsen k_{P_1} , k_{P_2} festgelegt. Die unterschiedlichen Steuertendenzen eines Fahrzeugs sind in der Tabelle 5.1 zusammengestellt.

• untersteuernd	$\delta_0 > \delta_0^A$	bzw.	$a_1 k_{P_1} < a_2 k_{P_2}$	oder	$\frac{a_1 k_{P_1}}{a_2 k_{P_2}} < 1$
• neutral steuernd	$\delta_0 = \delta_0^A$	bzw.	$a_1 k_{P_1} = a_2 k_{P_2}$	oder	$\frac{a_1 k_{P_1}}{a_2 k_{P_2}} = 1$
• übersteuernd	$\delta_0 < \delta_0^A$	bzw.	$a_1 k_{P_1} > a_2 k_{P_2}$	oder	$\frac{a_1 k_{P_1}}{a_2 k_{P_2}} > 1$

Tabelle 5.1.: Steuertendenz eines Fahrzeugs bei Vorwärtsfahrt

5.3.6.3. Schräglaufwinkelbedarf

Mit den Bedingungen für eine stationäre Lösung $\dot{\beta}_{st} = 0$, $\dot{\omega}_{st} = 0$ und der Beziehung (5.110) können die Bewegungsgleichungen (5.83) und (5.84) nach den benötigten Seitenkräften aufgelöst werden

$$\begin{aligned} S_{1st} &= \frac{a_2}{a_1 + a_2} m_F \frac{v^2}{R}, & \text{oder} & \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{S_{2st}}{S_{1st}}. \\ S_{2st} &= \frac{a_1}{a_1 + a_2} m_F \frac{v^2}{R} \end{aligned} \quad (5.113)$$

Mit dem linearen Reifenmodell (5.62) erhält man

$$S_{1st} = k_{P_1} s_{Q_{A1}}^{st} \quad \text{und} \quad S_{2st} = k_{P_2} s_{Q_{A2}}^{st}, \quad (5.114)$$

wobei $s_{Q_{A1}}^{st}$ und $s_{Q_{A2}}^{st}$ die stationären Querschlüpfe an den Achsen bezeichnen. Aus (5.113) und (5.114) folgt nun

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{S_{2st}}{S_{1st}} = \frac{k_{P_2} s_{Q_{A2}}^{st}}{k_{P_1} s_{Q_{A1}}^{st}} \quad \text{oder} \quad \frac{a_1 k_{P_1}}{a_2 k_{P_2}} = \frac{s_{Q_{A2}}^{st}}{s_{Q_{A1}}^{st}}. \quad (5.115)$$

Die Steuertendenz kann also auch aus dem Schräglaufwinkelbedarf an den Achsen abgelesen werden.

5.3.7. Radlasteinfluss auf Schräglaufsteifigkeiten

5.3.7.1. Linearer Radlasteinfluss

Bei gleichen Reifen an der Vorder- und Hinterachse gilt, wenn man einen linearen Einfluss der Radlast auf den Anstieg der Seitenkraft über dem Querschlupf voraussetzt,

$$k_{P_1}^{lin} = k P_1 \quad \text{und} \quad k_{P_2}^{lin} = k P_2. \quad (5.116)$$

Das Gewicht des Fahrzeugs $G = m_F g$ verteilt sich entsprechend der Schwerpunktslage auf die Achsen

$$P_1 = \frac{a_2}{a_1 + a_2} G \quad \text{und} \quad P_2 = \frac{a_1}{a_1 + a_2} G \quad (5.117)$$

Mit (5.116) und (5.117) erhält man

$$a_1 k_{P_1}^{lin} = a_1 k \frac{a_2}{a_1 + a_2} G \quad (5.118)$$

und

$$a_2 k_{P_2}^{lin} = a_2 k \frac{a_1}{a_1 + a_2} G. \quad (5.119)$$

Ein Fahrzeug mit gleichen Reifen wäre somit bei linearem Radlasteinfluss auf die Schräglaufsteifigkeit, wegen

$$a_1 k_{P_1}^{lin} = a_2 k_{P_2}^{lin} \quad (5.120)$$

neutral steuernd.

Die Tatsache, dass die Seitenkraft um die Nachlaufstrecke n_L versetzt hinter der Latschmitte angreift, führt wegen $a_1 \rightarrow a_1 - \frac{v}{|v|} n_{L1}$ und $a_2 \rightarrow a_2 + \frac{v}{|v|} n_{L1}$ zu einer fahrtrichtungsunabhängigen Stabilisierung des Fahrverhaltens.

5.3.7.2. Degressiver Radlasteinfluss

Bei einem realen Reifen stellt man einen degressiven Radlasteinfluss auf die Reifenkräfte fest, Abb. 5.12.

Gemäß (5.84) ist die Drehbewegung des Fahrzeugs stabil, wenn das Moment aus den Seitenkräften S_1 und S_2 rückstellend ist, also

$$a_1 S_1 - a_2 S_2 < 0 \quad (5.121)$$

gilt.

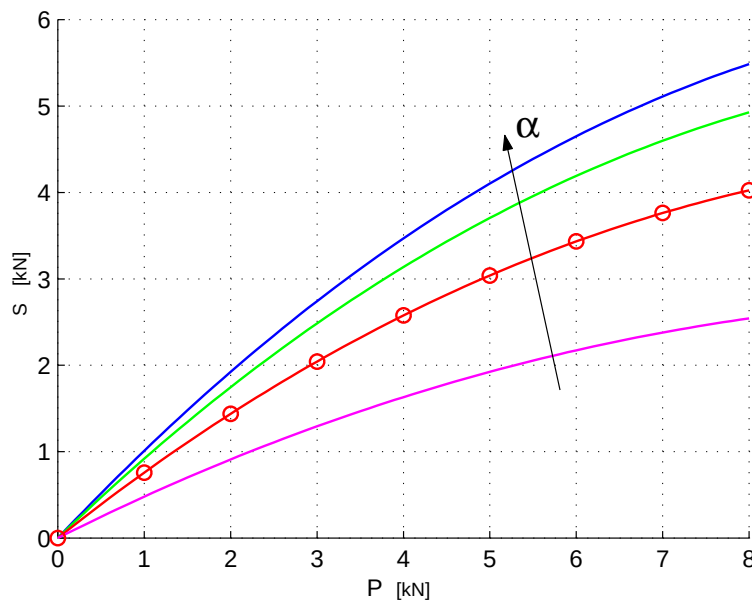
Bei einem Fahrzeug mit dem Achsabstand $a = 2.45 \text{ m}$ ergeben die Achslasten $P_1 = 4000 \text{ N}$ und $P_2 = 3000 \text{ N}$ die Schwerpunktslage $a_1 = 1.05 \text{ m}$ und $a_2 = 1.40 \text{ m}$. Bei gleichem Schräglauf an der Vorder- und Hinterachse entnimmt man aus der Tabelle in Bild:Querdynamik:fyvonfz $S_1 = 2576 \text{ N}$ und $S_2 = 2043$. Damit liefert die Bedingung (5.121) mit

$$1.05 * 2576 - 1.45 * 2043 = -257.55$$

einen Wert der deutlich negativ ist und damit stabilisierend wirkt.

Fahrzeuge mit $a_1 < a_2$ haben ein stabiles, also untersteuerndes Fahrverhalten.

Ist die Achslast an der Hinterachse größer als die an der Vorderachse ($a_1 > a_2$), dann kann ein stabiles Fahrverhalten in der Regel nur durch unterschiedliche Reifen sichergestellt werden.



$P [N]$	$S [N]$
0	0
1000	758
2000	1438
3000	2043
4000	2576
5000	3039
6000	3434
7000	3762
8000	4025

Abbildung 5.12.: Seitenkraft S über Radlast P bei verschiedenen Schräglaufwinkeln

5.3.7.3. Querbeschleunigungsabhängige Steuertendenz

Bei zunehmender Querbeschleunigung stützt sich ein Fahrzeug immer mehr auf den kurvenäußeren Rädern ab. Bei hinreichend starrem Fahrzeugaufbau können die Radlastdifferenzen an der Vorder- und Hinterachse durch unterschiedliche Kinematik (Wankabstützung) oder durch unterschiedliche Wank-Steifigkeiten verschieden ausfallen. Durch den degressiven Radlasteinfluss verringert sich bei zunehmender Radlastdifferenz die übertragbare Seitenkraft an einer Achse.

Treibt man die Radlastdifferenz an der Vorderachse im Vergleich zur Hinterachse stärker auseinander, dann verringert sich das Seitenkraftpotential an der Vorderachse stärker als an der Hinterachse und das Fahrzeug wird mit zunehmender Seitenkraft stabiler, also stärker untersteuernd.

6. Vertikaldynamik

6.1. Ziele

Ziel der Vertikaldynamik ist es, die Aufbaufederung und -Dämpfung so abzustimmen, daß ein guter Fahrkomfort bzw. eine minimale Belastung des Ladeguts bei ausreichender Fahrsicherheit gewährleistet ist.

Die Beanspruchung des Ladegutes kann recht gut durch maximale oder integrale Werte der Aufbaubeschleunigungen beurteilt werden.

Die Radlast P ist über die Kraftschlußbeiwerte der Reifen mit der Umfangs- U und Seitenkraft S verknüpft. Der degressive Einfluß von P auf U und S sowie instationäre Vorgänge beim Aufbau von U und S führen bei Radlastschwankungen im Mittel zu niedrigeren Umfangs- und Seitenkräften.

Maximale Fahrsicherheit ist also mit minimalen Radlastschwankungen zu erreichen. Geringe Radlastschwankungen reduzieren obendrein die Beanspruchung der Fahrbahn.

Der Komfort eines Fahrzeugs wird auf subjektive Weise vom Fahrer beurteilt. In der Literatur findet man verschiedene Ansätze, das Schwingungsempfinden von Menschen durch Kennwerte zu beschreiben.

Auf die Vertikaldynamik von Fahrzeugen übertragen, werden vom Fahrer in erster Linie die Amplituden und die Beschleunigungen der Aufbauschwingungen registriert. Diese Größen werden deshalb in der Praxis als objektive Bewertungsmaßstäbe verwendet.

6.2. Grundabstimmung mit einfachen Modellen

6.2.1. Bewegungsgleichungen

Abb. 6.1 zeigt einfache Viertel-Fahrzeug-Modelle, die für grundsätzliche Untersuchungen der Aufbau- und Achsschwingungen geeignet sind.

Bei normalen Fahrzeugen ist die Radmasse m_R im Vergleich zur anteiligen Aufbaumasse m_A deutlich kleiner $m_R \ll m_A$. Die Kopplung der Rad- und Aufbaubewegungen kann daher für Grundsatzuntersuchungen vernachlässigt werden.

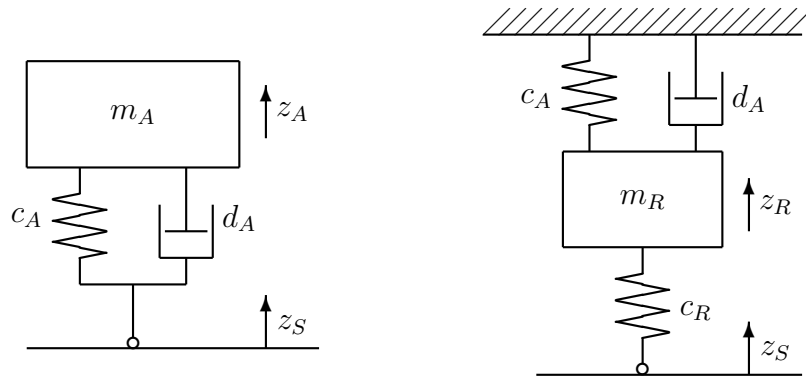


Abbildung 6.1.: Einfache Vertikaldynamik-Modelle

Bei der Beschreibung der Vertikalbewegungen des Aufbaus bleiben die Radbewegungen unberücksichtigt. Stehen die Radbewegungen im Vordergrund, dann können die Aufbaubewegungen vernachlässigt werden.

Die Bewegungsgleichungen für die Modelle lauten

$$m_A \ddot{z}_A + d_A \dot{z}_A + c_A z_A = d_A \dot{z}_S + c_A z_S \quad (6.1)$$

und

$$m_R \ddot{z}_R + d_A \dot{z}_R + (c_A + c_R) z_R = c_R z_S, \quad (6.2)$$

wobei z_A und z_R die Vertikalbewegungen des Aufbaus und der Radmasse von der Gleichgewichtslage aus angeben. Die Konstanten c_A , d_A beschreiben die Aufbau-Federung und -Dämpfung und c_R die Vertikalsteifigkeit des Reifens. Die Reifendämpfung wird hier gegenüber dem Aufbaudämpfer vernachlässigt.

6.2.2. Fahrbahn

6.2.2.1. Beschreibung im Orts- und Zeitbereich

Die Fahrbahn liegt als Ortsfunktion vor

$$z_S = z_S(x). \quad (6.3)$$

In (6.1) wird auch die zeitliche Änderung der Fahrbahnunebenheiten benötigt. Aus (6.3) folgt zunächst

$$\dot{z}_S = \frac{dz_S}{dx} \frac{dx}{dt}. \quad (6.4)$$

Bei dem einfachen Modell ist die Geschwindigkeit, mit der Fahrbahnunebenheiten abgetastet werden, gleich der Fahrzeuggeschwindigkeit, $dx/dt = v$. Gibt man die Fahrzeuggeschwindigkeit als Zeitfunktion $v = v(t)$ vor, dann kann der zurückgelegte Weg x durch einfache Integration berechnet werden.

6.2.2.2. Waschbrettpiste

Eine Waschbrettpiste kann im Ortsbereich durch

$$z_S(x) = A \sin\left(2\pi \frac{x}{L}\right), \quad (6.5)$$

beschrieben werden, wobei A die Amplitude, L die Wellenlänge und x die Wegkoordinate ist. Bei konstanter Fahrgeschwindigkeit stellt (6.5) wegen $x = v \cdot t$ eine periodische Erregung im Zeitbereich dar

$$z_S(t) = A \sin(\omega_S t), \quad (6.6)$$

wobei die Erregerkreisfrequenz durch Wellenlänge und Fahrgeschwindigkeit festgelegt ist

$$\omega_S = 2\pi \frac{v}{L}. \quad (6.7)$$

6.2.3. Statische Belastung

Die Aufbaufeder wird durch die anteilige Fahrzeugmasse belastet. Bei linearer Federkennung errechnet sich die statische Federeindrückung aus

$$f_{A_0} = \frac{m_A g}{c_A}. \quad (6.8)$$

Bei konventioneller Federung ohne Niveau-Regulierung führen Beladungsänderungen $m_A \rightarrow m_A + \Delta m_A$ zu veränderten Federeindrückungen $f_{A_0} \rightarrow f_{A_0} + \Delta f$. Analog zu (6.8) folgt die zusätzliche Federeindrückung aus

$$\Delta f = \frac{\Delta m_A g}{c_A}. \quad (6.9)$$

Bei vorgegebener Beladungsänderung und bei Begrenzung der zusätzlichen Federeindrückung $\Delta f \leq \Delta f_{max}$ kann die benötigte Aufbaufederrate nach unten abgeschätzt werden

$$c_A \geq \frac{\Delta m_A g}{\Delta f_{max}}. \quad (6.10)$$

6.2.4. Eigenschwingungen

6.2.4.1. Eigenwerte

Bei ideal ebener Fahrbahn verschwindet wegen $z_S = 0$ und $\dot{z}_S = 0$ die rechte Seite der Bewegungsgleichungen. (6.1), (6.2). Die verbleibenden, homogenen Differentialgleichungen 2. Ordnung können in der Form

$$\ddot{z} + 2\delta \dot{z} + \omega_0^2 z = 0 \quad (6.11)$$

Bewegungen	homogene Differentialgleichung	Abklingkonstante	ungedämpfte Eigenfrequenz
Aufbau	$m_A \ddot{z}_A + d_A \dot{z}_A + c_A z_A = 0$	$\delta_A = \frac{d_A}{2 m_A}$	$\omega_{A_0}^2 = \frac{c_A}{m_A}$
Rad	$m_R \ddot{z}_R + d_A \dot{z}_R + (c_A + c_R) z_R = 0$	$\delta_R = \frac{d_A}{2 m_R}$	$\omega_{R_0}^2 = \frac{c_A + c_R}{m_R}$

Tabelle 6.1.: Abklingkonstanten und ungedämpfte Eigenkreisfrequenzen

angeschrieben werden. Die jeweiligen Abklingkonstanten δ und die ungedämpften Eigenkreisfrequenzen ω_0 für die Modelle in Abb. 6.1 können durch einen Vergleich von (6.11) mit (6.1) und (6.2) ermittelt werden. Die Ergebnisse sind in Tabelle 6.1 zusammengestellt.

Mit dem Lösungsansatz

$$z = z_0 e^{\lambda t} \quad (6.12)$$

folgt aus (6.11) die Gleichung

$$(\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2) z_0 e^{\lambda t} = 0. \quad (6.13)$$

Für

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (6.14)$$

sind auch nichttriviale Lösungen $z_0 \neq 0$ möglich. Die charakteristische Gleichung (6.14) hat die Lösungen

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \quad (6.15)$$

Für $\delta^2 \geq \omega_0^2$ sind die Eigenwerte $\lambda_{1,2}$ reell und wegen $\delta \geq 0$ nicht positiv, $\lambda_{1,2} \leq 0$. Störungen $z(t=0) = z_0$ mit $\dot{z}(t=0) = 0$ klingen dann exponentiell ab.

Bei $\delta^2 < \omega_0^2$ werden die Eigenwerte konjugiert komplex

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm i \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}. \quad (6.16)$$

Das System führt nun gedämpfte Schwingungen aus.

Der aperiodische Grenzfall

$$\delta^2 = \omega_0^2, \quad \text{bzw.} \quad \delta = \omega_0 \quad (6.17)$$

beschreibt im Sinne der Stabilität ein optimales Systemverhalten.

Rad- und Aufbaumasse sowie die Reifensteifigkeit liegen fest. Die Aufbaufederkonstante kann über die Zuladung errechnet werden, vgl. Abschnitt 6.2.3. Mit den Abkürzungen aus Tabelle 6.1 können nun aus (6.17) Dämpfungsparameter ermittelt werden, die mit

$$(d_A)_{opt_1} = 2 m_A \sqrt{\frac{c_A}{m_A}} = 2 \sqrt{c_A m_A} \quad (6.18)$$

optimale Aufbau- und mit

$$(d_A)_{opt_2} = 2 m_R \sqrt{\frac{c_A + c_R}{m_R}} = 2 \sqrt{(c_A + c_R) m_R} \quad (6.19)$$

optimale Radschwingungen zur Folge haben.

6.2.4.2. Ausschwingverhalten

Abb. 6.2 zeigt den Ausschwingvorgang eines gedämpften Ein-Masse-Schwingers, der sich aus der Lösung der Differentialgleichung (6.11) ergibt. Das System wurde dabei ohne Anfangsgeschwindigkeit $\dot{z}(t=0) = 0$ mit der Anfangsauslenkung $z(t=0) = z_0$ gestartet. Je nach Größe der Abklingkonstante δ nähert sich das System mit oder ohne Überschwinger der Ruhelage $z_G = 0$.

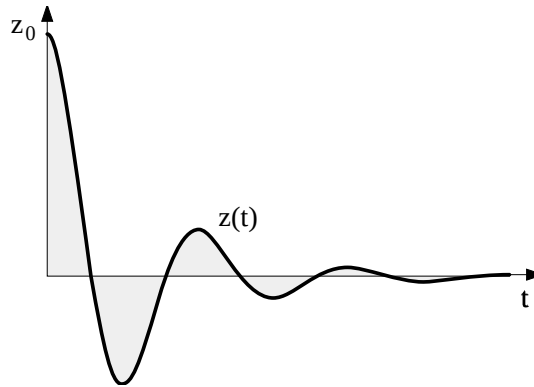


Abbildung 6.2.: Ausschwingvorgang bei einem Ein-Masse-Schwinger

Wertet man die Abweichungen von der Ruhelage als Fehler $\epsilon(t) = z(t) - z_G$, dann kann über den quadratischen Gesamtfehler

$$\epsilon_G^2 = \int_{t=0}^{t=t_E} z(t)^2 dt \quad (6.20)$$

die Güte des Einschwingvorganges bewertet werden.

Zur Beurteilung von Fahrkomfort und Fahrsicherheit werden die Auslenkungen z_A und die Beschleunigungen $\ddot{z}_A$ des Aufbaus und die Schwankungen der dynamischen Radlast $P_{dyn} = c_R * z_R$ herangezogen.

Das Systemverhalten ist im Sinne des Ausschwingverhaltens optimal, wenn die Parameter m_A , m_R , c_A , d_A , c_R aus den Forderungen nach Komfort

$$\epsilon_{GK}^2 = \int_{t=0}^{t=t_E} \left\{ (g_1 z_A)^2 + (g_2 \ddot{z}_A)^2 \right\} dt \rightarrow \text{Minimum} \quad (6.21)$$

und Sicherheit

$$\epsilon_{G_S}^2 = \int_{t=0}^{t=t_E} (c_R z_R)^2 dt \rightarrow \text{Minimum} \quad (6.22)$$

bestimmt werden.

Mit den Gewichtungsfaktoren g_1 und g_2 können Auslenkungen und Beschleunigungen unterschiedlich gewichtet werden. In der Bewegungsgleichung für den Aufbau (6.1) werden die Terme $m_A \ddot{z}_A$ und $c_A z_A$ addiert. Mit $g_1 = 1$ und $g_2 = c_A/m_A$ erhält man systemangepaßte Gewichtungsfaktoren.

Beim gedämpften Ein-Masse-Schwinger können für $t_E \rightarrow \infty$ die Integrale in (6.21) und (6.22) noch analytisch gelöst werden. Man erhält

$$\epsilon_{G_K}^2 = z_{A_0}^2 \frac{c_A}{m_A} \frac{1}{2} \left[\frac{d_A}{m_A} + 2 \frac{c_A}{d_A} \right] \quad (6.23)$$

und

$$\epsilon_{G_S}^2 = z_{R_0}^2 c_R^2 \frac{1}{2} \left[\frac{d_A}{c_A + c_R} + \frac{m_R}{d_A} \right]. \quad (6.24)$$

Kleine Aufbaufedersteifigkeiten $c_A \rightarrow 0$ oder große Aufbaumassen $m_A \rightarrow \infty$ machen das Komfortkriterium (6.23) klein $\epsilon_{G_K}^2 \rightarrow 0$ und gewährleisten dadurch einen hohen Fahrkomfort. Eine große Fahrzeugmasse ist jedoch unwirtschaftlich. Die Aufbaufedersteifigkeit kann nicht beliebig reduziert werden, da sonst Beladungsänderungen auf zu große Veränderungen der statischen Einfederung führen. Bei festgelegten Werten für c_A und m_A kann der Dämpfer so ausgelegt werden, daß das Komfortkriterium (6.23) minimal wird. Aus der notwendigen Bedingung für ein Minimum

$$\frac{\partial \epsilon_{G_K}^2}{\partial d_A} = z_{A_0}^2 \frac{c_A}{m_A} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{m_A} - 2 \frac{c_A}{d_A^2} \right] = 0 \quad (6.25)$$

folgt der optimale Dämpfungsparameter

$$(d_A)_{opt_3} = \sqrt{2 c_A m_A}, \quad (6.26)$$

der im Sinne des Ausschwingverhaltens optimalen Komfort gewährleistet.

Kleine Reifenfedersteifigkeiten $c_R \rightarrow 0$ machen das Sicherheitskriterium (6.24) klein $\epsilon_{G_S}^2 \rightarrow 0$ und reduzieren damit die dynamischen Radlastschwankungen. Die Reifenfedersteifigkeit kann jedoch nicht beliebig weich gemacht werden, da sonst zu große Reifendeformationen auftreten. Kleine Radmassen $m_R \rightarrow 0$ und/oder eine harte Aufbaufederung $c_A \rightarrow \infty$ reduzieren das Sicherheitskriterium (6.24) ebenfalls. Die Verwendung von Leichtmetallfelgen erhöht infolge der Gewichtsreduzierung der Radmasse die Fahrsicherheit eines Fahrzeugs. Harte Aufbaufederungen stehen im Widerspruch zum Fahrkomfort.

Bei festgelegten Werten für c_A , c_R und m_R kann auch hier der Dämpfer so abgestimmt werden, daß das Sicherheitskriterium (6.24) minimal wird. Aus der notwendigen Bedingung für ein Minimum

$$\frac{\partial \epsilon_{G_S}^2}{\partial d_A} = z_{R_0}^2 c_T^2 \frac{1}{2} \left[\frac{1}{c_A + c_R} - \frac{m_R}{d_A^2} \right] = 0 \quad (6.27)$$

folgt der optimale Dämpfungsparameter

$$(d_A)_{opt_4} = \sqrt{(c_A + c_R) m_R}, \quad (6.28)$$

der im Sinne des Ausschwingverhaltens optimale Sicherheit gewährleistet.

6.2.5. Periodische Erregung

6.2.5.1. Aufbaubewegungen

Beschreibt man die Aufbaubewegungen mit

$$z_{Arel} = z_A - z_S \quad (6.29)$$

relativ zur Fahrbahn, dann tritt anstelle von (6.1) die Bewegungsgleichung

$$m_A \ddot{z}_{Arel} + d_A \dot{z}_{Arel} + c_A z_{Arel} = -m_A \ddot{z}_S. \quad (6.30)$$

Mit (6.6) und unter Verwendung der Abkürzungen aus Tabelle 6.1 bleibt

$$\ddot{z}_{Arel} + 2\delta_A \dot{z}_{Arel} + \omega_{A_0}^2 z_{Arel} = +A\omega_S^2 \sin(\omega_S t). \quad (6.31)$$

Nach Abklingen der Eigenschwingungen bleibt nur noch die partikuläre Lösung. Mit dem Lösungsansatz

$$z_{Arel}(t \rightarrow \infty) = z_{Arel}^\infty \sin(\omega_S t - \psi_A) \quad (6.32)$$

erhält man aus (6.31) die Beziehung

$$(\omega_{A_0}^2 - \omega_S^2) z_{Arel}^\infty \sin(\omega_S t - \psi_A) + 2\delta_A \omega_S z_{Arel}^\infty \cos(\omega_S t - \psi_A) = \omega_S^2 A \sin(\omega_S t). \quad (6.33)$$

Die Umformung

$$\sin(\omega_S t) = \sin(\omega_S t - \psi_A + \psi_A) = \sin(\omega_S t - \psi_A) \cos \psi_A + \cos(\omega_S t - \psi_A) \sin \psi_A \quad (6.34)$$

erzeugt in (6.33) nur noch Terme mit $\sin(\omega_S t - \psi_A)$ und $\cos(\omega_S t - \psi_A)$. Ein Koeffizientenvergleich liefert die Gleichungen

$$\begin{aligned} (\omega_{A_0}^2 - \omega_S^2) z_{Arel}^\infty &= \omega_S^2 A \cos(\psi_A) \\ 2\delta_A \omega_S z_{Arel}^\infty &= \omega_S^2 A \sin(\psi_A), \end{aligned} \quad (6.35)$$

woraus sofort Phase und Amplitude der stationären Lösung berechnet werden können

$$\tan \psi_A = \frac{2\delta_A \omega_S}{\omega_{A_0}^2 - \omega_S^2}, \quad (6.36)$$

$$z_{Arel}^\infty = A \frac{\omega_S^2}{\sqrt{(2\delta_A \omega_S)^2 + (\omega_{A_0}^2 - \omega_S^2)^2}}. \quad (6.37)$$

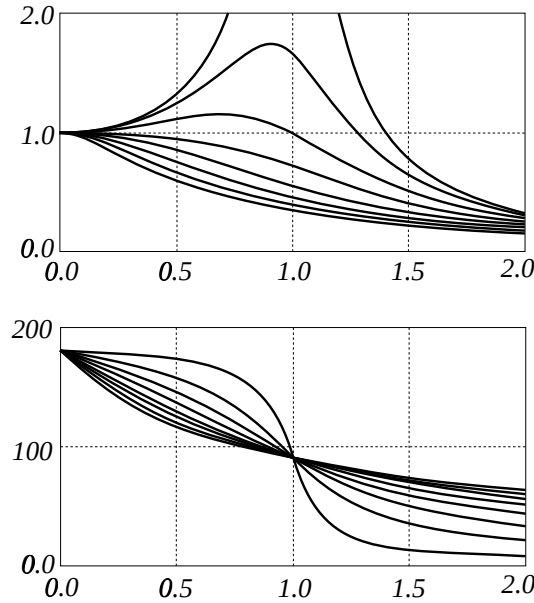


Abbildung 6.3.: Stationäre Aufbaubewegungen z_{Arel}^{∞} und ψ_A für $D_A = 0.1$ bis $D_A = 1.5$

Für eine graphische Darstellung, Abb. 6.3, verwendet man die dimensionslosen Größen

$$\eta_A = \frac{\omega_{A0}}{\omega_S} \quad \text{und} \quad D_A = \frac{\delta_A}{\omega_{A0}}. \quad (6.38)$$

Gleichung (6.37) lautet dann

$$z_{Arel}^{\infty} = \frac{A}{\sqrt{(2 D_A \eta_A)^2 + (\eta_A^2 - 1)^2}}. \quad (6.39)$$

Die Amplitude der stationären Lösung wird maximal, wenn der Nenner in (6.39) minimal wird. Die notwendige Bedingung

$$\frac{\partial}{\partial \eta_A} \left((2 D_A \eta_A)^2 + (\eta_A^2 - 1)^2 \right) = 0 \quad (6.40)$$

liefert das dimensionslose Frequenzverhältnis

$$\hat{\eta}_A^2 = 1 - 2 D_A^2. \quad (6.41)$$

Mit (6.41) folgt dann aus (6.39) die maximale Amplitude der stationären Lösung

$$(z_{Arel}^{\infty})_{max} = z_{Arel}^{\infty}(\hat{\eta}_A^2) = \frac{A}{2 D_A \sqrt{1 - D_A^2}}. \quad (6.42)$$

Die maximale Amplitude der stationären Lösung hängt nur noch vom dimensionslosen Dämpfungsmaß D_A ab. Sie wird für

$$\hat{D}_A = \frac{1}{2} \sqrt{2} \quad (6.43)$$

minimal. Dämpfungsparameter d_A , die auf ein Lehrsches Dämpfungsmaß von $D_A = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ führen, sind somit optimal im Bezug auf das Resonanzverhalten der Aufbaubewegungen. Mit den Abkürzungen aus Tabelle 6.1 erhält man

$$(d_A)_{opt_5} = \sqrt{2 c_A m_A} . \quad (6.44)$$

Dieser Ausdruck stimmt mit (6.26) überein und sichert somit gleichzeitig optimales Ausschwingverhalten.

6.2.5.2. Radbewegungen

Mit (6.6) und unter Verwendung der Abkürzungen aus Tabelle 6.1 kann die Differentialgleichung für die Radbewegungen (6.2) in der Form

$$\ddot{z}_R + 2 \delta_R \dot{z}_R + \omega_{R_0}^2 z_R = A^* \omega_{R_0}^2 \sin(\omega_S t) \quad (6.45)$$

angeschrieben werden, wobei mit

$$A^* = A \frac{c_R}{c_R + c_A} \quad (6.46)$$

eine auf die Steifigkeiten skalierte Amplitude verwendet wurde.

Amplitude z_R^∞ und Phase ψ_R der stationären Antwort

$$z_R(t \rightarrow \infty) = z_R^\infty \sin(\omega_S t - \psi_R) \quad (6.47)$$

können dann, analog zu (6.33), aus

$$(\omega_{R_0}^2 - \omega_S^2) z_R^\infty \sin(\omega_S t - \psi_R) + 2 \delta_R \omega_S z_R^\infty \cos(\omega_S t - \psi_R) = A^* \omega_{R_0}^2 \sin(\omega_S t) . \quad (6.48)$$

berechnet werden. Mit den Abkürzungen

$$\eta_R = \frac{\omega_S}{\omega_{R_0}} \quad \text{und} \quad D_R = \frac{\delta_R}{\omega_{R_0}} \quad (6.49)$$

erhält man aus (6.48) die Amplitude der stationären Antwort

$$z_{A_{rel}}^\infty = \frac{A^*}{\sqrt{(2 D_R \eta_R)^2 + (1 - \eta_R^2)^2}} . \quad (6.50)$$

Die maximale Amplitude ist durch

$$(z_R^\infty)_{max} = z_R^\infty (\hat{\eta}_R^2 = 1 - 2 D_R^2) = \frac{A^*}{2 D_R \sqrt{1 - D_R^2}} . \quad (6.51)$$

gegeben. Sie wird für

$$\hat{D}_R = \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad (6.52)$$

minimal. Mit Dämpfungsparametern d_A , die aus dem Lehrschen Dämpfungsmaß $D_R = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ermittelt werden, kann das Resonanzverhalten der Radbewegung optimiert werden. Mit den Abkürzungen aus Tabelle 6.1 erhält man

$$(d_A)_{opt_6} = \sqrt{2} \sqrt{(c_A + c_R) m_R}. \quad (6.53)$$

Dieser Wert ist um den Faktor $\sqrt{2}$ größer als der in (6.28) berechnete Dämpfungsparameter für optimales Ausschwingverhalten.

6.2.6. Zusammenfassung

Für einen Mittelklasse Pkw gelten in etwa die Zahlenwerte: anteilige Aufbaumasse $m_A = 300 \text{ kg}$, Radmasse $m_R = 50 \text{ kg}$ und Reifenvertikalsteifigkeit $c_R = 200\,000 \text{ N/m}$. Nimmt man an, daß ein Rad bei der anteiligen Zuladung von $\Delta m_A = 125 \text{ kg}$ maximal $\Delta f_{max} = 5 \text{ cm}$ einfedert, dann ist gemäß (6.10) eine Federrate von

$$c_A \geq \frac{125 * 9.81}{0.05} \approx 25\,000 \text{ N/m}$$

erforderlich.

Kriterium (Formel-Nummer)	optimaler Dämpfungsparameter
Stabilität (6.18)	$(d_A)_{opt_1} = 2 \sqrt{c_A m_A} \approx 5\,500 \frac{\text{N}}{\text{m/s}}$
Ausschwingverhalten (6.26)	$(d_A)_{opt_3} = \sqrt{2 c_A m_A} \approx 3\,870 \frac{\text{N}}{\text{m/s}}$
periodische Erregung (6.44)	$(d_A)_{opt_5} = \sqrt{2 c_A m_A} \approx 3\,870 \frac{\text{N}}{\text{m/s}}$

Tabelle 6.2.: Dämpfungsparameter für optimalen Fahrkomfort

Kriterium (Formel-Nummer)	optimaler Dämpfungsparameter
Stabilität (6.18)	$(d_A)_{opt_2} = 2 \sqrt{(c_A + c_R) m_R} \approx 6\,700 \frac{\text{N}}{\text{m/s}}$
Ausschwingverhalten (6.26)	$(d_A)_{opt_4} = \sqrt{(c_A + c_R) m_R} \approx 3\,350 \frac{\text{N}}{\text{m/s}}$
periodische Erregung (6.44)	$(d_A)_{opt_6} = \sqrt{2} \sqrt{(c_A + c_R) m_R} \approx 4\,740 \frac{\text{N}}{\text{m/s}}$

Tabelle 6.3.: Dämpfungsparameter für optimale Fahrsicherheit

Die Dämpfungsparameter, die für dieses Fahrzeug im Bezug auf das jeweilige Kriterium optimalen Komfort bzw. optimale Sicherheit liefern, sind in den Tabellen 6.2 und 6.3 zusammengestellt.

6.3. Nichtlineare Krafftelemente

6.3.1. Viertelfahrzeugmodell

Der prinzipielle Einfluß nichtlinearer Kennlinien auf Fahrkomfort und Fahrsicherheit kann bereits an einem Viertelfahrzeug, Abb. 6.4 deutlich gemacht werden.

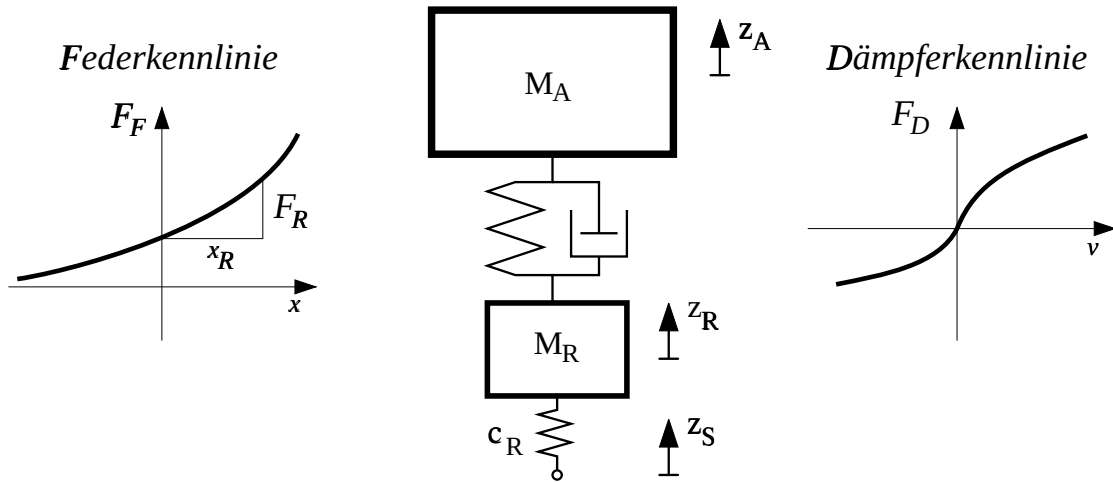


Abbildung 6.4.: Viertelfahrzeug mit nichtlinearen Kennlinien

Die Bewegungsgleichungen sind durch

$$\begin{aligned} m_A \ddot{z}_A &= F - m_A g \\ m_R \ddot{z}_R &= P - F - m_R g \end{aligned} \quad (6.54)$$

gegeben, wobei $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ die Erdbeschleunigung bezeichnet und m_A , m_R die anteiligen Massen von Aufbau und Rad bezeichnen. Die Koordinaten z_A und z_R werden von der Gleichgewichtslage aus gemessen.

Die Radlast P wird über die Reifensteifigkeit c_R aus der Reifeneindrückung $z_R - z_S$ berechnet

$$P = (m_A + m_R)g + c_R(z_S - z_R). \quad (6.55)$$

Der erste Term in (6.55) beschreibt den statischen Anteil. Mit der Bedingung $P \geq 0$ wird auch das Abheben erfaßt.

Aufbau-Federung und -Dämpfung werden durch nichtlineare Funktionen des Federwegs

$$x = z_R - z_A \quad (6.56)$$

und der Federgeschwindigkeit

$$v = \dot{z}_R - \dot{z}_A \quad (6.57)$$

beschrieben, wobei Einfedern bei $x > 0$ und eine Druckbelastung des Dämpfers bei $v > 0$ vorliegt.

Die Dämpferkennlinie wird mit den Parametern $p_i \geq 0$, $i = 1(1)4$ als degressive Funktion angesetzt

$$F_D(v) = \begin{cases} p_1 v \frac{1}{1 + p_2 v} & v \geq 0 \quad (\text{Druck}) \\ p_3 v \frac{1}{1 - p_4 v} & v < 0 \quad (\text{Zug}) \end{cases}. \quad (6.58)$$

Ein linearer Dämpfer mit der Dämpferkonstante d wird mit $p_1 = p_3 = d$ und $p_2 = p_4 = 0$ beschrieben.

Für die Federkennlinie wird der Ansatz

$$F_F(x) = m_A g + \frac{F_R}{x_R} x \frac{1 - p_5}{1 - p_5 \frac{|x|}{x_R}} \quad (6.59)$$

verwendet, wobei $m_A g$ die Federvorspannung angibt. Mit Parametern im Bereich $0 \leq p_5 < 1$ erhält man unterschiedlich progressive Kennlinien. Der Sonderfall $p_5 = 0$ beschreibt eine lineare Feder mit der Federkonstante $c = F_R/x_R$. Alle Federkennlinien laufen durch den Betriebspunkt x_R, F_R . Dadurch erhält man beim realen Fahrzeug unabhängig von der gewählten Progression jeweils den gleichen Wankwinkel bei einer bestimmten Querbeschleunigung.

6.3.2. Regellose Unebenheiten

Das Fahrzeug fährt mit der konstanten Geschwindigkeit $v_F = \text{const.}$ Wenn es bei $t = 0$ an der Stelle $x_F = 0$ startet, dann wird der momentane Ort des Fahrzeugs durch

$$x_F(t) = v_F * t . \quad (6.60)$$

angegeben. Die Fahrbahnunebenheiten können damit als Zeitfunktion $z_S = z_S(x_F(t))$ dargestellt werden.

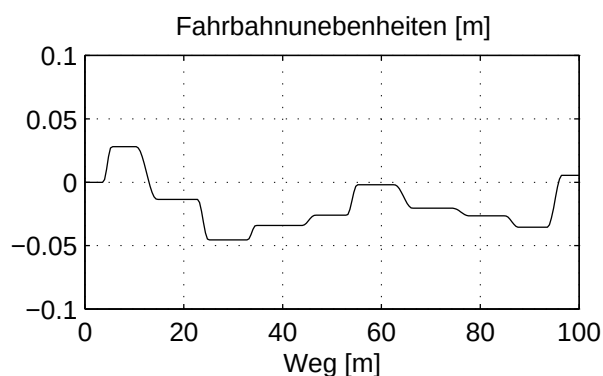


Abbildung 6.5.: Fahrbahnprofil 1

Die Berechnung optimaler Kennlinien, d.h. die Bestimmung der Parameter p_1 bis p_5 , erfolgt für drei verschiedene Fahrbahnen. Jede Fahrbahn setzt sich aus einer Reihe von Einzelhindernissen zusammen, deren Längen und Höhen zufällig verteilt werden. Abb. 6.5 zeigt das erste

Fahrbahnprofil $z_{S_1}(x)$. Die Profile zwei und drei wurden durch Multiplikation mit den Faktoren 3 und 5 aus dem ersten Profil erzeugt, $z_{S_2}(x) = 3 * z_{S_1}(x)$, $z_{S_3}(x) = 5 * z_{S_1}(x)$.

6.3.3. Fahrzeugdaten

Die in der Tabelle 6.4 zusammengestellten Zahlenwerte beschreiben die anteilige Aufbaumasse eines vollbesetzten und leeren Busses über der Hinterachse, die Masse der Hinterachse und die Summe der Reifensteifigkeiten an der zwillingbereiften Hinterachse.

Fahrzeugdaten	m_A [kg]	m_R [kg]	F_R [N]	x_R [m]	c_R [N/m]
voll besetzt	11 000	800	40 000	0.100	3 200 000
leer	6 000	800	22 500	0.100	3 200 000

Tabelle 6.4.: Zahlenwerte für einen beladenen und unbeladenen Bus

Das Fahrzeug verfügt über Niveau-Regelung. Deshalb wurde auch die Kraft F_R bei der Referenzauslenkung x_R an die Beladung angepaßt.

Das Fahrzeug fährt mit der konstanten Geschwindigkeit $v_F = 20 \text{ m/s}$.

Die fünf Parameter, p_i , $i=1(1)5$, die die nichtlinearen Feder-, Dämpfer-Kennlinien beschreiben, werden durch Minimierung von Gütefunktionalen berechnet.

6.3.4. Gütekriterien

In einem ersten Gütefunktional sollen Fahrkomfort und Fahrsicherheit durch die Aufbaubeschleunigungen und Radlastschwankungen bewertet werden.

$$G_{K1} = \frac{1}{t_E - t_0} \int_{t_0}^{t_E} \left\{ \underbrace{\left(\frac{\ddot{z}_A}{g} \right)^2}_{\text{Fahrkomfort}} + \underbrace{\left(\frac{P_D}{P_S} \right)^2}_{\text{Fahrsicherheit}} \right\} . \quad (6.61)$$

Die Aufbaubeschleunigung $\ddot{z}_A$ wurde dabei auf die Erdbeschleunigung g normiert. Der dynamische Anteil der Aufstandskraft $P_D = c_R(z_S - z_R)$ folgt mit der statischen Aufstandskraft $P_S = (m_A + m_R)g$ aus (6.55).

Bei realen Fahrzeugen ist der Federweg beschränkt. Das Gütekriterium G_{K1} wird deshalb entsprechend erweitert.

$$G_{K2} = \frac{1}{t_E - t_0} \int_{t_0}^{t_E} \left\{ \underbrace{\left(\frac{\ddot{z}_A}{g} \right)^2}_{\text{Fahrkomfort}} + \underbrace{\left(\frac{P_D}{P_S} \right)^2}_{\text{Fahrsicherheit}} + \underbrace{\left(\frac{x}{x_R} \right)^2}_{\text{Federweg}} \right\} , \quad (6.62)$$

wobei der durch (6.56) definierte Federweg x auf den Referenzweg x_r bezogen wurde.

Der Länge des Fahrwegs und der gewählten Fahrgeschwindigkeit entsprechend, wurden die in (6.61) und (6.62) verwendeten Zeiten auf $t_0 = 0 \text{ s}$ und $t_E = 8 \text{ s}$ gesetzt.

6.3.5. Optimale Parameter

Bewertet man nach dem Kriterium G_{K1} nur Fahrkomfort und Fahrsicherheit und beschränkt sich mit $p_1 = p_3$ und $p_2 = p_4 = p_5 = 0$ auf lineare Kennlinien, dann erhält man die in der Tabelle 6.5 zusammengestellten Ergebnisse.

Fahr- bahn	Bela- dung	optimale Parameter					Anteile im Gütekriterium	
		p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	Komfort	Sicherheit
1	voll	35766	0	35766	0	0	0.002886	0.002669
2	voll	35763	0	35763	0	0	0.025972	0.024013
3	voll	35762	0	35762	0	0	0.072143	0.066701
1	leer	20298	0	20298	0	0	0.003321	0.003961
2	leer	20300	0	20300	0	0	0.029889	0.035641
3	leer	19974	0	19974	0	0	0.083040	0.098385

Tabelle 6.5.: Lineare Feder- und Dämpferparameter aus Optimierung gemäß G_{K1}

Die Federkonstanten $c = F_R/x_r$ für das vollbesetzte und leere Fahrzeug sind durch die Zahlenwerten in der Tabelle 6.4 festgelegt. Man erhält: $c_{leer} = 225\,000\text{ N/m}$ und $c_{voll} = 400\,000\text{ N/m}$.

Die Ergebnisse sind fast unabhängig von der Fahrbahn. Der optimale Wert des Dämpfungsparameters $d = p_1 = p_3$ hängt jedoch stark vom Beladungszustand ab. Die Optimierung paßt gleichsam die Dämpferkonstante an die veränderte Federrate an.

Das beladene Fahrzeug ist komfortabler und sicherer.

Die Ergebnisse der Optimierung mit nichtlinearen Kennlinien sind in der Tabelle 6.6 zusammengestellt.

Fahr- bahn	Bela- dung	optimale Parameter					Anteile im Gütekriterium	
		p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	Komfort	Sicherheit
1	voll	16182	0.000	20028	1.316	0.9671	0.000265	0.001104
2	voll	52170	2.689	57892	1.175	0.6983	0.009060	0.012764
3	voll	1875	3.048	311773	4.295	0.0000	0.040813	0.050069
1	leer	13961	0.000	17255	0.337	0.9203	0.000819	0.003414
2	leer	16081	0.808	27703	0.454	0.6567	0.012947	0.031285
3	leer	9942	0.227	64345	0.714	0.0000	0.060992	0.090250

Tabelle 6.6.: Nichtlineare Feder- und Dämpferkennlinie aus Optimierung gemäß G_{K1}

Die Optimierung wurde mit den linearen Parametern aus Tabelle 6.5 gestartet.

Nur bei den extremen Fahrbahnunebenheiten von Profil 3 ergibt sich mit $p_5 = 0$ eine lineare Federkennung, Abb. 6.7. Bei normalen Fahrbahnunebenheiten erhält man stark progressive Federn.

Die Dämpfer sind degressiv und in der Zug- und Druckstufe unterschiedlich.

Im Vergleich zum linearen Modell erhält man insbesondere im Fahrkomfort eine deutliche Verbesserung.

Die Aufbaubeschleunigungen bei der Fahrt mit dem beladenen Fahrzeug über das Profil 2 sind in Abb. 6.6 dargestellt.

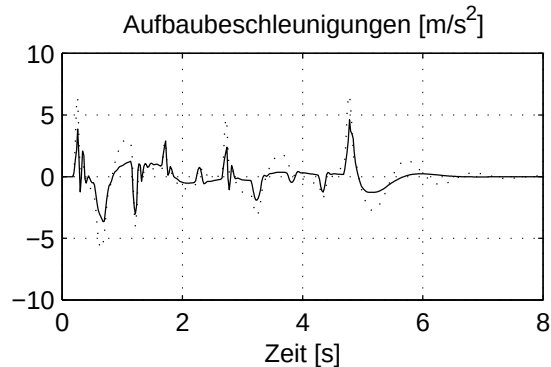


Abbildung 6.6.: Aufbaubeschleunigungen optimiert nach G_{K1} ($\cdots$ linear, — nichtlinear)

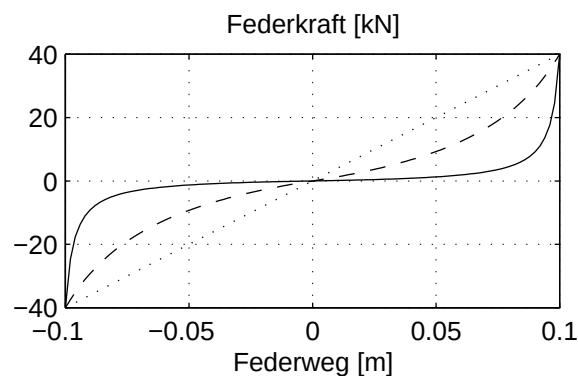


Abbildung 6.7.: Optimale Federkennlinien; Fahrzeug vollbesetzt; Kriterium G_{K1}

Die extrem progressive Federkennlinie, die bei geringen Fahrbahnunebenheiten (Profil 1) optimal wäre, lässt sich in der Praxis so nicht realisieren. Aufgrund der geringen Steifigkeit der Feder um die Gleichgewichtslage rufen kleine Störungen nur sehr geringe Rückstellkräfte hervor. Deshalb würde es sehr lange dauern, bis die Gleichgewichtslage wieder erreicht wird. Zudem hätten Reibungskräfte in der Aufbau Lagerung beträchtliche Verschiebungen der Gleichgewichtslage zur Folge.

Praktisch relevante Ergebnisse erhält man nur, wenn zusätzlich noch die Federwege bewertet werden. Zunächst wurden wieder lineare Kennlinien angenommen, Tabelle 6.7. Die Bewertungsziffern für Komfort und Sicherheit haben sich durch die Hinzunahme der Federwegbewertung im Vergleich zu den Werten in Tabelle 6.5 verschlechtert.

Fahr- bahn	Bela- dung	optimale Parameter					Anteile im Gütekriterium		
		p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	Komfort	Sicherheit	Federweg
1	voll	68727	0	68727	0	0	0.003854	0.003673	0.006339
2	voll	68666	0	68666	0	0	0.034657	0.033025	0.057097
3	voll	72882	0	72882	0	0	0.098961	0.094431	0.148757
1	leer	35332	0	35332	0	0	0.004417	0.004701	0.006638
2	leer	35656	0	35656	0	0	0.040049	0.042507	0.059162
3	leer	37480	0	37480	0	0	0.112143	0.116722	0.155290

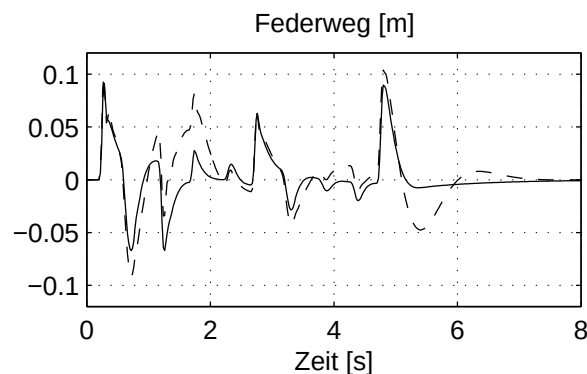
Tabelle 6.7.: Lineare Feder- und Dämpferkennlinie aus Optimierung gemäß G_{K2}

Fahr- bahn	Bela- dung	optimale Parameter					Anteile im Gütekriterium		
		p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	Komfort	Sicherheit	Federweg
1	voll	175530	12.89	102997	3.437	0.4722	0.001747	0.002044	0.005769
2	voll	204674	5.505	107498	1.234	0.6000	0.015877	0.018500	0.050073
3	voll	327864	4.844	152732	1.165	0.5140	0.064980	0.068329	0.116555
1	leer	66391	5.244	50353	2.082	0.5841	0.002380	0.003943	0.005597
2	leer	37246	0.601	37392	0.101	0.5459	0.024524	0.033156	0.059717
3	leer	89007	1.668	68917	0.643	0.3614	0.085001	0.102876	0.125042

Tabelle 6.8.: Nichtlineare Feder- und Dämpferkennlinie aus Optimierung gemäß G_{K2}

Um realistische Federkennlinien zu erhalten, wurde nun der Parameter p_5 nach oben beschränkt, $p_5 \leq 0.6$. Ausgehend von den linearen Parametern aus Tabelle 6.7 liefert eine Optimierung nach dem Kriterium G_{K2} die in der Tabelle 6.8 zusammengestellten Ergebnisse.

Ein Fahrzeugs mit G_{K2} -optimierten Kennlinien bewältigt die Fahrt über unebene Fahrbahnen mit deutlich weniger Federweg als ein Fahrzeug mit G_{K1} -optimierten Kennlinien, Abb. 6.8. Der verringerte Federweg geht allerdings auf Kosten des Komforts und der Sicherheit.

Abbildung 6.8.: Federwege auf Profil 2 (--- G_{K1} , — G_{K2})

Aber in den meisten Fällen liegen die entsprechenden Teilkriterien in Tabelle 6.8 sogar unter den Werten des linearen Modells aus Tabelle 6.5, wo die Federwege gar nicht bewertet wurden.

Durch die Verwendung nichtlinearer Kennlinien können also der Komfort und die Sicherheit eines Fahrzeugs trotz Beschränkung des Federwegs verbessert werden.

Die optimalen Dämpferkennlinien hängen stark von der Intensität der Fahrbahnunebenheiten ab, Abb. 6.9.

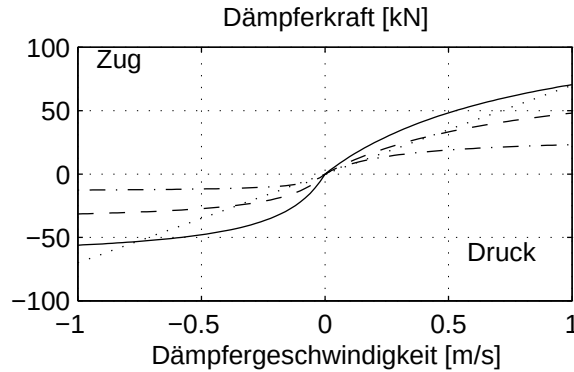


Abbildung 6.9.: Optimale Dämpferkennlinien nach Tabelle 6.8

Optimaler Komfort und optimale Sicherheit sind nur gewährleistet, wenn die Dämpfern sowohl an die Beladung als auch an die Intensität der Fahrbahnunebenheiten angepaßt werden.

6.4. Dynamische Kraffelemente

6.4.1. Systemantwort im Frequenzbereich

6.4.1.1. Grundharmonische Anteile

Die Wirkung dynamischer Kraffelemente wird in der Regel im Frequenzbereich beurteilt. Dazu wird das Element im Prüfstand oder in der Simulation mit verschiedenen Frequenzen $f_0 \leq f_i \leq f_E$ und unterschiedlichen Amplituden $A_{min} \leq A_j \leq A_{max}$ mit

$$x_e(t) = A_j \sin(2\pi f_i t) \quad (6.63)$$

periodisch erregt. Nach der Einschwingzeit $t_{S_i} \ll T_i$ mit $T = 1/f_i$ stellt sich ein stationärer Zustand ein. Aufgrund des nichtlinearen Systemverhaltens ist die Systemantwort zwar periodisch aber nicht harmonisch. Für die Auswertung wird deshalb die Antwort, z.B. die gemessene oder berechnete Kraft F , jeweils in den Intervallen $t_{S_i} \leq t \leq t_{S_i} + T_i$ bestmöglich durch harmonische Funktionen angenähert

$$\underbrace{F(t)}_{\substack{\text{gemessen} \\ \text{oder} \\ \text{berechnet}}} \approx \underbrace{\alpha_i \sin(2\pi f_i t) + \beta_i \cos(2\pi f_i t)}_{\text{harmonische Approximation}}. \quad (6.64)$$

Die Koeffizienten α_i und β_i können aus der Forderung nach einem minimalen Gesamtfehler berechnet werden

$$\frac{1}{2} \int_{t_{S_i}}^{t_{S_i}+T_i} \left(\alpha_i \sin(2\pi f_i t) + \beta_i \cos(2\pi f_i t) - F(t) \right)^2 dt \longrightarrow \text{Minimum} . \quad (6.65)$$

Die Differentiation von (6.65) nach α_i und β_i liefert als notwendige Bedingung zwei lineare Gleichungen

$$\begin{aligned} \int_{t_{S_i}}^{t_{S_i}+T_i} \left(\alpha_i \sin(2\pi f_i t) + \beta_i \cos(2\pi f_i t) - F(t) \right)^2 \sin(2\pi f_i t) dt &= 0 \\ \int_{t_{S_i}}^{t_{S_i}+T_i} \left(\alpha_i \sin(2\pi f_i t) + \beta_i \cos(2\pi f_i t) - F(t) \right)^2 \cos(2\pi f_i t) dt &= 0 \end{aligned} \quad (6.66)$$

mit den Lösungen

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{\int F \sin dt \int \cos^2 dt - \int F \cos dt \int \sin \cos dt}{\int \sin^2 dt \int \cos^2 dt - 2 \int \sin \cos dt} , \\ \beta_i &= \frac{\int F \cos dt \int \sin^2 dt - \int F \sin dt \int \sin \cos dt}{\int \sin^2 dt \int \cos^2 dt - 2 \int \sin \cos dt} \end{aligned} \quad (6.67)$$

wobei die Integralgrenzen und die Argumente der Sinus- und Cosinus-Funktionen nicht mehr angeschrieben wurden.

Da genau über eine Periode $t_{S_i} \leq t \leq t_{S_i}+T_i$ integriert wird, gilt für die Integrale in (6.67)

$$\int \sin \cos dt = 0 ; \quad \int \sin^2 dt = \frac{T_i}{2} ; \quad \int \cos^2 dt = \frac{T_i}{2} \quad (6.68)$$

und als Lösung bleibt

$$\alpha_i = \frac{2}{T_i} \int F \sin dt , \quad \beta_i = \frac{2}{T_i} \int F \cos dt . \quad (6.69)$$

Das sind aber genau die ersten beiden Koeffizienten einer Fourier-Approximation.

In der Praxis wird die Frequenzantwort eines Systems nicht punktweise sondern kontinuierlich ermittelt. Dazu wird das System mit einem Gleitsinus erregt.

6.4.1.2. Erregung durch Gleitsinus

Analog zur einfachen Sinus-Funktion

$$x_e(t) = A \sin(2\pi f t) , \quad (6.70)$$

wo beim Differenzieren die Periodendauer $T = 1/f$ als Vorfaktor erscheint

$$\dot{x}_e(t) = A 2\pi f \cos(2\pi f t) = \frac{2\pi}{T} A \cos(2\pi f t), \quad (6.71)$$

kann nun eine verallgemeinerte Sinusschwingung konstruiert werden. Ausgehend von dem Ansatz

$$x_e(t) = A \sin(2\pi h(t)) \quad (6.72)$$

mit

$$\dot{x}_e(t) = A 2\pi \dot{h}(t) \cos(2\pi h(t)) \quad (6.73)$$

verlangt man nun, daß die Funktion $h(t)$ eine linear mit der Zeit abfallende Periodendauer ergibt, d.h.:

$$\dot{h}(t) = \frac{1}{T(t)} = \frac{1}{p - q t}, \quad (6.74)$$

wobei $p > 0$ und $q > 0$ noch zu bestimmende Konstante sind. Aus (6.74) folgt

$$h(t) = -\frac{1}{q} \ln(p - q t) + C. \quad (6.75)$$

Die Anfangsbedingung $h(t = 0) = 0$ legt die Integrationskonstante fest

$$C = \frac{1}{q} \ln p. \quad (6.76)$$

Setzt man nun (6.76) in (6.75) ein, dann folgt aus (6.72) eine sinusähnliche Funktion

$$x_e(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{q} \ln \frac{p}{p - q t}\right), \quad (6.77)$$

die linear mit Zeit abnehmende Periodenlängen liefert.

Die für die Bestimmung der Periodendauer maßgebenden Nullstellen liegen bei

$$\frac{1}{q} \ln \frac{p}{p - q t_n} = 0, 1, 2, \quad \text{oder} \quad \frac{p}{p - q t_n} = e^{n q}, \quad \text{mit } n = 0, 1, 2, \quad (6.78)$$

und

$$t_n = \frac{p}{q} (1 - e^{-n q}), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.79)$$

Die Zeitdifferenz zwischen zwei Nullstellen bestimmt die Periodenlänge

$$\begin{aligned} T_n &= t_{n+1} - t_n = \frac{p}{q} (1 - e^{-(n+1)q} - 1 + e^{-nq}) \\ &= \frac{p}{q} e^{-nq} (1 - e^{-q}), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6.80)$$

Für die erste ($n = 0$) und letzte ($n = N$) Periode findet man

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{p}{q} (1 - e^{-q}) \\ T_N &= \frac{p}{q} (1 - e^{-q}) e^{-Nq} = T_0 e^{-Nq}. \end{aligned} \quad (6.81)$$

Gibt man nun den zu untersuchenden Frequenzbereich durch die Anfangs- f_0 und Endfrequenz f_E vor, dann können die Parameter q und das Verhältnis q/p aus (6.81) berechnet werden

$$q = \frac{1}{N} \ln \frac{f_E}{f_0}, \quad \frac{q}{p} = f_0 \left\{ 1 - \left[\frac{f_E}{f_0} \right]^{\frac{1}{N}} \right\}, \quad (6.82)$$

wobei N die Anzahl der Frequenzintervalle festlegt.

Das Durchlaufen des gesamten Frequenzbereichs dauert dann

$$t_{N+1} = \frac{1 - e^{-(N+1)q}}{q/p} \quad (6.83)$$

Sekunden.

6.4.2. Elastische Dämpferlager

Die Abb. 6.10 zeigt das Modell eines elastisch gelagerten Dämpfers mit Reibung.

Der Dämpfer und das Dämpferlager werden durch nichtlineare Kraft-Geschwindigkeits- $F_{DK} = F_{DK}(v)$ und Kraft-Weg-Kennlinien $F_{DL} = F_{DL}(x)$ beschrieben. Die Reibkraft im Dämpfer ist durch die Reibungsungleichung

$$F_{DR} \leq F_{DR}^{max} \quad (6.84)$$

begrenzt, wobei die maximale Reibkraft mit $F_{DR}^{max} = \mu N_D$ durch den Reibungsbeiwert μ und die Normalkraft N_D bestimmt ist.

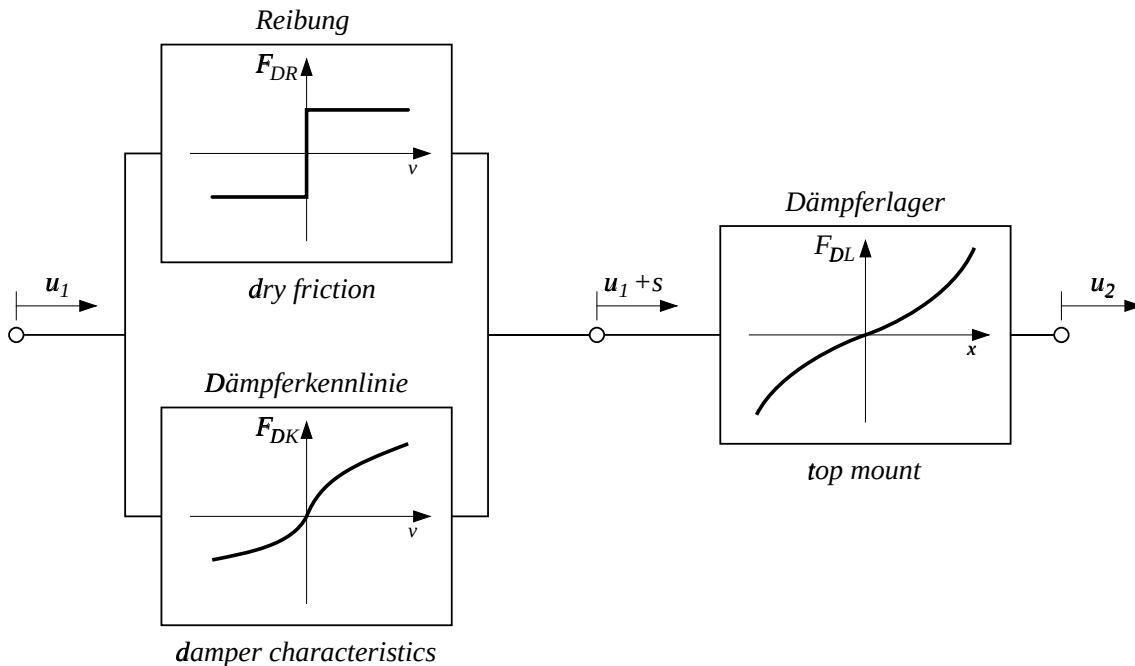


Abbildung 6.10.: Dämpfermodell

Bei Vernachlässigung der Dämpfermasse liefert das Kräftegleichgewicht am System Dämpfer mit Dämpferlager.

$$F_{DK}(\dot{s}) + F_{DR}(\dot{s}) = F_{DL}(u_2 - (u_1 + s)) . \quad (6.85)$$

Mit $F_D(\dot{s}) = F_{DK}(\dot{s}) + F_{DR}(\dot{s})$ folgt daraus eine Differentialgleichung 1. Ordnung für die Dämpferverschiebung s

$$\dot{s} = F_D^{-1} (F_{DL}(u_2 - (u_1 + s))) . \quad (6.86)$$

Die Umkehrfunktion F_D^{-1} ist im Gegensatz zur Reibungsungleichung (6.84) eindeutig

$$F_D^{-1} = \begin{cases} F_{DK}^{-1}(F_{DL} + F_{DR}^{max}) & F_{DL} < -F_{DR}^{max} \\ 0 & \text{für } |F_{DL}| \leq F_{DR}^{max} \\ F_{DK}^{-1}(F_{DL} - F_{DR}^{max}) & F_{DL} > +F_{DR}^{max} \end{cases} . \quad (6.87)$$

Mit dieser Modellierung können die Reibungseffekte im Dämpfer, bis hin zum Blockieren, nachgebildet werden.

6.4.3. Modell eines Hydrolagers

Bei der elastischen Lagerung von Motoren in Fahrzeugen setzt man sehr häufig speziell entwickelte Hydro-Lager ein. Das dynamisch nichtlineare Verhalten dieser Bauteile gewährleistet eine gute akkustische Entkopplung, stellt aber gleichzeitig im Bereich mechanischer Schwingungen eine ausreichende Dämpfung zur Verfügung.

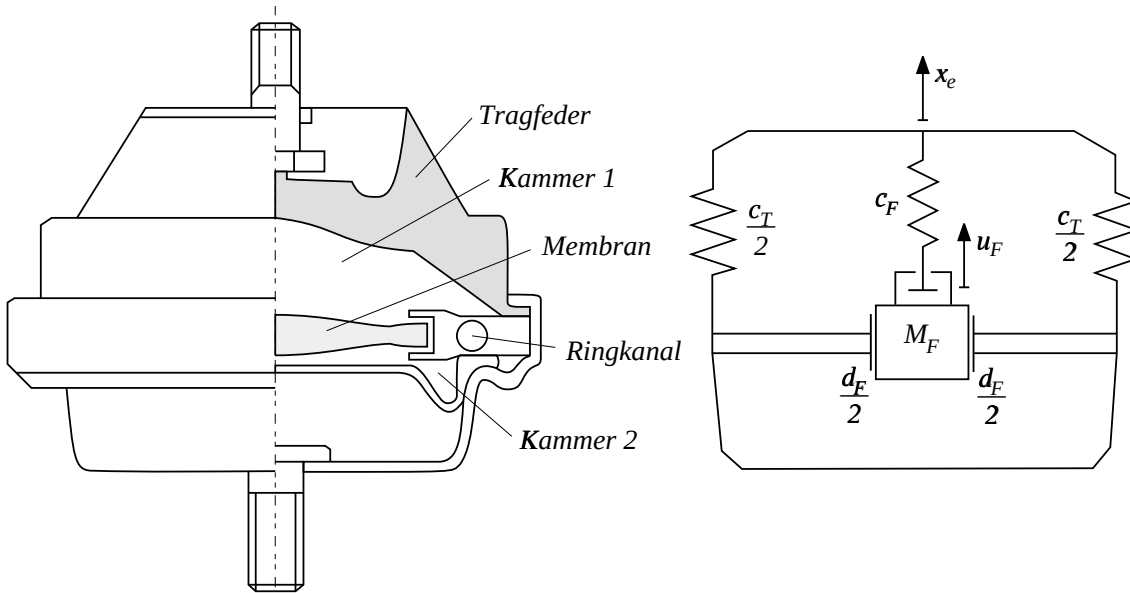


Abbildung 6.11.: Hydro-Lager: Prinzip und Modell

Die Abbildung 6.11 zeigt Prinzip und mathematisches Modell eines Hydrolagers.

Bei kleinen Verformungen wird die Volumenänderung der Kammer 1 durch Verschiebungen der Membran kompensiert. Erreicht die Membran die Anschläge, dann wird die Flüssigkeit in Kammer 1 durch einen Ringkanal in die Kammer 2 gepreßt. Das Verhältnis von Kammerquerschnitt zu Ringkanalquerschnitt ist sehr groß. Das Fluid wird dadurch mit sehr hohen Geschwindigkeiten durch den Ringkanal bewegt. Daraus resultieren beachtliche Trägheits- und Widerstandskräfte (Dämpfungskräfte).

Die Kraftwirkung des Hydrolagers setzt sich aus der Elastizität der Tragfeder und der Volumenänderungen der Kammer 1 zusammen.

Bezeichnet u_F die Verschiebung der verallgemeinerten Fluidmasse M_F , dann gilt

$$F_H = c_T x_e + F_F(x_e - u_F), \quad (6.88)$$

wobei die Kraftwirkung der Tragfeder durch eine lineare Feder mit der Konstanten c_T approximiert wurde.

Mit M_{FR} als tatsächliche Fluidmasse im Ringkanal und den Querschnittsflächen A_K , A_R von Kammer und Ringkanal ist die verallgemeinerte Fluidmasse durch

$$M_F = \left(\frac{A_K}{A_R} \right)^2 M_{FR} \quad (6.89)$$

gegeben.

Das Fluid in der Kammer 1 wird erst komprimiert, wenn die Membran nicht mehr weiter ausweichen kann. Mit der Fluidsteifigkeit c_F und dem Membranspiel s_F erhält man dann

$$F_F(x_e - u_F) = \begin{cases} c_F \left((x_e - u_F) + s_F \right) & (x_e - u_F) < -s_F \\ 0 & \text{für } |x_e - u_F| \leq s_F \\ c_F \left((x_e - u_F) - s_F \right) & (x_e - u_F) > +s_F \end{cases} \quad (6.90)$$

Der harte Übergang von Spiel $F_F = 0$ und Fluidkomprimierung, bzw. Kammerverformung mit $F_F \neq 0$ ist nicht realistisch und führt auch bei der numerischen Lösung zu Problemen. Die Funktion (6.90) wird deshalb im Bereich $|x_e - u_F| \leq 2 * s_F$ durch eine Parabel ausgerundet.

Bei den Bewegungen der Fluidmasse entstehen im Ringkanal Reibungsverluste, die in erster Näherung proportional zur Geschwindigkeit sind,

$$F_D = d_F \dot{u}_F. \quad (6.91)$$

Die Bewegungsgleichung für die Fluidmasse lautet damit

$$M_F \ddot{u}_F = -F_F - F_D. \quad (6.92)$$

Durch das Membranspiel ist (6.92) nichtlinear und kann nur mehr numerisch gelöst werden. Die Nichtlinearität schlägt dann auch auf die Gesamtkraft (6.88) im Hydro-Lager durch.

Die dynamische Steifigkeit und der Verlustwinkel eines Hydrolagers sind in Abb. 6.12 über der Frequenz aufgetragen.

Der Verlustwinkel ist ein Maß für die Dämpfung.

Folgende Systemparameter wurden der Simulation zugrunde gelegt.

m_F	$= 25 \text{ kg}$	verallgemeinerte Fluidmasse
c_T	$= 125\,000 \text{ N/m}$	Steifigkeit der Tragfeder
d_F	$= 750 \text{ N/(m/s)}$	Dämpfungskonstante
c_F	$= 100\,000 \text{ N/m}$	Fluidsteifigkeit
s_F	$= 0.0002 \text{ mm}$	Spiel in Membranlagerung

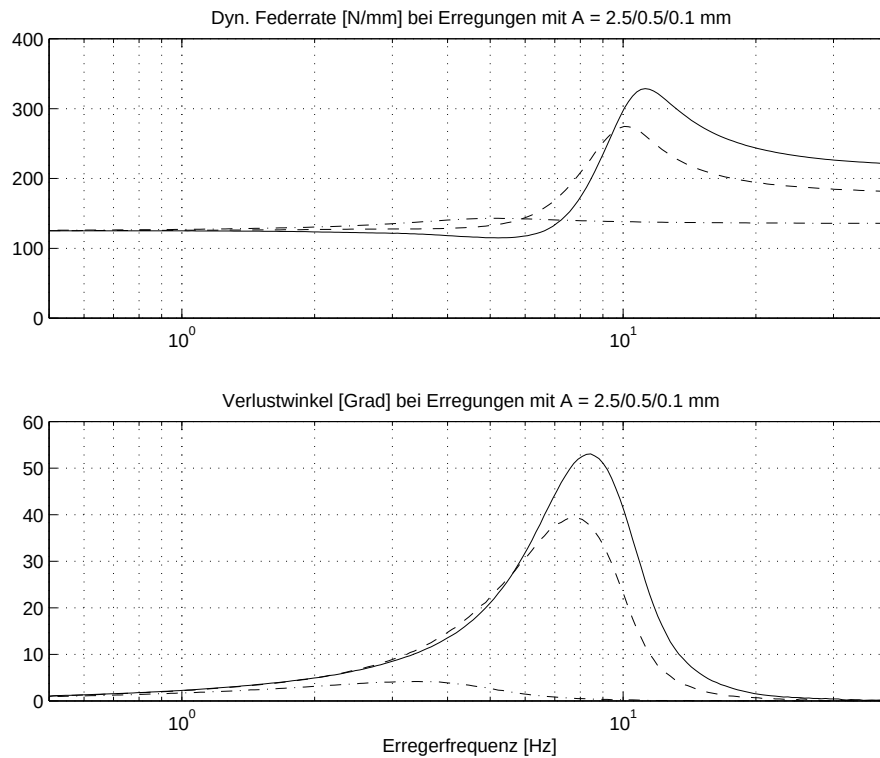


Abbildung 6.12.: Dynamische Steifigkeit [N/mm] und Verlustwinkel [Grad] für ein Hydro-Lager

Durch das nichtlineare und dynamische Verhalten kann ein sehr guter Kompromiß zwischen Schallisolierung und Schwingungsdämpfung erreicht werden.

6.5. Gesamtfahrzeug

6.5.1. Modell

Bei der Firma Ford wird für Komfortberechnungen das Fahrdynamikprogramm VeDynA (Vehicle Dynamic Aalysis) eingesetzt, Abb. 6.13.

Die theoretischen Grundlagen des Programmsystems – die Modellbildung, das Aufstellen der Bewegungsgleichungen und die numerische Lösung – sind in dem Buch "G.Rill: Simulation von Kraftfahrzeugen, Vieweg 1994" veröffentlicht.

Durch Programmerweiterungen, die Anpassung an verschiedene Betriebssysteme, die Einrichtung von Schnittstellen zu anderen Programmen sowie eine menügesteuerte Ein- und Ausgabe wurde VeDynA in der Folgezeit bei der Firma TESIS GmbH in München zur Marktreife entwickelt.

Bei dem in VeDynA integrierten Reifenmodell *tmeasy* (*tire model easy to use*) werden die Reifenkräfte unter Berücksichtigung der Reifenverformung dynamisch berechnet. Für jeden Reifen wird eine Kontaktrechnung durchgeführt. Die lokale Neigung der Fahrbahn wird durch drei Fahrbahnpunkte ermittelt. Aus den statistischen Kenngrößen einer Fahrbahn, spektrale Leistungsdichte und Welligkeit, werden zweidimensionale, regellose Fahrbahnunebenheiten berechnet.

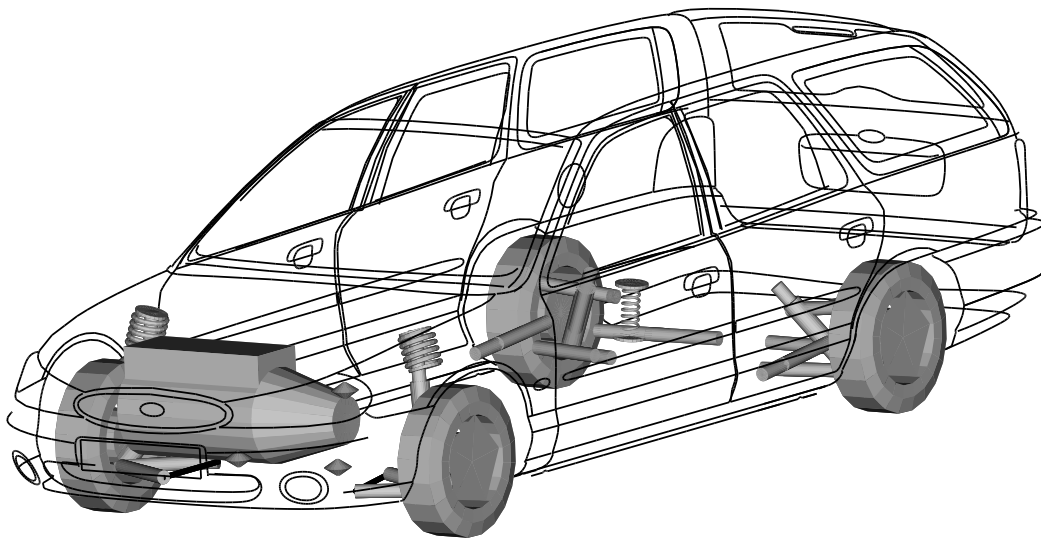


Abbildung 6.13.: Pkw-Modell

Das Fahrzeugmodell zeichnet sich insbesondere durch folgende Details aus:

- nichtlineare Elasto-Kinematik der Radaufhängungen,
- reibungsbehaftete und elastisch gelagerte Dämpfer,
- vollelastische Motorlagerung durch statische und dynamische Kraftelemente (Gummielemente und/oder Hydrolager),
- integrierte Mensch-Sitz-Modelle.

Darüberhinaus werden Schnittstellen zu externen Reifen- und Kraftelementmodellen zur Verfügung gestellt. Ein speziell entwickeltes Integrationsverfahren ermöglicht Echtzeitsimulation auf einem PC.

6.5.2. Simulationsergebnisse

Das Fahrzeug, ein mit zwei Personen besetzter Ford Mondeo, fährt mit $v = 80 \text{ km/h}$ über eine Landstraße. Die dabei auftretenden Beschleunigungen an der Fahrersitzschiene und die Radlastschwankungen sind in Abb. 6.14 aufgetragen.

Im folgenden soll nun der Einfluß verschiedener Systemparameter auf Beschleunigungen und Radlasten, also auf den Fahrkomfort und die Fahrsicherheit, untersucht werden.

6.5.3. Verschiedene Einflüsse auf Komfort und Sicherheit

Die Extremwerte der Beschleunigungen und die maximale Radlastschwankungen sind in den Tabellen 6.9 und 6.10 für das Serienfahrzeug und verschiedene Modellvarianten aufgelistet.

Beschleunigung	Serie	– Reibung	– Sitzmodell	– Motorlager	– Komfortlager
$\ddot{x}_{min}$	-0.7192	-0.7133	-0.7403	-0.5086	-0.7328
$\ddot{x}_{max}$	+0.6543	+0.6100	+0.6695	+0.5092	+0.6886
$\ddot{y}_{min}$	-1.4199	-1.2873	-1.4344	-0.7331	-1.5660
$\ddot{y}_{max}$	+1.3991	+1.2529	+1.3247	+0.8721	+1.2564
$\ddot{z}_{min}$	-4.1864	-3.9986	-4.1788	-3.6950	-4.2593
$\ddot{z}_{max}$	+3.0623	2.7769	+3.1176	+2.8114	+3.1449

Tabelle 6.9.: Extremwerte der Beschleunigungen

ΔP	Serie	– Reibung	– Sitzmodell	– Motorlager	– Komfortlager
links vorne	2.3830	2.4507	2.4124	2.3891	2.2394
rechts vorne	2.4208	2.3856	2.4436	2.3891	2.4148
links hinten	2.1450	2.2616	2.1600	2.1113	2.1018
rechts hinten	2.3355	2.2726	2.3730	2.2997	2.1608

Tabelle 6.10.: Radlastschwankungen $\Delta P = P_{max} - P_{min}$

Man sieht, daß die Dämpferreibung, die Passagiere, die Motorlagerung und die Elastokinematik der Radaufhängungen (hier: repräsentiert durch die Komfortlager) insbesondere die Beschleunigungen und damit den Fahrkomfort beeinflussen.

Bei einer Feinabstimmung müssen folglich all diese Einflüsse berücksichtigt werden.

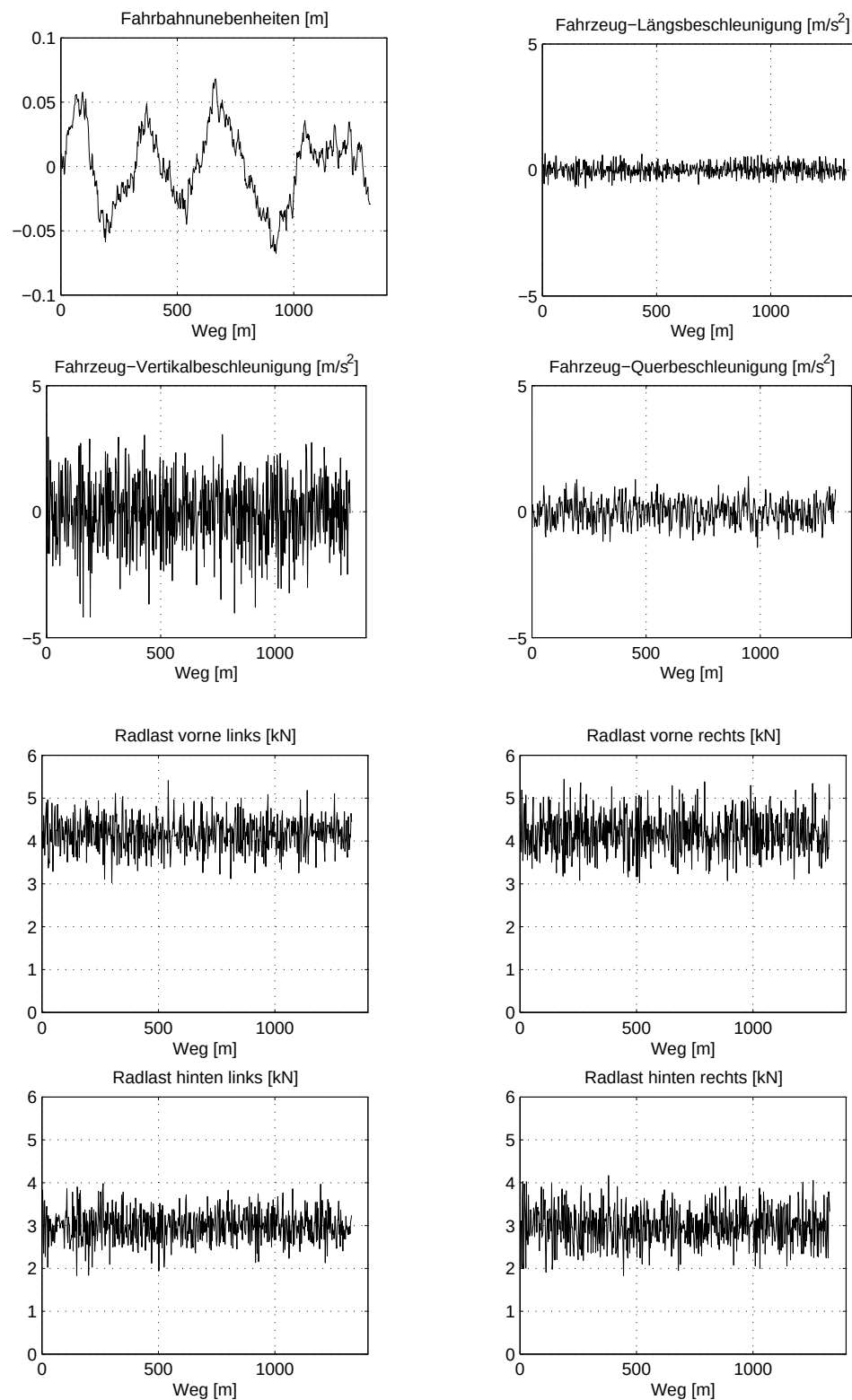


Abbildung 6.14.: Fahrbahnunebenheiten, Beschleunigungen und Radlasten

7. Ein virtuelles Fahrzeug

7.1. Grundmodell

Die Dynamik zweiachsiger Fahrzeuge wird durch ein Grundmodell Abb. 7.1 und Teilmodelle

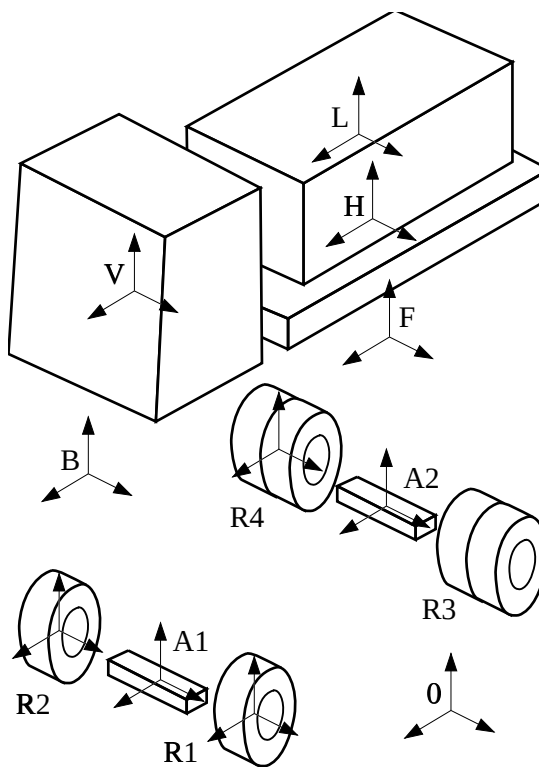


Abbildung 7.1.: Fahrzeuggrundmodell

für Lenkung, Antriebsstrang und Reifen nachgebildet. Das Einsatzgebiet umfaßt dann Pkw, Geländefahrzeuge, Reisebusse sowie leichte und schwere Nutzfahrzeuge.

Die Aufbau-Federung und -Dämpfung wird über Feder-/Dämpferkennlinien oder den charakteristischen Kenndaten von Luftfedern beschrieben.

Zur Beschreibung der Reifenkräfte und -momente wird das Reifenmodell TMEASY¹ verwendet. Die Kinematik des Lenkgestänges und der Achsaufhängungen werden "on-line" berechnet.

¹ G. Rill: Simulation von Kraftfahrzeugen. Vieweg-Verlag, Braunschweig/Wiesbaden, 1994

Das Fahrzeuggrundmodell besteht aus mehreren starren Körpern:

- V : Vorderwagen
- H : Hinterwagen
- L : Ladung
- R1: Rad und Radkörper vorne links
- A1: Achsträger vorne
- R2: Rad und Radkörper vorne rechts
- R3: Rad und Radkörper hinten links
- A2: Achsträger hinten
- R4: Rad und Radkörper hinten rechts

Das Bezugssystem B ist fest mit dem Vorderwagen verbunden. Das Inertialsystem 0 ist fahrbahnfest. Das Koordinatensystem FZ dient zur bequemen Dateneingabe.

Der Hinterwagen kann gegenüber dem Vorderwagen Drehbewegungen um eine, zur Fahrzeuglängsrichtung parallele Achse ausführen. Damit wird die Auswirkung eines torsionselastischen Rahmens auf die Fahrdynamik nachgebildet. Die Relativbewegung zwischen Vorder- und Hinterwagen kann bei Bedarf gesperrt werden.

Bei torsionselastischem Rahmen ist der Ladungskörper (L) fest mit dem Hinterwagen verbunden. Vorder-, Hinterwagen und Ladung werden bei starrem Aufbau zu einem Körper zusammengefaßt.

Vorder- und Hinterachse sind als Substrukturen modelliert. Dadurch können sowohl Einzelradaufhängungen als auch Starrachsen beschrieben werden.

In der vorliegenden Version stehen zur Auswahl:

- > Doppeldreieckslenkerachse
- > Dämpferbeinachse
- > Vierlenker-Starrachse
- > Schräglenkerachse (nur an der Hinterachse)

An den Hinterrädern (R3, R4) kann bei einer Starrachse zwischen Einzel- und Zwillingsbereifung gewählt werden.

Die Achstypen können beliebig mit den Lenkungsvarianten

- > Zahnstangenlenkung
- > Drehhebellenkung
- > Lenkviereck

kombiniert werden.

Für "offline"-Simulationen mit geregelter Fahrgeschwindigkeit wird ein vereinfachtes Modell für den Antriebsstrang verwendet. Das Lenkungsmodell berücksichtigt die Steifigkeit der Lenksäule und die Servo-Unterstützung.

Die Bewegungsgleichungen wurden mit dem Jourdain'schen Prinzip unter Verwendung verallgemeinerter Geschwindigkeiten hergeleitet. Die Integration der Bewegungsgleichungen erfolgt dezentral mit einem teilimpliziten Euler-Verfahren.

Dieses Fahrzeugmodell wird unter dem Namen VEDYNA² von vielen Automobilfirmen angewendet.

7.2. Lenkgestänge

7.2.1. Überblick

Das Lenkgestänge überträgt die Bewegungen am Lenkgetriebeausgang auf die Drehungen von Rad und Radkörper um die Spreizachse.

Vernachlässigt man die elastischen Verformungen der einzelnen Bauteile (Lenker, Hebel, Lager), dann können die Lenkbewegungen der Räder rein kinematisch berechnet werden.

In der vorliegenden Programmversion wird die Kinematik von drei verschiedenen Lenkgestängevarianten berechnet. Die Radkörper sind dabei durch getrennte Spurstangen mit dem Lenkgestänge gekoppelt. Das Lenkgestänge reduziert sich somit auf die Übertragung der Bewegung am Lenkgetriebeausgang auf die Verschiebungen der Spurstangengelenkpunkte, die mit dem Lenkgestänge verbunden sind.

Bei einigen Achsen ist die Lage der Spreizachse nicht bereits durch Gelenkpunkte fixiert. Die Spreizachse wird dann durch einen Punkt und zwei Winkel, den Spreizungs- und Nachlaufwinkel, festgelegt.

Aus Gründen der Kompatibilität müssen deshalb in allen Lenkungsdateien der Spreizungs- und Nachlaufwinkel sowie die Punkte auf der Spreizachse links und rechts angegeben werden.

Die Gelenkpunkte zwischen dem Lenkgestänge und den Spurstangen links und rechts werden mit P_1 und P_2 bezeichnet. Die Lage und Lageänderung dieser Gelenkpunkte gegenüber dem fahrzeugfesten Bezugssystem kann mit der Lenkgetriebeübersetzung i_{LG} aus dem Lenkgetriebeeingangswinkel δ_{Lgtre} berechnet werden.

7.2.2. Zahnstangenlenkung

Bei einer Zahnstangenlenkung, Abb. 7.2, ist die Verschiebung der Spurstangengelenkpunkte durch die Verschiebung der Zahnstange festgelegt.

Die Lenkgetriebeübersetzung ist durch den maximalen Lenkradwinkel δ_{Lrwmx} und durch die maximale Verschiebung der Zahnstange u_{zmax} bestimmt

$$i_{LG} = \frac{u_{zmax}}{\delta_{Lrwmx}}, \left[\frac{m}{rad} \right]. \quad (7.1)$$

Um auch unsymmetrische Anordnungen des Lenkgetriebes berücksichtigen zu können, werden die Gelenkpunkte P und Q getrennt für die Spurstange links und rechts eingegeben.

Eine Datei zur Beschreibung einer Zahnstangenlenkung muß folgende Angaben enthalten

² Vertrieb durch: TESIS DYNAware GmbH, Implersstr. 26, 81371 München

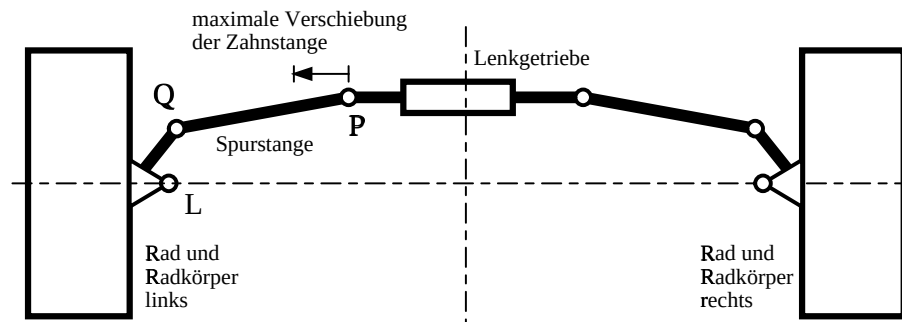


Abbildung 7.2.: Zahnstangenlenkung

Typ: LG_ZS

Bezeichnung: Zahnstangenlenkung

0.0700			max. Verschiebung Zahnstange <m>
7.5000	2.4000		Spreizung und Nachlauf in <Grad>
-0.1163	0.5011	0.4891	L1: Punkt auf Spreizachse links
-0.1163	-0.5011	0.4891	L2: Punkt auf Spreizachse rechts
0.0350	0.3050	-0.0855	P1: Spurst. li / Lenkgestaenge
0.0350	-0.3050	-0.0855	P2: Spurst. re / Lenkgestaenge
0.1030	0.6724	-0.1059	Q1: Radkoerper / Spurst. li
0.1030	-0.6724	-0.1059	Q2: Radkoerper / Spurst. re

In Abb. 7.2 wurden die Gelenkpunkte der linken Spurstange durch die Punkte P und Q und der Punkt auf der Spreizachse links mit L bezeichnet.

7.2.3. Drehhebellenkung

Bei einer Drehhebellenkung, Abb. 7.3 ist die Verschiebung der Spurstangengelenkpunkte durch die Drehungen der Lenkhebel am Lenkgetriebeausgang festgelegt.

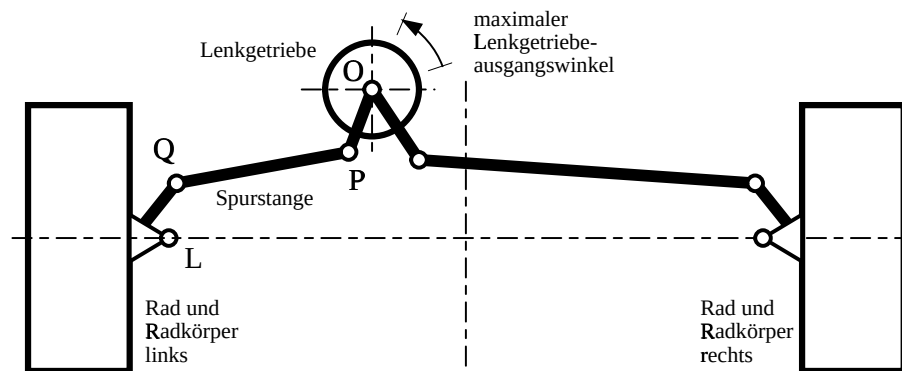


Abbildung 7.3.: Drehhebellenkung

Die Lenkgetriebeübersetzung ist durch den maximalen Lenkradwinkel δ_{Lrwmx} und durch den maximalen Winkel am Lenkgetriebeausgang δ_{Lgtrax} bestimmt

$$i_{LG} = \frac{\delta_{Lgtrax}}{\delta_{Lrwmx}}, [-] \quad (7.2)$$

Um auch unsymmetrische Anordnungen des Lenkgetriebes berücksichtigen zu können, werden die Gelenkpunkte P und Q getrennt für die Spurstange links und rechts eingegeben.

Eine Datei zur Beschreibung einer Drehhebellenkung muß folgende Angaben enthalten

Typ: LG_DH

Bezeichnung: Drehhebel-Lenkung

```
=====
18.00                                max. Lenkgetr.-W. <grad>
7.5      2.4                        Spreizung und Nachlauf in <grad>
0.0000   0.8260   0.0000           L1: Punkt auf Spreizachse links
0.0000  -0.8260   0.0000           L2: Punkt auf Spreizachse rechts
-0.1150   0.1665  -0.1290          P1: Spurst. li / Lenkgestaenge
-0.1150  -0.1665  -0.1290          P2: Spurst. re / Lenkgestaenge
0.2088   0.8680   0.1416           Q1: Radkoerper / Spurst. li
0.2088  -0.8680   0.1416           Q2: Radkoerper / Spurst. re
0.1966   0.0000   0.1050           O: Punkt auf Lenkdrehachse
0.00      0.00   -1.00             dl原因: Drehachse Lenkgetriebe
=====
```

In Erweiterung zur Zahnstangenlenkung muß jetzt auch die Drehachse des Lenkgetriebes durch die Angabe eines Punktes (in Abb. 7.3 der Punkt O) und eines Richtungsvektors fixiert werden.

7.2.4. Lenkviereck

Bei einem Lenkviereck, Abb. 7.4, werden die Drehungen des Lenkhebels über die Lenkstange an den linken Umlenkhebel und von dort an die Spurstange links und über eine Koppel und den Umlenkhebel rechts an die Spurstange rechts weitergeleitet.

Die Lenkgetriebeübersetzung ist wieder durch (7.2) festgelegt.

Die Umlenkhebel sind symmetrisch zur Fahrzeugmitte angeordnet.

Trotz der symmetrischen Anordnung werden aus Kompatibilitätsgründen zu den anderen Lenkgestängevarianten die Gelenkpunkte P und Q getrennt für die Spurstange links und rechts eingegeben.

Eine Datei zur Beschreibung eines Lenkvierecks muß folgende Angaben enthalten

Typ: LG_LV

Bezeichnung: Lenkviereck

```
=====
45.0000                                max. Lenkgetr.-W. <grad>
6.0000      1.7500                      Spreizung und Nachlauf in <grad>
0.0000   0.9320   0.0000           L1: Punkt auf Spreizachse links
0.0000  -0.9320   0.0000           L2: Punkt auf Spreizachse rechts
=====
```

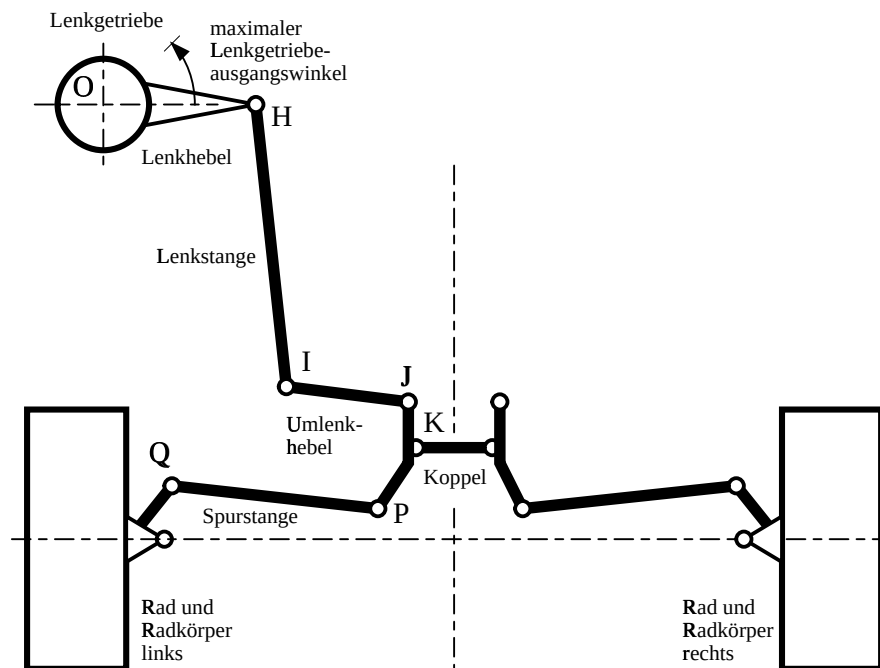


Abbildung 7.4.: Lenkviereck

0.0600	0.1900	-0.0200	P1: Spurst. li / Lenkgestaenge
0.0600	-0.1900	-0.0200	P2: Spurst. re / Lenkgestaenge
0.2987	0.8410	-0.0189	Q1: Radkoerper / Spurst. li
0.2987	-0.8410	-0.0189	Q2: Radkoerper / Spurst. re
2.4000	0.7000	0.2500	O: Punkt auf Lenkdrehachse
0.0000	-1.0000	0.0000	dlg: Drehachse Lenkgetriebe
2.4000	0.7000	-0.0150	H: Lenkhebel / Lenkstange
0.4330	0.5500	-0.0150	I: Lenkstange Umlenkhebel
0.4380	0.2530	-0.0150	J: Drehpunkt Umlenkhebel
0.0000	0.0000	1.0000	duh: Drehachse Umlenkhebel
0.2000	0.2530	-0.0150	K: Anlenkpunkt Koppelstange

Die Drehachsen der Umlenkhebel sind symmetrisch zur Fahrzeugmitte angeordnet.

7.3. Achskinematik

7.3.1. Überblick

In der vorliegenden Programmversion wird für die Rad- und Achsaufhängungen eine ideale Kinematik zugrunde gelegt. Abgesehen von der Lenkbewegung, verfügt demnach jeder Radkörper nur noch über eine freie Bewegungsmöglichkeit.

Je nach Art der Kinematik werden unterschiedliche, verallgemeinerte Koordinaten zur Beschreibung der Radkörperbewegungen verwendet.

Verwendet man, bei der Schräglenkerachse den Drehwinkel am Schräglenker, bei der Dämpferbeinachse den Drehwinkel am Dreieckslenker und bei der Doppeldreieckslenkerachse den Drehwinkel an einem Lenker, dann kann bei diesen Achsaufhängungen die Kinematik explizit gelöst werden.

Bei einer lenkergeführten Starrachse werden die Hub- und Wankbewegungen der Achse als verallgemeinerte Koordinaten gewählt. Für eine beliebige Anordnung der Lenker kann die Kinematik nicht mehr explizit berechnet werden. Hier müssen die nichtlinearen Bindungsgleichungen iterativ gelöst werden.

Bei der Verbundlenkerachse und der Starrachse sind die Bewegungen des linken und rechten Radkörpers kinematisch gekoppelt.

Bei der Aufstellung der Bewegungsgleichungen wird von einer allgemeinen Achse, bestehend aus Achsträger, Rad und Radkörper links und Rad und Radkörper rechts, ausgegangen. Damit ist es möglich, beliebige Achsaufhängungen in einem Programm zu integrieren.

Bei Einzelradaufhängungen sind Rad und Radkörper symmetrisch zur Fahrzeuglängsachse angeordnet.

7.3.2. Allgemeine Angaben

Alle Dateien zur Beschreibung von Achsaufhängungen beinhalten folgende Angaben

- | | |
|--------------------------------------|---|
| > Masse Rad und Radkörper | m_{RK} |
| > Radträgheit | Θ_R |
| | Θ_{RKxx} |
| > Trägheitsmomente Rad und Radkörper | $\Theta_{RKxy}, \quad \Theta_{RKyy}$ |
| | $\Theta_{RKxz}, \quad \Theta_{RKyz}, \quad \Theta_{RKzz}$ |
| > Vorspurwinkel | δ_V |
| > Sturzwinkel | γ |

Die Trägheits- und Deviationsmomente von Rad und Radkörper sind in einem radkörperfesten Koordinatensystem anzugeben. Der Ursprung des Koordinatensystems liegt dabei in der Radmitte und in der KO-Lage zeigt die x -Achse nach vorne, die y -Achse nach links und die z -Achse nach oben.

Die Lage der Raddrehachsen links und rechts wird durch die Einheitsvektoren e_{yR1} und e_{yR2} festgelegt. In den radkörperfesten Systemen sind die Einheitsvektoren durch den Vorspurwinkel δ_V und den Sturzwinkel γ_S festgelegt.

Gemäß DIN 70000 sind Vorspur- und Sturzwinkel positiv, wenn der vordere Teil des Rades der Fahrzeuglängsmittlebene zugekehrt und das Rad oben nach außen geneigt ist.

Die Angaben für γ_S und δ_V beziehen sich auf das linke Rad.

In den radkörperfesten Systemen $RK1$ und $RK2$ sind dann die Raddrehachsen durch die Einheitsvektoren

$$e_{yR1, RK1} = \frac{1}{\sqrt{(\tan \delta_V)^2 + 1 + (\tan \gamma_S)^2}} \begin{bmatrix} + \tan \delta_V \\ 1 \\ - \tan \gamma_S \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

und

$$e_{yR2,RK2} = \frac{1}{\sqrt{(\tan \delta_V)^2 + 1 + (\tan \gamma_S)^2}} \begin{bmatrix} -\tan \delta_V \\ 1 \\ +\tan \gamma_S \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

festgelegt.

Die Steifigkeit des Stabilisators wird bei den Fahrzeuggrunddaten angegeben. Die Stabilisatorsteifigkeit ist auf die Verschiebungen der Stabilisatorenenden bezogen.

Bei Starrachsen kommen noch folgende Angaben hinzu

- > Masse Achsträger m_{AT}
- > Trägheitsmomente Achsträger Θ_{ATxx}
 $\Theta_{ATxy}, \Theta_{ATyy}$
 $\Theta_{ATxz}, \Theta_{ATyz}, \Theta_{ATzz}$
- > Spurweite außen s_a
- > Spurweite innen s_i

Die Trägheits- und Deviationsmomente des Achsträgers sind in einem Achsträgerfesten Koordinatensystem anzugeben. Der Ursprung des Koordinatensystems liegt dabei in der Achsmittle und in der KO-Lage zeigt die x -Achse nach vorne, die y -Achse nach links und die z -Achse nach oben.

Sind die Spurweiten außen und innen identisch $s_a = s_i$, dann verfügt die Achse über Einzelbereifung. Bei verschiedenen Spurweiten ist die Achse zwillingsbereift.

Pro Achse sind zwei Federn, zwei Dämpfer und ein Stabilisator vorgesehen. Die KO-Lagen der Feder- und Dämpferelemente werden durch die Anlenkpunkte unten und oben festgelegt.

Bei der Stabilisatoranbindung wurde vorausgesetzt, daß die Stabilisatorenenden beim Ein- und Ausfedern des Rades im Wesentlichen nur eine vertikale Verschiebung ausführen. Für die Berechnung wird dann nur die KO-Lage des Stabilisatorendpunktes benötigt.

Bei Einzelradaufhängungen sind die Anlenkpunkte der Kraftelemente symmetrisch zur Fahrzeuglängsachse angeordnet.

Alle Punkte werden von einem achsfesten Koordinatensystem aus beschrieben. Der Ursprung des Koordinatensystems liegt dabei in der Achsmittle (Mitte der Radmitten) und die x -Achse zeigt nach vorne, die y -Achse nach links und die z -Achse nach oben.

7.3.3. Schräglenkerachse

Eine Datei zur Beschreibung einer Schräglenkerachse enthält folgende Angaben:

Typ: AK_SL

Bezeichnung: HA-Schraeglenker (Beispiel)

```
=====
43.0                               Masse (rad u. radkoerper)
0.80                               Radtraegheitsmoment
1.5                               wesentliche elemente des traeg-
0.          0.67                  heitstensors (rad u. radkoerp.)
```

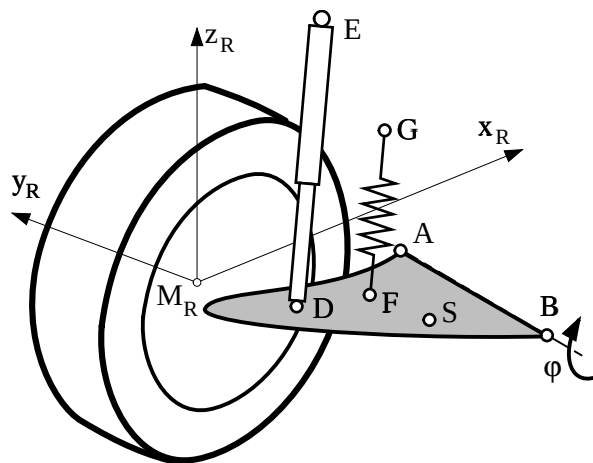


Abbildung 7.5.: Schräglenkerachse

0.	0.	1.2	(untere dreiecksform)
0.5	1.0		Vorspur- u. Sturzwinkel in <Grad>
0.0000	0.6996	0.0000	M: Radmitte
0.3280	0.2026	0.0043	P: Lenker-Lager 1
0.4121	0.5168	0.0034	Q: Lenker-Lager 2
0.1100	0.5000	-0.0329	F: Feder unten
0.1130	0.5010	0.1021	G: Feder oben
-0.0790	0.5404	-0.0639	D: Daempfer unten
-0.0080	0.5190	0.3882	E: Daempfer oben
0.0980	0.3968	-0.0336	S: Stabi-Pendelstuetze

Die Drehachse des Schräglenkers ist durch die Lagerpunkte P und Q festgelegt.

Radkörper und Lenker sind starr miteinander verbunden. Feder-, Dämpferelement und Stabilisator sind auf der einen Seite am Radkörper (bzw. Lenker) und auf der anderen Seite am Aufbau befestigt.

Die Anlenkpunkte der Kraftelemente sind in Abbildung 7.5 mit den Punkten F , G , D , E und S bezeichnet.

7.3.4. Doppeldreieckslenkerachse

Eine Datei zur Beschreibung einer Doppeldreieckslenkerachse enthält folgende Angaben:

Typ: AK_DD

Bezeichnung: Doppeldreieckslenker (Beispiel)

50.0000			Masse (Rad und Radkoerper)
2.0000			Radtraegheitsmoment
2.0000			wesentliche Elemente des Traeg-
0.0000	2.5000		heitstensors (Rad u. Radkoerper
0.0000	0.0000	2.0000	(untere dreiecksform)
0.0000	-0.5000		Vorspur- u. Sturzwinkel in Grad

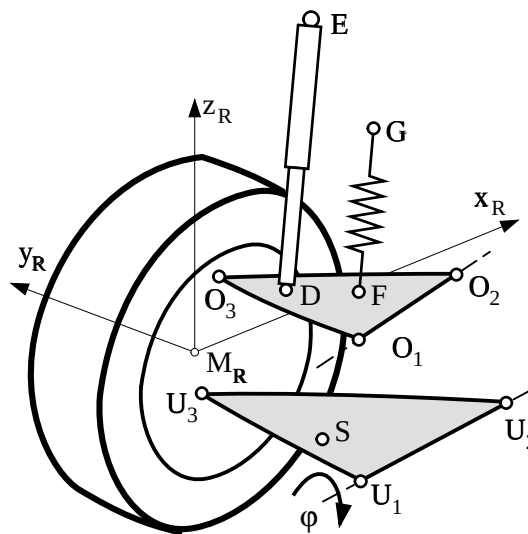


Abbildung 7.6.: Doppeldreieckslenkerachse

0.0000	0.7680	0.0000	M: Radmitte
-0.2510	0.3200	-0.0800	U1: Lenker 1 / Aufbau hinten
0.1480	0.3200	-0.0940	U2: Lenker 1 / Aufbau vorne
0.0130	0.7370	-0.1450	U3: Lenker 1 / Radkoerper
-0.1050	0.4350	0.1960	O1: Lenker 2 / Aufbau hinten
0.1220	0.4350	0.2300	O2: Lenker 2 / Aufbau vorne
-0.0250	0.6800	0.1620	O3: Lenker 2 / Radkoerper
0.1100	0.5000	-0.0329	F: Feder unten
0.1130	0.5010	0.1021	G: Feder oben
-0.0790	0.5404	-0.0639	D: Daempfer unten
-0.0080	0.5190	0.3882	E: Daempfer oben
0.0980	0.3968	-0.0336	S: Stabi-Pendelstuetze
2			Feder-Typ: 1, 2, 3
1			Daempfer-Typ: 1, 2, 3
3			Stabi-Typ: 1, 2, 3

Die Drehachsen der Lenker sind durch die Gelenkpunkte U_1 , U_2 und O_1 , O_2 gegeben. Die Spreizachse ist durch die Gelenkpunkte U_3 und O_3 festgelegt.

Die Einbaulage von Feder, Dämpfer und Stabilisator wird wieder durch die Anlenkpunkte F , G ; D , E und S beschrieben. In der Abbildung 7.6 sind diese Punkte nicht mehr eingezeichnet.

Die Anbindung der Kraftelemente kann wahlweise an den Lenkern oder am Radkörper erfolgen. In obiger Beispiel-Datei ist, den Typ-Angaben entsprechend, die Feder am Lenker 2, der Dämpfer am Lenker 1 und der Stabilisator am Radkörper angelenkt.

7.3.5. Feder-/Dämpferbeinachse

Eine Datei zur Beschreibung einer Feder-/Dämpferbeinachse enthält folgende Angaben:

Typ: AK_FB

Bezeichnung: Feder-Daempferbein-Achse (Beispiel)

=====				
37.6				Masse (rad u. radkoerper)
0.8				Radtraegheitsmoment
0.78				wesentliche elemente des Traeg-
0.	1.42			heitstensors (rad u. radkoerp.)
0.	0.	0.768		(untere dreiecksform)
0.5	1.0			Vorspur- u. Sturzwinkel in <Grad>
0.0000	0.7025	0.0000		M: Radmitte
-0.3650	0.3220	-0.1000		C: Dreieckslenker/Aufbau hinten
-0.0590	0.3300	-0.1030		D: Dreieckslenker/Aufbau vorne
-0.0199	0.6532	-0.1240		E: Dreieckslenker/Radkoerper
-0.1163	0.5011	0.4891		O: Daempferbein/Aufbau
0.0377	0.6281	-0.0767		U: Daempferbein/Radkoerper
-0.0340	0.5120	-0.1180		S: Stabi-Anlenkpunkt

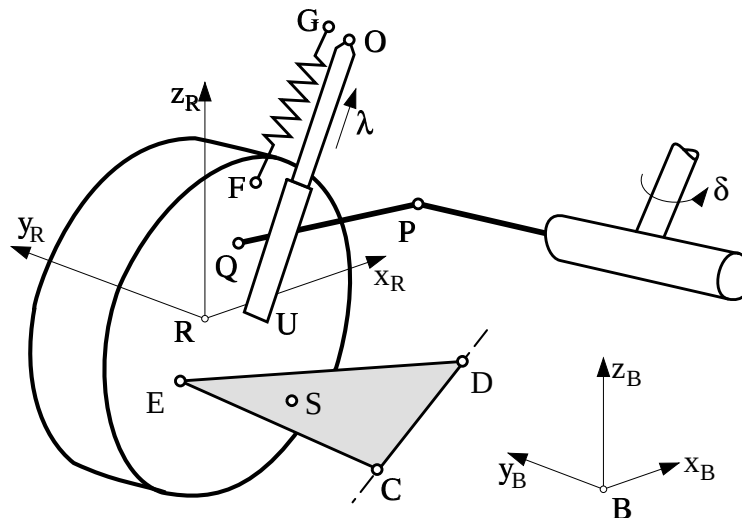


Abbildung 7.7.: Dämpferbeinachse

Der Querlenker ist am Aufbau in zwei und am Radkörper in einem Gelenkpunkt gelagert.

Das Feder-/Dämpferbein ist oben gelenkig mit dem Aufbau und am unteren Ende fest mit dem Radkörper verbunden. Der Gelenkpunkt zwischen Aufbau und Dämpferbein und der Verbindungspunkt zwischen Dämpferbein und Radkörper (in Abbildung 7.7 die Punkte O und U – legen die Achse des Feder-/Dämpferelements fest. Da dadurch auch die Lage der Feder und des Dämpfers fixiert ist, muß hier nur noch der Stabi-Anlenkpunkt definiert werden.

Bei Lenkbewegungen drehen Rad und Radkörper um die Achse EO.

7.3.6. Lenkergeführte Starrachse

Eine Datei zur Beschreibung einer lenkergeführten Starrachse muß folgende Angaben enthalten

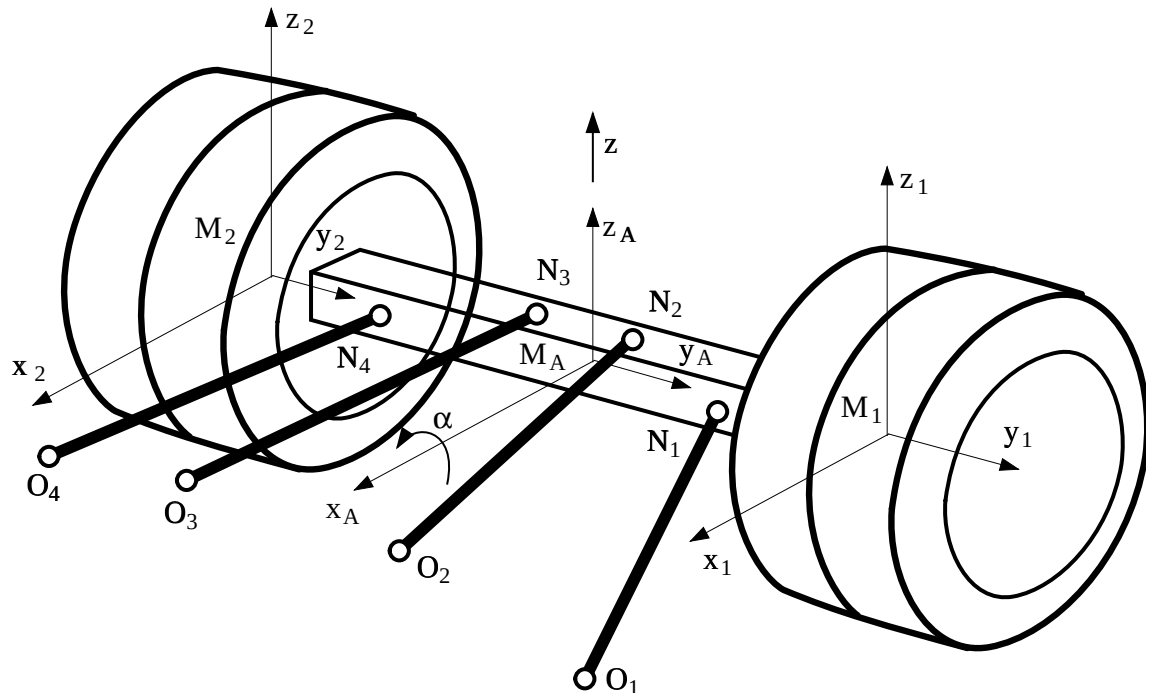


Abbildung 7.8.: Lenkergeführte Starrachse

Typ: AK_S4

Bezeichnung: Hinterachse mit Zwillingsbereifung (Beispiel)

=====			
60.000			Masse Rad u. Radkoerper
4.100			Radtraegheitsmoment
3.200			wesentliche elemente des Traeg-
0.000	4.100		heitstensors (Rad u. Radkoerp.)
0.000	0.000	3.200	(untere Dreiecksform)
0.000	0.000		Vorspur- u. Sturzwinkel in <Grad>
260.000			Masse Achstraeger
26.400			wesentliche elemente des Traeg-
0.000	9.400		heitstensors (Achstraeger)
0.000	0.000	29.700	(untere Dreiecksform)
1.3100	1.1000		spwa,spwi: Spurweite aussen, innen
0.0000	0.3250	0.2000	N1: Achstraeger / Lenker 1
0.7280	0.3250	0.3000	O1: Lenker 1 / Aufbau
0.0000	0.0000	0.0000	N2: Achstraeger / Lenker 2
0.7280	0.3250	0.1000	O2: Lenker 2 / Aufbau
0.0000	0.0000	0.0000	N3: Achstraeger / Lenker 3
0.7280	-0.3250	0.1000	O3: Lenker 3 / Aufbau
0.0000	-0.3250	0.2000	N4: Achstraeger / Lenker 4
0.7280	-0.3250	0.3000	O4: Lenker 4 / Aufbau
0.0000	0.3250	0.1000	F1: Achstraeger / Feder links
0.0000	0.3250	0.2000	G1: Feder links / Aufbau
0.0000	-0.3250	0.1000	F2: Achstraeger / Feder rechts
0.0000	-0.3250	0.2000	G2: Feder rechts / Aufbau
-0.2000	0.3000	0.0000	D1: Achstraeger / Daempfer links

-0.2000	0.1000	0.5300	E1: Daempfer links / Aufbau
-0.2000	-0.3000	0.0000	D2: Achstraeger / Daempfer rechts
-0.2000	-0.1000	0.5300	E2: Daempfer rechts / Aufbau
0.1000	0.6000	-0.2000	S1: Stabi links / Aufbau
0.1000	-0.6000	-0.2000	S2: Achstraeger / Stabi rechts

Bei der Starrachse werden auch noch die Masse und die Trägheiten des Achsträgers benötigt. Sind äußere und innere Spurweite verschieden $s_a \neq s_i$, dann ist, wie hier in der Beispiel-Datei, die Achse zwillingsbereift. Bei einer Achse mit Einzelbereifung müssen für die Spurweiten außen und innen die gleichen Werte angegeben werden.

Die Lage der vier Lenker ist jeweils durch die Gelenkpunkte zwischen Achse und Lenker sowie Lenker und (Fahrzeug-)Rahmen festgelegt. Die Anlenkpunkte der Federn, der Dämpfer und des Stabilisators vervollständigen die Datei.

Kombiniert mit einem passenden Lenkgestänge kann die Lenkergeführte Starrachse auch an der Vorderachse verwendet werden. Die Spreizachsen werden dann durch entsprechende Angaben im Lenkgestängedatenblock festgelegt.

7.4. Reifen

7.4.1. Parameter

Das TMEASY-Reifen-Modell benötigt folgenden Datensatz:

Datentyp: RF

Bezeichnung: degressiver Radlasteinfluss

```
=====
0.72200      Reifenbreite bezogen auf Reifenradius
0.43400      Reifenhoehe bezogen auf Reifenradius
3500.        Bezugsaufstandskraft PN [N]
120000.      Laengssteifigkeit [N/m] bei P=PN
177000.      Quersteifigkeit [N/m] bei P=PN
180000.      Radialsteifigkeit [N/m] bei P=PN
1500.        Laengsdaempfung [N/(m/s)] bei P=PN
2850.        Querdaempfung [N/(m/s)] bei P=PN
200.         Radialdaempfung [N/(m/s)] bei P=PN
=====
```

Umfangskraft ueber Laengsschlupf

```
-----
52500.      89250.  Anfangssteigung dU/dsl [N/-] bei PN u. 2*PN
3675.       6248.   Umax [N] bei PN und 2*PN
0.10000     0.12000 sl bei Umax [N] bei PN und 2*PN
3413.       5801.   Ugleit [N] bei PN und 2*PN
0.60000     0.70000 sl bei Ugleit [-] bei PN und 2*PN
-----
```

Seitenkraft ueber Querschlupf

```
-----
43750.      74375.  Anfangssteigung ds/dsa [N/-] bei PN u. 2*PN
-----
```

3325.	5652.	Smax [N] bei PN und 2*PN
0.15000	0.20000	sq bei Smax [N] bei PN und 2*PN
2975.	5058.	Sgleit [N] bei PN und 2*PN
0.60000	0.80000	sq bei Sgleit [-] bei PN und 2*PN

Nachlauf n bezogen auf Latschlaenge ln (nn = n/ln [-]) ueber sq		

0.16000	0.18000	n/l bei sq=0 fuer PN und 2*PN
0.14000	0.16000	sq mit n/l=0 (Nulldurchgang) bei PN u. 2*PN
0.50000	0.60000	sq mit n/l=0 (Gleiten) fuer PN und 2*PN

Rollwiderstand, Bohrmoment, Korrektur Sturzwinkel einfluss		

0.00500	0.00500	Rollwiderstandsbeiwert [-] bei PN u. 2*PN
0.04000	0.04000	Hebelarm fuer Bohrmoment [m] bei PN u. 2*PN
1.00000	1.00000	Korrektur Sturzwinkel einfluss bei PN u. 2*PN

Unsymmetrie in S(sa) und Nullseitenkraft		

0.00000	0.00000	sq mit S=0 fuer PN und 2*PN
0.000	0.000	Nullseitenkraft [N] fuer PN und 2*PN

Grenzgeschwindigkeit fuer Schlupfdefinition		

0.20000	vgrenz [m/s]	

Mit der Grenzgeschwindigkeit v_{Grenz} wird die Schlupfdefinition so verändert, daß bei blockierten Rädern keine Division durch Null auftritt.

7.4.2. Dynamik 1. Ordnung

Bei allen halbempirischen Reifenmodellen werden die Reifenkräfte und -momente durch geeignete Funktionen oder durch Meßpunkte beschrieben. Diese Vorgehensweise orientiert sich an Messungen, die stationär durchgeführt werden. Diese Reifenmodelle liefern also zunächst nur stationäre Reifenkräfte und -momente.

Unter Berücksichtigung der Reifenverformungen können stationäre Reifenmodelle so erweitert werden, daß dynamische Reifenkräfte und -momente in erster Näherung (1. Ordnung) nachgebildet werden.

Modelliert man die Querelastizität des Reifens durch ein lineares Feder-/Dämpferelement mit der Steifigkeit c_y und dem Dämpfungsparameter d_y , Abb 7.9, dann gilt für die Seitenkraft

$$S = c_y y_E + d_y \dot{y}_E . \quad (7.5)$$

Bei einer dynamischen Reifenverformung werden auch Reifenteilchen beschleunigt. Die daraus resultierenden Massenkräfte werden hier gegenüber den elastischen und dissipativen Kräften vernachlässigt.

Im Reifenmodell wird die Seitenkraft als Funktion der Radlast und der Schlüpf dargestellt

$$S = S(s_L, s_Q, \dots) . \quad (7.6)$$

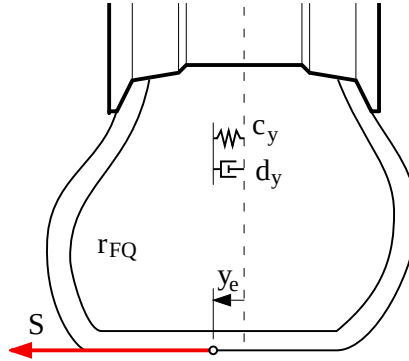


Abbildung 7.9.: Dynamische Seitenkraft

Der Querschlupf s_Q hängt über die Schlupfdefinition von der Querkomponente v_S der Kontaktpunktsgeschwindigkeit ab. Diese ist wiederum eine Funktion der Reifenquerverformungsgeschwindigkeit

$$s_Q = s_Q(v_S) \quad \text{und} \quad v_S = v_S(\dot{y}_E). \quad (7.7)$$

Unter Berücksichtigung von (7.7) führt das Gleichsetzen von (7.5) mit (7.6) auf eine implizite Differentialgleichung 1. Ordnung für die Reifenquerverformung y_E

$$S(s_L, s_Q, \dots) = c_y y_E + d_y \dot{y}_E. \quad (7.8)$$

In erster Näherung gilt

$$S(s_L, s_Q, \dots) = S(s_L, s_Q|_{\dot{y}_E=0}, \dots) + \left. \frac{\partial S}{\partial \dot{y}_E} \right|_{\dot{y}_E=0} \dot{y}_E. \quad (7.9)$$

Bei $\dot{y}_E = 0$ hat der Reifen einen stationären Zustand erreicht. In (7.9) wird folglich die dynamische Seitenkraft approximiert durch die stationäre Seitenkraft

$$S_{stat} = S(s_L, s_Q|_{\dot{y}_E=0}, \dots) \quad (7.10)$$

und einem dynamischen Anteil 1. Ordnung, der aus der Änderung der stationären Seitenkraft und der Verformungsgeschwindigkeit berechnet werden kann.

Mit (7.9) und (7.10) folgt aus (7.8) eine explizite Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\underbrace{\left(d_y - \left. \frac{\partial S}{\partial \dot{y}_E} \right|_{\dot{y}_E=0} \right)}_{D_y} \dot{y}_E = S_{stat} - c_y y_E. \quad (7.11)$$

Die stationäre Seitenkraft S_{stat} ist durch das Reifenkennfeld gegeben. Mit der Lösung $y_E = y_E(t)$ und mit $\dot{y}_E = (S_{stat} - c_y y_E)/D_y$ wird dann gemäß (7.5) die dynamische Seitenkraft berechnet. Die Ableitung $\left. \frac{\partial S}{\partial \dot{y}_E} \right|_{\dot{y}_E=0}$ folgt aus der stationären Seitenkraft $S_{stat} = F_y$, die ja durch analytische Funktionen aus den Kontaktpunktsgeschwindigkeiten v_U und v_S berechnet wird.

Analog zur Seitenkraft können auch die Umfangskraft und das Reifenmoment um die Fahr-
bahnnormale dynamisch beschrieben werden

$$U_{dyn} = c_x x_E + d_x \dot{x}_E \quad (7.12)$$

und

$$M_{dyn} = c_\gamma \gamma_E + d_\gamma \dot{\gamma}_E \quad (7.13)$$

wobei x_E und γ_E die Längs- und Drehverformung des Reifens zwischen Kontaktzone und Felge beschreiben. In Längsrichtung werden die elastischen Eigenschaften des Reifens durch die Steifigkeit c_x und den Dämpfungsparameter d_x beschrieben. Die Drehsteifigkeit c_γ und die Drehdämpfung d_γ können analog zu Abschnitt 3.4 aus der Latschlänge L und den entsprechenden Parametern in Querrichtung c_y , d_y berechnet werden. Analog zu (3.26) findet man

$$c_\gamma = \frac{1}{12} L^2 c_y \quad \text{und} \quad d_\gamma = \frac{1}{12} L^2 d_y \quad (7.14)$$

Längs- und Drehverformung genügen wieder Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$D_x \dot{x}_E = U_{stat} - c_x x_E \quad (7.15)$$

$$D_\gamma \dot{\gamma}_E = M_{stat} - c_\gamma \gamma_E \quad (7.16)$$

Die stationäre Umfangskraft U_{stat} folgt dabei aus dem Reifenkennfeld und die verallgemeinerte Dämpfung D_x kann analog zu D_y in (7.11) berechnet werden. Das stationäre Reifenmoment setzt sich aus dem Reifenrückstell- und Bohrmoment zusammen $M_{stat} = M_{Sstat} + M_{Bstat}$, wobei M_{Sstat} und M_{Bstat} aus dem Reifenmodell folgen. Der Parameter D_γ kann aus der Ableitung des Reifenbohrmomentes nach dem Bohrschlupf abgeschätzt werden.

Zur Berechnung der dynamischen Reifenreaktionen werden hier lediglich die Steifigkeits- und Dämpfungsparameter des Reifens in Längs- und Querrichtung benötigt. Die Dynamik kann aus den stationären Kenndaten abgeleitet werden. Damit erfolgt auch eine automatische Anpassung an geänderte Reifenparameter.

7.5. Fahrbahn

Die Beschaffenheit der Fahrbahn wird durch die Eingabe-Datei

Typ: Fahrbahn

Bezeichnung: Landstrasse

```
=====
rechteck mit reduziertem reibwert:  mue = muelocal * mueq
1.                                lokaler reibwertfaktor mueq
0.    0.                          xy-Koordinaten Rechteck links unten
100.  10.                         xy-Koordinaten Rechteck rechts oben
rampe: (ausgerichtet in x-richtung)
0.    0.                          hoehe und breite
0.    0.                          xy-Koordinate rampenmitte
0.    0.                          untere und obere Laennge der Rampe
```

regellose Fahrbahnunebenheiten:

20.e-6

spektrale Leistungsdichte

2. Welligkeit

beschrieben.

Für μ -split Bremsungen kann ein Rechteck mit reduziertem Reibwert definiert werden. Fahrbahnebenheiten können als rampenförmiges Einzelhindernis oder durch zweidimensionale, stochastische Profile vorgegeben werden.

7.6. Steuereingriffe

Verschiedene Fahrmanöver können durch Steuer- oder Regeleingriffe durchgeführt werden. Bei einer allgemeinen Steuer-Datei werden die Eingriffsgrößen

- > Fahrgeschwindigkeit v
- > Lenkradwinkel δ_L
- > Bremspedal p_B
- > Sperre am Hinterachsdifferential s_H

als Zeitfunktionen vorgegeben.

Mit der Steuer-Datei

Typ: selbst definiert

Bezeichnung: Bremsen in der Kurve

[illegible]

wird das Manöver Bremsen in der Kurve durchgeführt.

Für spezielle Fahrmanöver wie "Lenkwinkelsprung", "Geradeausfahrt" und "stationäre Kreisfahrt" stehen eigene Steuerdateien mit vereinfachter Eingabe zur Verfügung.

Die Datei

Typ: Lenkwinkelsprung

Bezeichnung: 90 Grad bei 100 km/h

=====	
2.000	beginn der ausgabe
12.000	ende der simulation
0.010000	rechenschrittweite
100	ausgabe-punkte graphik

100.000	fahrgeschw. <km/h>
2.500	zeitpunkt lenkwinkelsprung
90.00	lenkwinkel <grad>
300.00	lenkwinkelgeschwindigkeit <grad/s>

definiert einen Lenkwinkelsprung und die Datei

Typ: Kreisfahrt

Bezeichnung: 100m Radius

=====	
30.000	beginn der ausgabe
150.000	ende der simulation
0.010000	rechenschrittweite
200	ausgabe-punkte graphik

100.000	kreisradius <m>
0.200	anfangsquereschleunigung <m/s**2>
5.000	endquereschleunigung <m/s**2>
1.000	verstaerkungsfaktor kreisregler <->

das Manöver stationäre Kreisfahrt.

8. Fahrverhalten von Solofahrzeugen

8.1. Klassische Fahrmanöver

8.1.1. Stationäre Kreisfahrt

Die Steuertendenz eines realen Fahrzeugs wird durch das Fahrmanöver "stationäre Kreisfahrt" ermittelt. Das Manöver wird quasistationär durchgeführt. Der Fahrer versucht, das Fahrzeug auf einem Kreis mit vorgegebenem Radius R zu halten. Er steigert langsam die Fahrgeschwindigkeit v und damit, wegen $a_Q = \frac{v^2}{R}$, auch die Querbeschleunigung bis zum Erreichen des Grenzbereichs. Typische Ergebnisse sind in Abb. 8.1 zusammengestellt.

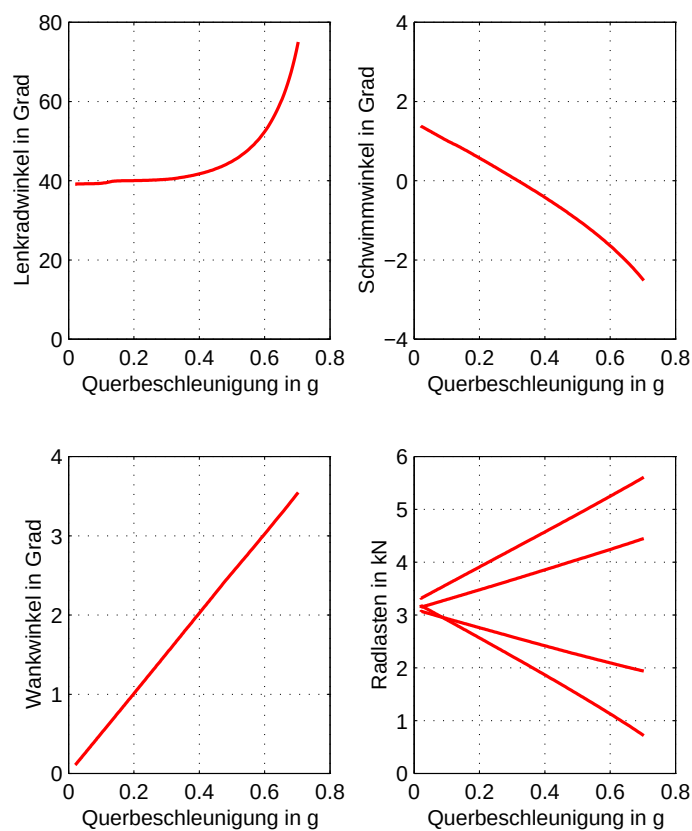


Abbildung 8.1.: Stationäre Kreisfahrt: Pkw heckgetrieben auf $R = 100 \text{ m}$

Das Fahrzeug ist untersteuernd und damit stabil. Die Steigung im Diagramm Lenkwinkel über Querbeschleunigung entscheidet gemäß (5.111) mit (5.112) über die Steuertendenz und über das Stabilitätsverhalten.

Der nichtlineare Einfluß der Radlast auf die Reifeneigenschaften wird hier benutzt, um im unteren Querbeschleunigungsbereich ein schwach stabiles, aber lenkwilliges und im Grenzbereich ein sehr stabiles, lenkunempfindliches Fahrverhalten zu erreichen.

Mit zunehmender Querbeschleunigung steigt der Wankwinkel. Das Kippmoment wird durch entsprechende Radlastdifferenzen zwischen den kurvenäußeren und kurveninneren Rädern abgefangen. Bei einer hinreichend starren Karosserie kann durch Einbau eines starken Wankstabilisators an der Vorderachse die Radlastdifferenz dort vergrößert und im gleichen Maße an der Hinterachse reduziert werden.

Der degressive Einfluß der Radlast auf die Reifeneigenschaften, Schräglaufsteifigkeit und maximal mögliche Seitenkraft, kommt dadurch an der Vorderachse stärker zum Ausdruck und das Fahrzeug wird mit zunehmender Querbeschleunigung stärker untersteuernd und stabiler, bis es im Grenzbereich über die Vorderachse aus der Kurve herausdriftet.

Probleme gibt es hier bei frontgetriebenen Fahrzeugen, da wegen der Traktion das kurveninnere Vorderrad nicht beliebig entlastet werden kann.

Verfügt man über ein genügend großes Testgelände, dann kann die stationäre Kreisfahrt auch mit konstanter Geschwindigkeit durchgeführt werden. Dabei wird das Lenkrad langsam eingeschlagen, bis das Fahrzeug den Grenzbereich erreicht. Mit diesem Vorgehen können auch schwach motorisierte Fahrzeuge im Grenzbereich untersucht werden.

8.1.2. Lenkwinkelsprung

Das dynamische Übergangsverhalten eines Fahrzeugs wird häufig mit dem Manöver "Lenkwinkelsprung" getestet.

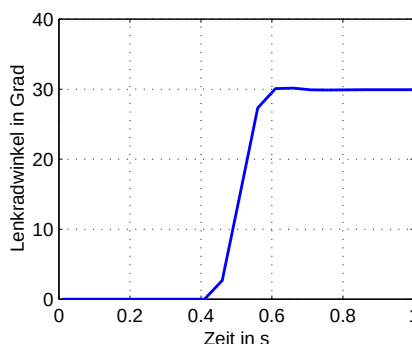


Abbildung 8.2.: Sprungähnliche Lenkwinkelvorgabe

Methoden zur Berechnung und Beurteilung einer idealen Sprungantwort, wie sie in der Systemtheorie oder in der Regelungstechnik verwendet werden, können beim realen Fahrzeug nicht eingesetzt werden, da in der Praxis eine sprungartige Lenkwinkelvorgabe gar nicht möglich ist. In Abb. 8.2 ist ein realer Lenkwinkelverlauf dargestellt.

Entscheidend für das Fahrverhalten ist nicht der Lenkradwinkel sondern der Einschlagwinkel der Räder, der aufgrund von Elastizitäten, Reibungseinflüssen und ggf. einer Servo-Unterstützung vom Lenkradwinkel abweichen kann. Bei sehr schnellen Lenkbewegungen spielt auch der dynamische Aufbau der Reifenkräfte eine Rolle.

In der Praxis wird der Lenkwinkelsprung meist nur zur subjektiven Beurteilung von Fahrzeugen herangezogen. Überschwinger bei der Giergeschwindigkeit, beim Wankwinkel und insbesondere beim Schwimmwinkel werden dabei als störend empfunden.

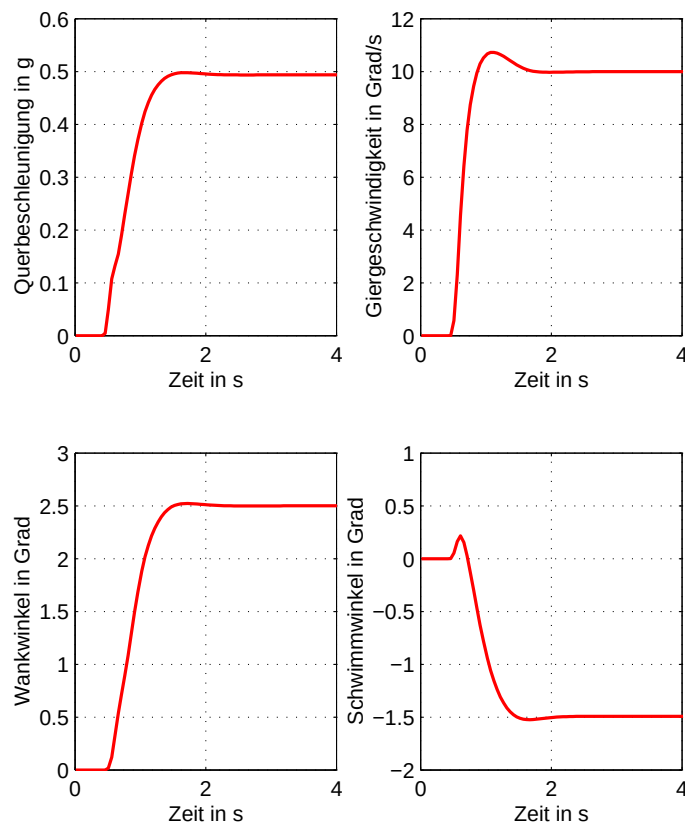


Abbildung 8.3.: Lenkwinkelsprung: Pkw mit $v = 100 \text{ km/h}$

Das Fahrzeug verhält sich dynamisch sehr gut, Abb. 8.3. Praktisch keine Überschwinger bei Wankwinkel und bei der Querbeschleunigung. Geringe Überschwinger bei der Giergeschwindigkeit und beim Schwimmwinkel.

8.1.3. Geradeausfahrt

8.1.3.1. Regellose Fahrbahnunebenheiten

Fahrbahnunebenheiten werden im Ortsbereich durch $z = z(x, y)$ beschrieben. Die Unebenheiten einer Fahrbahn sind stochastischer Natur. Abb. 8.4 zeigt in verzerrter Darstellung das Profil einer Landstraße.

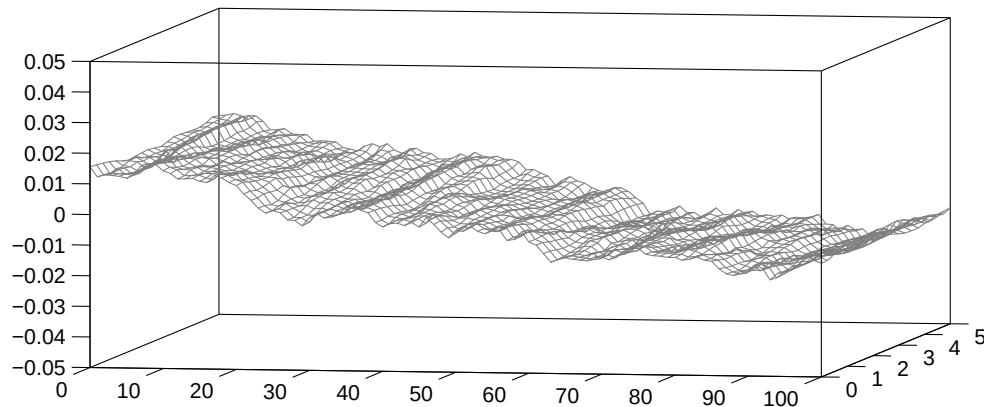


Abbildung 8.4.: Fahrbahnunebenheiten

Um den Aufwand bei der statistischen Beschreibung einer Fahrbahn in Grenzen zu halten, greift man in der Regel auf vereinfachende Modellvorstellungen zurück.

Anstelle einer vollständig zweidimensionalen Beschreibung betrachtet man entweder nur zwei parallele Fahrspuren

$$z = z(x, y) \rightarrow z_1 = z_1(s_1), \text{ und } z_2 = z_2(s_2) \quad (8.1)$$

oder man setzt eine isotrope Fahrbahn voraus. Bei einer isotopen Fahrbahn sind die statistischen Eigenschaften richtungsunabhängig. Dann kann eine zweidimensionale Fahrbahn mit ihren statistischen Eigenschaften durch einen Zufallsprozess beschrieben werden

$$z = z(x, y) \rightarrow z = z(s); \quad (8.2)$$

Ein normalverteilter, stationärer und ergodischer Zufallsprozeß $z = z(s)$ wird durch die beiden ersten Erwartungswerte, Mittelwert

$$m_z = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{2s} \int_{-s}^s z(s) ds \quad (8.3)$$

und Korrelationsfunktion

$$R_{zz}(\delta) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{2s} \int_{-s}^s z(s) z(s - \delta) ds \quad (8.4)$$

vollständig charakterisiert. Ein verschwindender Mittelwert $m_z = 0$ kann stets durch geeignete Koordinatenverschiebung erreicht werden. Die Korrelationsfunktion ist symmetrisch,

$$R_{zz}(\delta) = R_{zz}(-\delta) \quad (8.5)$$

und

$$R_{zz}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{2s} \int_{-s}^s (z(s))^2 ds \quad (8.6)$$

beschreibt den quadratischen Mittelwert von z_s .

Stochastische Fahrbahnunebenheiten werden meist durch spektrale Leistungsdichten¹ beschrieben. Korrelationsfunktion und die einseitige spektrale Leistungsdichte sind über die Fouriertransformation

$$R_{zz}(\delta) = \int_0^\infty S_{zz}(\Omega) \cos(\Omega\delta) d\Omega \quad (8.7)$$

miteinander verknüpft, wobei Ω die Wegkreisfrequenz angibt. Mit (8.7) folgt aus (8.6)

$$R_{zz}(0) = \int_0^\infty S_{zz}(\Omega) d\Omega. \quad (8.8)$$

Die spektrale Leistungsdichte gibt somit Informationen, wie sich der quadratische Mittelwert aus den einzelnen Frequenzanteilen aufbaut.

Die Spektraldichten realer Fahrbahnen können durch die Beziehung²

$$S_{zz}(\Omega) = S_0 \left[\frac{\Omega}{\Omega_0} \right]^{-w} \quad (8.9)$$

approximiert werden, wobei die Bezugswegkreisfrequenz wird auf $\Omega_0 = 1 \text{ m}^{-1}$ festgelegt wird. Die Bezugsspektraldichte $S_0 = S_{zz}(\Omega_0)$ stellt ein Unebenheitsmaß dar und die Welligkeit w gibt an, ob die Fahrbahn nennenswerte Unebenheiten im kurz- oder langwelligen Bereich hat.

Bei realen Fahrbahnen liegen Bezugsspektraldichte und Welligkeit im Bereich

$$1 * 10^{-6} \text{ m}^3 \leq S_0 \leq 100 * 10^{-6} \text{ m}^3 \quad \text{und} \quad w \approx 2.$$

8.1.3.2. Lenkaktivität

Bei der Geradeausfahrt auf unebener Fahrbahn sind ständig Lenkkorrekturen erforderlich. Die Histogramme des Lenkwinkels bei einer Fahrgeschwindigkeit von $v = 90 \text{ km/h}$ sind in Abb. 8.5 dargestellt.

Die Qualität der Fahrbahn spiegelt sich in der Lenkaktivität wieder.

Die Lenkaktivität wird in der Praxis häufig zur Beurteilung eines Fahrzeugs verwendet.

¹im Englischen abgekürzt durch psd für power spectral density

²siehe: M. Mitschke: Dynamik der Kraftfahrzeuge (Band B), Springer-Verlag, Berlin 1984, S. 29.

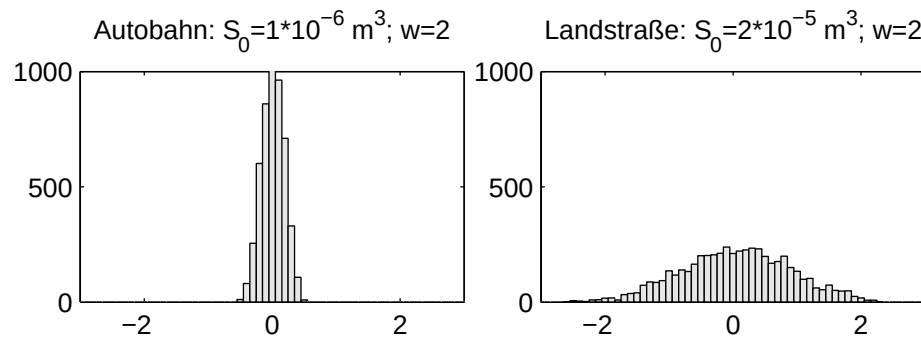


Abbildung 8.5.: Lenkeingriffe in Grad auf sehr guter und guter Fahrbahn

8.2. Reisebus mit unterschiedlicher Beladung

8.2.1. Systemparameter

Bei Nutzfahrzeugen und Bussen ist der Unterschied zwischen leer und beladen zum Teil sehr groß. In der Tabelle 8.1 sind die wesentlichen Daten eines Reisebusses im vollbesetzten und leeren Zustand zusammengestellt. Der Bus hat einen Achsabstand von $a = 6.25 \text{ m}$. Die

Fahrzeug	Masse [kg]	Schwerpunktslage [m]	Trägheitstensor [kg m ²]
leer	12 500	−3.800 0.000 1.500	$\begin{bmatrix} 12\,500 & 0 & 0 \\ 0 & 155\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 155\,000 \end{bmatrix}$
voll besetzt	18 000	−3.860 0.000 1.600	$\begin{bmatrix} 15\,400 & 0 & 250 \\ 0 & 200\,550 & 0 \\ 250 & 0 & 202\,160 \end{bmatrix}$

Tabelle 8.1.: Systemparameter für einen besetzten und leeren Reisebus

Vorderachse mit der Spurbreite $s_v = 2.046 \text{ m}$ verfügt über eine Doppelquerlenker-Einzelradaufhängung. Die zwillingsbereifte Hinterachse mit den Spurweiten $s_h^a = 2.152 \text{ m}$ und $s_h^i = 1.492 \text{ m}$ wird durch zwei Längslenker und einen Dreieckslenker geführt. Über eine Niveau-Regulierung werden die Luftfedern an die Beladungsänderung angepaßt.

8.2.2. Eigenlenkverhalten

Während die Kinematik an der Vorderachse beim wechselseitigen Einfedern kaum Lenkbewegungen erzeugt, ist die Kinematik der Hinterachse so ausgelegt, daß ein spürbares Eigenlenken der Achse (Rollsteuern) auftritt, Abb. 8.6.

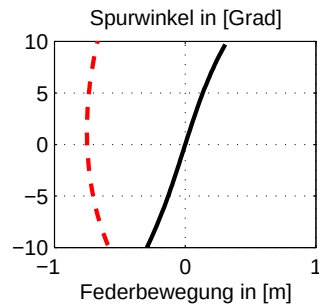


Abbildung 8.6.: Eigenlenkverhalten der Busachsen : - - vorne, — hinten

8.2.3. Stationäre Kreisfahrt

Abb. 8.7 zeigt die Ergebnisse der stationären Kreisfahrt auf einem 100 m-Radius.

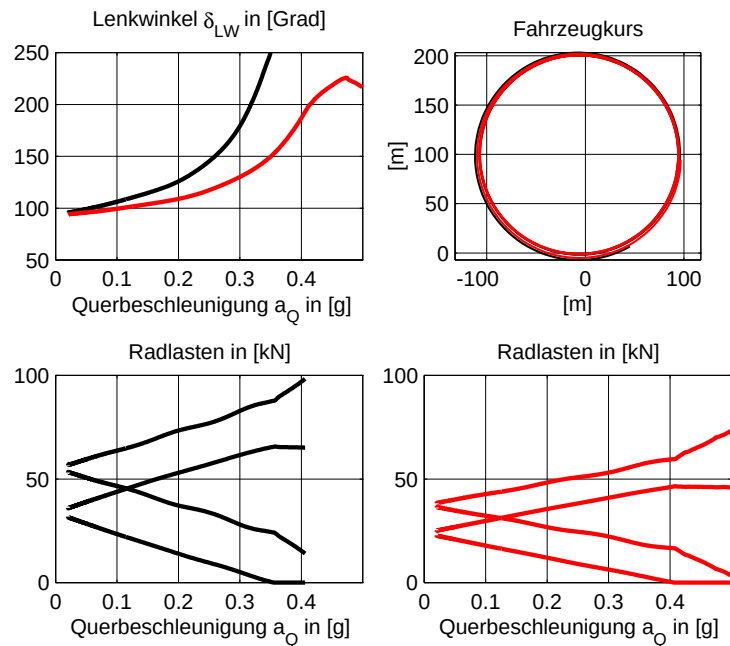


Abbildung 8.7.: Stationäre Kreisfahrt: - - Bus leer, — Bus voll besetzt

Das vollbesetzte Fahrzeug ist etwas stärker untersteuernd wie das leere. Die höheren Radlasten erzeugen größere Reifenrückstellmomente und verstärken den degressiven Radlasteinfluß auf den Aufbau der Seitenkräfte. Hinzu kommt das Rollsteuern der Hinterachse.

Im Grenzbereich können beide Fahrzeuge nicht mehr auf dem vorgegebenen Radius gehalten werden.

Bedingt durch die hohe Schwerpunktslage wird die maximal erreichbare Querbeschleunigung durch die Kippgefahr eingeschränkt. Beim leeren Fahrzeug hebt das kurveninnere Vorderrad bei der Querbeschleunigungen $a_Q \approx 0.4 \text{ g}$ ab. Ist das Fahrzeug voll besetzt, dann tritt dieser Effekt bereits bei $a_Q \approx 0.35 \text{ g}$ auf.

8.2.4. Lenkwinkelsprung

Die Ergebnisse eines Lenkwinkelsprungs bei der Fahrgeschwindigkeit $v = 80 \text{ km/h}$ sind in Abb. 8.8 zu sehen.

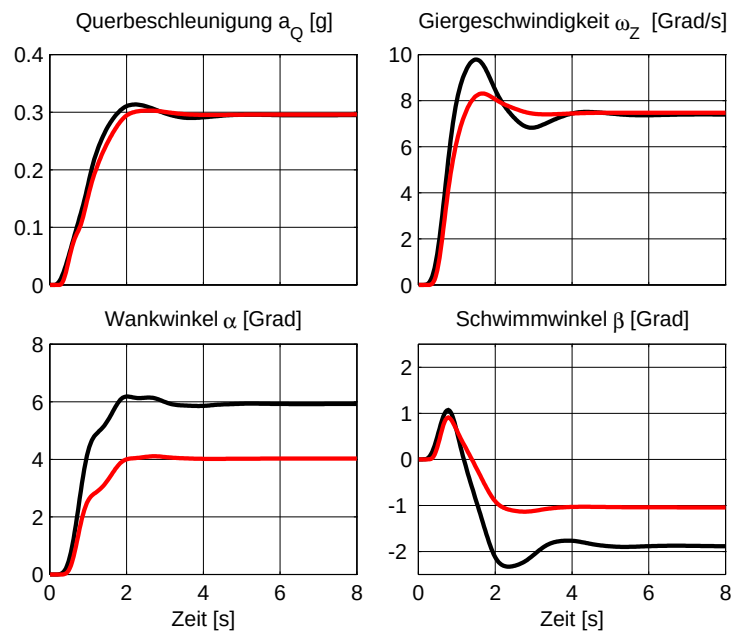


Abbildung 8.8.: Lenkwinkelsprung: - - Bus leer, — Bus voll besetzt

Um stationär auf vergleichbare Beschleunigungswerte zu kommen, wurde der Lenkwinkelsprung beim leeren Fahrzeug mit $\delta = 90 \text{ Grad}$ und beim voll besetzten mit $\delta = 135 \text{ Grad}$ durchgeführt.

Der stationäre Wankwinkel ist beim voll besetzten Bus um 50% größer wie beim leeren.

Durch die Niveau-Regulierung erhöht sich bei Beladung die Steifigkeit der Luftfedern. Da die Wirkung der Dämpfer unverändert bleibt, ist das vollbesetzte Fahrzeug nicht so gut gedämpft wie das leere. Die Folge davon sind stärkere Überschinger in der Querschleunigung, bei der Giergeschwindigkeit und im Schwimmwinkel.

8.3. Verschiedene Hinterachskonzepte für einen Pkw

Ein Mittelklasse Pkw wird serienmäßig mit einer Schräglenkerhinterachse ausgestattet. Durch entsprechend geänderte Datensätze kann diese Achse leicht in eine Längs- oder Querlenkerachse umgewandelt werden.

Die in der Serie realisierte Schräglenkerachse stellt bezüglich der Wankabstützung, Abb. 8.9, einen Kompromiß zwischen der Längs- und Querlenkerachse dar.

Die Einflüsse auf das Fahrverhalten bei stationärer Kreisfahrt auf einem 100 m Radius sind in Abb. 8.10 dargestellt.

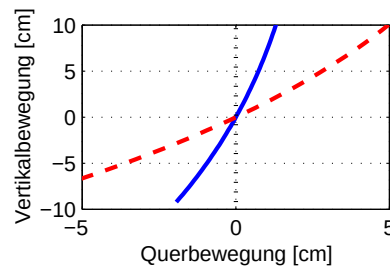


Abbildung 8.9.: Pkw-Hinterachskinematik: — Serie, - - Querlenker, ··· Längslenker

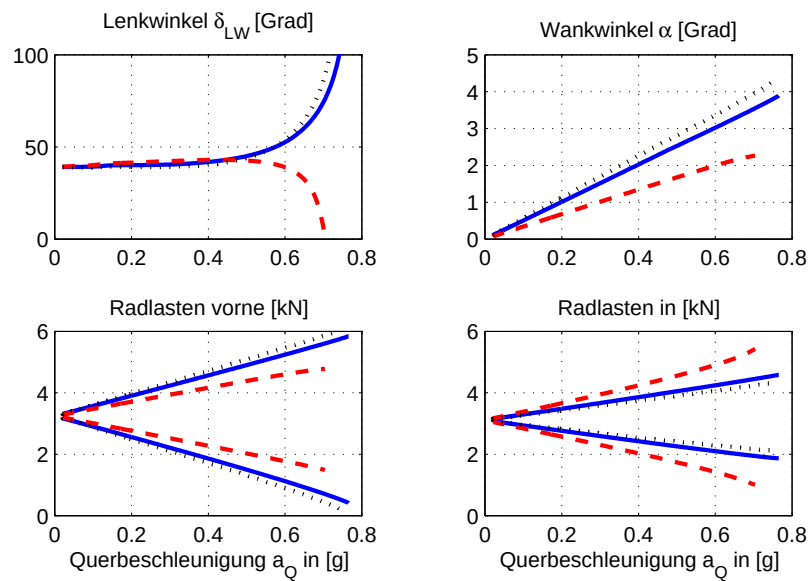


Abbildung 8.10.: Stationäre Kreisfahrt, Pkw: — Serie, - - Querlenker, ··· Längslenker

Ersetzt man beim Serienfahrzeug die Schräg- durch eine Querlenkerachse, dann erhält man ohne Anpassung der restlichen Systemparameter im Grenzbereich sogar ein übersteuerndes Fahrverhalten.

Die Querlenkerhinterachse erzeugt im Vergleich zur Schräglenkerachse eine deutlich höhere Wankabstützung. Dies erhöht an der Hinterachse die Radlastdifferenz, Abb. 8.10. Da sich gleichzeitig die Radlastdifferenz an der Vorderachse reduziert, verringert sich die Untersteuerneigung. Im Grenzbereich führt dies hier sogar zu einem übersteuernden Fahrzeug.

Das Fahrzeug mit Längslenkerhinterachse ist im Vergleich zum Serienfahrzeug stärker untersteuernd. Die fehlende Wankabstützung an der Hinterachse hat dann auch einen größeren Wankwinkel zur Folge.

A. Arbeitsblätter

A.1. Grundlagen

Womit beschäftigt sich die Fahrzeugdynamik?

Welche Probleme bereitet der Fahrer im Versuch und in der Simulation?

Wozu wird der dynamische Rollradius benötigt?

Was versteht man unter Vorspur- und Sturzwinkel?

Wie sind Nachlauf und Lenkrollradius definiert?

A.2. Reifen

Wie sind Längs- und Querschlupf definiert?

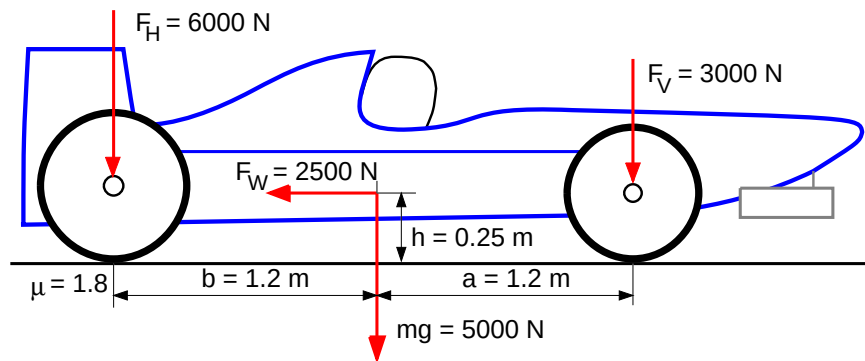
Wie sieht für einen Pkw-Reifen der typische Verlauf der Umfangskraft über dem Längsschlupf bei trockener und nasser Fahrbahn aus?

Skizzieren Sie für einen Pkw-Reifen auf trockener Fahrbahn den typischen Verlauf der Seitenkraft und des Reifenrückstellmoments über dem Schräglaufwinkel.

Warum ist bei manchen Reifen auf trockener Straße die maximale Umfangskraft größer als die maximale Seitenkraft?

A.3. Längsdynamik 1

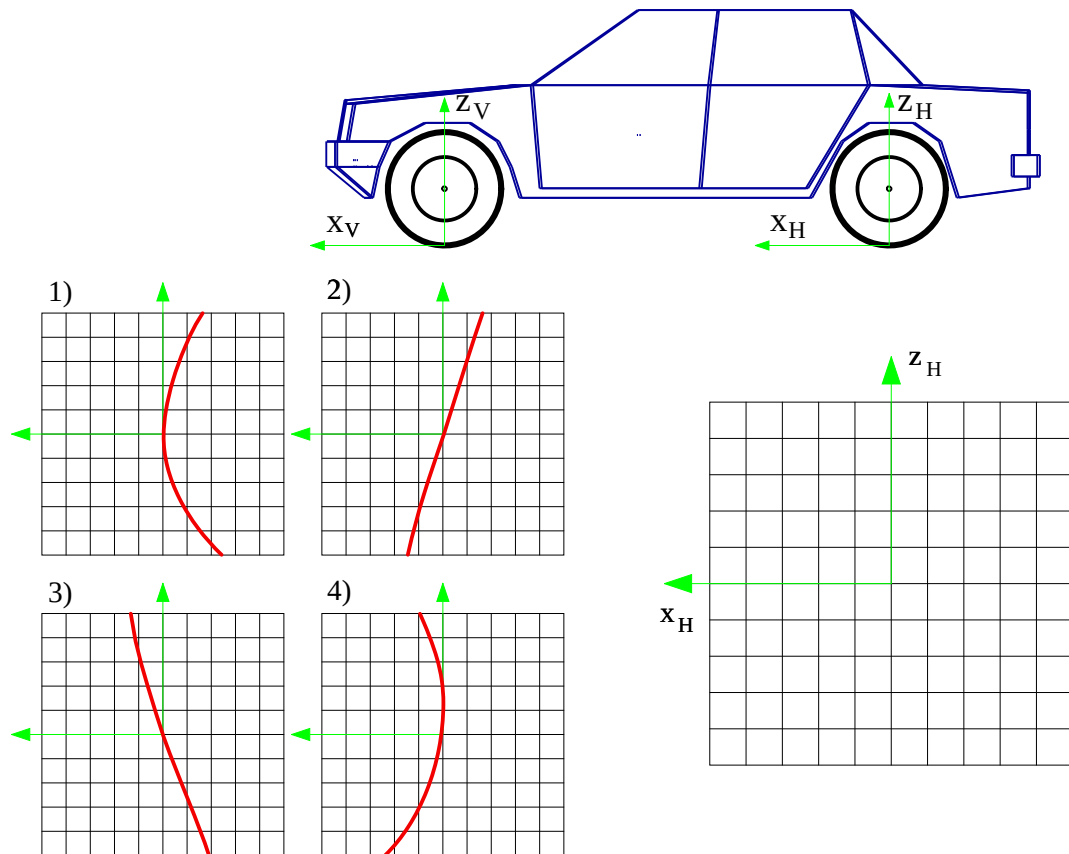
Bei einem Rennwagen werden die Vorder- und Hinterachse durch aerodynamische Kräfte F_V und F_H ("down forces") an den Boden gepresst. Dabei wirkt auf das Fahrzeug die Luftwiderstandskraft F_W .



Welche maximale Verzögerung und welche maximale Beschleunigung erreicht der Rennwagen?

A.4. Längsdynamik 2

Die Diagramme 1) bis 4) zeigen für vier verschiedene Vorderachsaufhängungen die Bewegungen des Radaufstandspunktes in der x -, z -Ebene beim Ein- und Ausfedern des Rades.



Welche Vorderachsaufhängung reduziert das Bremsnicken? Begründung!

An der Hinterachse soll eine Radaufhängung eingesetzt werden, die das Ausfedern beim Bremsen reduziert. Tragen Sie die dabei auftretenden Bewegungen des Radaufstandspunktes in das x_h -, z_h -Diagramm ein.

A.5. Querdynamik 1

Nutzfahrzeuge mit hoher Schwerpunktslage sind kippgefährdet.

Warum macht es wenig Sinn, die Aufbauwanksteifigkeit drastisch zu erhöhen, um die Kippgefahr zu verringern?

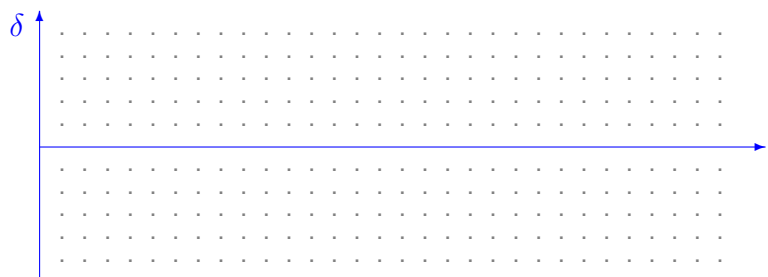
Definieren Sie an Hand von Skizzen den Ackermann-Lenkwinkel für Einspur- und Zweispurfahrzeuge.

Der Achsabstand eines Lkw's beträgt $a = 4.8\text{ m}$; die Spurweiten an der Vorder- und Hinterachse sind durch $s_1 = s_2 = 2.0\text{ m}$ gegeben. Das Fahrzeug soll einen Wendekreis mit dem Radius $R = 7.5\text{ m}$ (gemessen zur Hinterachsmittle) befahren können.

Welche Einschlagwinkel an den Vorderrädern sind dazu erforderlich?

Ein zweiachsiges Fahrzeug soll einen doppelten Fahrspurwechsel ausführen.

Zeichnen Sie in nebenstehendes Diagramm den qualitativen Verlauf des dazu erforderlichen Lenkwinkels ein, wenn der Querschlepp an den Rädern vernachlässigt werden kann.

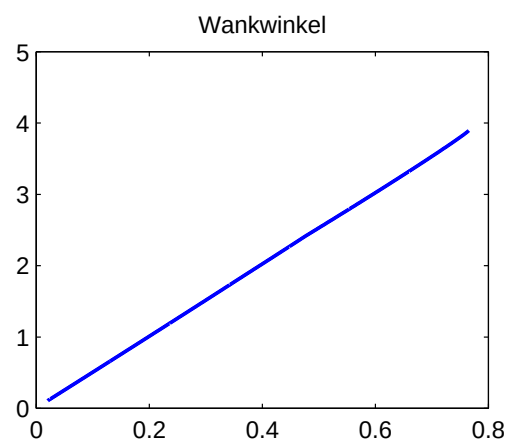
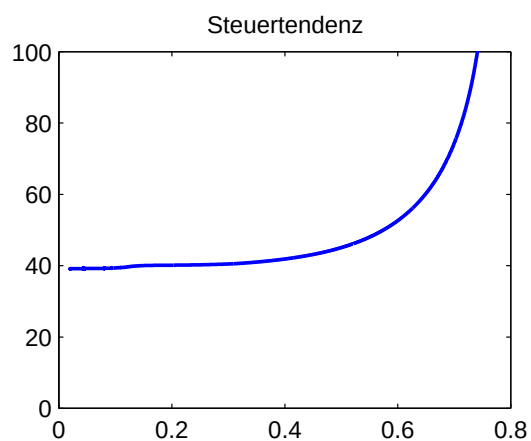


A.6. Querdynamik 2

Vor einiger Zeit wurde versucht, ein normales Reserverad durch ein sehr schmales (und damit leichtes) Notrad zu ersetzen.

Wie ändert sich die Steuertendenz, wenn das Notrad vorne oder hinten montiert wird?

Die folgenden Bilder zeigen typische Ergebnisse des Manövers stationäre Kreisfahrt für einen Mittelklasse-Pkw.



Wie ändern sich die Verläufe, wenn das gleiche Manöver bei halbiertem Stabi-Steifigkeit an der Vorderachse gefahren wird?

Zeichnen Sie die entsprechenden Kurven qualitativ in die Bilder ein.

A.7. Vertikaldynamik

In Reisebussen werden Luftfedern mit extrem progressiver Kennung verwendet.

1. Warum?
2. Welche Probleme ergeben sich daraus?

Rad und Radkörper eines Fahrzeugs wiegen jeweils 40 kg . Das Leergewicht beträgt 1000 kg ; es verteilt sich gleichmäßig auf die Vorder- und Hinterräder. Die maximale Zuladung ist auf 400 kg beschränkt.

Geben Sie für dieses Fahrzeug geeignete Werte für die Aufbau-Federn an. Begründung!
Bei welchen Dämpferwerten ist ein guter Fahrkomfort zu erwarten?

Wie können Fahrkomfort und Fahrsicherheit bewertet werden?

Skizzieren Sie eine typische nichtlineare Stoßdämpferkennlinie und erläutern Sie die Vorteile gegenüber einer linearen Kennung.

Welche Probleme, bzw. Widersprüche ergeben sich, wenn die Aufbaudämpfer optimal eingestellt werden sollen?

Index

mu-split, 40

Abstützwinkel, 46
Ackermann-Lenkswinkel, 69
Ackermannwinkel, 54
Anfahren, 45
Anfahrnicken, 40
Anti-Blockier-Systeme, 39
Antreiben
 Optimale Bremskraftverteilung, 36
Antriebsmoment, 26
Aufbaufederhärte, 74
Aufbauverwindung, 53

Beladung, 3
Bezugsspektraldichte, 120
Bremsen, 45
 Hinterachse ungebremst, 35
 Optimale Bremskraftverteilung, 36
 Vorderachse ungebremst, 35
Bremsmoment, 26
Bremsnicken, 40

cornering stiffness, 21

Doppeldreieckslenkerachse, 106
Drehhebelnennung, 101
Dämpferlager, 91

Einspurmodell
 kinematisch, 55
 linear, 61

Fahrbahn, 73, 113
 isotrope Unebenheiten, 119
 parallele Fahrspuren, 119
 regellose Unebenheiten, 118

Fahrbahnnormale, 7
Fahrdynamik, 1
Fahrer, 2
Fahrzeug, 2
 Achskinematik, 103
 Grundmodell, 98
 Lenkgestänge, 100
Feder-/Dämpferbeinachse, 107
Frontantrieb, 35

Gleitsinus, 89

Heckantrieb, 35
Hydrolager, 92

Kippgefahr, 47
Koordinatensysteme, 5
Korrelationsfunktion, 119

Längslenkerachse, 123
Längsschlupf, 18
Latschlänge, 18
Lenkaktivität, 120
Lenkrollradius, 14
Lenkviereck, 102
Lenkwinkelfehler, 55
Lenkwinkelsprung, 115, 117, 123
Längsdynamik
 ebenes Fahrzeugmodell, 40
 Einfaches Modell, 33
 Kippbedingung, 34
 maximale Beschleunigung, 34
 maximale Verzögerung, 34

Mittelwert, 119

Nachlauf
 dynamisch, 21
 kinematisch, 14
Nachlaufkennlinie, 21
Nachlaufwinkel, 14
Nickpol, 46

Querdynamik
 Kippgrenze, 47
 Stabilität, 65
 Stationäre Lösung, 66

Querlenkerachse, 123
Querschlupf, 20, 62

Radaufhängung
 Doppelquerlenker, 12
 McPherson, 12
 Mehrlenker, 12
Radaufstandskraft, 6
Radaufstandspunkt, 46

- Radeigendrehung, 26
- Radlast, 6, 16
- Radlastdifferenzen, 53
- Reifen
 - Bohrmoment, 6, 21
 - Dynamik 1. Ordnung, 111
 - kinematisches Modell, 54
 - Kippmoment, 6, 24
 - Kontaktpunkt, 6
 - Kraftschluß, 30
 - Längskraft, 6
 - Latsch, 5
 - Parameter, 29
 - Querkraft, 6
 - Querrichtung, 7
 - Radlasteinfluß
 - nichtlinear, 29
 - Rollwiderstand, 25
 - Rollwiderstandsmoment, 6
 - Summenkraft, 28
 - Summenschlupf, 27
 - TMEASY-Reifen-Modell, 110
 - Umfangsrichtung, 7
 - Vertikalkraft, 6
- Reifendeformationsgeschwindigkeit, 11
- Reifeneinfederung, 8, 16
- Reifenmodell
 - kinematisch, 54
 - linear, 61
- Reifennachlauf, 21
- Reifenradius
 - dynamisch, 9
 - statisch, 8
 - unverformt, 7
- Reifenrückstellmoment, 6, 21
- Reisebus
 - Lenkwinkelsprung, 123
 - Systemparameter, 121
- Rollachse, 51
- Rollsteuern, 121
- Rollwiderstandsmoment, 6, 26
- Schräglaufwinkel, 20
- Schräglenkerachse, 123
- Schräglenkerachse, 105
- Schwimmwinkel, 55
- Seitenkraft, 6
- Seitenkraftkennlinie, 21
- select high, 39
- select low, 39
- spektrale Leistungsdichte, 120
- Spreizachse, 13
- Spreizwinkel, 14
- Starrachse, 108
- Stationäre Kreisfahrt, 116, 122, 123
- Stationäre Kreisfahrt, 115
- Stationäre Lösung, 66
- Steuereingriffe, 114
- Steuertendenz, 69
- Sturz, 11
- Sturzkompensation, 50
- Übersteuern, 69, 124
- Umfangskraft, 6
- Umfangskraftkennlinie, 19
- Umwelt, 3
- Untersteuern, 69, 124
- Vertikaldynamik
 - Ausschwingverhalten, 76
 - Dynamische Kraftelemente, 88
 - Eigenschwingungen, 74
 - Fahrkomfort, 72
 - Fahrsicherheit, 72
 - Gesamtfahrzeug, 94
 - Grundabstimmung, 72
 - Gütekriterien, 84
 - optimale Dämpfung, 76–78, 80, 81
 - optimale Feder-/Dämpferkennlinien, 85
 - Periodische Erregung, 78
 - Viertelfahrzeugmodell, 82
- Vorspur, 11
- Wankabstützung, 50, 123, 124
- Wankneigung, 53
- Wankpol, 51
- Wanksteifigkeit, 48
- Welligkeit, 120
- Zahnstangenlenkung, 100
- Zufallsprozeß, 119
- Zustandsgleichung, 64