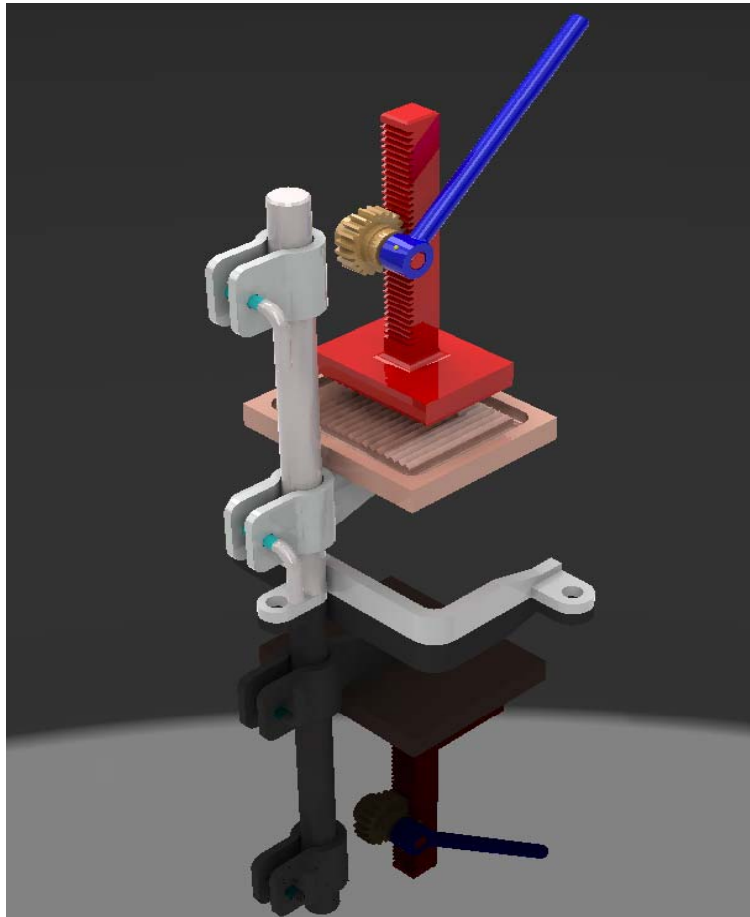




دینامیک ماشین



گروه مکانیک
دانشکده مهندسی
دانشگاه فردوسی مشهد





سرفصل درس

- فصل ۱ تعاریف و مفاهیم اصلی
- فصل ۲ خواص حرکت ، حرکت نسبی و روش های انتقال حرکت
- فصل ۳ آشنائی با انواع مکانیزمها
- فصل ۴ مراکز آنی
- فصل ۵ سرعت در مکانیزمها
- فصل ۶ شتاب در مکانیزمها
- فصل ۷ تحلیل ریاضی مکانیزمها
- فصل ۸ طراحی بادامک ها
- فصل ۹ چرخدنده و مجموعه چرخدنده ها
- فصل ۱۰ تحلیل نیروهای استاتیکی و دینامیکی مکانیزمها
- فصل ۱۱ فلاویل
- فصل ۱۲ نیروهای تکان دهنده و بالانس کردن





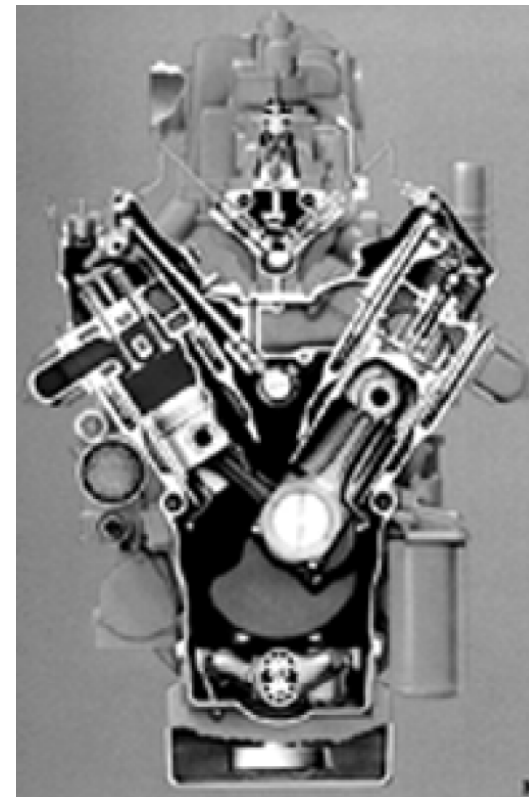
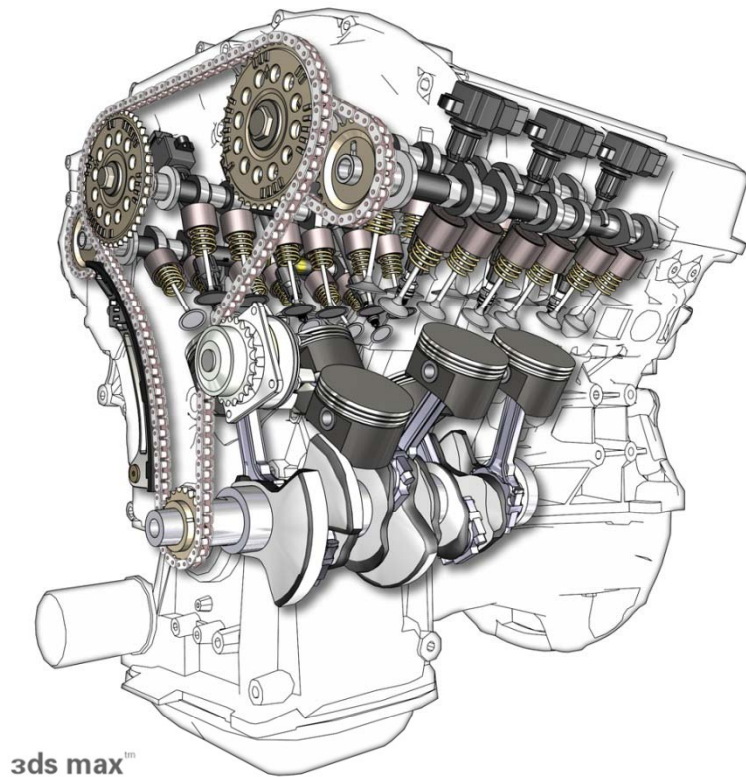
فصل 1 تعاریف و مفاهیم اصلی

- **سینماتیک:** بررسی حرکت نسبی اجزاء ماشین، تحلیل تغییر مکان، سرعت و شتاب
- **سینتیک:** تحلیل نیروهای مؤثر روی اجزاء و حرکت ناشی از آن
- **مکانیزم:** وسیله ای برای تبدیل حرکت به الگوهای مورد نظر و معمولاً همراه با نیرو کم و مصرف توان کم
- **ماشین:** معمولاً در برگیرنده مکانیزمهایی است که نیروهای قابل توجهی تولید کرده و توان قابل توجهی انتقال می دهند.



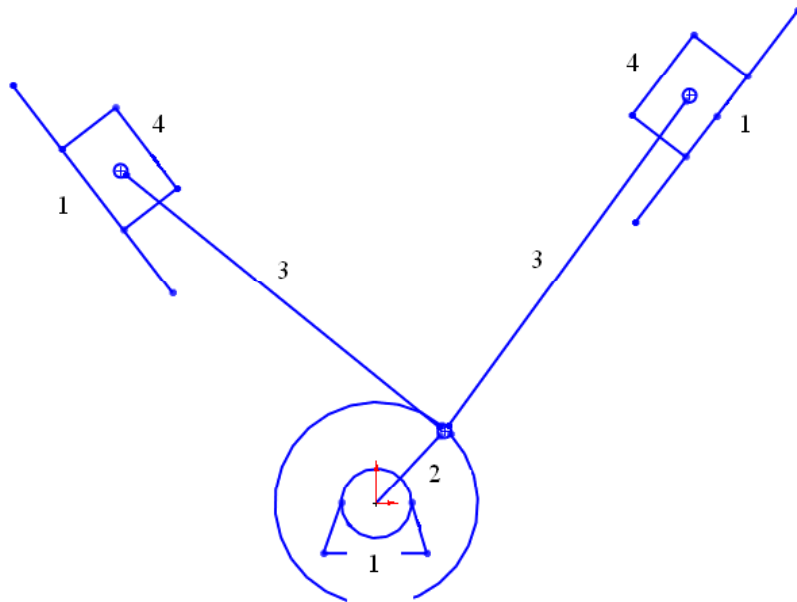
فصل 1 تعاریف و مفاهیم اصلی

- **دیاگرام سینماتیکی:** هنگام بررسی حرکت اجزاء ماشین معمول است که ساختار کلی رسم شود و تنها ابعادی که در حرکت موثرند در نظر گرفته شوند.



فصل 1 تعاریف و مفاهیم اصلی

- 1: یاتاقانهای میل لنگ و استوانه سیلندر
- 2: لنگ میل لنگ
- 3: شاتون
- 4: پیستون

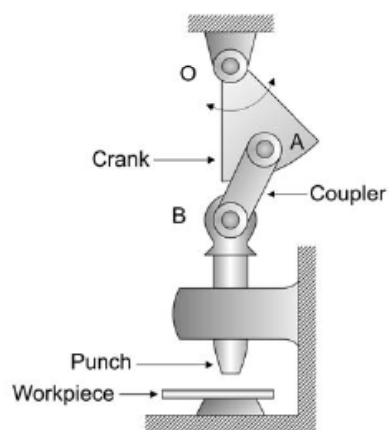


دیاگرام سینماتیکی

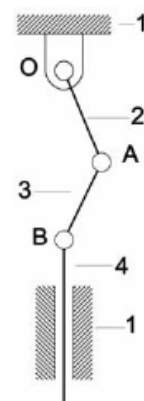
زمین: امکان حرکت اجزاء متحرک
را فراهم می کند
در دیاگرام ابعاد موثر نشان داده می شود
دیاگرام را می توان با مقیاس رسم نمود

فصل 1 تعاریف و مفاهیم اصلی

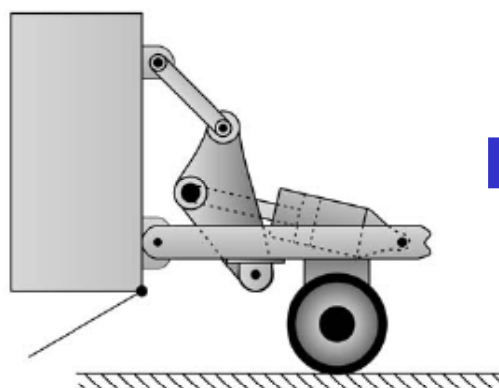
• چند مثال دیگر



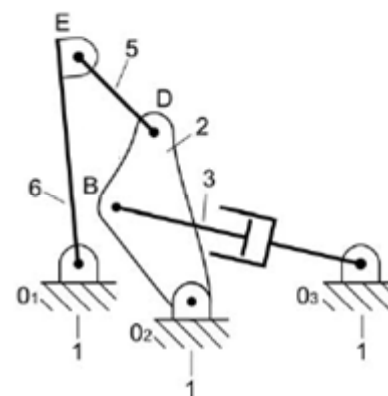
پرس مکانیکی



دیاگرام سینماتیکی



Dump Truck



دیاگرام سینماتیکی



فصل 1 تعاریف و مفاهیم اصلی

- قابلیت انعطاف (Elasticity)

– تمامی مواد مقداری قابلیت انعطاف دارند



- بازوی صلب (Rigid Link)

– بازویی که می توان از تغییر شکل آن هنگام تعیین حرکت سایر اجزاء صرف نظر نمود.

- تسمه یا زنجیر

– یک اتصال یا بازوی قابل ارتجاع کششی است.





فصل 1 تعاریف و مفاهیم اصلی

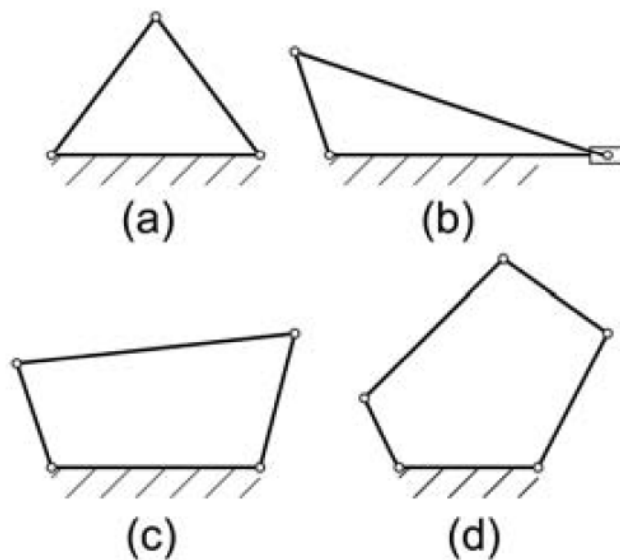
• مکانیزم (Mechanism)

- زنجیره سینماتیکی (*kinematic chain*): یک سیستم از بازوها می باشد که به صورت اجسام صلب بهم متصل شده یا در تماس با یک دیگر می باشد.
- زنجیره سینماتیکی مقید: اگر یکی از بازوها ثابت در نظر گرفته شده و حرکت هریک از بازو های دیگر موجب شود که سایر بازوها به مکان معین و قابل پیش بینی حرکت نمایند، آنگاه مجموعه زنجیره سینماتیکی مقید نامیده می شود.
- زنجیره سینماتیکی نامقید: اگر یکی از بازوها ثابت در نظر گرفته شده و حرکت هریک از بازو های دیگر موجب شود که سایر بازوها حرکت نامعین و غیرقابل پیش بینی داشته باشند، آنگاه زنجیره سینماتیکی نامقید نامیده می شود.
- زنجیره سینماتیکی مقید مکانیزم نامیده می شود.

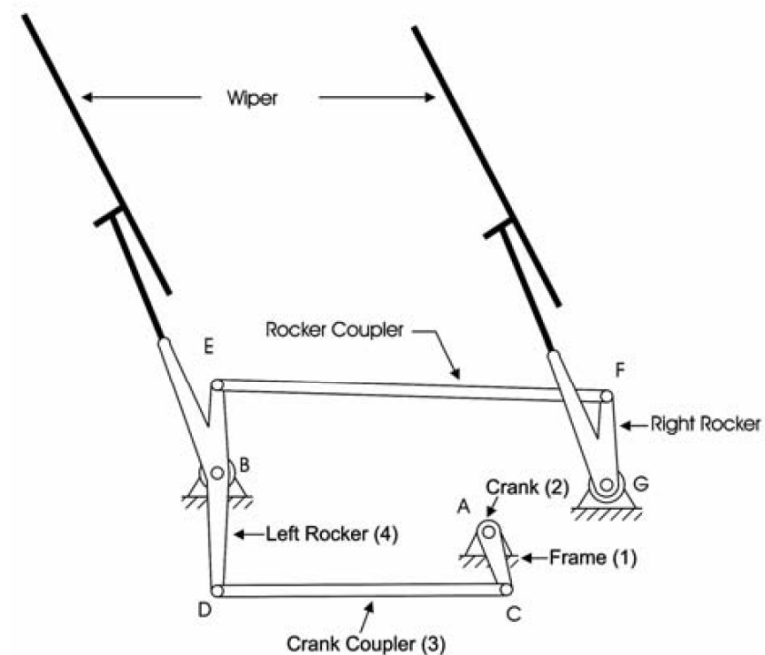


فصل 1 تعاریف و مفاهیم اصلی

- مثالهایی از زنجیره سینماتیکی مقید و نامقید



- a- structure
b- crank and slider mechanism
c- four bar mechanism
d- ?



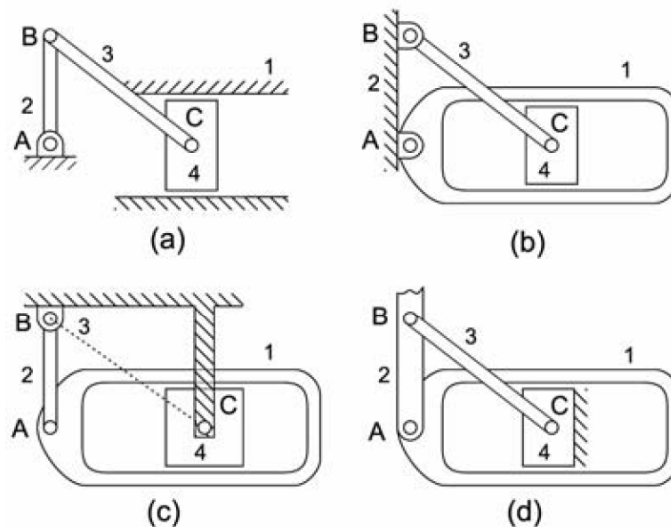
windshield wiper mechanism



فصل 1 تعاریف و مفاهیم اصلی

• معکوس (Inversion)

– با انتخاب اینکه کدام بازو در زنجیره سینماتیکی زمین یا ثابت باشد می توان مکانیزمهای متفاوتی بدست آورد.



Four inversions of the slider-crank chain:

- (a) an internal combustion engine,
- (b) rotary engine used in early aircraft, quick-return mechanism,
- (c) steam engine, crankshaper mechanism,
- (d) farm hand pump.



فصل 1 تعاریف و مفاهیم اصلی

• حرکت صفحه ای (Planar Motion)

– صفحه حرکت plane of motion

– حرکت صفحه ای

• انتقالی translational

– یک جسم صلب حرکت انتقالی دارد اگر تمامی خطوط

مستقیم در جسم به موازات خود حرکت نمایند.

Rectilinear translation

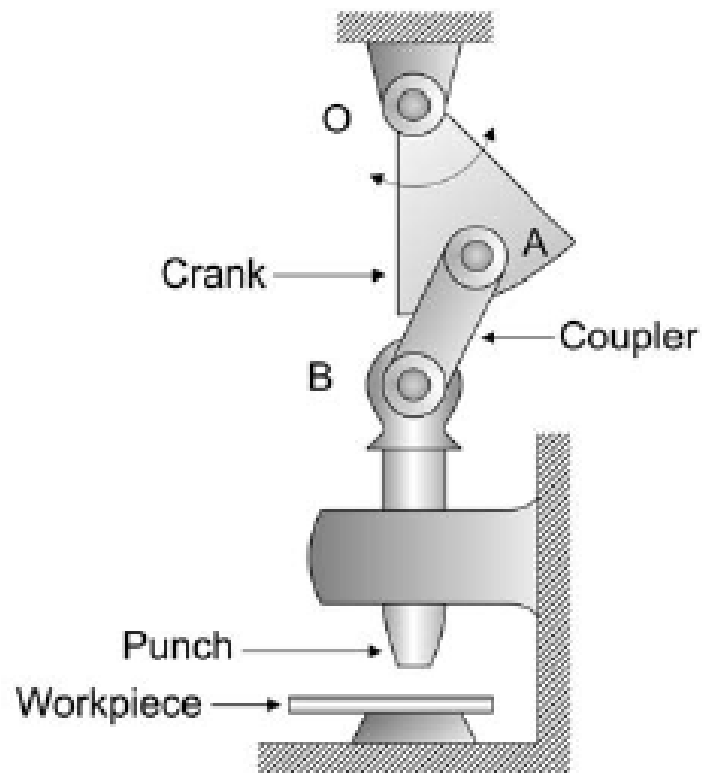
Curvilinear translation

• دورانی rotational

– تمامی نقاط جسم حول یک نقطه دوران می نمایند.

• ترکیب این دو

– حرکت توأم دورانی انتقالی





فصل 1 تعاریف و مفاهیم اصلی

تمرین

1- با استفاده از مراجع مختلف تعاریف Analysis و Synthesis را بررسی نمایید.

2- با رسم شکل و دیاگرام سینماتیکی مکانیزمهای زیر را بررسی نمایید:

o برف پاک کن خودرو

o جک خودرو

3- با استفاده از نرم افزارهای شبیه ساز حرکت، چهار معکوس لغزنده و لنگ را با ورودی های مختلف متحرک سازی (animate) نمایید.



فصل دوم

خواص حرکت ، حرکت نسبی و روش های انتقال حرکت

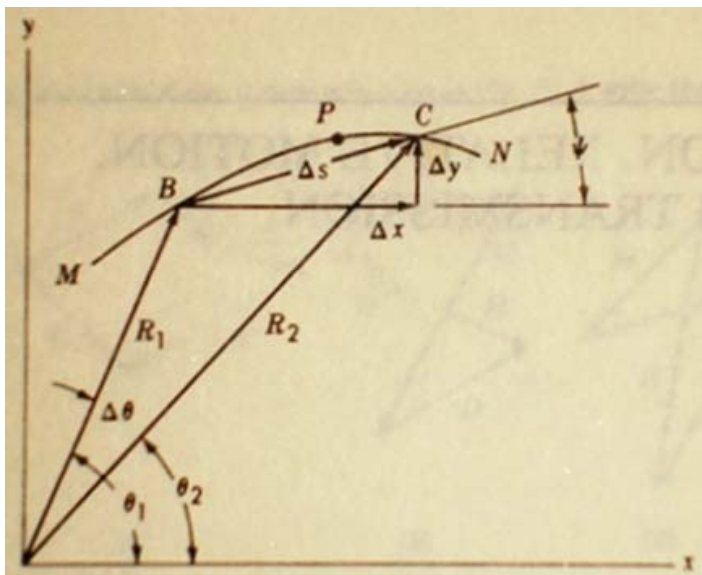


Re-inventing the wheel



فصل ۲ خواص حرکت ، حرکت نسبی و روش های انتقال حرکت

- حرکت یک جسم صلب بر حسب حرکت یک یا چند نقطه آن قابل بیان است بنابراین ابتدا حرکت نقطه ای مطالعه می گردد.
- مسیر و طول حرکت
 - مکان هندسی موقعیت متوالی یک نقطه متحرک مسیر نامیده می شود.
 - فاصله طی شده توسط نقطه در امتداد مسیر طول حرکت یا فاصله نامیده میشود که کمیتی اسکالر است.



- تغییر مکان و سرعت خطی
 - تغییر مکان یک نقطه تغییر موقعیت آن است و یک کمیت برداری است
 - نقطه P از نقطه B به C تغییر مکان خطی دارد که تفاضل دو بردار موقعیت R_1 و R_2 می باشد.





فصل ۲ خواص حرکت ، حرکت نسبی و روش های انتقال حرکت

- اگر مقدار تغییر مکان کوچک شود در حالت حدی بردار $\vec{\Delta s}$ مماس به مسیر در نقطه B خواهد بود .
- سرعت یک نقطه در امتداد مماس بر مسیر خواهد بود و مقدار آن نرخ زمانی تغییرات تغییر مکان خطی می باشد.

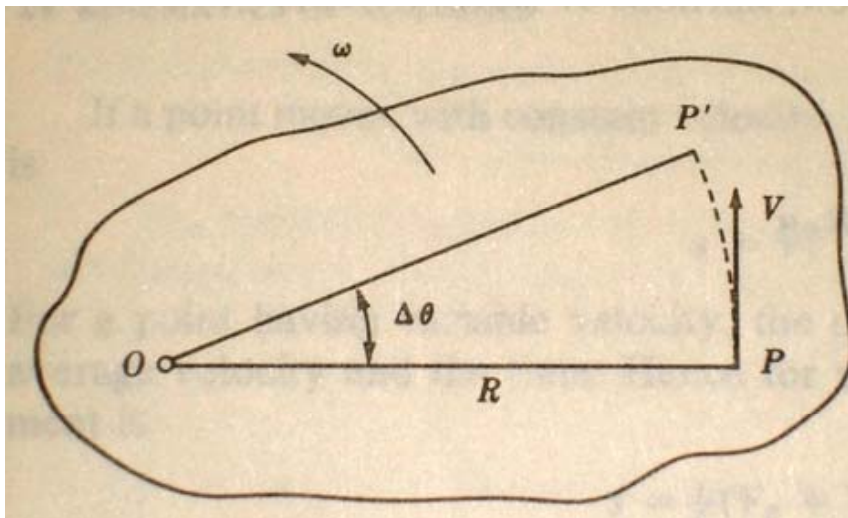
$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \frac{ds}{dt}$$





فصل ۲ خواص حرکت ، حرکت نسبی و روش های انتقال حرکت

- تغییر مکان و سرعت زاویه ای
 - در نظر بگیرید یک جسم صلب حول یک محور ثابت در نقطه O دوران می کند
 - همچنین در نظر بگیرید که P نقطه ای ثابت در روی جسم صلب است. نقطه P به P' در مدت زمان Δt تغییر مکان می یابد.
 - توجه شود که:
 - هنگام دوران تمامی نقاط دارای دارای سرعت زاویه ای یکسانی می باشند
 - سرعت خطی نقطه نسبت مستقیم با شعاع دوران دارد.





فصل ۲ خواص حرکت ، حرکت نسبی و روش های انتقال حرکت

- شتاب خطی و زاویه ای

– شتاب خطی نرخ زمانی تغییرات سرعت خطی می باشد. اگر جسم صلب حرکت خطی داشته باشد به عبارت دیگر فقط مقدار بردار سرعت تغییر نماید و راستای آن ثابت باقی بماند؛ آنگاه شتاب خطی لحظه ای:

$$A = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta V}{\Delta t} \right) = \frac{dV}{dt}$$

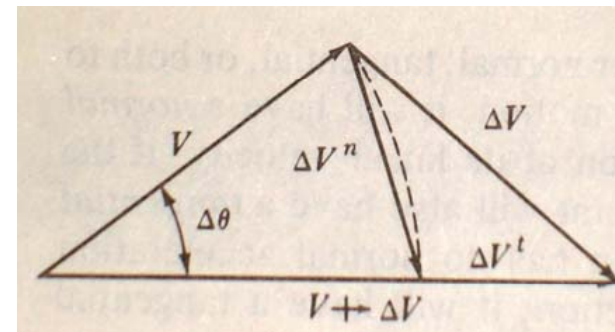
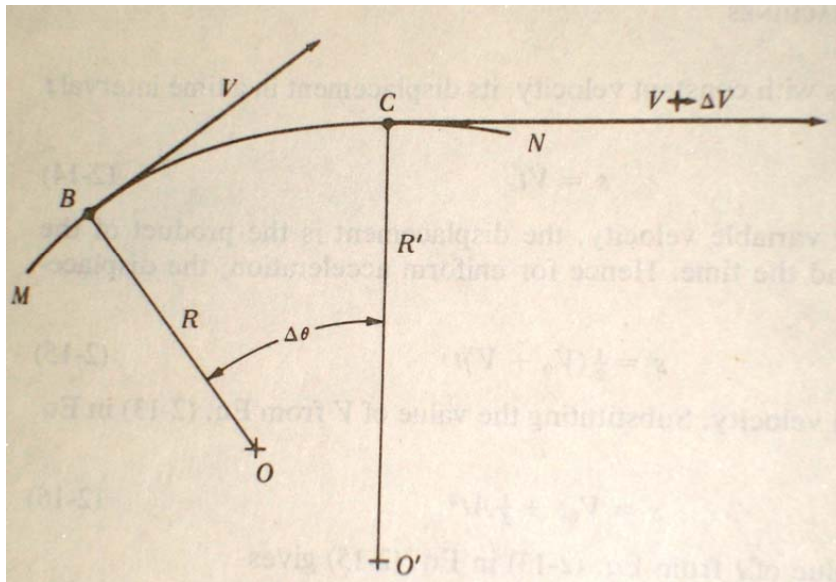




فصل ۲ خواص حرکت ، حرکت نسبی و روش های انتقال حرکت

• شتاب عمودی و مماسی

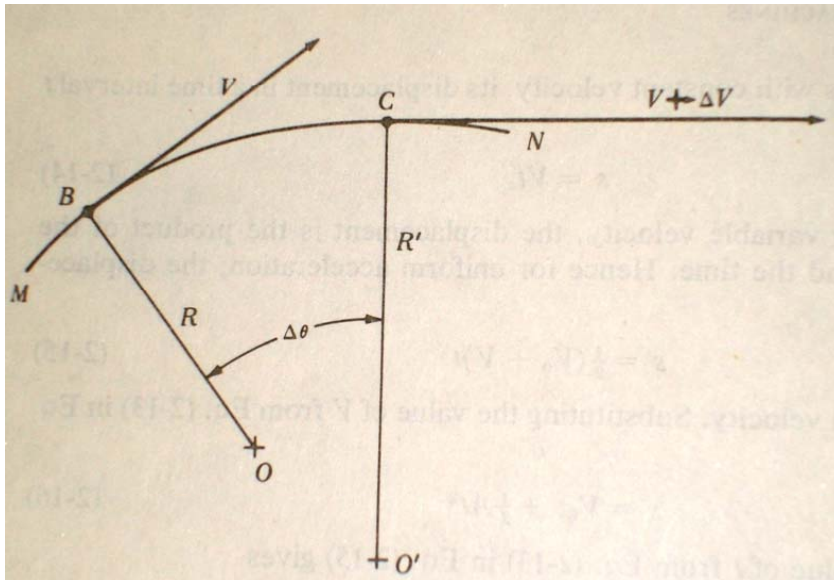
- یک نقطه در امتداد مسیر خود می تواند شتاب عمودی ؛ مماسی یا ترکیب ایندو را همزمان داشته باشد.
- اگر نقطه ای حرکت منحنی الخط داشته باشد آنگاه دارای شتاب عمودی است که ناشی از تغییر جهت سرعت خطی آن می باشد.
- اگر اندازه سرعت خطی نیز تغییر نماید آنگاه نقطه شتاب مماسی خواهد داشت.
- نقطه ای که حرکت مستقیم الخط دارد شتاب عمودی ندارد اما می تواند شتاب مماسی داشته باشد.





فصل ۲ خواص حرکت ، حرکت نسبی و روش های انتقال حرکت

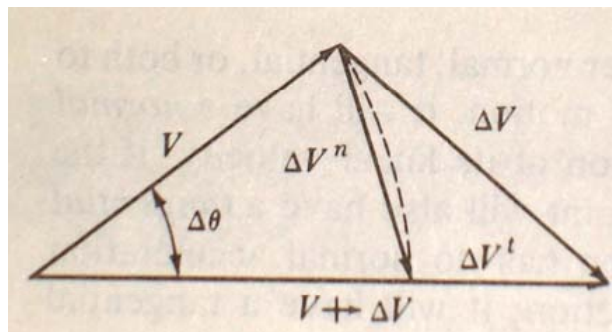
- شتاب عمودی و مماسی (ادامه)



$$A^t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta V^t}{\Delta t} \right) = \frac{dV^t}{dt}$$

$$A^n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta V^n}{\Delta t} \right) = \frac{dV^n}{dt}$$

- کل شتاب نقطه جمع برداری A^n و A^t می باشد.



$$A = \sqrt{(A^t)^2 + (A^n)^2}$$

$$\phi = \tan^{-1} A^n / A^t$$

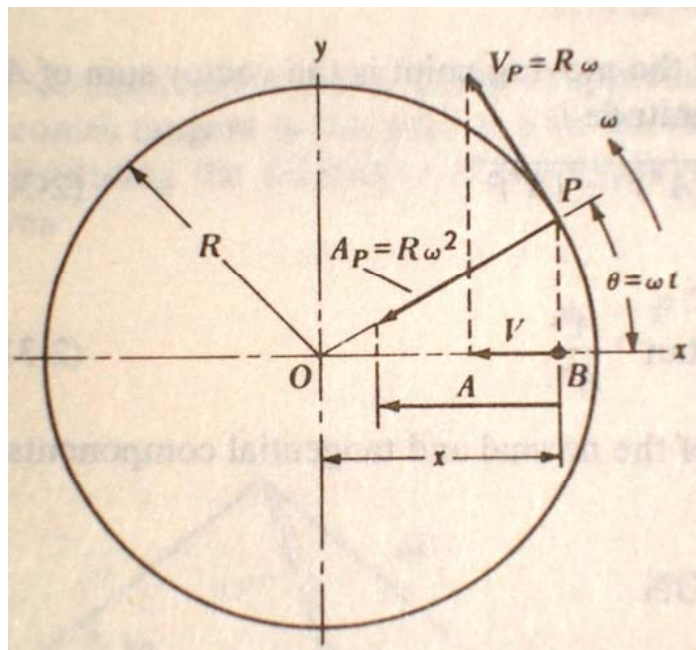




فصل ۲ خواص حرکت ، حرکت نسبی و روش های انتقال حرکت

• حرکت هارمونیکی ساده

- در حرکت خطی هنگامیکه شتاب متناسب با تغییر مکان با علامت مخالف تغییر نماید حرکت هارمونیکی ساده ایجاد می گردد.



حرکت یک نقطه با سرعت زاویه ای
ثابت روی یک دایره

$$X = R \cos \omega t$$

$$V = \frac{dx}{dt} = -R\omega \sin \omega t$$

$$A = \frac{d^2x}{dt^2} = -R\omega^2 \cos \omega t$$

$$A = -\omega^2 X$$

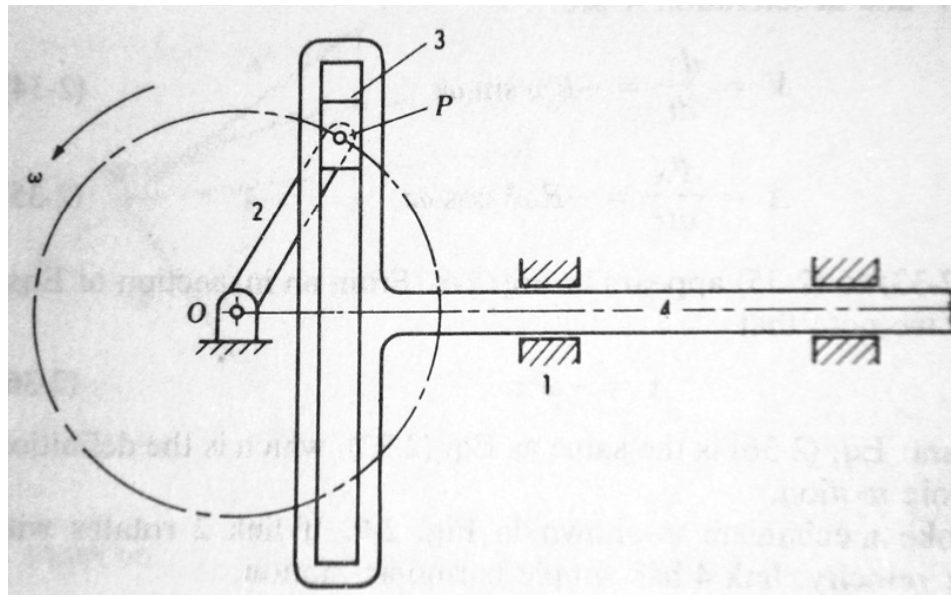




فصل ۲ خواص حرکت ، حرکت نسبی و روش های انتقال حرکت

• مکانیزم Scotch-Yoke

– اگر بازوی ۲ با سرعت زاویه ای ثابت دوران کند آنگاه بازوی ۴ حرکت هارمونیکی ساده خواهد داشت.





فصل ۲ خواص حرکت ، حرکت نسبی و روش های انتقال حرکت

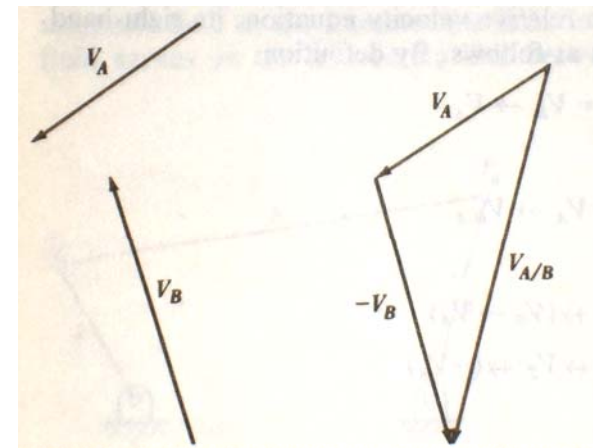
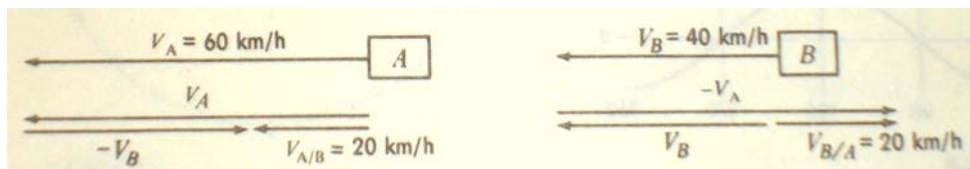
• حرکت نسبی Relative Motion

- حرکت مطلق Absolute Motion
- حرکت نسبی؛ جسمی نسبت به جسم دیگر دارای حرکت نسبی است در صورتی که تفاوت در حرکت مطلق آنها وجود داشته باشد.

- تغییر مکان
- سرعت
- شتاب

$$V_A = V_B + V_{A/B}$$

$$V_B = V_A + V_{B/A}$$





فصل ۲ خواص حرکت ، حرکت نسبی و روش های انتقال حرکت

• حرکت نسبی زاویه ای

– اگر دو جسم در یک صفحه یا صفحات موازی حرکت داشته باشند، حرکت زاویه ای نسبی آنها بصورت تفاضل حرکت زاویه ای مطلق آنها تعریف می گردد.

$$\theta_{3/2} = \theta_3 - \theta_2$$

$$\omega_{3/2} = \omega_3 - \omega_2$$

$$\alpha_{3/2} = \alpha_3 - \alpha_2$$





فصل ۲ خواص حرکت ، حرکت نسبی و روش های انتقال حرکت

• روشهای انتقال حرکت

گاهی مکانیزمها براساس روش انتقال حرکت طبقه بندی می شوند.

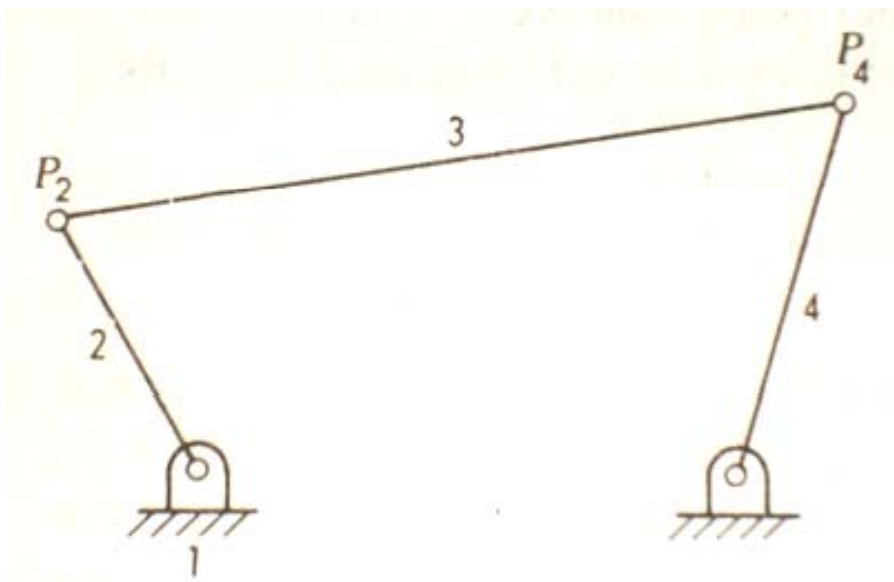
- ۱- متصل کننده صلب
- ۲- متصل کننده قابل انعطاف
- ۳- مکانیزم تماس مستقیم
- ۴- فشار هیدرولیک یا میدان مغناطیس



فصل ۲ خواص حرکت ، حرکت نسبی و روش های انتقال حرکت

۱- متصل کننده صلب

- عضو ۲ محرک نامیده شده
- عضو ۴ متحرک نامیده شده
- عضو ۳ یک متصل کننده صلب
- که حرکت را از عضو ۲ به ۴ منتقل می کند.



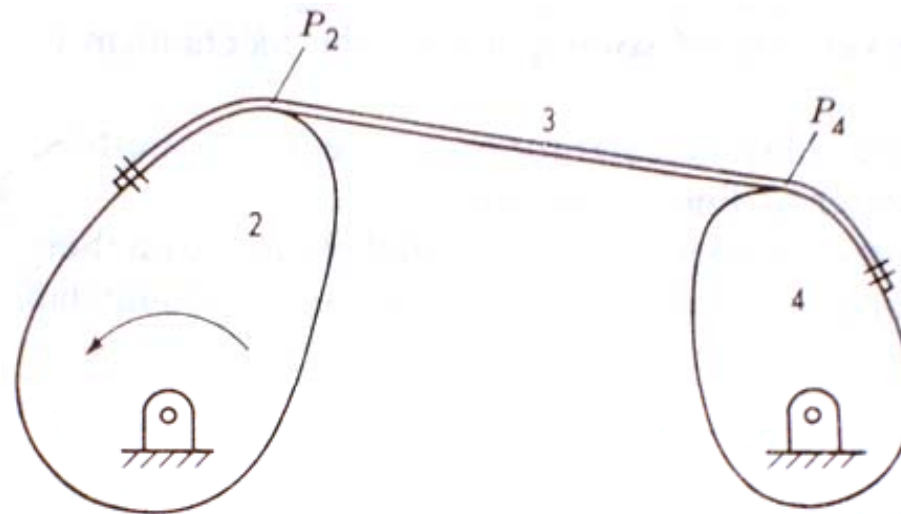
❖ آیا در هنگام انتقال حرکت تاخیری وجود دارد؟



فصل ۲ خواص حرکت ، حرکت نسبی و روش های انتقال حرکت

۲- متصل کننده قابل انعطاف

- تسمه یا زنجیر بصورت قابل انعطاف و کششی حرکت را منتقل می کند
- در مکانیزم نوار ۳ حرکت را از ۲ به ۴ منتقل می کند.

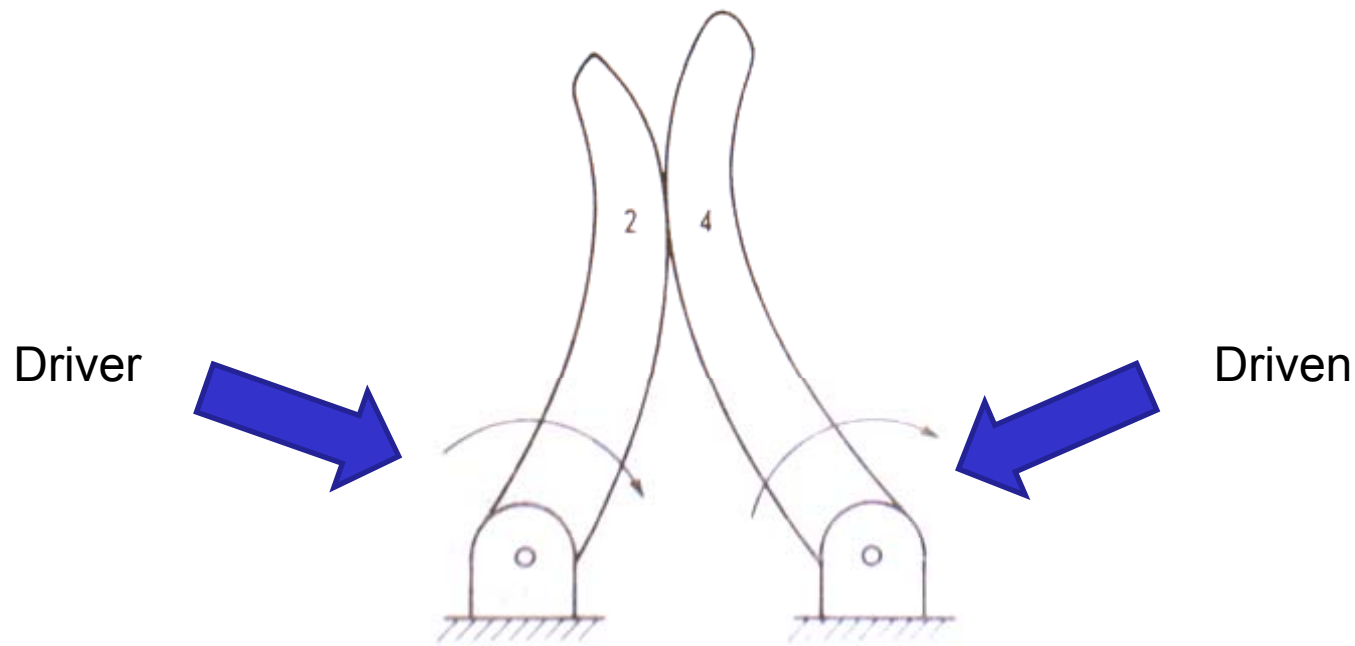




فصل ۲ خواص حرکت ، حرکت نسبی و روش های انتقال حرکت

۳- مکانیزم تماس مستقیم

عضو محرک ۲ و متحرک ۴ در تماس مستقیم با یکدیگر می باشند. حرکت منتقل شده از عضو ۲ به عضو ۴ بستگی به شکل خارجی آنها و موقعیت نسبی آنها دارد. معمولاً در این مکانیزم محرک، بادامک و متحرک، پیرو یا دنبال کننده نامیده می شود.

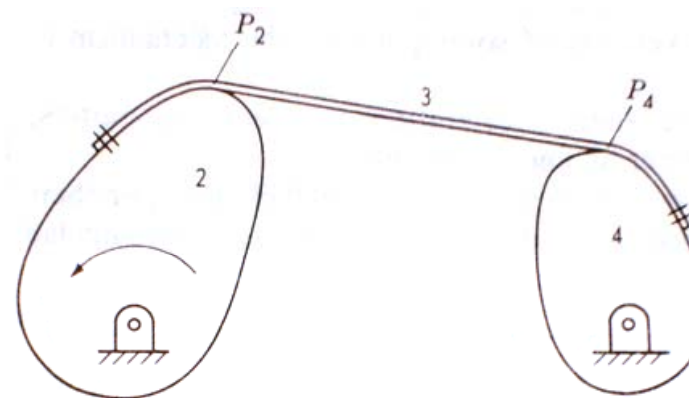
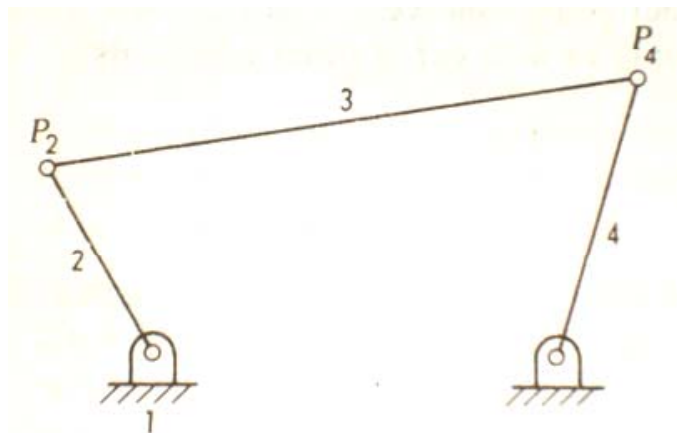




فصل ۲ خواص حرکت ، حرکت نسبی و روش های انتقال حرکت

• خط انتقال حرکت Line of Transmission

- حرکت در امتداد خط انتقال از محرک به متحرک منتقل می شود
- خط P_2P_4 در شکل های مکانیزم چهار میل و تسمه
- ❖ در مکانیزم تماس مستقیم خط انتقال حرکت چیست؟

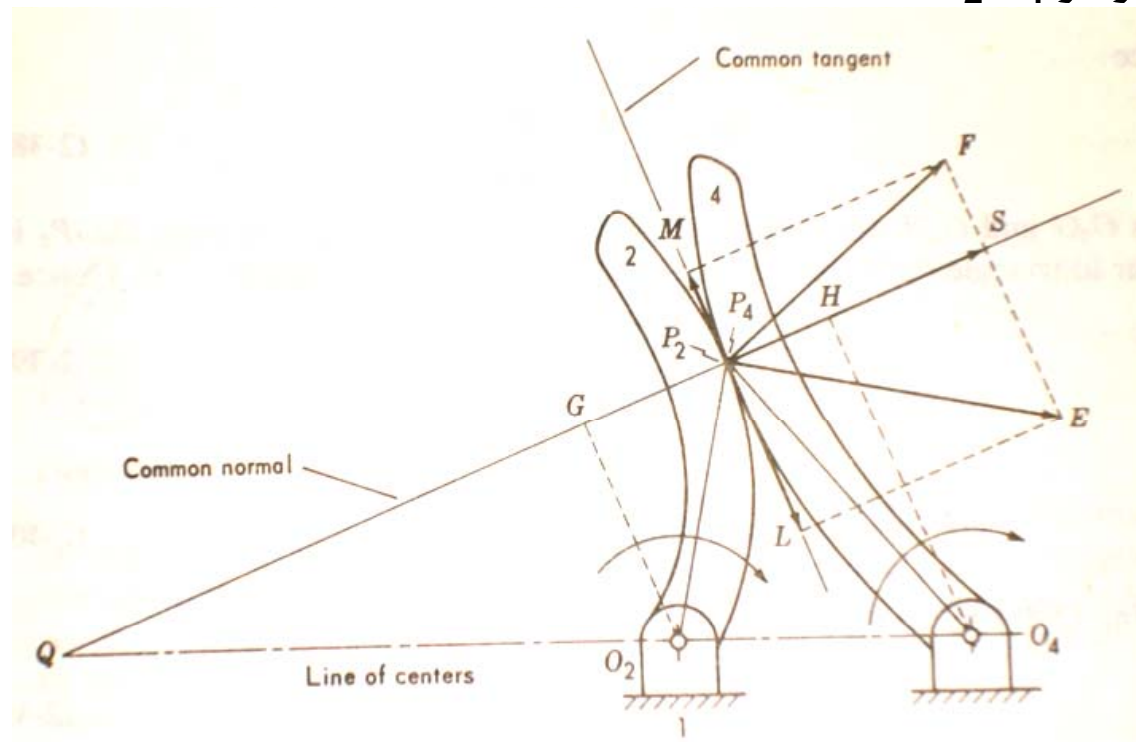




فصل ۲ خواص حرکت ، حرکت نسبی و روش های انتقال حرکت

• عمود مشترک در نقطه تماس دو سطح

- فقط در صورتی که محرک در جهت عمود مشترک حرکت داشته باشد، می تواند متحرک را به حرکت در آورد.
- خط مراکز O_2O_4





فصل ۲ خواص حرکت ، حرکت نسبی و روش های انتقال حرکت

• نسبت سرعت زاویه ای

- نقاط P_2 و P_4 متناظراً در روی اجسام ۲ و ۴ قرار گرفته اند و در لحظه نشان داده شده منطبق می باشند.
- شعاع دوران نقاط P_2 و P_4 به ترتیب O_2P_2 و O_4P_4 می باشد
- بردار سرعت نقطه P_2 P_2E
- بردار سرعت نقطه P_4 P_4F

❖ ارتباط مولفه های سرعت نقاط P_2 و P_4 در امتداد عمود مشترک چگونه است؟





فصل ۲ خواص حرکت ، حرکت نسبی و روش های انتقال حرکت

• تعیین سرعت زاویه ای عضو ۴

– سرعت زاویه ای عضو ۲ معلوم است (ورودی)

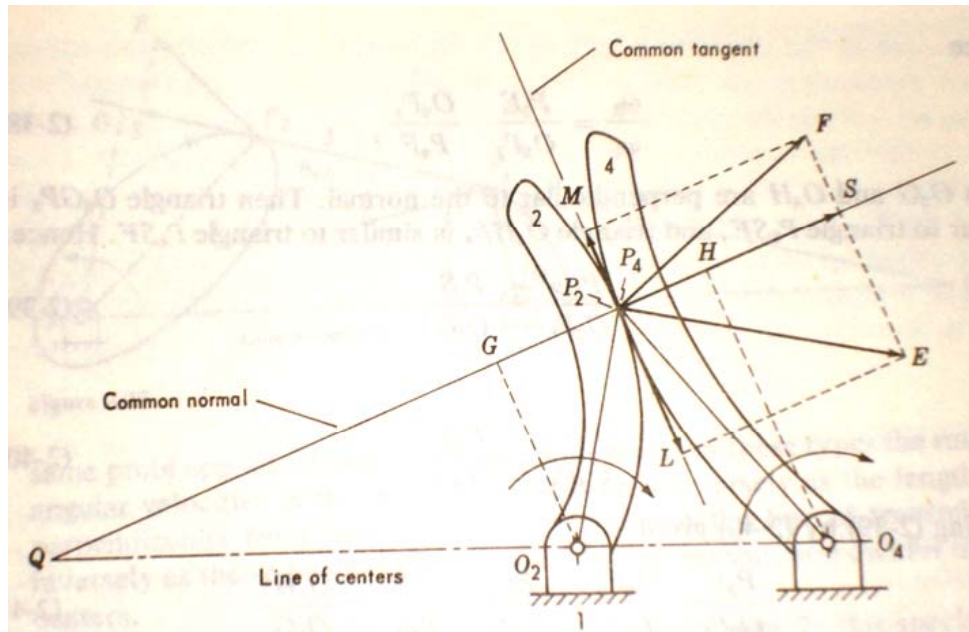
$$\omega_2 = \frac{V}{R} = \frac{P_2 E}{O_2 P_2}$$

$$\omega_4 = \frac{P_4 F}{O_4 P_4}$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_4} = \frac{P_2 E}{O_2 P_2} \times \frac{O_4 P_4}{P_4 F}$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_4} = \frac{O_4 H}{O_2 G}$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_4} = \frac{O_4 Q}{O_2 Q}$$





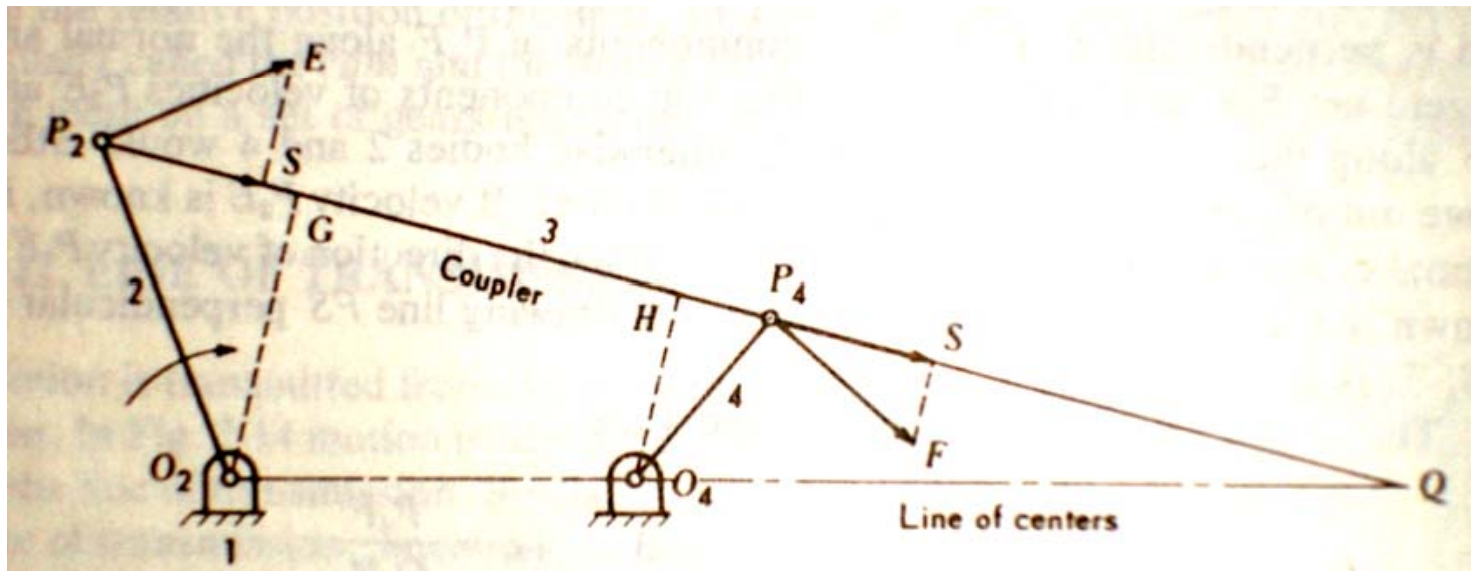
فصل ۲ خواص حرکت ، حرکت نسبی و روش های انتقال حرکت

• سرعت زاویه ای عضو متحرک

نسبت سرعت زاویه ای محرک به متحرک

به نسبت عکس طول عمود از مرکز دوران به عمود مشترک

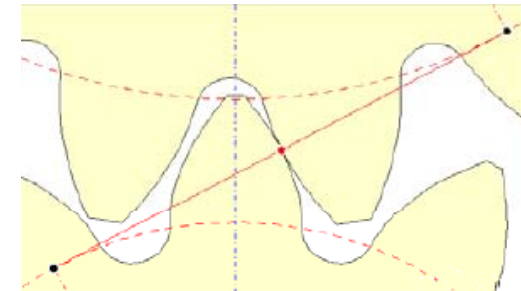
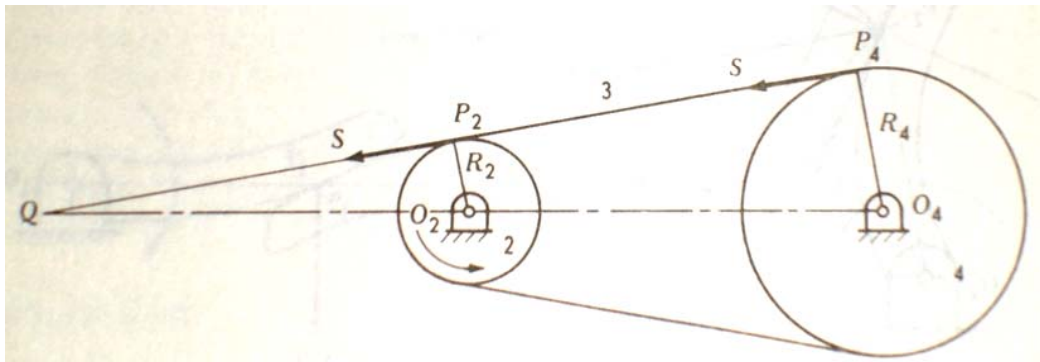
به نسبت عکس قطعات ایجاد شده توسط خط انتقال روی خط مراکز



فصل ۲ خواص حرکت ، حرکت نسبی و روش های انتقال حرکت

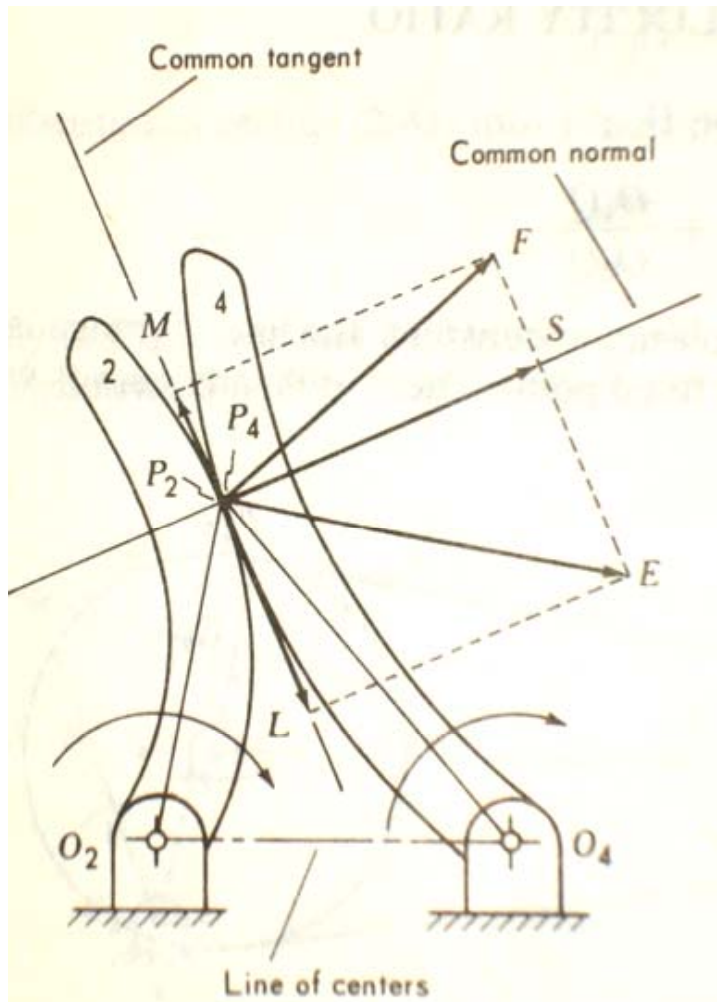
• نسبت سرعت زاویه ای ثابت

– در صورتی نسبت سرعت زاویه ای ثابت است که خط انتقال در نقطه ثابتی خط مرکز را قطع نماید.



• در مکانیزم تماس مستقیم منحنی های زیادی وجود دارند که می توانند به عنوان سطوح تماس محرک و متحرک انتخاب شوند. و شرط نسبت سرعت زاویه ای ثابت رعایت گردد.

فصل ۲ خواص حرکت ، حرکت نسبی و روش های انتقال حرکت



• تماس لغزشی (Sliding Contact)

- هنگامیکه در نقطه تماس مکانیزم تماس مستقیم حرکت نسبی در امتداد مماس مشترک وجود داشته باشد، آنگاه لغزش داریم.
- سرعت لغزش

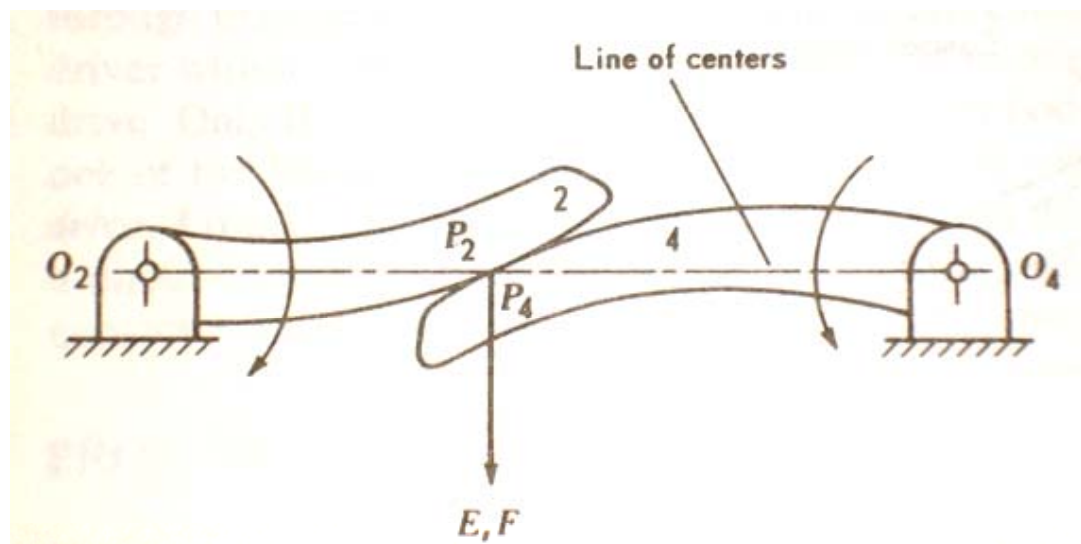
$$V_S = P_2 L - P_4 M = ML$$



فصل ۲ خواص حرکت ، حرکت نسبی و روش های انتقال حرکت

• تماس غلتشی (Rolling Contact)

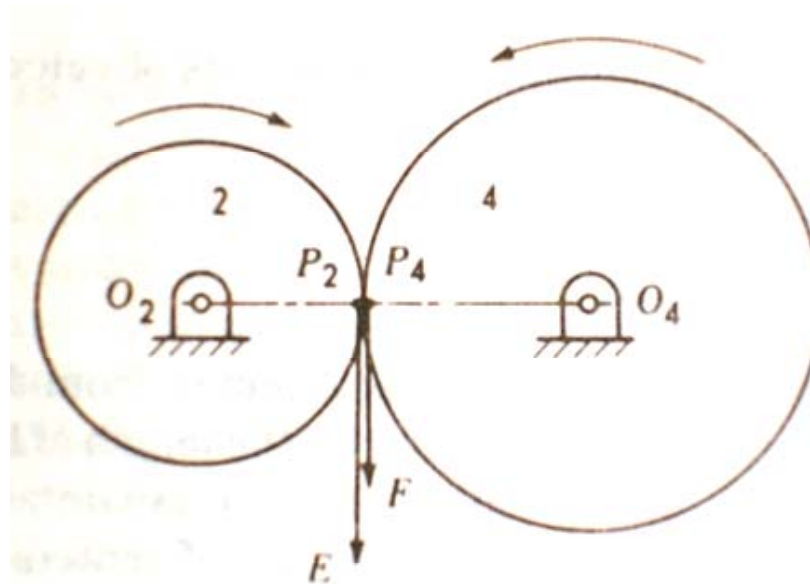
- در مکانیزم تماس مستقیم اگر لغزش وجود نداشته باشد، آنگاه غلتش خواهیم داشت.
- در این حالت مولفه های مماسی سرعت اندازه و جهت یکسانی خواهند داشت.
- شرط $P_4F = P_2E$ در صورتی وجود دارد که شعاع O_2P_2 و O_4P_4 در یک امتداد قرار گیرند.





فصل ۲ خواص حرکت ، حرکت نسبی و روش های انتقال حرکت

- شرط اینکه نقطه تماس در روی خط مراکز قرار گیرد یک شرط لازم برای غلتش است، اما این شرط کافی نمی باشد.
- در صورتی که مولفه های مماسی سرعت دو جسم در نقطه تماس یکسان نباشد لغزش وجود خواهد داشت.

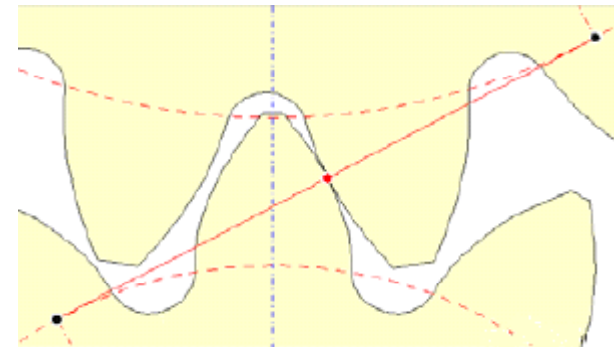
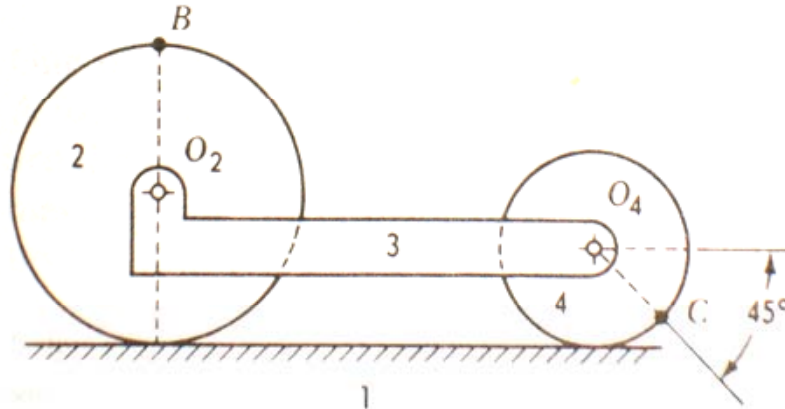


فصل ۲ خواص حرکت ، حرکت نسبی و روش های انتقال حرکت

• تمرینات و مسائل فصل ۲

- (1) مکانیزم **Scotch Yoke** را با نرم افزار تحلیل نمایید.
- (2) حرکت نسبی: وسیله نشان داده شده در شکل با سرعت 30 km/h به سمت راست حرکت می کند. قطر چرخهای ۲ و ۴ به ترتیب 0.6 و 0.4 متر می باشد. سرعتهای زیر را بر حسب m/s و rad/s بدست آورید.

$$V_{O_2}, V_{B/O_2}, V_B, V_C, V_{B/C} \quad \omega_2, \omega_4, \omega_{2/4}$$

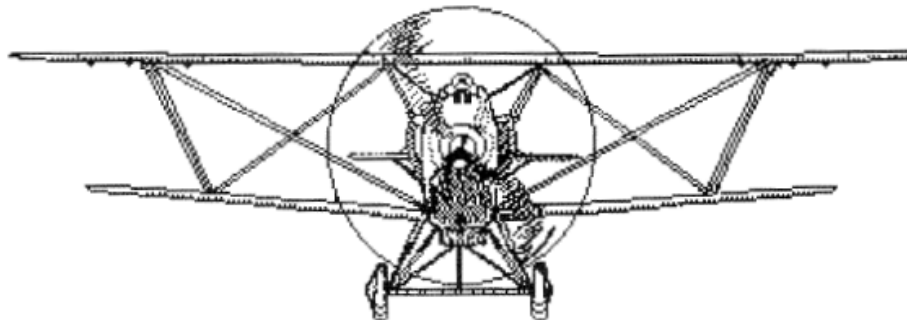


- (3) مکانیزم تماس مستقیم دو دندانه **involute** چرخنده را بررسی نمایید.
- (4) در مورد ویژه گی **Positive Drive** در مکانیزمها تحقیق نمایید.



فصل ۳

آشنائی با انواع مکانیزمها



Chance favors the prepared mind
PASTEUR



گروه مکانیک
دانشکده مهندسی
دانشگاه فردوسی مشهد





فصل ۳ آشنائی با انواع مکانیزمها

- در این فصل مفاهیم اصلی مورد نیاز در تحلیل مکانیزمها بیان می گردد.
- **درجه آزادی (DOF):**
 - قابلیت حرکت (mobility) یک سیستم مکانیکی بر حسب درجه آزادی طبقه بندی می شود.
 - درجه آزادی یک سیستم برابر با تعداد پارامترهای مستقل مورد نیاز برای تعیین موقعیت لحظه ای آن سیستم در فضا می باشد.
 - توجه نمایید که درجه آزادی نسبت به یک قاب مرجع بیان می گردد.

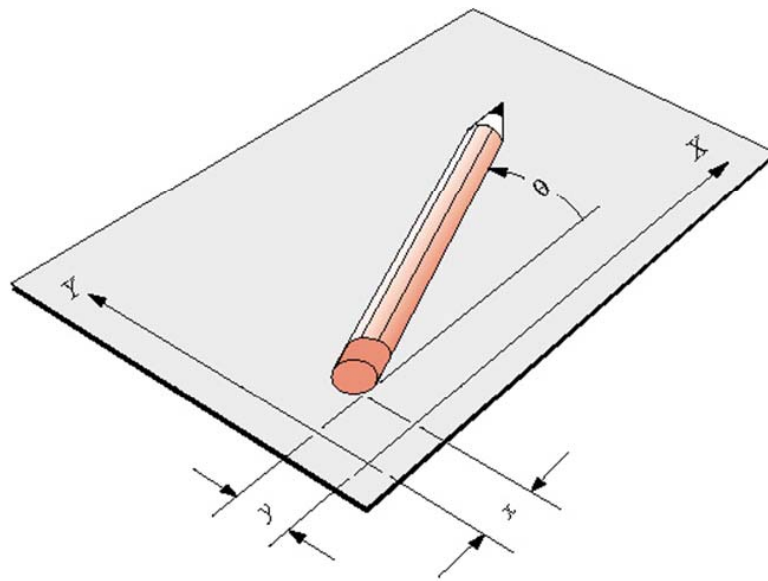


فصل ۳ آشنائی با انواع مکانیزمها

• تعداد درجات آزادی جسم صلب در صفحه

- موقعیت یک نقطه (X, Y)

- زاویه یک راستای ثابت نسبت به جسم (θ)



• تعداد درجات آزادی جسم صلب در فضا

• شش درجه آزادی

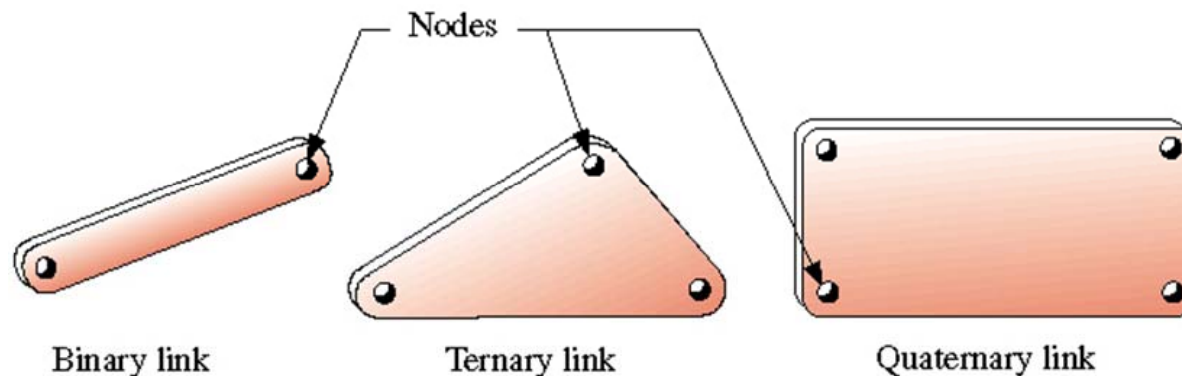
• سه موقعیت (X, Y, Z)

• سه زاویه (θ, Φ, ρ)



فصل ۳ آشنائی با انواع مکانیزمها

- بازوها، اتصالات و زنجیره های سینماتیکی
 - Linkage از بازوها (links) و اتصالات (joints) تشکیل شده است.
 - Linkage ها بلوکهای سازنده انواع مکانیزمها می باشند.
 - تمامی مکانیزمهای متداول (بادامکها، چرخدنده ها، تسمه و زنجیر) در حقیقت در مقوله Linkage ها قرار می گیرند.
 - بازو (link) جسم صلبی بوده که حداقل دارای دو گره (node) باشد





فصل ۳ آشنائی با انواع مکانیزمها

- اتصال (joint) امکان حرکت بین دو بازو را فراهم می کند.
- اتصال که جفت سینماتیکی (kinematic pair) نیز نامیده می شود، به صورت های مختلفی طبقه بندی می شود:
 - نوع تماس بین اجزاء: نقطه ای، خطی، یا سطحی
 - تعداد درجات آزادی امکان پذیر در اتصال
 - نوع محصور بودن (closure): قید نیروئی (force) یا قید شکلی (form)
 - تعداد بازوهای متصل شده که مرتبه (order) اتصال نامیده می شود.

• Lower and higher pairs

- Lower pair: تماس در کل یک سطح
- Higher pair: تماس در روی یک نقطه یا در امتداد یک خط





فصل ۳ آشنائی با انواع مکانیزمها

- شش نوع اتصال (lower pair) ، درجه آزادی و نماد تک حرفی آن
- در مکانیزمهای صفحه ای تنها اتصالات (lower pair)
 - Revolute(R) و

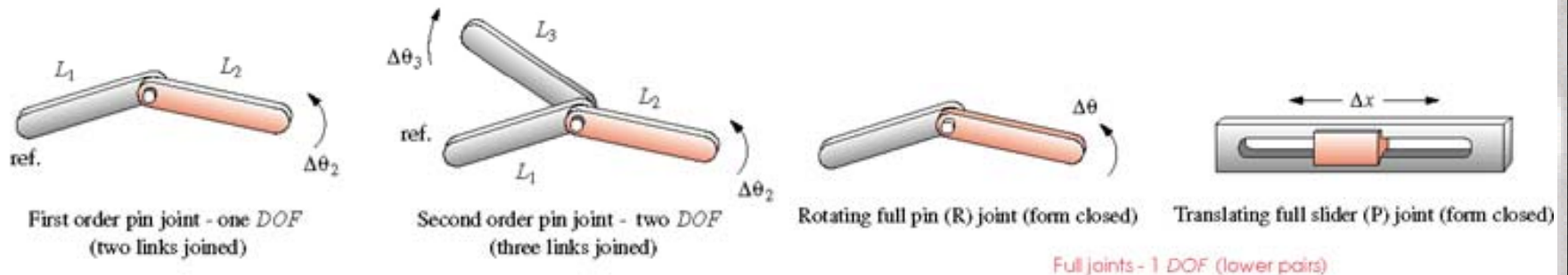
The Six Lower Pairs		
Name (Symbol)	DOF	Contains
Revolute (R) joint—1 DOF	1	R
Prismatic (P) joint—1 DOF	1	P
Helical (H) joint—1 DOF	1	RP
Cylindric (C) joint—2 DOF	2	RP
Spherical (S) joint—3 DOF	3	RRR
Planar (F) joint—3 DOF	3	RPP

- Prismatic(P) قابل استفاده اند.
- سایر اتصالات توسط این دو ساخته شده
- و در مکانیزمهای فضائی استفاده
- می شوند.

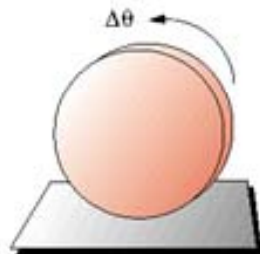


فصل ۳ آشنائی با انواع مکانیزمها

- روش مفیدتری برای طبقه بندی اتصالات بر حسب درجه آزادی می باشد.

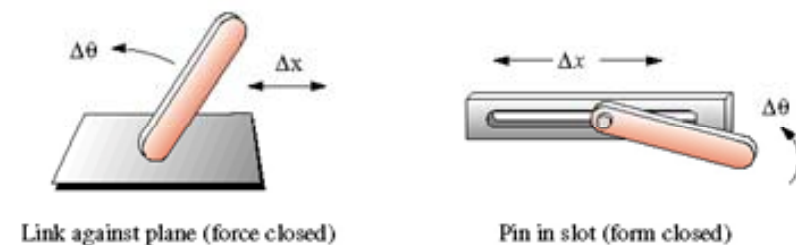


The order of a joint is one less than the number of links joined



May roll, slide, or roll-slide, depending on friction

Planar pure-roll (R), pure-slide (P), or roll-slide (RP) joint - 1 or 2 *DOF* (higher pair)



Roll-slide (half or RP) joints - 2 *DOF* (higher pairs)



فصل ۳ آشنائی با انواع مکانیزمها

• نکاتی دیگر

- اتصال با دو درجه آزادی، بطور همزمان امکان دو حرکت نسبی مستقل فراهم می کنند.

• full joint ↔ half joint

• roll-slide

• pure rolling joint

• pure sliding joint

- مرتبه اتصال

• تعداد بازوهای متصل شده منهای یک واحد

- **Crank**: بازوئی که دوران کامل دارد و به زمین پین شده است

- **Coupler**: بازوئی که حرکت توام خطی-دورانی دارد و به زمین پین نشده است

- **Ground**: زمین هر بازوئی که نسب به قاب اصلی ثابت شده باشد.





فصل ۳ آشنائی با انواع مکانیزمها

• تعیین درجه آزادی (DOF) یا Mobility

- جهت تحلیل مجموعه ای از بازوها و اتصالات که برای حل یک مسئله پیشنهاد شده است ابتدا باید درجه آزادی آن تعیین گردد.
- DOF یا Mobility یک سیستم به صورت زیر نیز تعریف می گردد:
 - تعداد ورودیهای مورد نیاز برای ایجاد خروجی قابل پیش بینی
 - تعداد مختصات مستقل مورد نیاز برای تعیین موقعیت سیستم
- درجه آزادی مکانیزمهای صفحه ای

$$\text{معادله Greubler } M = 3(L-1) - 2J_1 - 3J_2$$

$M = \text{DOF or Mobility}$

$L =$ تعداد بازوها

$J_1 =$ تعداد اتصالاتی که دو درجه آزادی می گیرند

$J_2 =$ تعداد اتصالاتی که یک درجه آزادی می گیرند

❖ صحت رابطه فوق را برای مکانیزم چهار میل و لغزنده-لنگ بررسی نمایید.

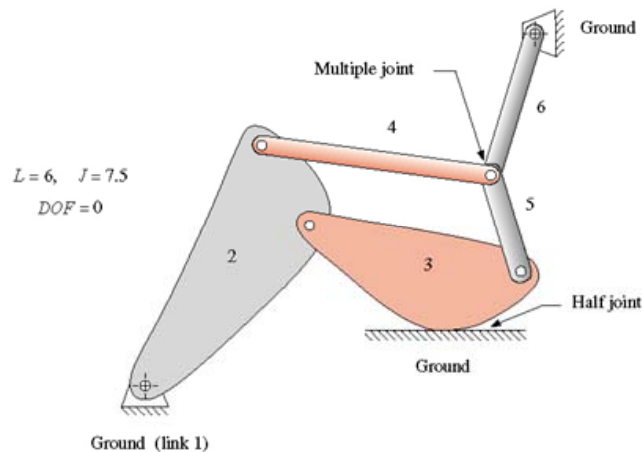
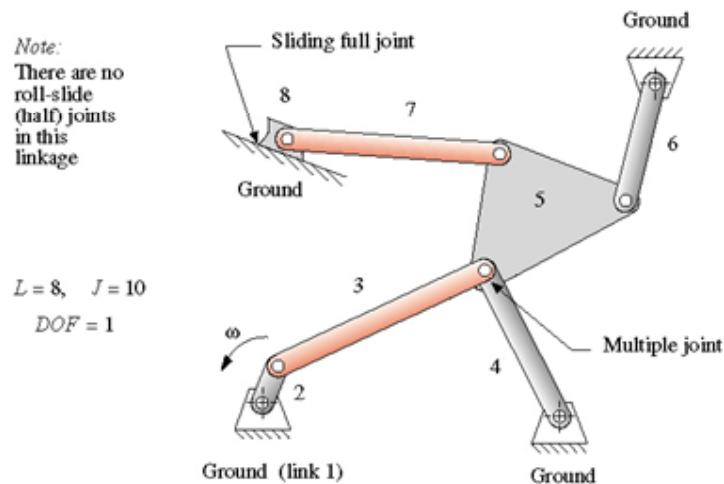
❖ صحت رابطه فوق را اثبات نمایید؟





فصل ۳ آشنائی با انواع مکانیزمها

انواع اتصالات در مکانیزم ها
اتصال کامل
اتصال چندگانه



اتصال half
اتصال لغزشی - غلتشی

❖ توجه نمایید که در رابطه اطلاعاتی در مورد اندازه یا شکل داده نشده است.



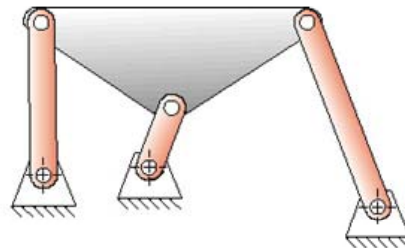


فصل ۳ آشنائی با انواع مکانیزمها

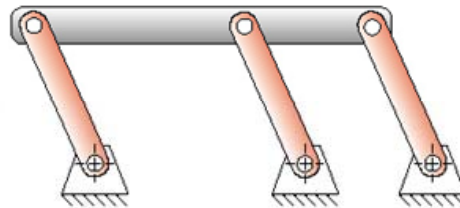
• پارادوکس

– از آنجائیکه معادله **Greubler** در ارتباط با اندازه و شکل نیست، می تواند نتایج گمراه کننده ای در ترکیبهای هندسی یکسان داشته باشد به مثالهای زیر توجه نمایید.

The E-quintet with $DOF = 0$
—agrees with Gruebler equation

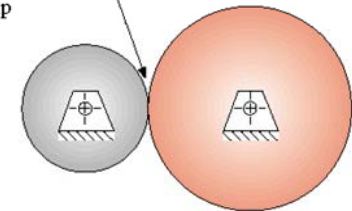


The E-quintet with $DOF = 1$
—disagrees with Gruebler equation
due to unique geometry



Rolling cylinders with $DOF = 1$
—disagrees with Gruebler equation
which predicts $DOF = 0$

Full joint -
pure rolling
no slip





فصل ۳ آشنائی با انواع مکانیزمها

• تبدیل مکانیزمها (linkage transform)

- قواعد تبدیل زنجیره های سینماتیکی صفحه ای

- (1) اتصال نوع R در یک حلقه را می توان را می توان با اتصال نوع P جایگزین کرد و تغییری در DOF مکانیزم بوجود نمی آید، البته به شرط اینکه حداقل دو اتصال نوع R در حلقه باقی بماند.
- (2) هر اتصال کامل را می توان با اتصال نیمه ($half$) جایگزین کرد. این تبدیل به DOF یک واحد اضافه می کند.
- (3) حذف یک بازو از DOF یک واحد کم می کند.
- (4) ترکیب قواعد ۲ و ۳
- (5) می توان یک گره از تعداد گره های عضو $ternary$ یا بالاتر را حذف نمود و یک اتصال چندگانه ایجاد کرد. این عمل درجه آزادی را تغییر نمی دهد.
- (6) در صورتی که یک عضو چند گرهی کاملاً حذف گردد و یک اتصال چندگانه ایجاد شود، از DOF یک واحد کاسته می شود.



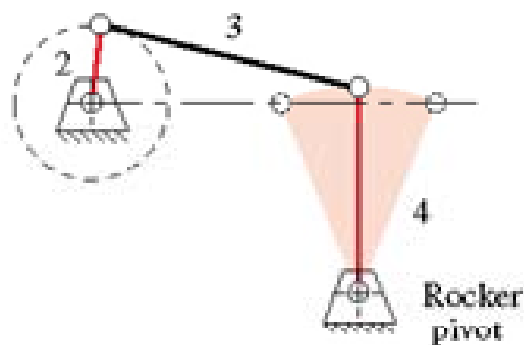


فصل ۳ آشنائی با انواع مکانیزمها

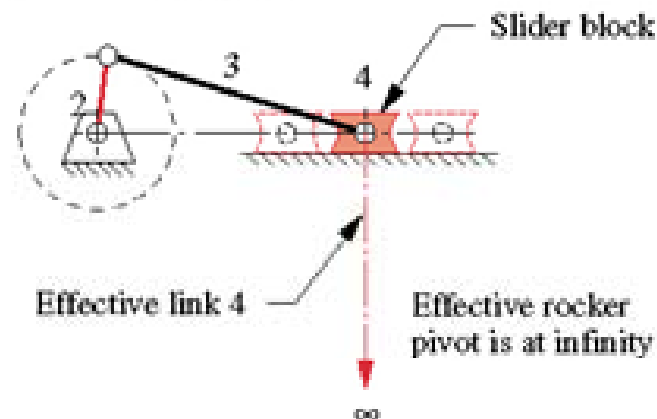
• کاربرد قاعده ۱

- تبدیل مکانیزم چهارمیله crank-rocker به یک لغزنده-لنگ slider-crank
- بازوی ۴ تبدیل به یک بلوک لغزنده
- در واقع این تبدیل معادل با افزایش طول rocker به حدی است که حرکت اتصال بین بازو ۳ و ۴ از دایره ای به خطی تبدیل شود.
- بنابر این لغزنده معادل با یک rocker با طول بسیار بلند است که در راستای عمود بر لغزش در بینهایت پین شده است.

Grashof crank-rocker



Grashof slider-crank

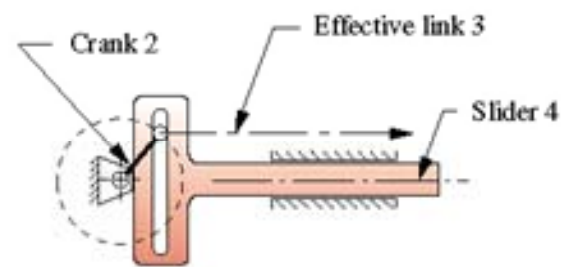
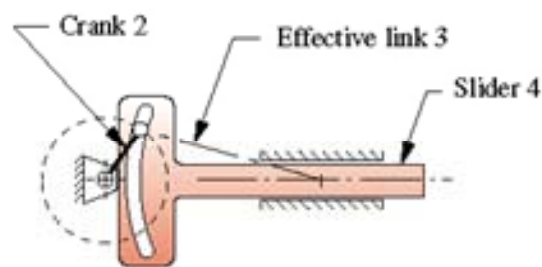




فصل ۳ آشنائی با انواع مکانیزمها

• کاربرد قاعده ۴

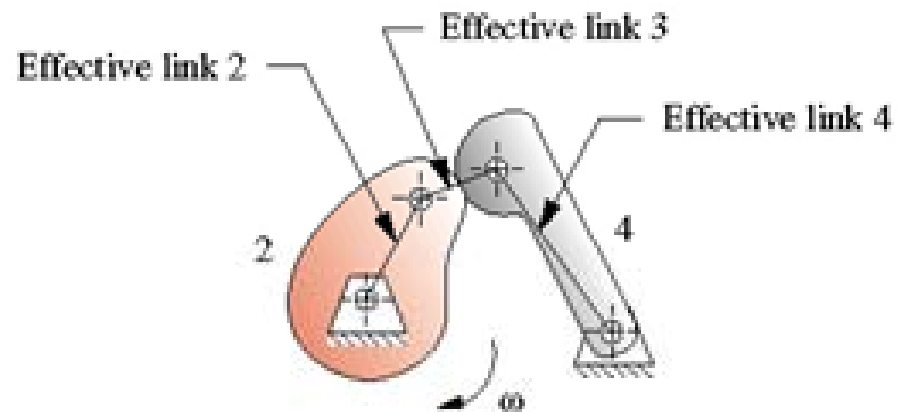
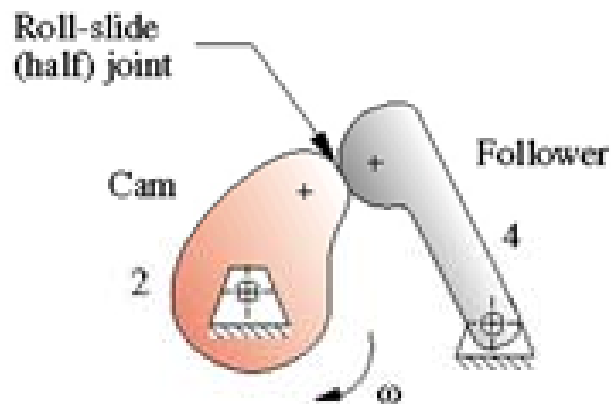
- جایگزینی coupler با یک half joint
- **حالت اول:** حرکت لغزنده یکسان باقی بماند، عضو ۳ مجازی عمود بر مماس شیار است و همیشه در موقعیت coupler اولیه قرار گرفته است.
- **حالت دوم:** شیار مستقیم و عمود بر راستای لغزش است. عضو ۳ مجازی در بینهایت پین شده است (Scotch Yoke).



فصل ۳ آشنائی با انواع مکانیزمها

• کاربرد قاعده ۴

- تبدیل مکانیزم چهار میله به بادامک-پیرو، بازو ۳ حذف شده و یا joint half بین بازوهای ۲ و ۴ قرار گرفته و مکانیزم جدید یک DOF دارد.
- در واقع بادامک-پیرو معادل مکانیزم یک چهار میله است که coupler مجازی آن طول متغیر دارد.



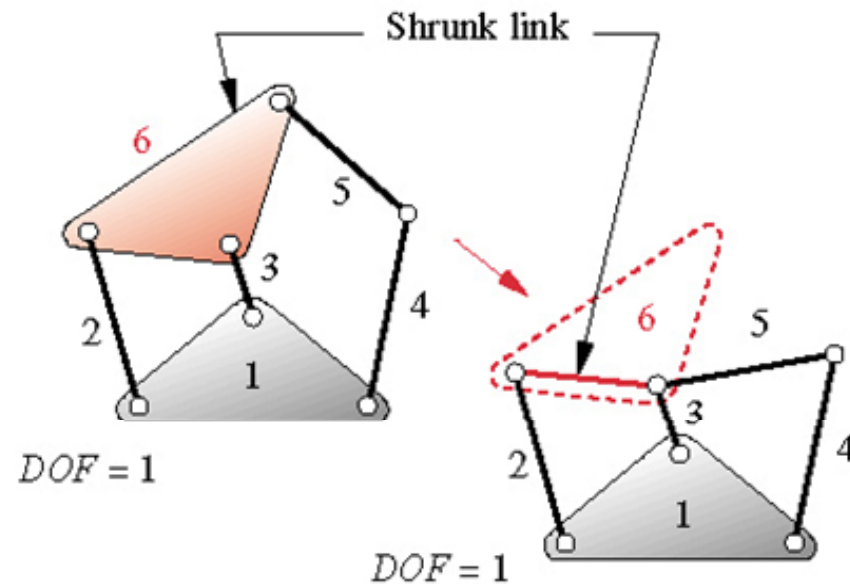


فصل ۳ آشنائی با انواع مکانیزمها

Stephenson's six-bar chain •

- با استفاده از قاعده ۵، بازو ۶ حذف شده و یک اتصال چندگانه ایجاد شده است و مکانیزم هنوز یک درجه آزادی دارد.

Stephen's six-bar chain



Partial shrinkage of higher link
retains original DOF



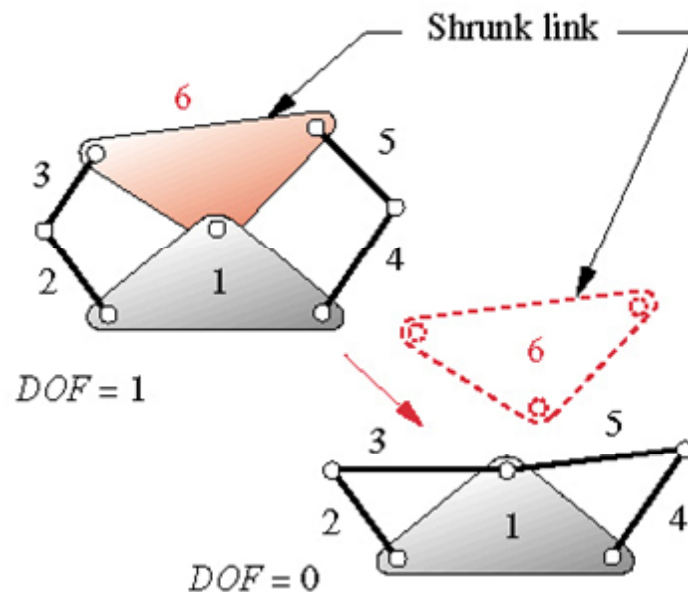
فصل ۳ آشنائی با انواع مکانیزمها



Watt's six-bar chain •

- یک بازو چند گرهی کاملاً حذف شده و یک اتصال چند گرهی ایجاد شده است (قاعده ۶). در نتیجه از DOF یک واحد کاسته شده است.

Watt's six-bar chain



Complete shrinkage of higher link reduces DOF by one





فصل ۳ آشنائی با انواع مکانیزمها

• حرکت منقطع (Intermittent Motion)

- یک سری حرکت و توقف

Dwell



a period in which output link remains stationary while input link continues to move

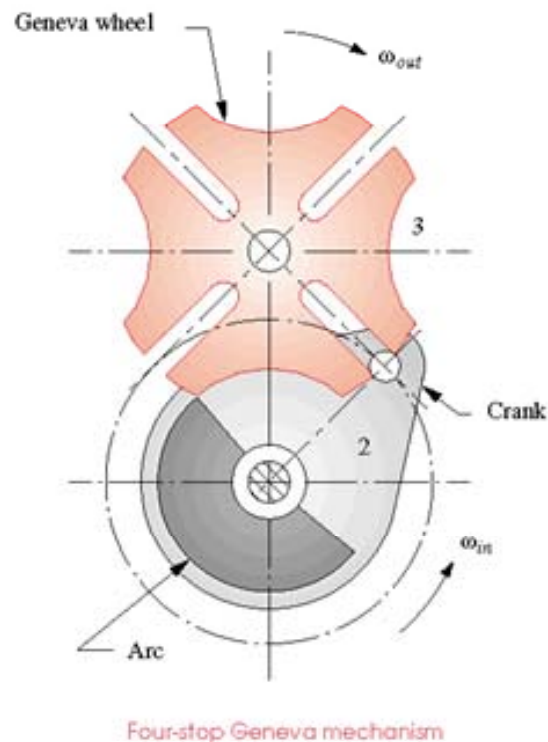
در خیلی از کاربردها حرکت منقطع مورد نیاز است. به عنوان مثال می توان به مکانیزم بادامک- پیرو اشاره کرد که در فصل ۸ طراحی بادامک ها بررسی خواهد شد.



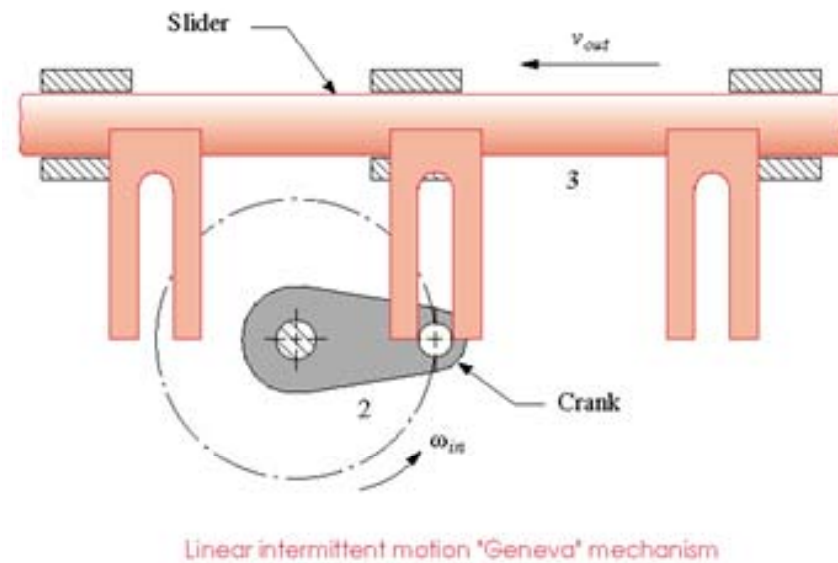
فصل ۳ آشنائی با انواع مکانیزمها

Geneva Mechanism •

- ورودی معمولاً توسط یک موتور با سرعت دورانی ثابت تامین می شود.



دورانی



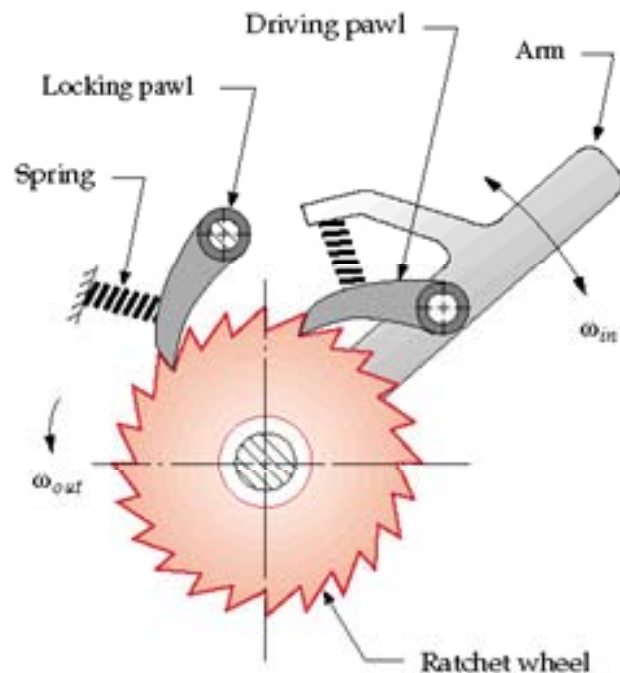
خطی



فصل ۳ آشنائی با انواع مکانیزمها

Ratchet and Pawl •

- Arm حول مرکز Ratchet Wheel پین شده است و حرکت نوسانی می تواند داشته باشد.
- Pawl محرک Ratchet Wheel را در جهت خلاف عقربه های ساعت به حرکت در آورده و در جهت دیگر مکانیزم قفل است.



Ratchet and pawl mechanism

- Locking Pawl از حرکت در جهت عکس جلوگیری می کند.

- این مکانیزم در موارد ذیل استفاده می شود:

- آچار جغجغه
- وینچ
- سنگ تخت





فصل ۳ آشنائی با انواع مکانیزمها

• شرط Grashof

- مکانیزم چهار میله

- ساده ترین مکانیزم تک درجه آزادی با اتصال پین می باشد.
- معادلهای متعددی دارد: لغزنده لنگ، بادامک پیرو و ..
- متداولترین مکانیزم در ماشینهاست
- انواع حرکات مورد نظر را می تواند تولید کند.

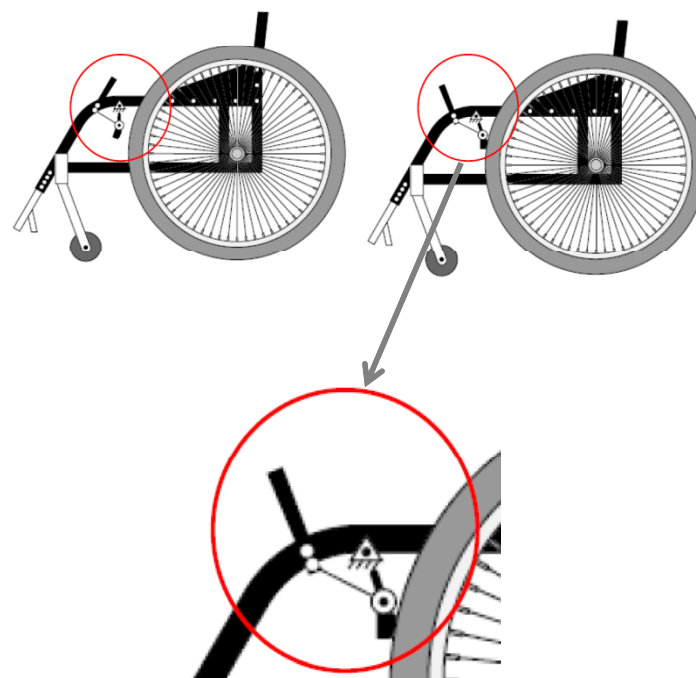
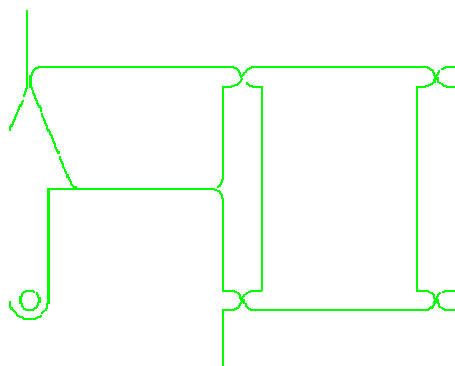
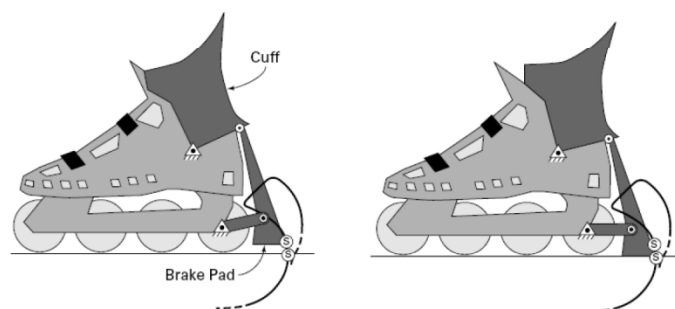
Simplicity is one mark of good design

Among the first solution to motion control problems





فصل ۳ آشنائی با انواع مکانیزمها





فصل ۳ آشنائی با انواع مکانیزمها

- شرط Grashof رابطه بسیار ساده ای که رفتار دورانی (rotate-ability) مکانیزم چهار میله را پیش بینی می کند.

S = طول کوتاهترین بازو

L = طول بلندترین بازو

P = طول بازوی دیگر

Q = طول بازوی باقیمانده

اگر $S+L \leq P+Q$

مکانیزم Grashof نامیده شده و حداقل یک بازو دوران کامل نسبت به زمین دارد.
به آن زنجیره سینماتیکی I class نیز اطلاق می شود.

اگر $P+Q > S+L$

مکانیزم Non-Grashof نامیده شده و هیچ بازویی دوران کامل نسبت به سایر بازوها ندارد.
به آن زنجیره سینماتیکی II class اطلاق می شود.

توجه نمایید که قضایاء فوق بدون در نظر گرفتن ترتیب بازوها در مکانیزم است.

حرکت چهار میله بستگی به شرط Grashof و معکوس (inversion) انتخاب شده دارد
که معمولاً نسبت به کوتاه ترین بازو تعریف می شود.





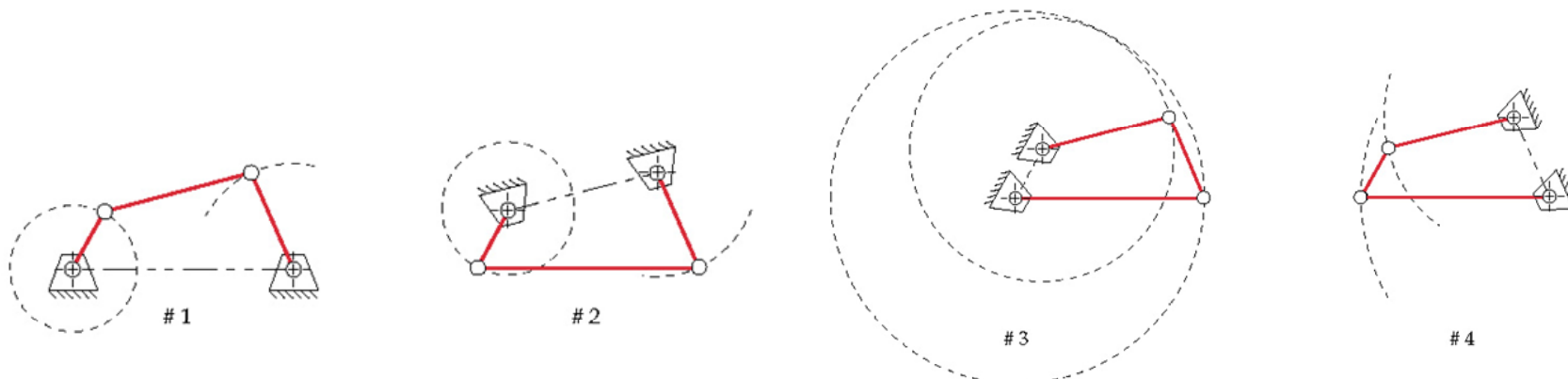
فصل ۳ آشنائی با انواع مکانیزمها

• حالت I Class و $S+L < P+Q$

- بازوی ثابت مجاور کوتاه ترین بازوست، در این حالت کوتاه ترین بازو دوران کامل داشته و بازوی دیگر که به زمین پین شده نوسان دارد.
- زمین کوتاه ترین بازوست، چهار میله **double-crank** است. دو بازو پین شده به زمین دوران کامل داشته

❖ در این حالت حرکت **coupler** چگونه است؟

- زمین مقابل کوتاهترین بازو قرار گیرد، یک **Grashof double-rocker** ایجاد می شود. دو بازوی پین شده به زمین نوسان داشته و تنها بازو **coupler** دوران کامل دارد.

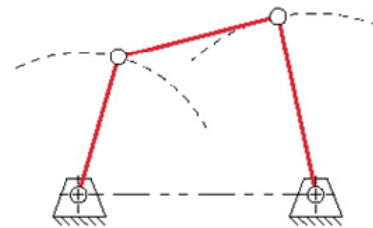




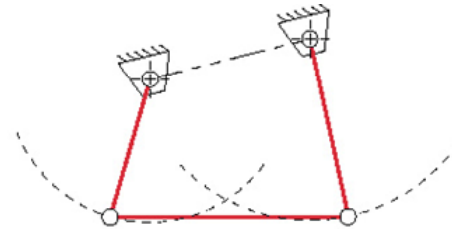
فصل ۳ آشنائی با انواع مکانیزمها

• حالت Class II و $S+L>P+Q$

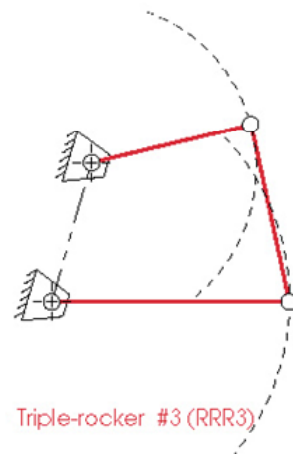
- همه معکوسها Triple Rocker خواهند بود و هیچ بازویی دوران کامل نخواهد داشت.



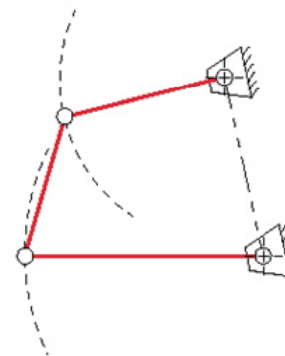
Triple-rocker #1 (RRR1)



Triple-rocker #2 (RRR2)



Triple-rocker #3 (RRR3)



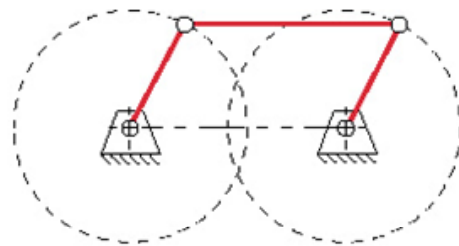
Triple-rocker #4 (RRR4)



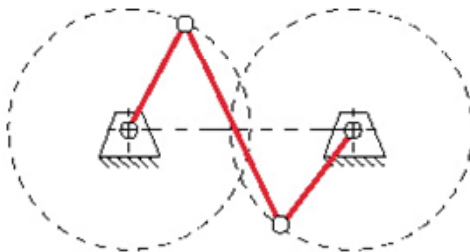
فصل ۳ آشنائی با انواع مکانیزمها

• حالت Class III و $S+L=P+Q$

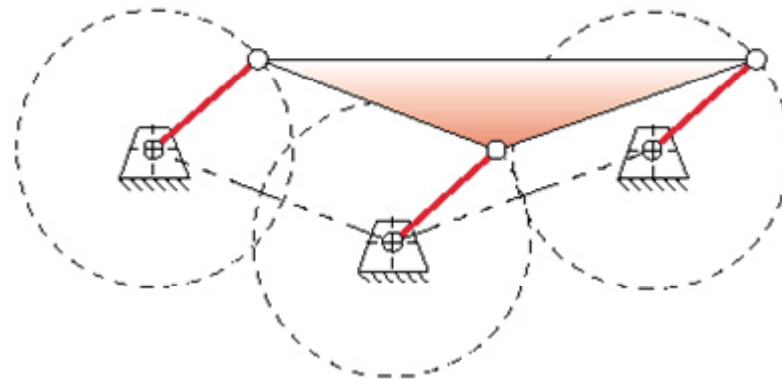
- که به آن زنجیره سینماتیکی special-case Grashof یا Class III گفته می شود.
- تمام معکوسها double-cranks یا crank-rockers بوده و دارای دو نقطه تبدیل در یک دوران می باشند، وقتی که بازوها همراستا می شوند.
- در این نقطه رفتار خروجی غیرقابل پیش بینی است.



Parallelogram form



Antiparallelogram form



Double-parallelogram linkage gives parallel motion (pure curvilinear translation) to coupler and also carries through the change points



فصل ۳ آشنائی با انواع مکانیزمها

• طبقه بندی مکانیزمهای چهار میله

- روش طبقه بندی برای پیش بینی نوع حرکت مکانیزم چهارمیله بر مبنای مقادیر نسبت بازوها توسط آقای **Barker** پیشنهاد شده است.
- حرکت دورانی چهارمیله مستقل از مقادیر مطلق طول بازوها می باشد. لذا می توان طول بازوها را به طول بازو دوم تقسیم کرد و نسبتهای بدون بعد نرمال شده بدست آورد:

$$\lambda_1 = r_1/r_2 \quad \lambda_3 = r_3/r_2 \quad \lambda_4 = r_4/r_2$$

- برحسب نوع حرکت بازو به آن حرفی اطلاق می گردد:

C = crank

R = rocker

G = Grashof

S = special case Grashof



فصل ۳ آشنائی با انواع مکانیزمها



Barker's Complete Classification of Planar Fourbar Mechanisms

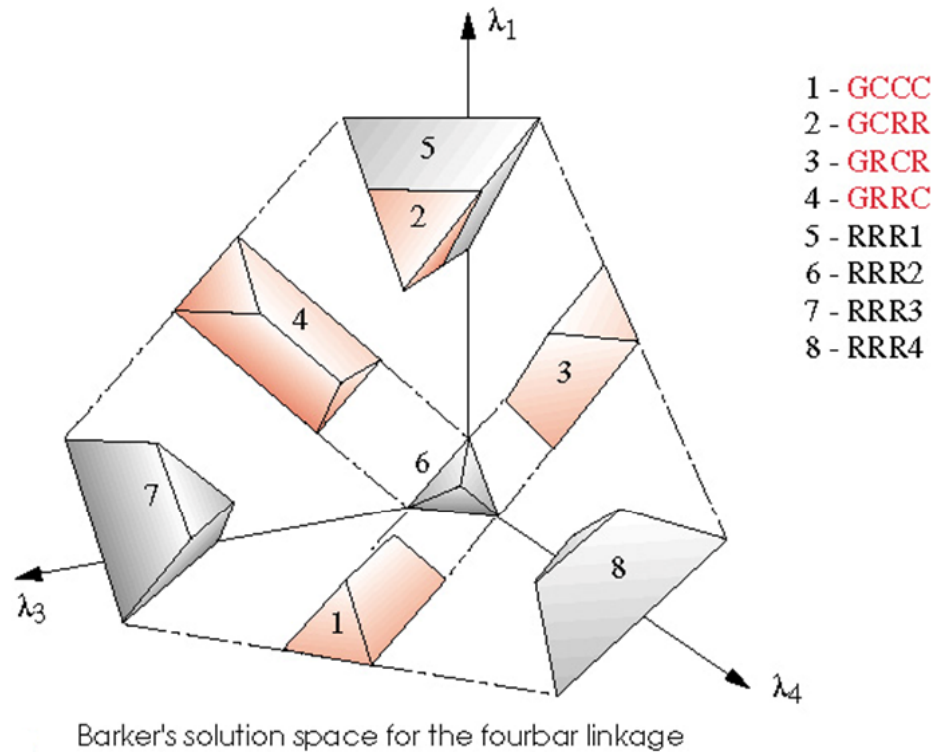
Adapted from ref. (10). s = shortest link, l = longest link, Gxxx = Grashof, RRRx = non-Grashof, Sxx = Special case

Type	$s + l$ vs. $p + q$	Inversion	Class	Barker's Designation	Code	Also Known As
1	<	$L_1 = s = \text{ground}$	I-1	Grashof crank-crank-crank	GCCC	double-crank
2	<	$L_2 = s = \text{input}$	I-2	Grashof crank-rocker-rocker	GCRR	crank-rocker
3	<	$L_3 = s = \text{coupler}$	I-3	Grashof rocker-crank-rocker	GRCR	double-rocker
4	<	$L_4 = s = \text{output}$	I-4	Grashof rocker-rocker-crank	GRRC	rocker-crank
5	>	$L_1 = l = \text{ground}$	II-1	Class 1 rocker-rocker-rocker	RRR1	triple-rocker
6	>	$L_2 = l = \text{input}$	II-2	Class 2 rocker-rocker-rocker	RRR2	triple-rocker
7	>	$L_3 = l = \text{coupler}$	II-3	Class 3 rocker-rocker-rocker	RRR3	triple-rocker
8	>	$L_4 = l = \text{output}$	II-4	Class 4 rocker-rocker-rocker	RRR4	triple-rocker
9	=	$L_1 = s = \text{ground}$	III-1	change point crank-crank-crank	SCCC	SC* double -crank
10	=	$L_2 = s = \text{input}$	III-2	change point crank-rocker-rocker	SCRR	SC crank-rocker
11	=	$L_3 = s = \text{coupler}$	III-3	change point rocker-crank-rocker	SRCR	SC double-rocker
12	=	$L_4 = s = \text{output}$	III-4	change point rocker-rocker-crank	SRRC	SC rocker-crank
13	=	two equal pairs	III-5	double change point	S2X	parallelogram or deltoid
14	=	$L_1 = L_2 = L_3 = L_4$	III-6	triple change point	S3X	square

* SC = special case.



فصل ۳ آشنائی با انواع مکانیزمها





فصل ۳ آشنائی با انواع مکانیزمها

• تمرینات و مسائل فصل ۳

1) تعداد درجات آزادی مفاصل زیر را با رسم شکل بیان نمایید.

(a) Knee زانو

(b) Ankle آرنج

(c) Shoulder شانه

2) ابتدا سه نوع از وسایل متداول زیر را پیدا کرده سپس دیاگرام سینماتیکی آنها را رسم نموده و تعداد درجات آزادی را بیان نمایید.

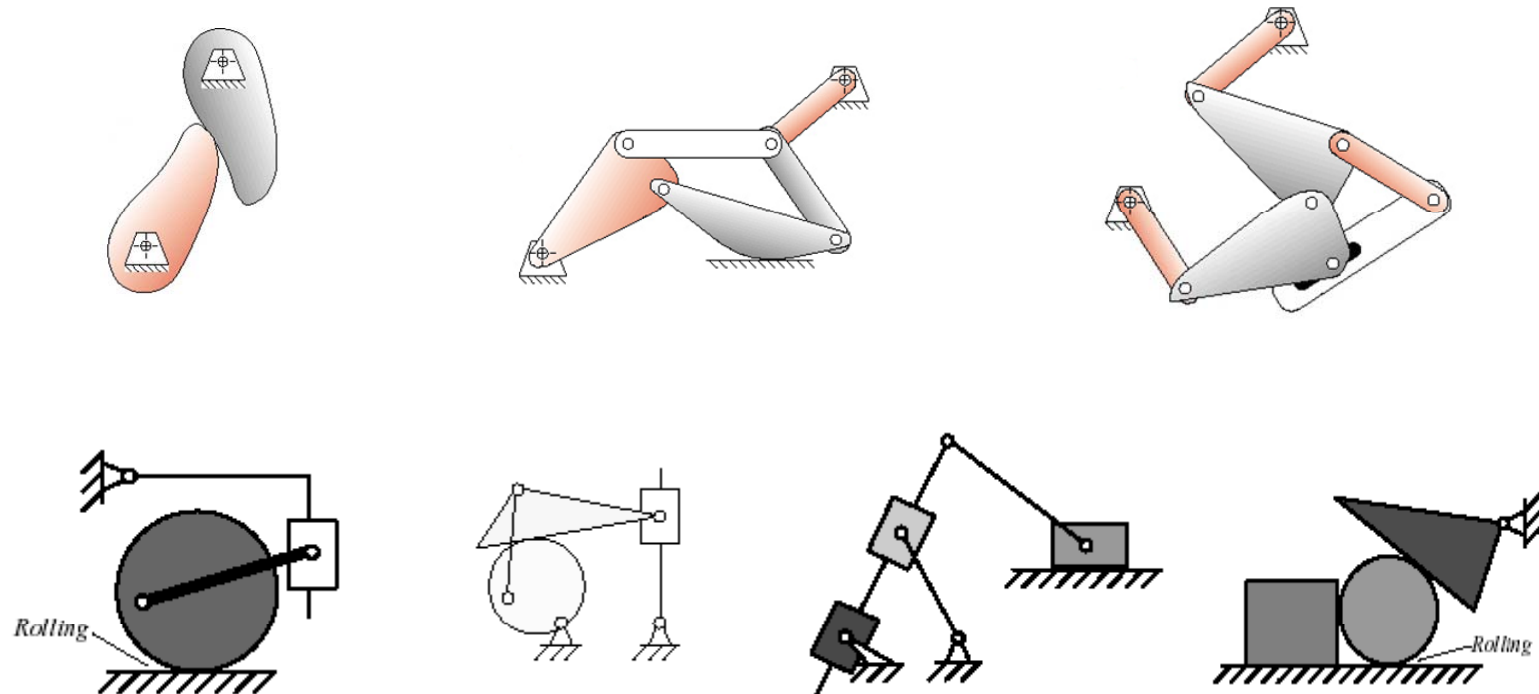
(a) Automobile hood hinge mechanism

(b) Folding ironing board



فصل ۳ آشنائی با انواع مکانیزمها

(۳) درجه آزادی مکانیزمهای نشان داده شده را بدست آورید:



امتحان میان ترم ۸۲/۹/۹/



فصل ۳ آشنائی با انواع مکانیزمها





فصل ۳ آشنائی با انواع مکانیزمها





فصل ۳ آشنائی با انواع مکانیزمها





فصل ۳ آشنائی با انواع مکانیزمها





فصل ۳ آشنائی با انواع مکانیزمها

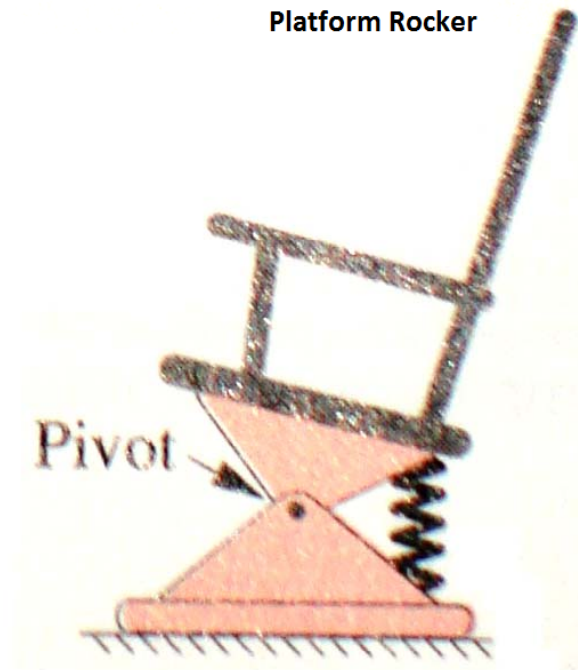




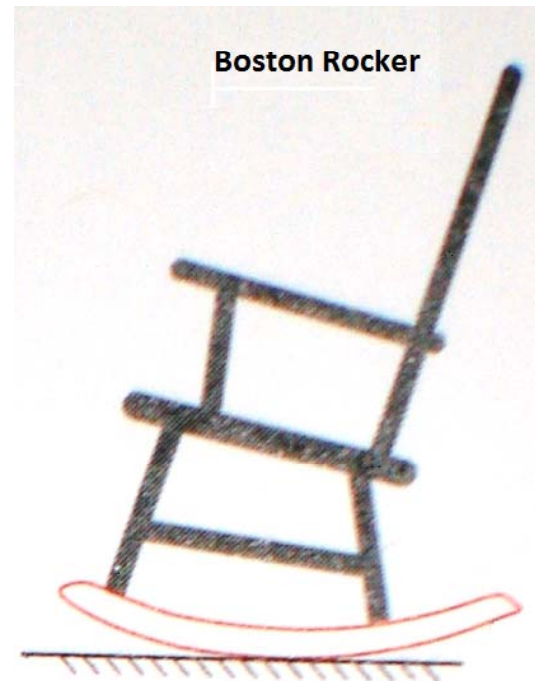
فصل ۴ مراکز آنی

Instantaneous center

Platform Rocker



Boston Rocker





فصل ۴ مراکز آنی

- در فصل بعدی چند روش تعیین سرعت اجزاء مکانیزمها ارائه خواهد شد.
- یکی از این روشها نیاز به تعریف **مراکز آنی** دارد.
- اهمیت سرعت
 - زمان انجام کار به آن بستگی دارد.
 - روی توان مصرفی موثر است.
 - برای توان معین نیروها و تنشهای داخلی یک مکانیزم را میتوان با افزایش سرعت کاهش داد.
 - اصطکاک و سایش به اجزاء ماشین به سرعت بستگی دارد.
 - علاوه بر این قبل از تحلیل شتاب اجزاء یک مکانیزم نیاز است که سرعتهای آنی اجزاء تعیین شود.
- مقادیر سرعتهای اجزاء یک مکانیزم بصورت لحظه ای تعیین می شوند.
- هربازوی که حرکت صفحه ای دارد، در آن لحظه حول یک نقطه دوران می کند.
- برخی از بازوها دارای مراکز دوران ثابت می باشند.
- برای برخی دیگر این مراکز در حال حرکت هستند.
- لغت مرکز آنی (Instant Center) به مرکز دوران یک جسم در یک لحظه خاص اطلاق می شود.





فصل ۴ مراکز آنی

• تعریف مرکز آنی

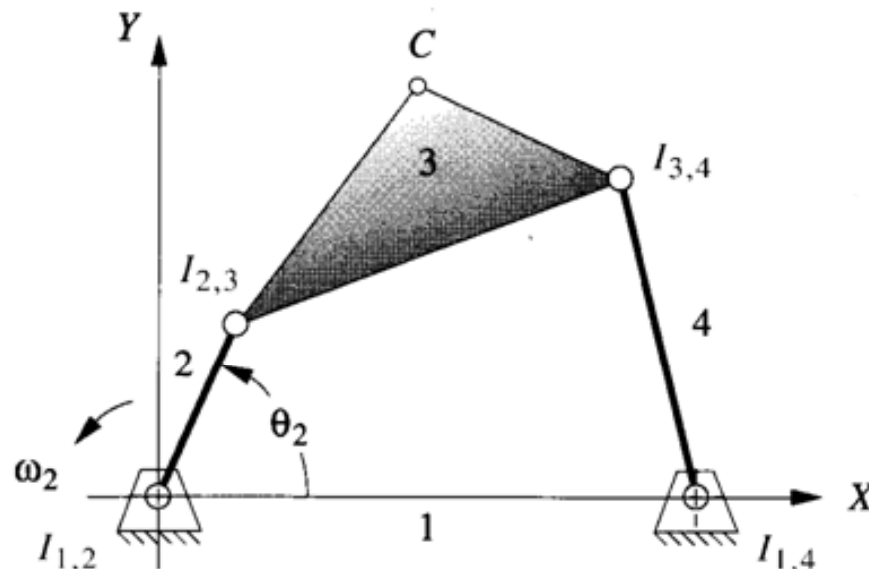
- نقطه ای متعلق به یک جسم که جسم دیگر حول آن نقطه بصورت لحظه ای یا دائم دوران می کند.
- نقطه ای مشترک بین دو جسم که دارای سرعت خطی یکسان است (اندازه و جهت سرعت یکسان).
- هردو بیان فوق مهم است، زیرا از آنها در تعیین مراکز آنی استفاده خواهد شد.



فصل ۴ مراکز آنی

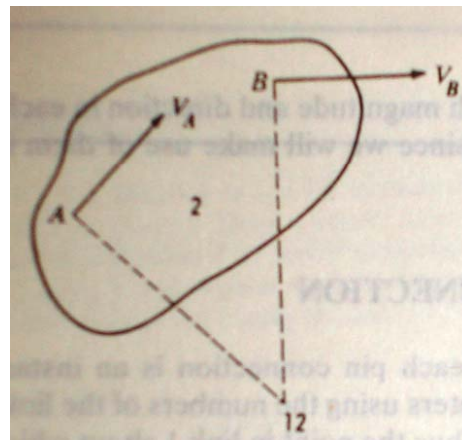
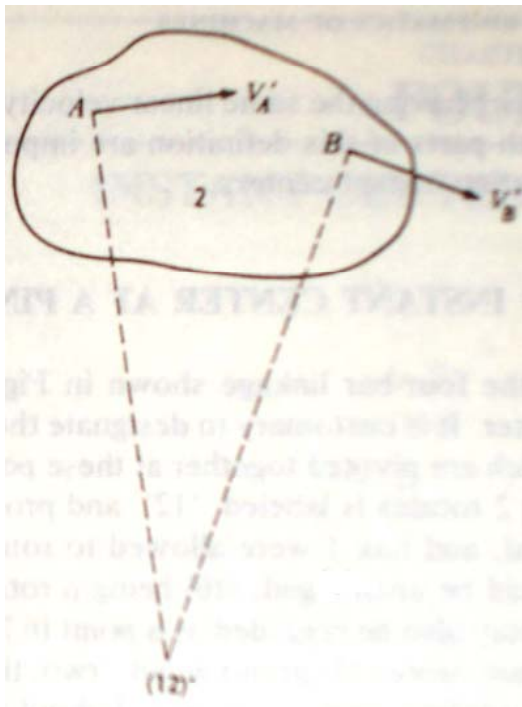
• مرکز آنی در اتصال پین Revolute Joint

- اتصال پین در واقع نقطه ای مشترک بین دو جسم که دارای سرعت خطی یکسان است. لذا هر اتصال پین یک مرکز آنی است.
- مرسوم است که مرکز آنی توسط شماره اجزاء آن مشخص شود.
- در مکانیزم چهار میل:
 - مراکز آنی ثابت $I_{1,2}$, $I_{1,4}$
 - مراکز آنی متحرک $I_{2,3}$, $I_{3,4}$



فصل ۴ مراکز آنی

- مرکز آنی برای جسمی که راستای سرعت دو نقطه آن معلوم است:
 - هر دو جسمی که دارای حرکت نسبی باشند دارای مرکز آنی هستند.
 - جسم ۱ صفحه کاغذ و ثابت است.
 - راستای حرکت دو نقطه از جسم ۲ معین است.
 - نقطه تلاقی خطوط عمود بر راستای سرعت در نقاط A و B مرکز آنی را مشخص می کند.
 - اگر دو عمود در یک راستا قرار گیرند، چگونه مرکز آنی بدست می آید؟

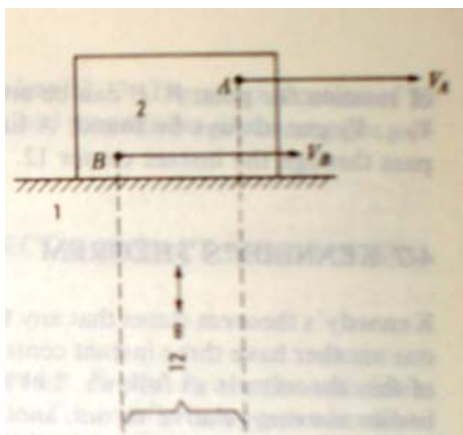
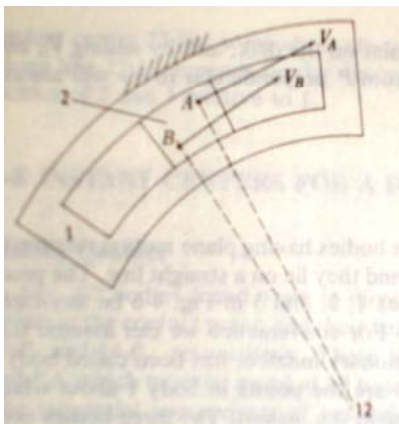




فصل ۴ مراکز آنی



- مرکز آنی برای جسم لغزشی (Sliding Body)
- شیار دایره ای



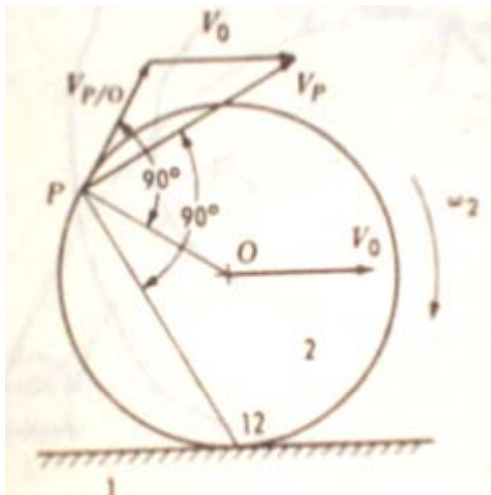
- لغزنده روی سطح
- حرکت مستقیم الخط حالت خاصی از دوران است.
- مرکز دوران در راستای عمود بر حرکت در بینهایت قرار گرفته است.



فصل ۴ مراکز آنی

• مرکز آنی برای جسم غلتشی

- دیسک ۲ بدون لغزش روی جسم ۱ می غلتد.
- جسم ۱ می تواند ساکن یا متحرک باشد.
- نقطه تماس مرکز آنی اجسام ۱ و ۲ است.
- مرکز آنی ۱۲ متعلق به جسم ۱ است که جسم ۲ در لحظه نشان داده شده حول آن دوران می کند.
- سرعت نقطه ای روی محیط دیسک V_p



$$V_p = V_o + V_{p/o}$$

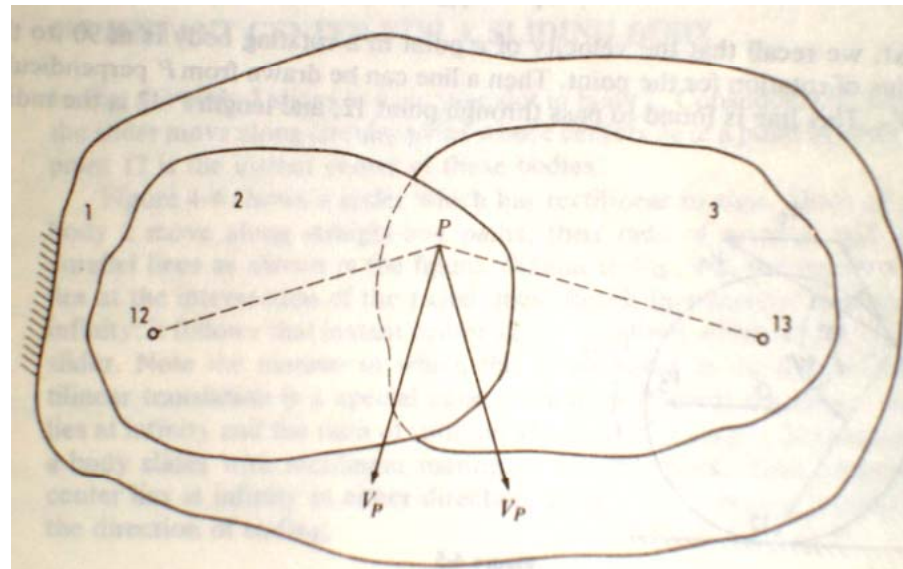
- خطی که در نقطه P عمود بر V_p رسم شود از نقطه 12 خواهد گذشت.

فصل ۴ مراکز آنی



• تئوری کندی (Kennedy's Theorem)

*Any three bodies in plane motion will have exactly three instant centers, and **they will lie on the same straight line.***



آیا در راستای I_{12} و I_{13} نقطه ای مشترک بین ۲ و ۳ می توان یافت که سرعت یکسانی داشته باشد.





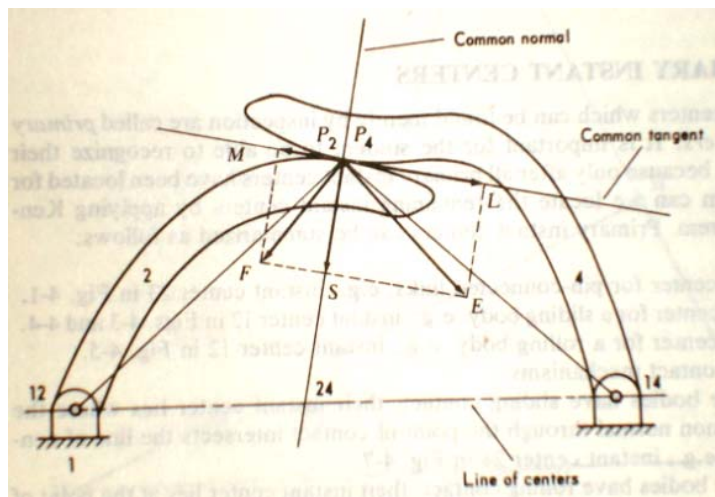
فصل ۴ مراکز آنی



- مراکز آنی مکانیزم تماس مستقیم
(direct contact mechanism)

– تماس لغزشی

- حرکت نسبی دو جسم ۲ و ۴ در نقطه تماس در امتداد مماس خواهد بود.
- بنابراین مرکز آنی حرکت نسبی آنها در امتداد عمود مشترک در نقطه تماس خواهد بود.
- از طرف دیگر تئوری کندی می گوید که مرکز آنی ۲۴ روی خط ۱۲-۱۴ قرار گرفته است



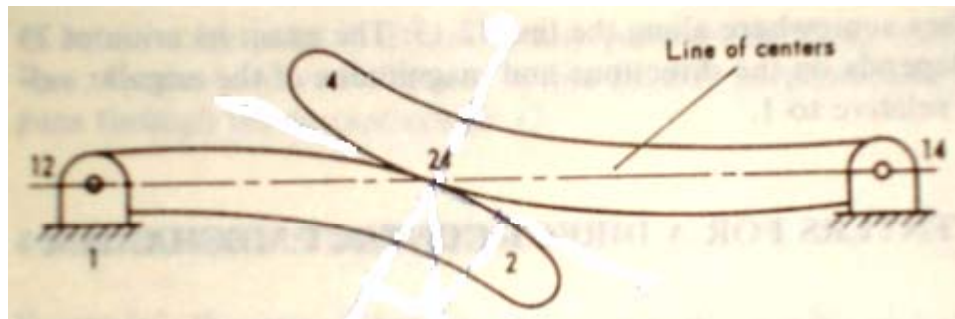
فصل ۴ مراکز آنی



• مراکز آنی مکانیزم تماس مستقیم (direct contact mechanism)

– تماس غلتشی

- در صورتی که نقطه تماس در روی خط مرکز قرار گیرد و سرعت نقاط P_2 و P_4 برابر خواهد بود.
- از آنجائیکه مرکز آنی نقطه ای مشترک بین دو جسم که دارای سرعت یکسان باشد، نقطه تماس مرکز آنی خواهد بود.





فصل ۴ مراکز آنی

• تعداد مراکز آنی یک مکانیزم

- هر دوجسمی از مکانیزم که حرکت نسبی داشته باشند دارای یک مرکز آنی مشترک می باشند.
- بنابر این در یک مکانیزم تعداد مراکز آنی همه ترکیبات ممکن ۲ عضو از تعداد کل اعضا می باشد:

$$C = \frac{n(n-1)}{2}$$





فصل ۴ مراکز آنی

• مراکز آنی اولیه

- مراکز آنی که فقط با بررسی ابتدائی مکانیزم بدست می آیند.
- بعد از تعیین کلیه مراکز آنی اولیه می توان با استفاده از تئوری کندی سایر مراکز آنی مکانیزم را بدست آورد.

– مراکز آنی اولیه بصورت زیر خلاصه می شوند:

- اجسامی که با اتصال پین (Revolute Joint) متصل شده اند.
- مرکز آنی برای اجسام لغزشی (Prismatic Joint)
- مرکز آنی برای اجسام غلتشی (Rolling Joint)
- مکانیزم تماس مستقیم (Direct Contact Mechanism)
- اجسامی که تماس لغزشی دارند (Rolling).
- اجسامی که تماس غلتشی دارند (Sliding).

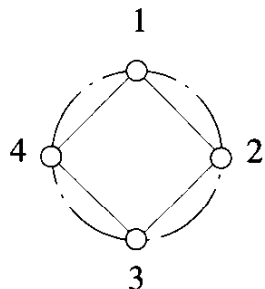


فصل ۴ مراکز آنی

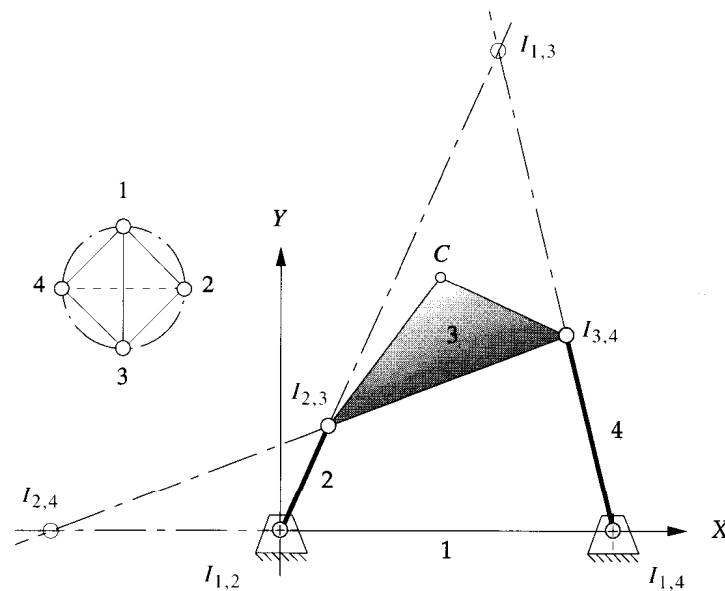
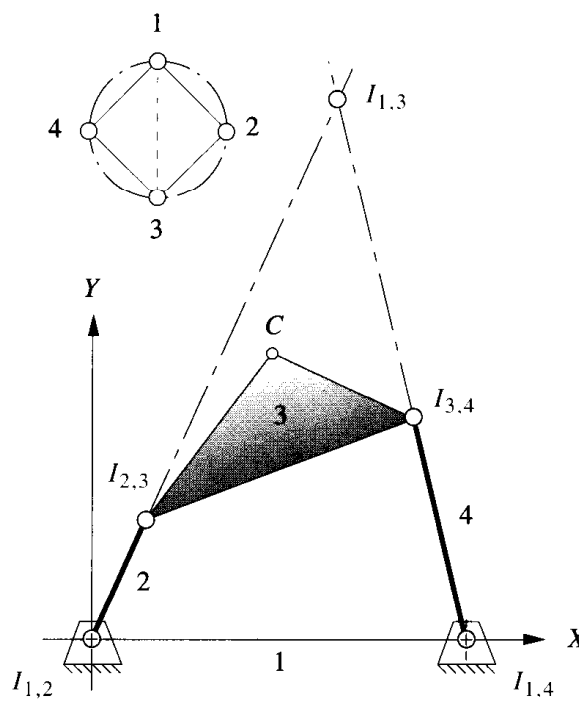


• روش دیاگرام دایره ای

- در یک مکانیزم ابتدا کلیه مرکز آنی ابتدائی معین می گردند
- سپس با استفاده از تئوری کندی سایر مراکز بدست می آیند
- دیاگرام دایره ای روش ساده ای برای دنبال کردن و تعیین سایر مراکز آنی باقیمانده است.



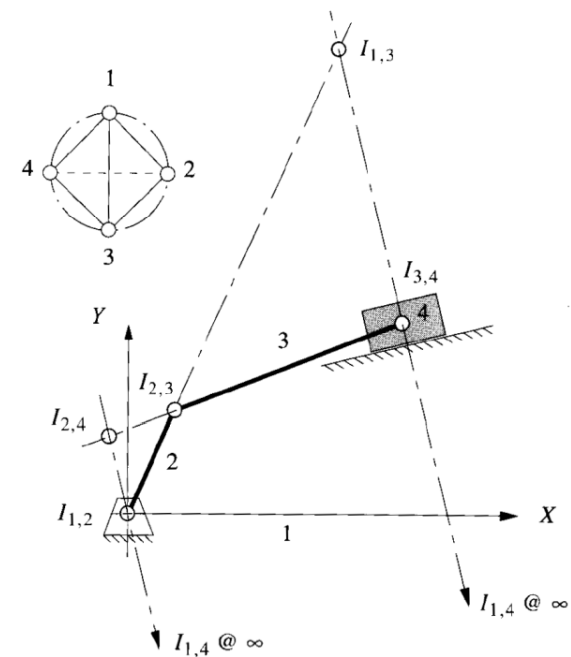
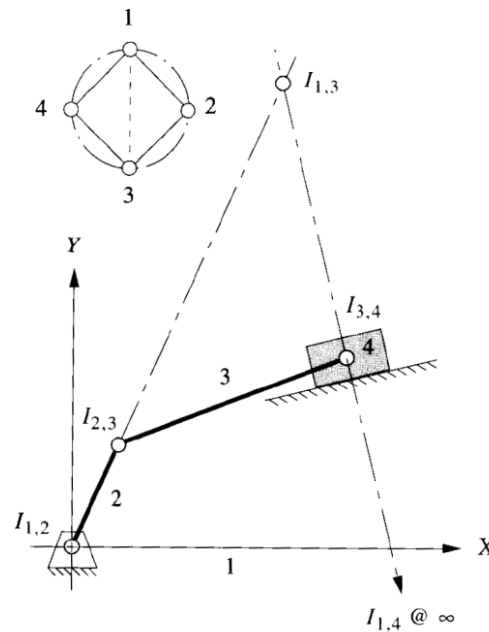
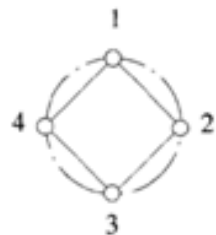
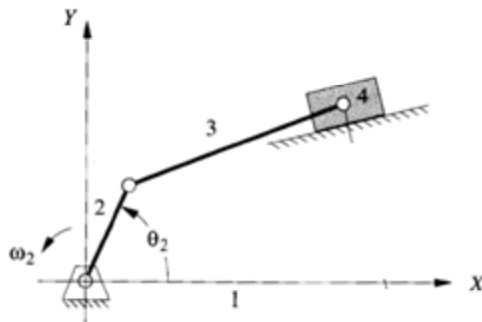
- هر عضو یک نقطه
- هر مرکز آنی یک خط
- تئوری کندی یک مثلث



فصل ۴ مراکز آنی

• تعیین مراکز آنی لغزنده و لنگ

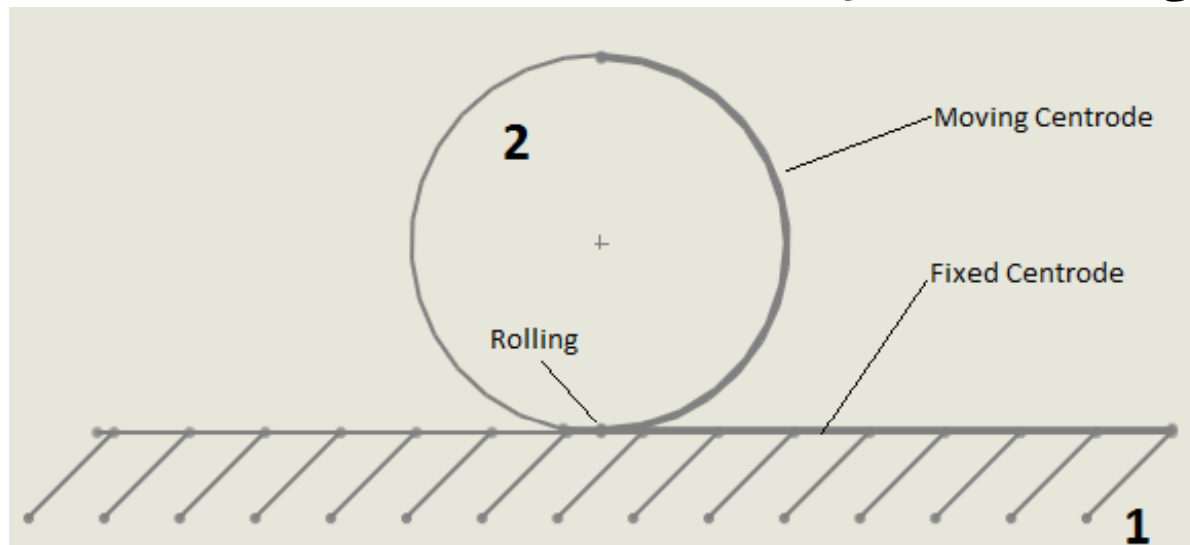
– تعداد مراکز آنی $۶ = (۴ * ۳) / ۲$



فصل ۴ مراکز آنی



- موقعیتهای متوالی یک مرکز آنی مسیری را روی هریک از بازوها مشخص می نماید.
- این مسیر، یا مکان هندسی، مرکز آنی **Centrode** نامیده می شود.
 - در نظر بگیرید که دیسک ۲ در روی جسم ۱ در حال غلتش است.
 - مرکز آنی همیشه نقطه تماس است.



از آنجائیکه هر مرکز آنی در ارتباط با دو عضو است، هر مرکز آنی دو **Centrode** ایجاد می نماید.

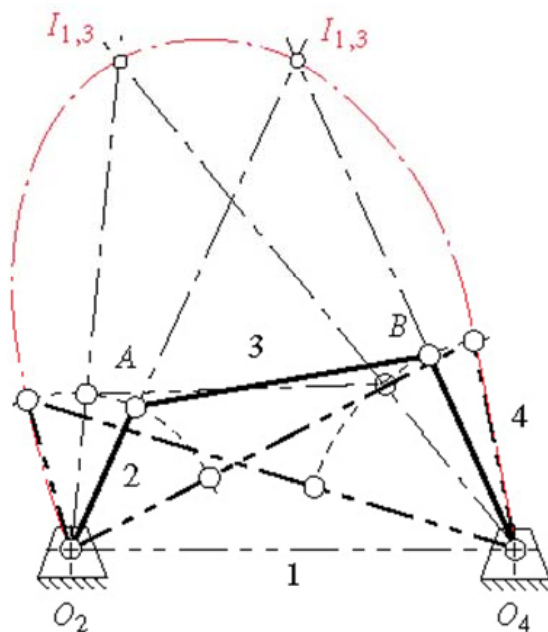


فصل ۴ مراکز آنی

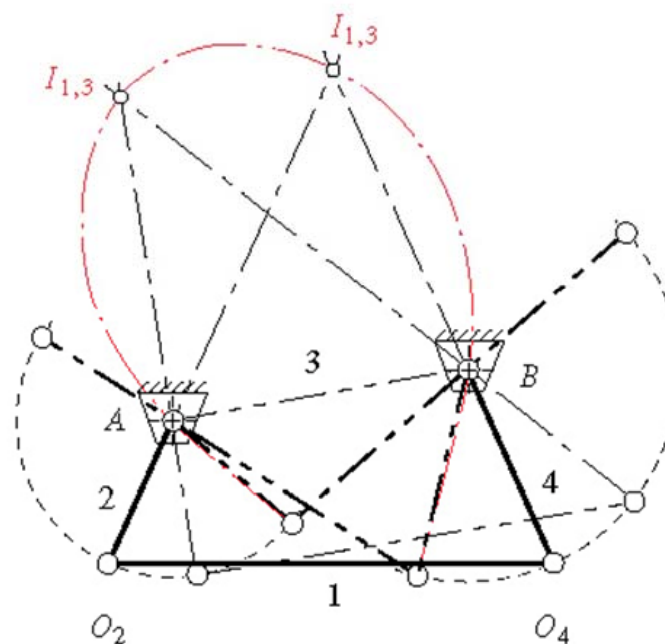


• مکانیزم چهار میله

$I_{1,3}$ Centrode –



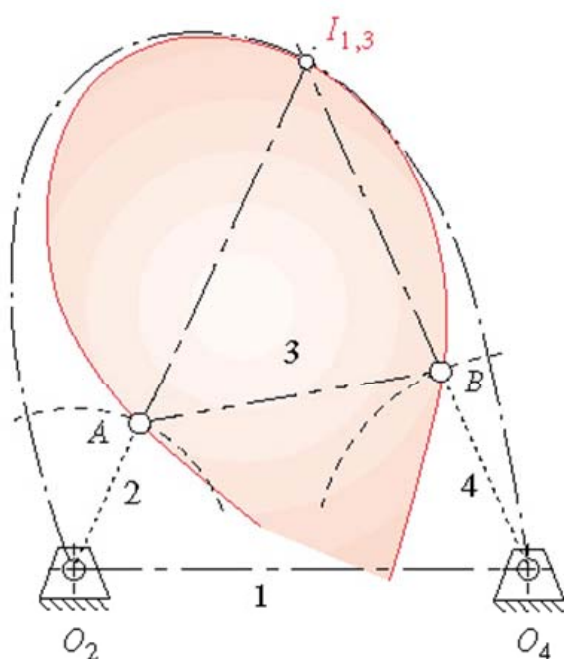
ثابت Centrode



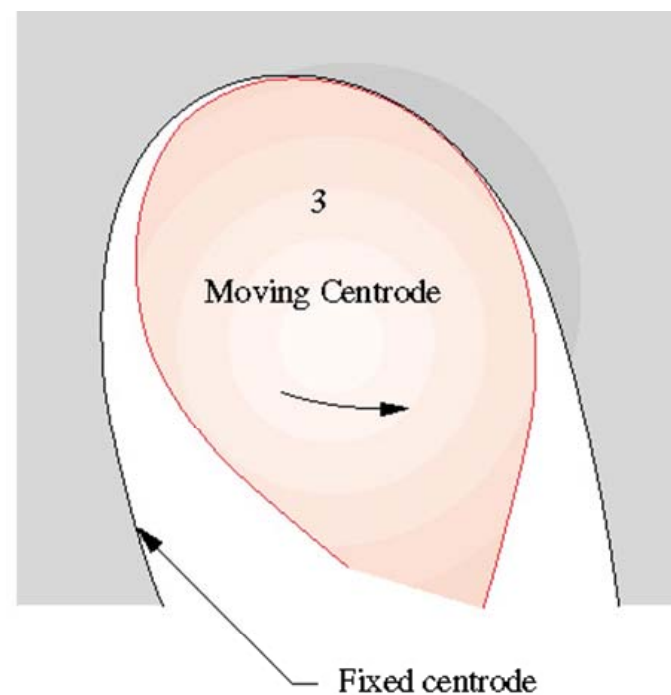
متحرک Centrode



فصل ۴ مراکز آنی



تماس Centrode ها

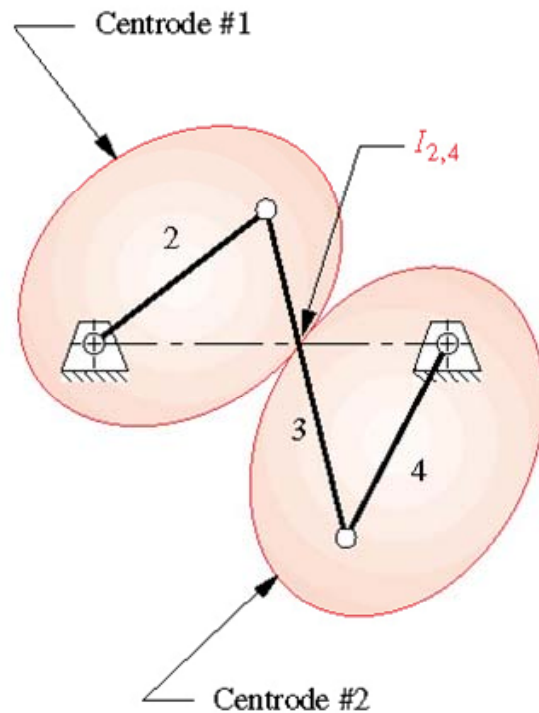


غلتش Centrode متحرک در مقابل Centrode ثابت، حرکت Coupler یکسان با مکانیزم اصلی ایجاد می کند



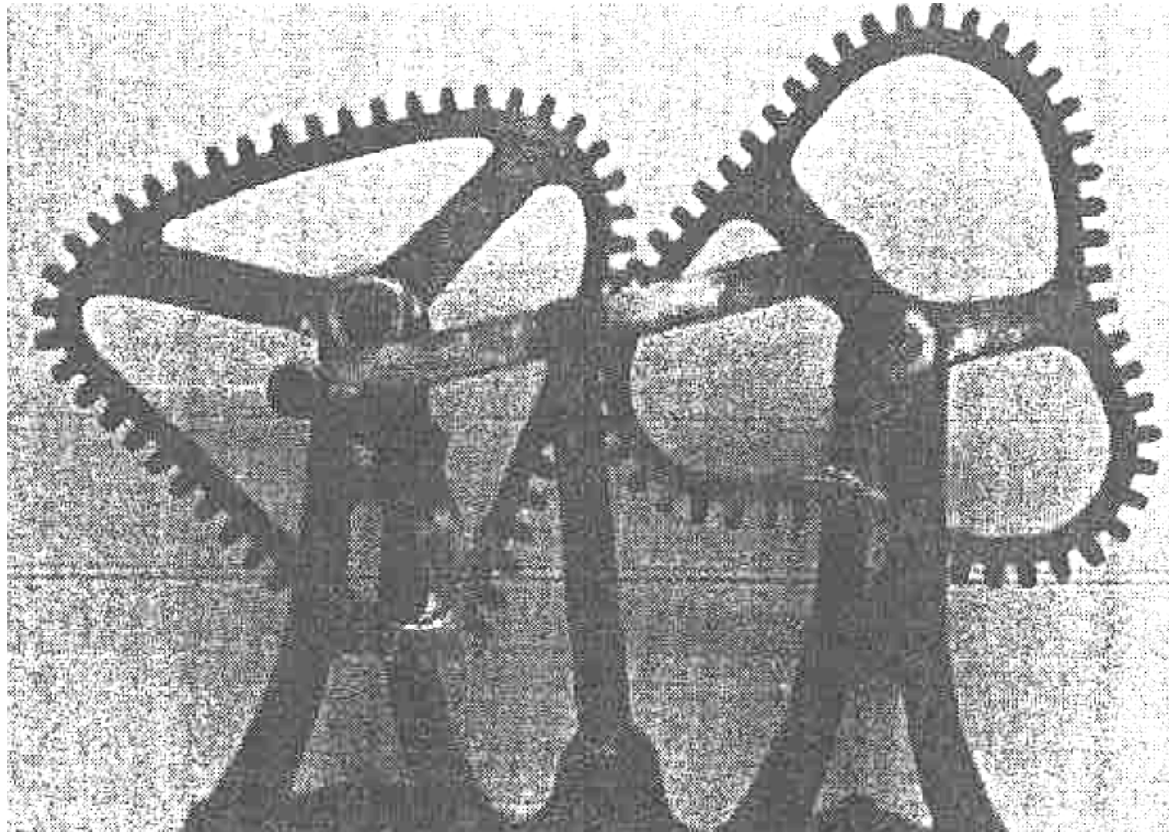
فصل ۴ مراکز آنی

- اگر بازوها توسط یک پین متصل شده باشند مانند $I_{1,2}$ ، $I_{1,4}$ ، $I_{2,3}$ ، $I_{3,4}$ در مکانیزم چهار میل، **Centrode** به یک نقطه در روی هر بازو کاهش می یابد.
- **Centrode** های مهم مربوط بازوهائی هستند که مستقیماً بهم متصل نشده اند.
- مسیر $I_{2,4}$ را برای چهار میل **Special Case Grashof** یا **Anti-parallelogram** در نظر بگیرید.



- مسیر روی اعضا ۲ و ۴ بیضی است.
- جهت اطمینان از عدم لغزش لازم است که دندانه روی **Centrode** ها در نظر گرفته شود.
- مکانیزم حاصل حرکت مشابه با مکانیزم چهارمیل **double crank** ایجاد می کند.
- در برخی از پرسه های چاپ لازم است که در کورس حرکت سرعت افزایش و سپس کاهش داشته باشد.

فصل ۴ مراکز آنی



Six-bar linkage model with centrodes represented by noncircular gears.

The gears roll on each other at the pitch points.

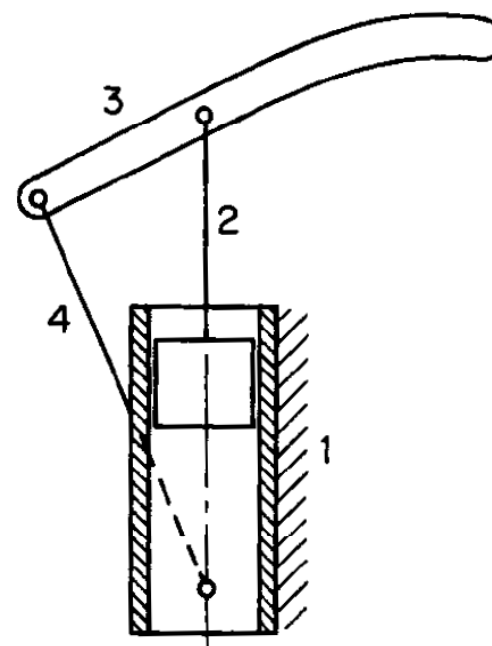
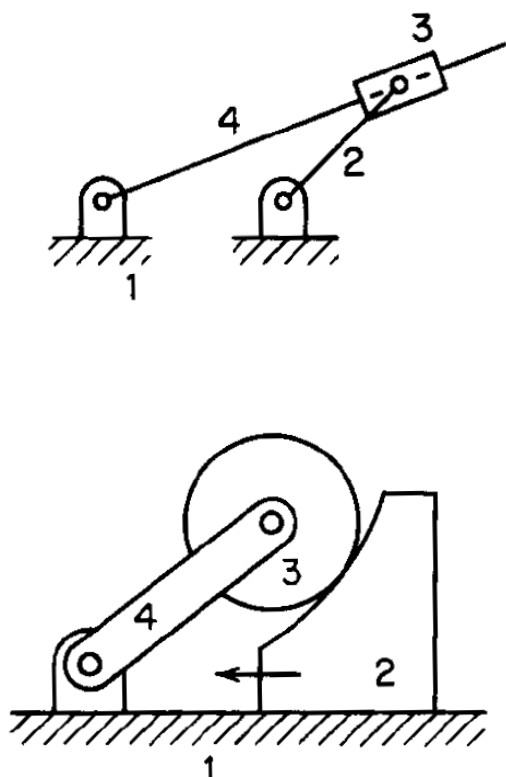
The pitch point is the instant center between the two frame-mounted cranks.





فصل ۴ مراکز آنی

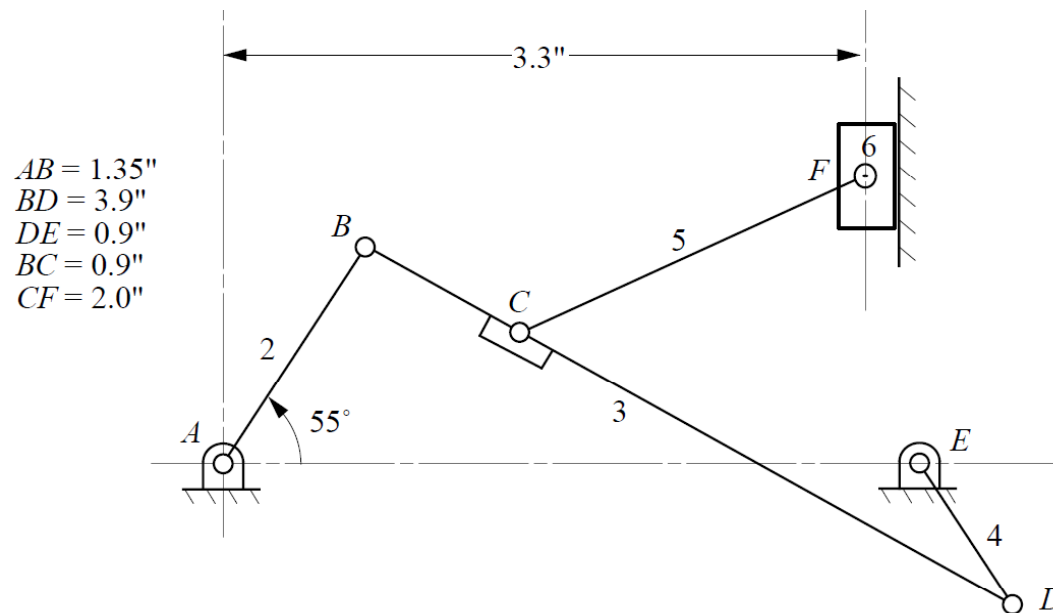
• حل چند مسئله



فصل ۴ مراکز آنی



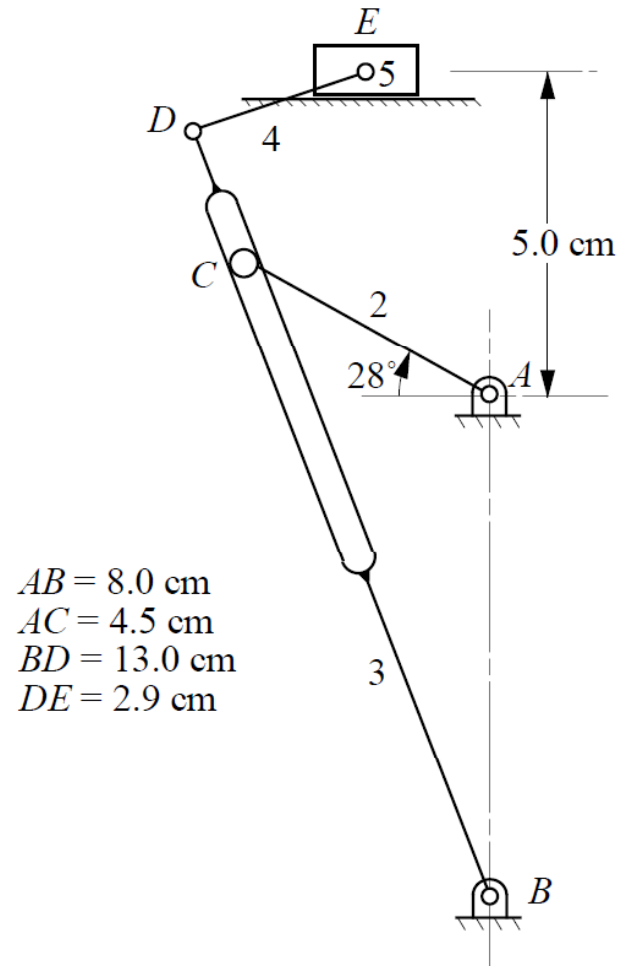
• مسئله 4-3 از کتاب Waldron



فصل ۴ مراکز آنی



• مسئله 4-4 از کتاب Waldron

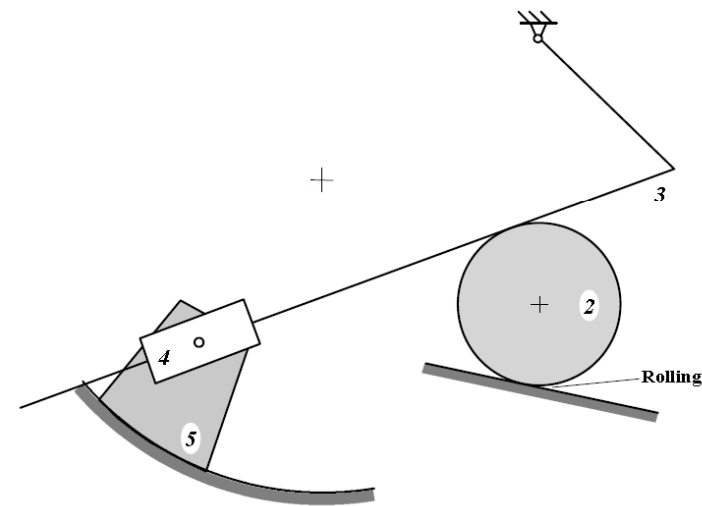
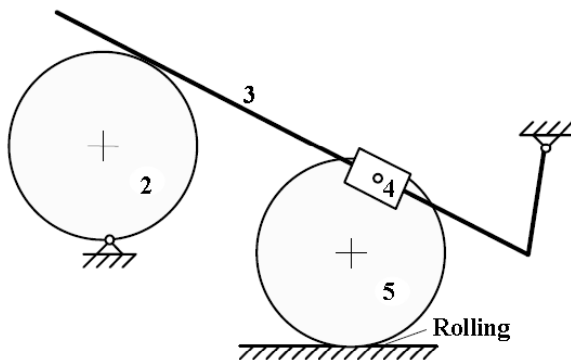
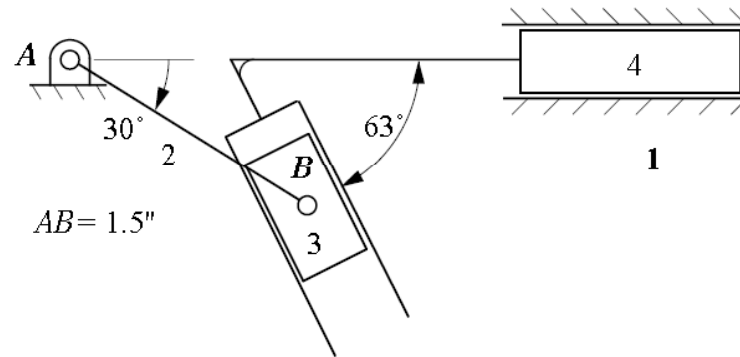
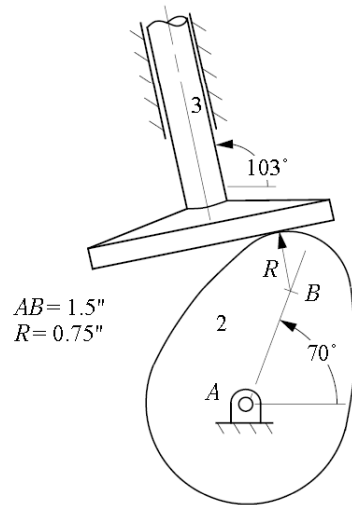


فصل ۴ مراکز آنی

تمرینات و مسائل فصل ۴

۱- صحت تئوری کندی را بررسی نمایید.

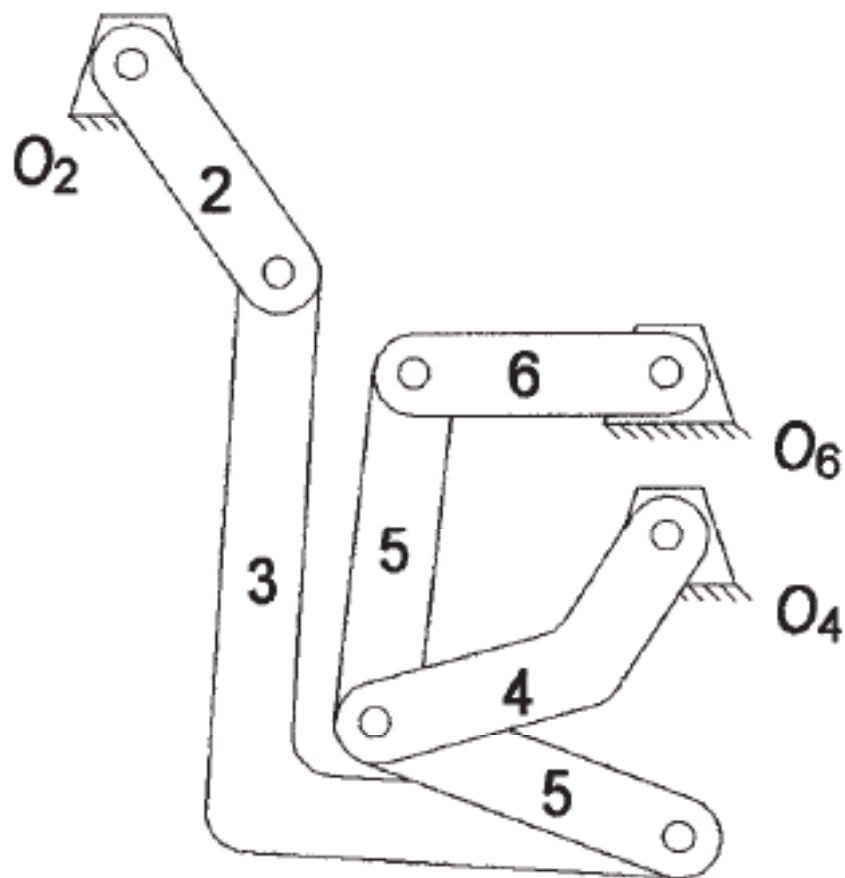
۲- تمامی مراکز آنی مکانیزمهای زیر را بدست آورید.





فصل ۴ مراکز آنی

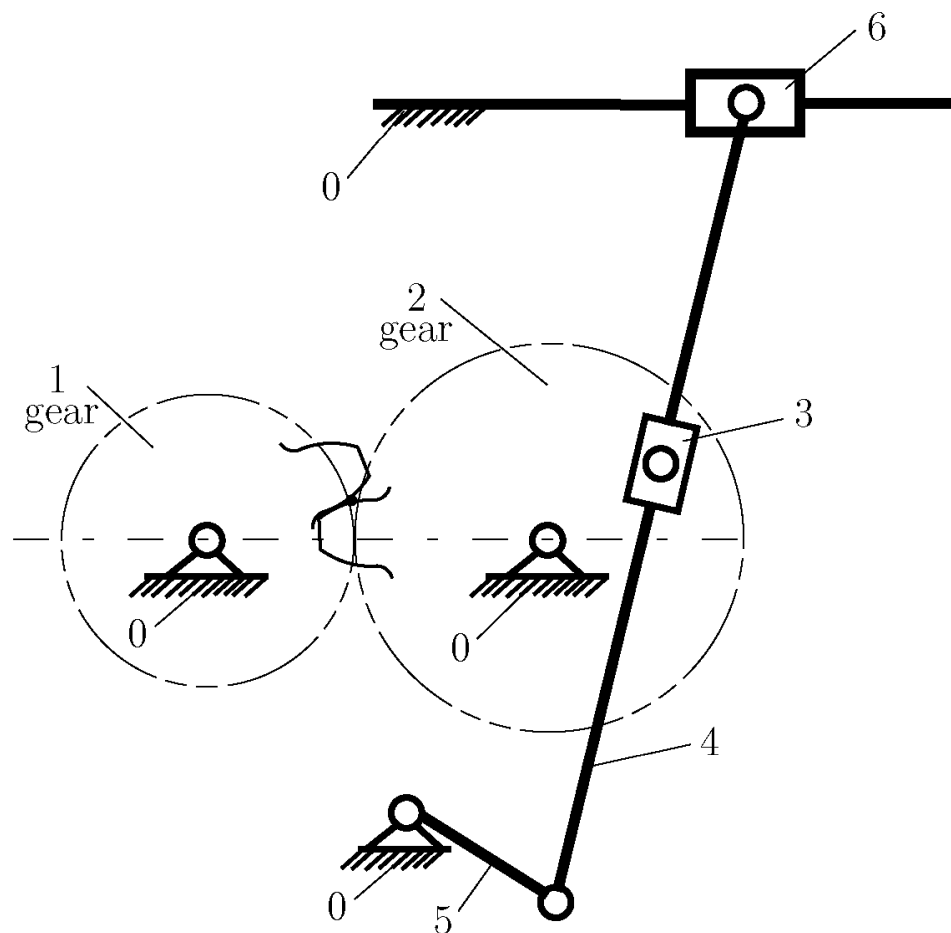
تمرینات و مسائل فصل ۴





فصل ۴ مراکز آنی

تمرینات و مسائل فصل ۴

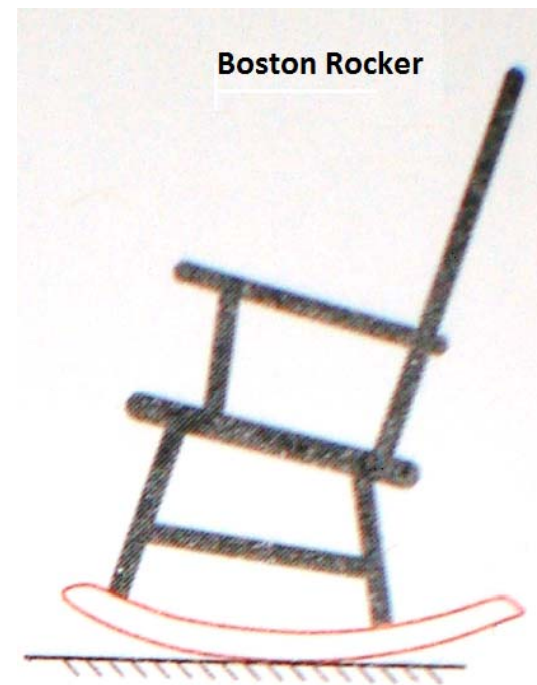
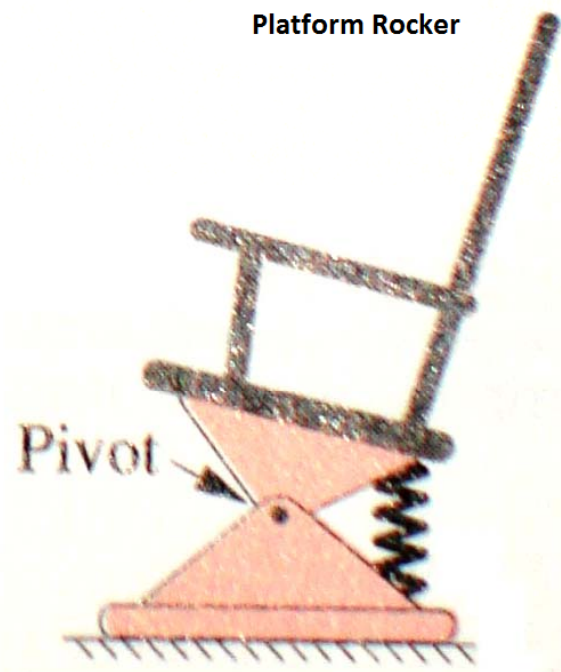




فصل ۴ مراکز آنی

تمرینات و مسائل فصل ۴

- ۳- صندلی Boston Rocker دارای کفی منحنی شکل در مقابل زمین است، در حالیکه صندلی Platform Rocker به زمین پین شده است.
- (a) کدام صندلی راحت تر و آرامش بیشتری دارد؟ چرا؟
- (b) منحنی کف چگونه بدست آمده است؟



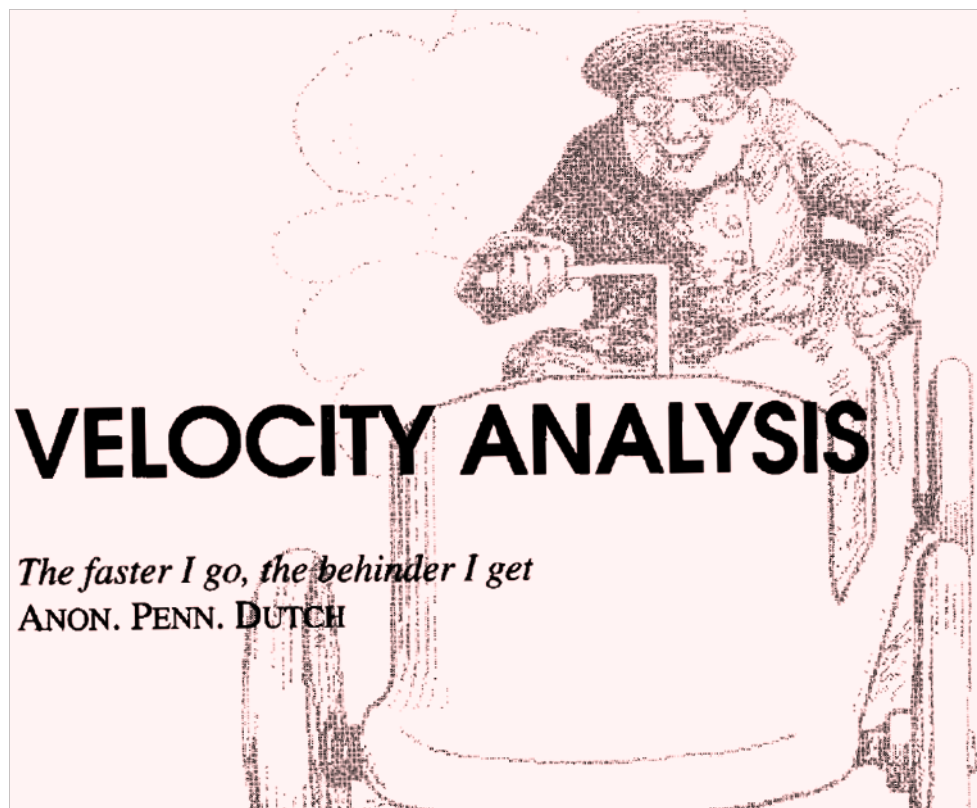


فصل ۴ مراکز آنی

پایان فصل ۴



فصل ۵ سرعت در مکانیزمها





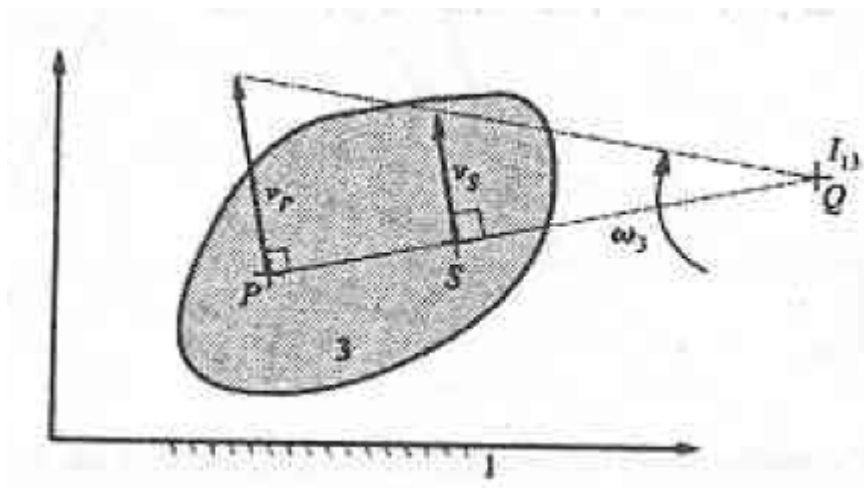
فصل ۵ سرعت در مکانیزمها

- ۱- تعیین سرعت توسط مراکز آنی
- ۲- تعیین سرعت با استفاده از مولفه های آن
- ۳- روش سرعتهای نسبی

فصل ۵ سرعت در مکانیزمها

- تعیین سرعت توسط مراکز آنی
اصول کلی زیر باید رعایت گردد:

۱. اندازه سرعت خطی نقاط روی جسم دورانی نسبت مستقیم با شعاع دوران دارد.
۲. سرعت در راستای عمود بر شعاع دوران آن نقطه است.
۳. مرکز آنی نقطه ای مشترک بین دو جسم است که دارای سرعت خطی یکسان (مقدار و راستا) می باشد.

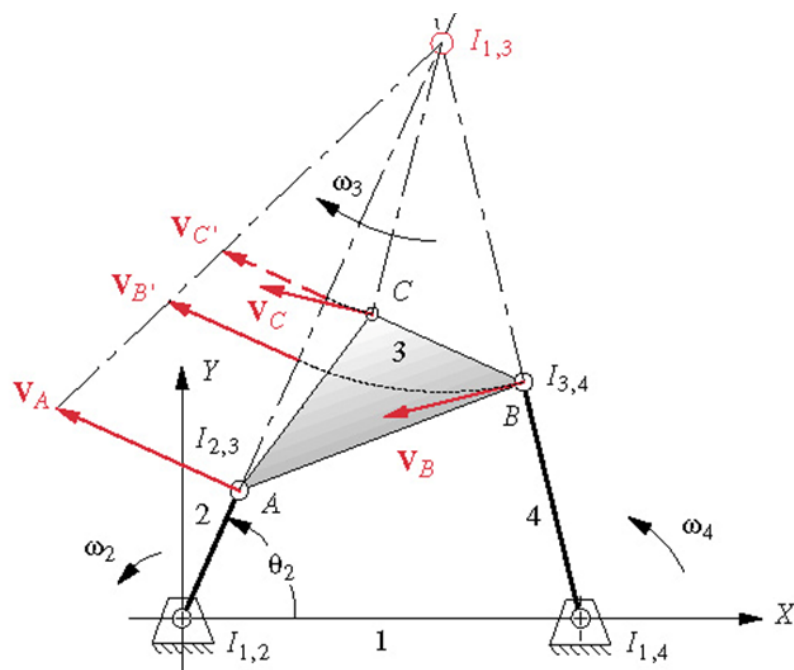


فصل ۵ سرعت در مکانیزمها

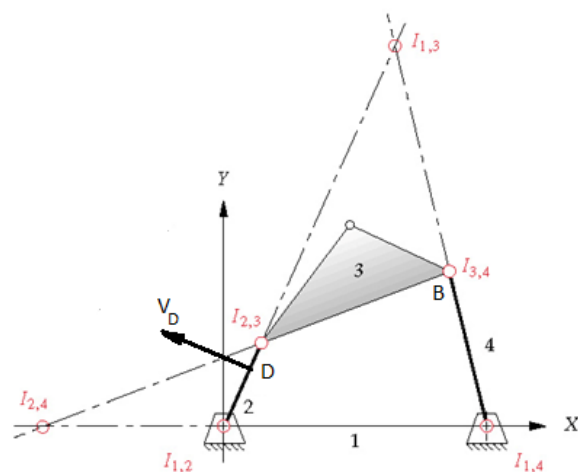
• سرعت در مکانیزم چهار میله

روش شعاع دوران

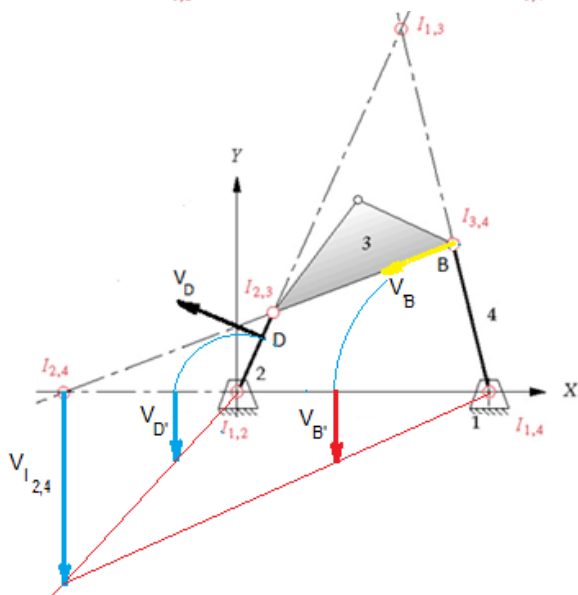
- در مکانیزم مقابل در نظر بگیرید که سرعت نقطه A معلوم و سرعت خطی نقاط B و C مورد نظر است.
- ابتدا مراکز آنی لازم بدست می آیند.
- از مرکز آنی ۱۳ استفاده می شود.
- سرعت مرکز آنی ۱۳ صفر است.
- در این لحظه عضو ۳ حول ۱۳ دوران مرکز کند.
- با استفاده از تناسب سرعت و شعاع دوران سرعت نقاط B و C بصورت ترسیمی بدست می آید.



فصل ۵ سرعت در مکانیزمها



- سرعت در مکانیزم چهار میله
روش شعاع دوران با استفاده از مرکز آنی ۲۴
- سرعت نقطه D داده شده سرعت نقطه B
رابدست آورید.

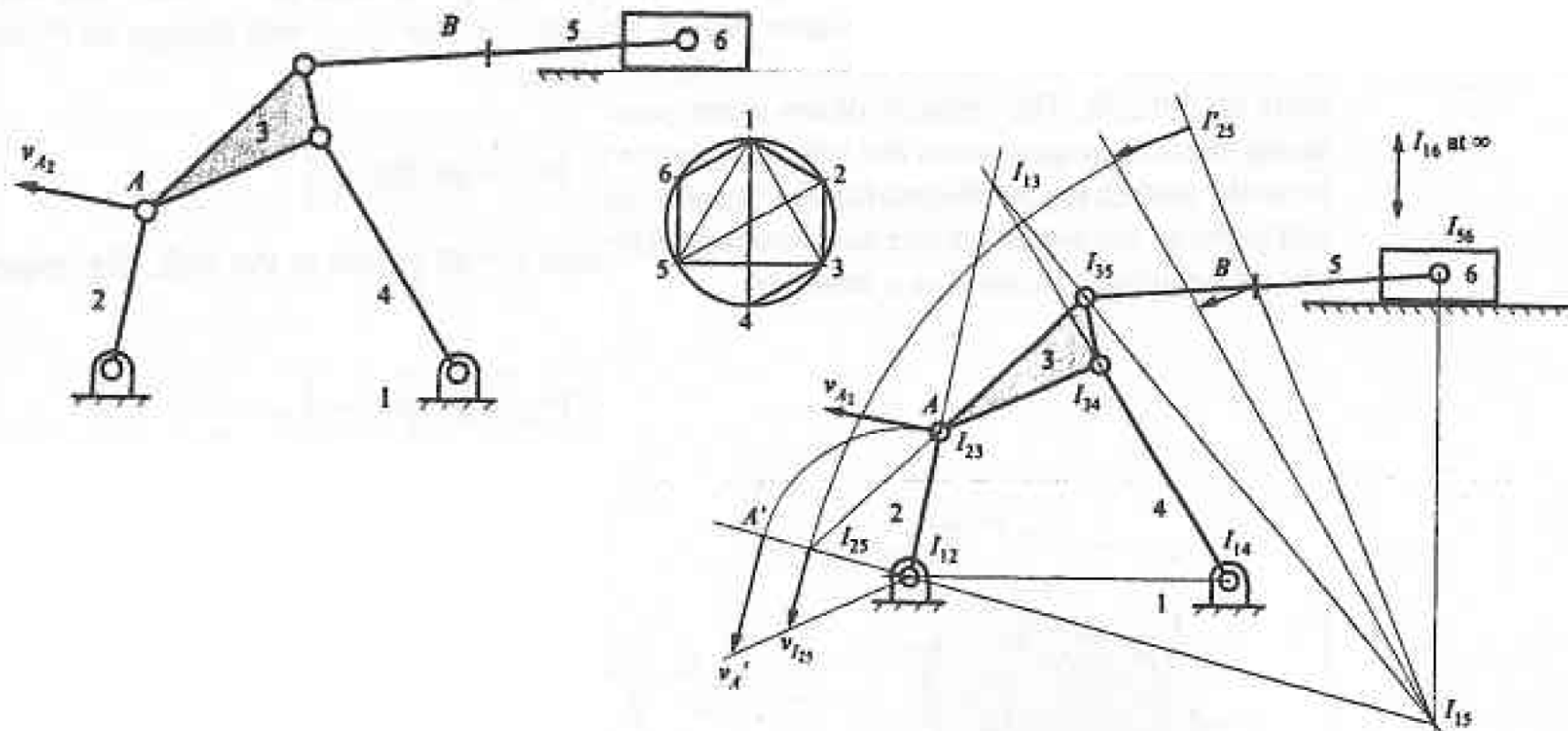


- توجه نمایید که دو نقطه مورد نظر باید روی یک
جسم قرار گرفته باشند.
- در مثال اول نقطه ۱۳ به عنوان نقطه انتقال حرکت و در
و در مثال دوم نقطه ۲۴ (نقطه مشترک بین عضو ۲ و ۴)
به عنوان نقطه انتقال حرکت انتخاب شده است.
- توجه روی انتخاب نقطه انتقال حرکت (Transfer Point)

فصل ۵ سرعت در مکانیزمها

• مثال دیگر

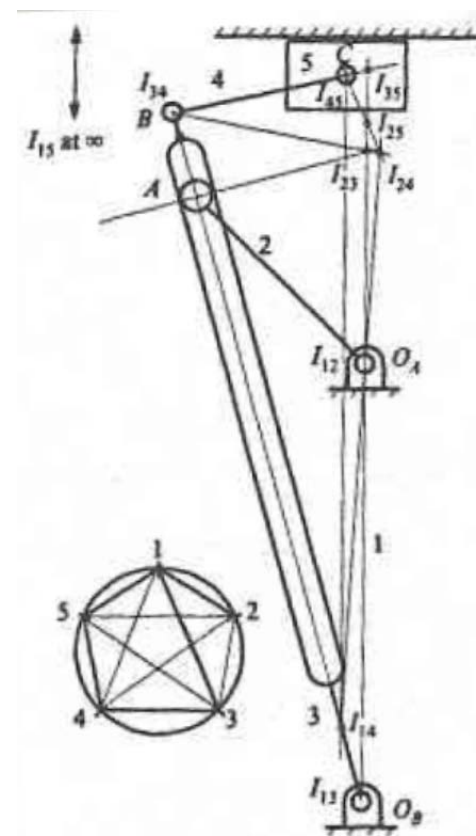
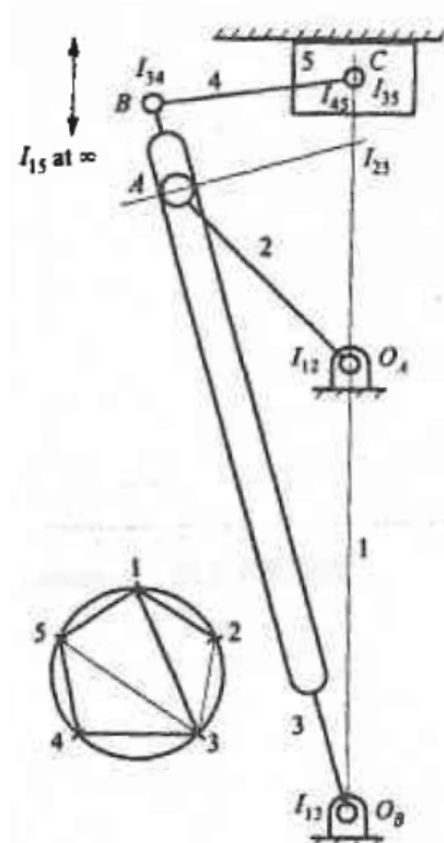
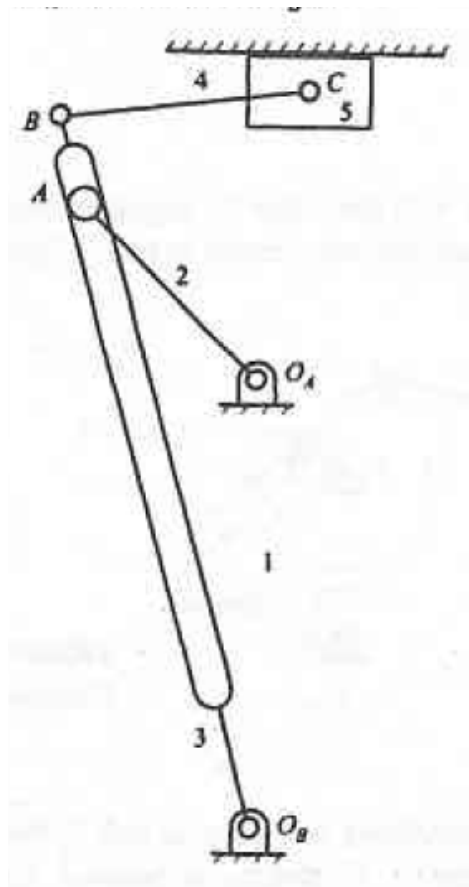
– در مکانیزم مرکب سرعت نقطه A داده شده، سرعت نقطه B را بدست آورید.



فصل ۵ سرعت در مکانیزمها

• مثال دیگر

– در مکانیزم بازگشت سریع سرعت زاویه ای عضو ۲ داده شده، سرعت نقطه C را بدست آورید.



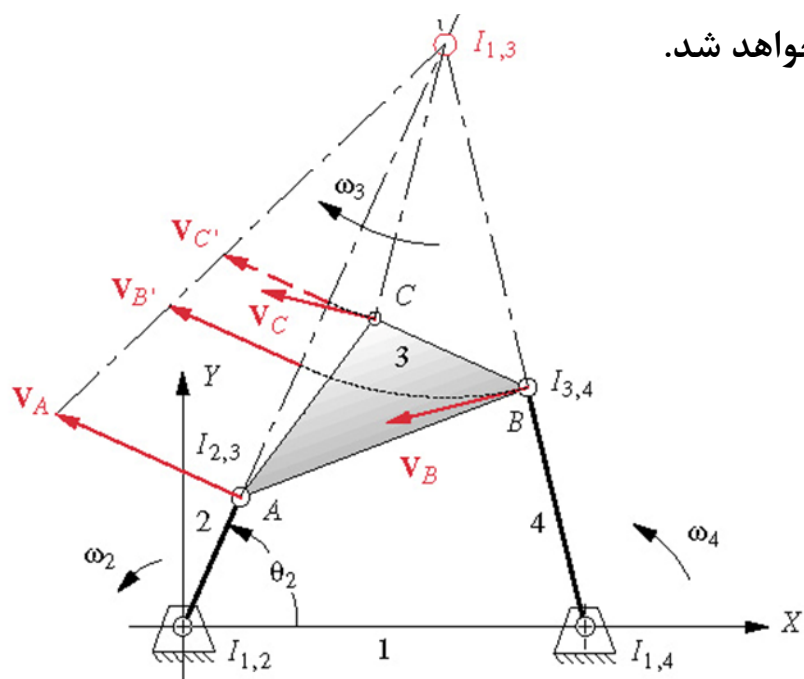
فصل ۵ سرعت در مکانیزمها

• سرعت زاویه ای

- پس از بدست آوردن سرعت نقطه از عضو مورد نظر و داشتن مرکز آنی آن عضو نسبت به زمین می توان سرعت زاویه ای عضو را محاسبه نمود:

$$\omega = \frac{V}{R}$$

- از جهت سرعت نسبت به مرکز آنی جهت دوران تعیین خواهد شد.
- در شکل مقابل



$$\omega_4 = \frac{V_B}{I_{14} I_{34}}$$



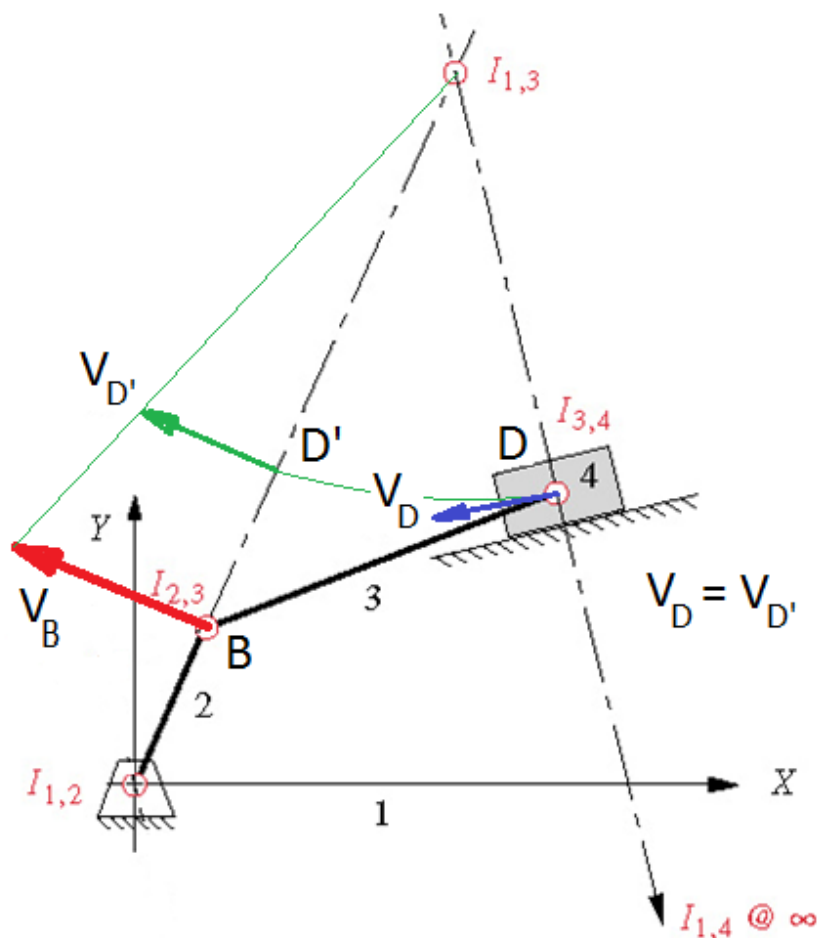
$$\omega_3 = \frac{V_B}{I_{13} I_{34}}$$

فصل ۵ سرعت در مکانیزمها

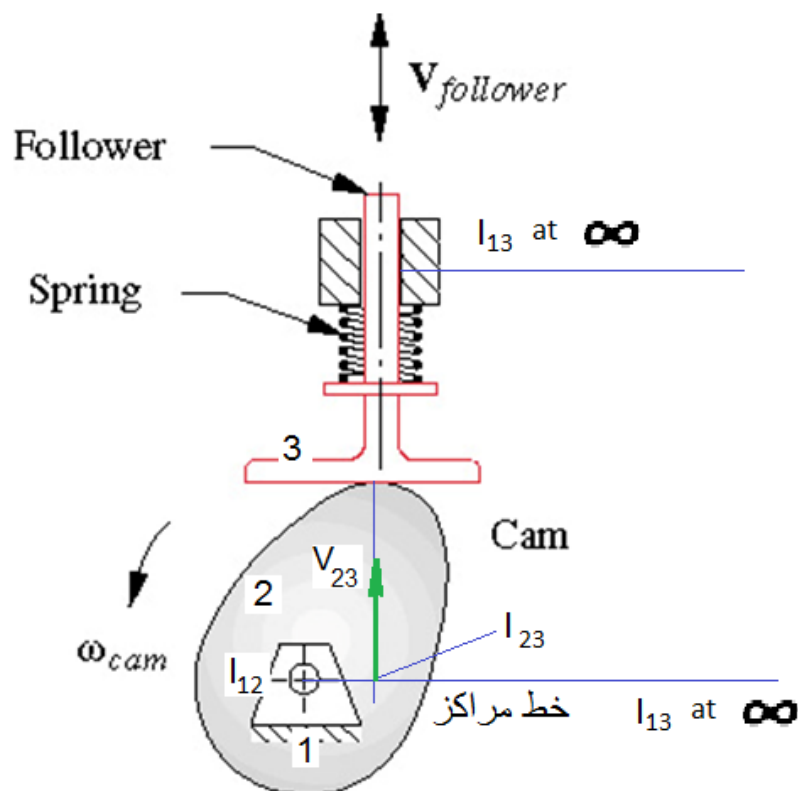
• سرعت در مکانیزم لغزنده و لنگ

روش شعاع دوران

- در مکانیزم مقابل در نظر بگیرید که سرعت نقطه B معلوم و سرعت خطی نقطه D مورد نظر است.
- ابتدا مراکز آنی لازم بدست می آیند.
- از مرکز آنی ۱۳ استفاده می شود.
- سرعت مرکز آنی ۱۳ صفر است.
- در این لحظه عضو ۳ حول مرکز ۱۳ دوران کند.
- با استفاده از تناسب سرعت و شعاع دوران سرعت نقاط D و D' بصورت ترسیمی بدست می آید.



فصل ۵ سرعت در مکانیزمها



• سرعت در مکانیزم بادامکی

- سرعت زاویه ای بادامک داده شده
- مکانیزم از نوع تماس مستقیم لغزشی
- ابتدا مراکز آنی بدست آمده
- سپس سرعت سرعت مرکز آنی l_{23} بدست می آید

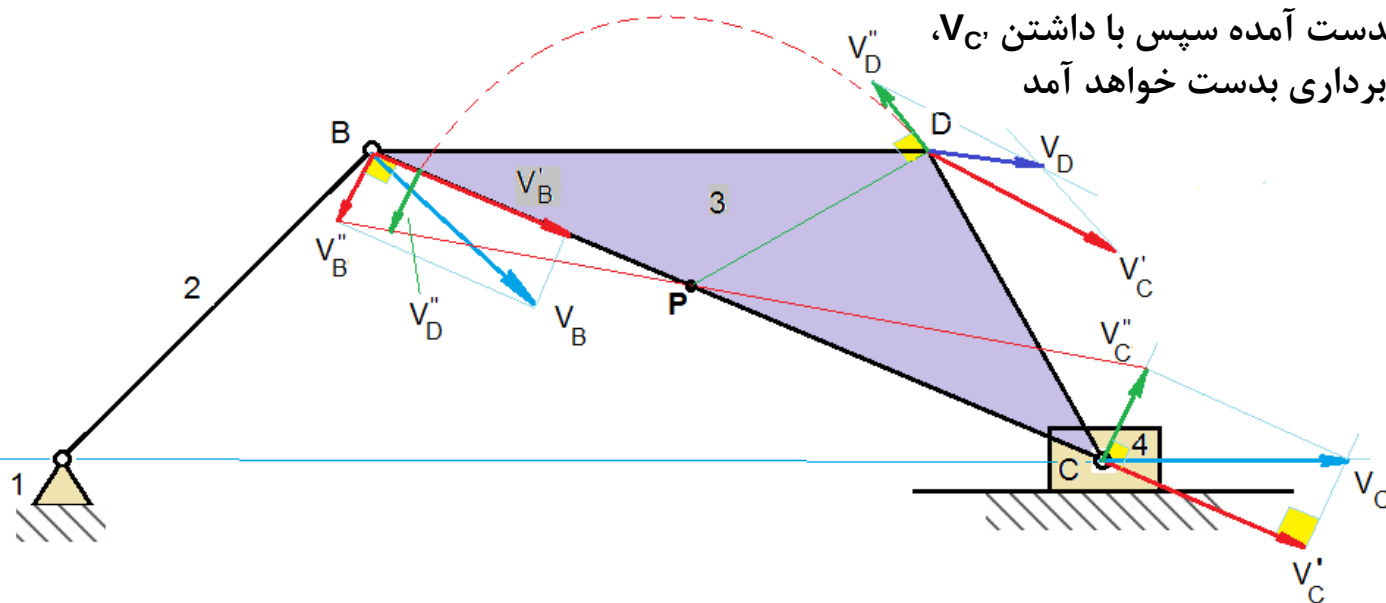
$$V_{23} = R\omega = (l_{12}l_{23})\omega_{cam}$$

- چرا راستای لغزش عضو ۳ و سرعت l_{23} یکسان است؟

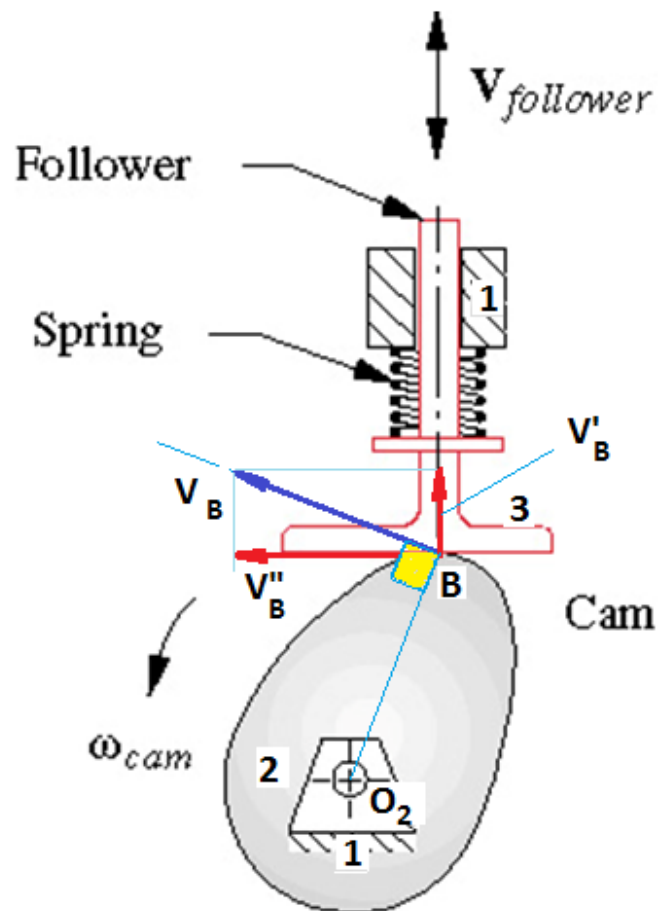
فصل ۵ سرعت در مکانیزمها

• سرعت از روش مولفه ها

- سرعت اجزا می توانند از روش تجزیه بردارهای سرعت به مولفه های مناسب تحلیل شوند.
- در مثال زیر سرعت نقطه B معلوم و سرعت لغزنده و نقطه D مورد نیاز است.
- V_B به دو مولفه V_B' و V_B'' تجزیه می شود.
- سرعت نقطه C در راستای BC برابر $V_C' = V_B'$
- توجه نمایید که سرعت V_C از روی مولفه آن V_C' بدست می آید.
- **نقطه P چه خاصیتی دارد؟**
- ابتدا سرعت V_D'' بدست آمده سپس با داشتن V_C' ، V_D از روش جمع برداری بدست خواهد آمد



فصل ۵ سرعت در مکانیزمها

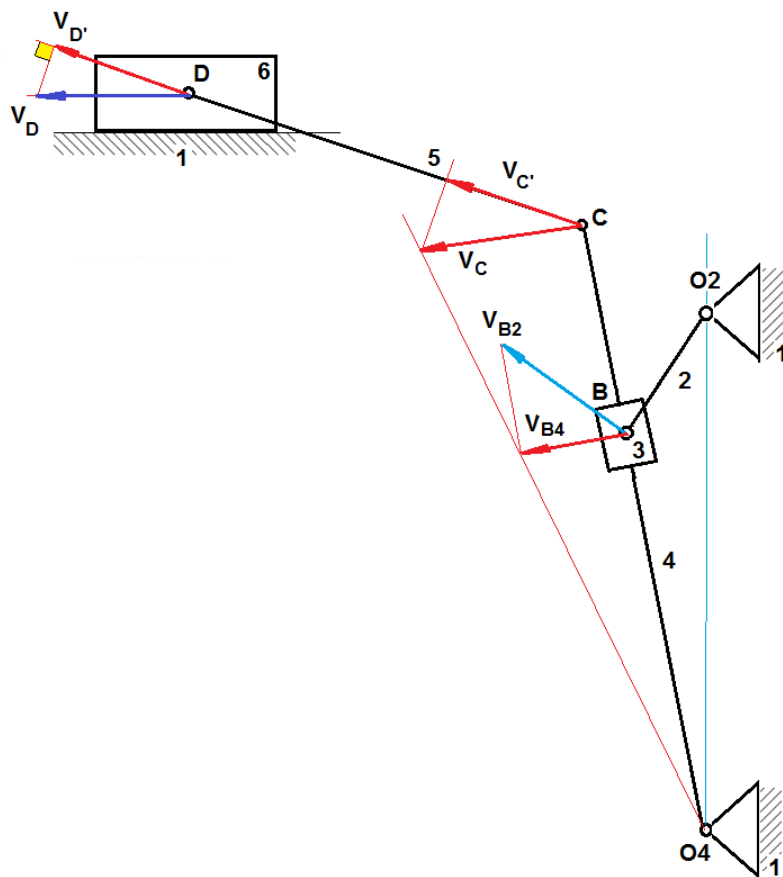


- سرعت از روش مولفه ها
 - در مثال زیر سرعت نقطه B روی بادامک معلوم است و سرعت دنبال کننده ۳ مورد نیاز است.
 - ابتدا V_B به دو مولفه V_B' و V_B'' تجزیه می شود.
 - از آنجائیکه کلیه نقاط روی ۳ حرکت مستقیم الخط دارند، V_B' سرعت عضو ۳ خواهد بود.
 - مولفه V_B'' در امتداد سطح دنبال کننده سرعت لغزش خواهد بود.

فصل ۵ سرعت در مکانیزمها

• سرعت از روش مولفه ها

- سرعت زاویه ای عضو ۲ داده شده از روش مولفه های سرعت، سرعت خطی نقطه D را بدست آورید.
- V_{B4} مولفه ای از V_{B2} می باشد.
- از آنجائیکه B_4 متعلق به عضو ۴ می باشد، سرعت آن عمود بر O_4B_4 می باشد و از روی تناسب V_C بدست می آید.
- ادامه دهید.



فصل ۵ سرعت در مکانیزمها

• روش سرعتهای نسبی

- قبل از تحلیل شتاب مکانیزم باید “سرعتهای نسبی” تعیین شده باشند.
- در نظر بگیرید که سرعت زاویه ای لنگ داده شده باشد، و سرعت پیستون و نقطه **B** مورد نظر باشد.

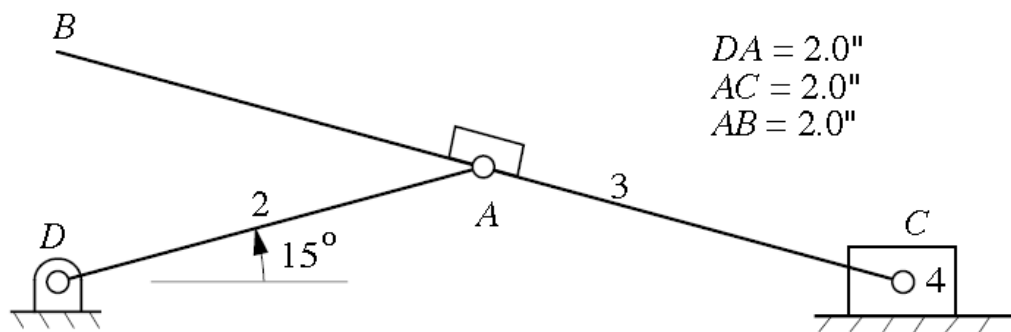
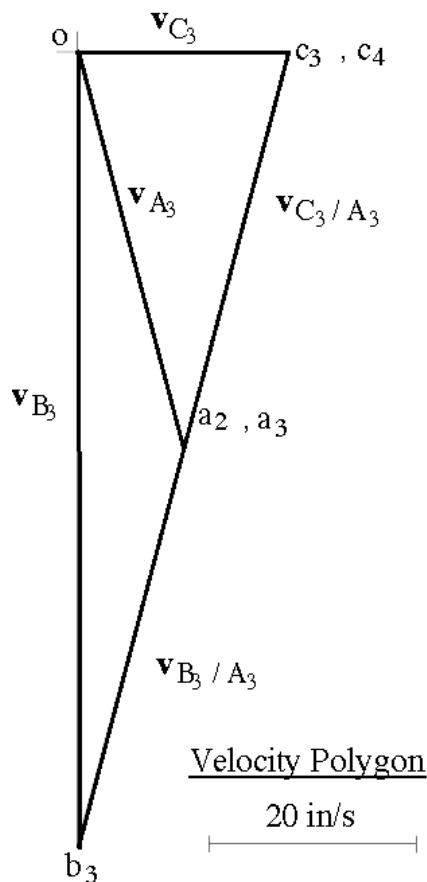
$$V_A = R \omega = DA \omega_2$$

$$V_C = V_A + V_{C/A}$$

- در رابطه برداری هر کمیت دارای مقدار و راستا می باشد.

- و در هر رابطه برداری دو مجهول قابل محاسبه است.

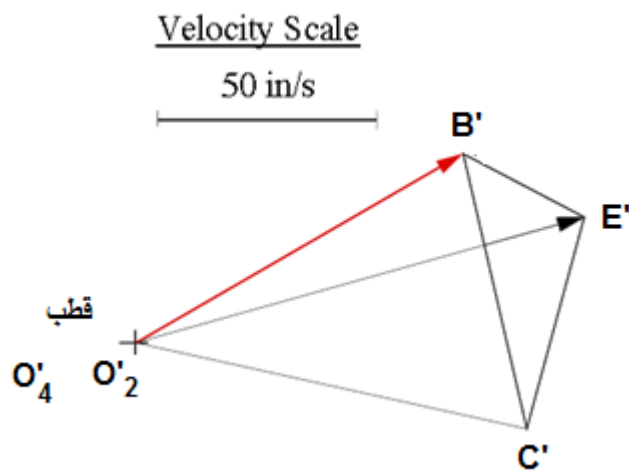
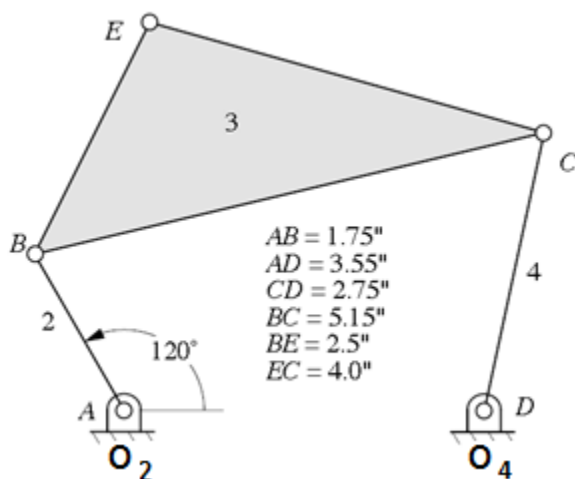
- ادامه دهید.



فصل ۵ سرعت در مکانیزمها

- **روش سرعت‌های نسبی**

- چند ضلعی سرعت (Velocity Polygon)
- قطب نشان دهنده تمام نقاطی در روی مکانیزم است که سرعت صفر دارند. سرعتهای مطلق از این نقطه رسم می شوند.
- چند ضلعی سرعت با رعایت مقیاس رسم می شود و کلیه نقاط مکانیزم در آن با پریم نمایش داده می شوند.
- حل شامل دو مرحله نوشتن معادلات برداری و ترسیم چند ضلعی سرعت می باشد.
- در مکانیزم چهار میله زیر سرعت زاویه ای میله ۲ معلوم، سرعت خطی نقاط **C** و **E** را بدست آورید.



$$V_B = R \omega = AB \omega_2$$

$$V_C = V_B + V_{C/B}$$

$$V_E = V_B + V_{E/B}$$

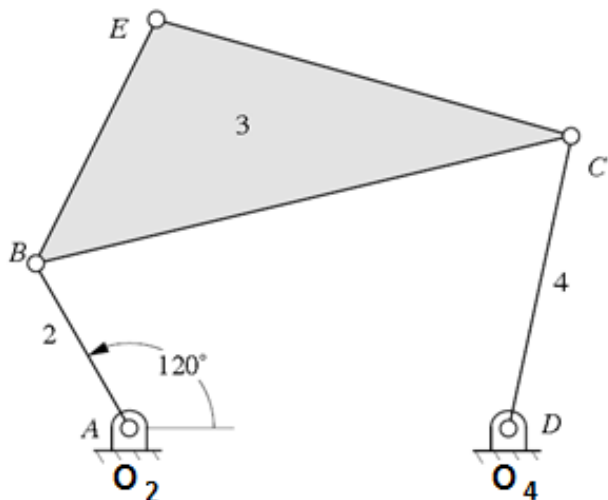
$$V_E = V_C + V_{E/C}$$

$$V_C + V_{E/C} = V_B + V_{E/B}$$

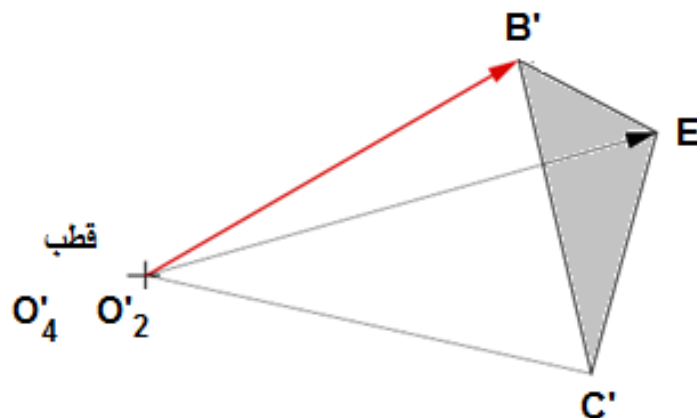
فصل ۵ سرعت در مکانیزمها

• تصویر سرعت

- هر عضو مکانیزم در چند ضلعی سرعت تصویر (Image) دارد.
- اضلاع مثلث $B'D'C'$ به ترتیب عمود بر اضلاع مثلث BDC بوده، در نتیجه دو مثلث متشابه می باشند.
- اگر سرعت دو نقطه روی یک عضو معلوم باشد، سرعت نقطه سوم بر راحتی از تشابه بدست می آید.



دیاگرام سینماتیکی مکانیزم

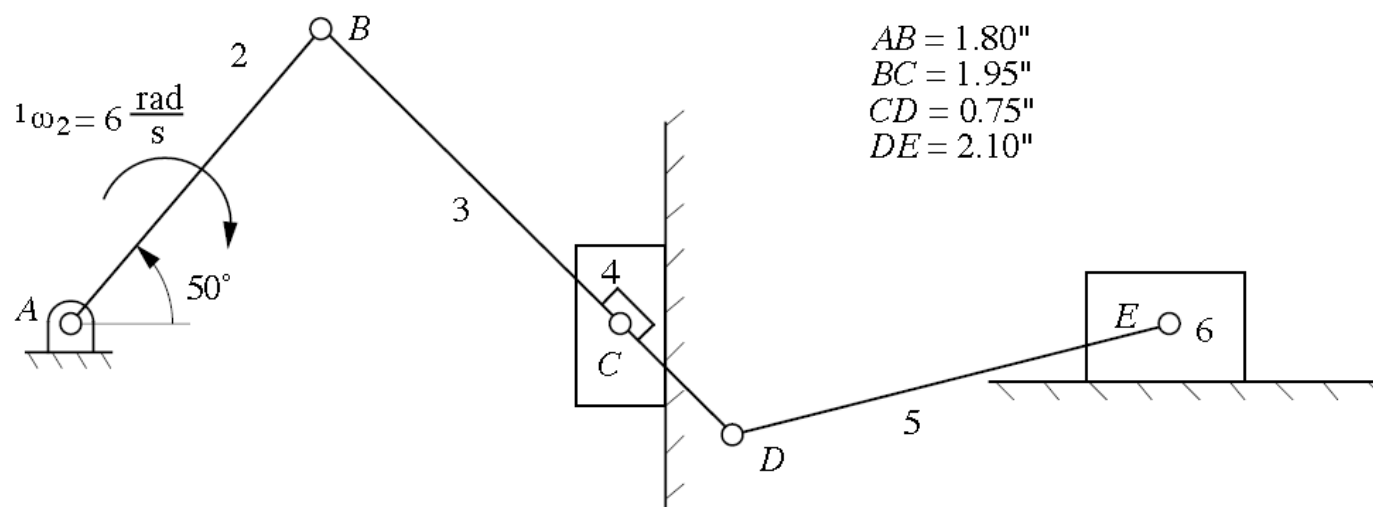


دیاگرام سرعت

فصل ۵ سرعت در مکانیزمها

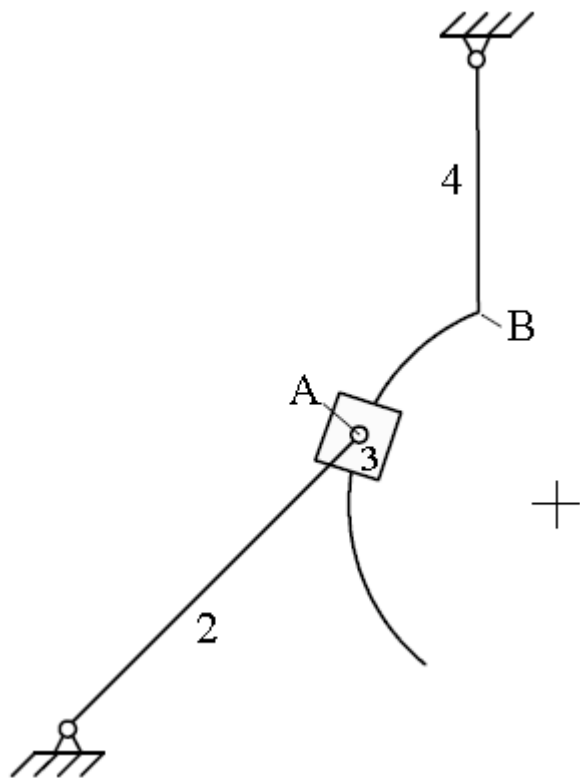
• حل چند مسئله

– سرعت خطی لغزنده ۶ را بدست آورید. نقاط **A** و **C** و **E** در راستای افق قرار گرفته اند.



فصل ۵ سرعت در مکانیزمها

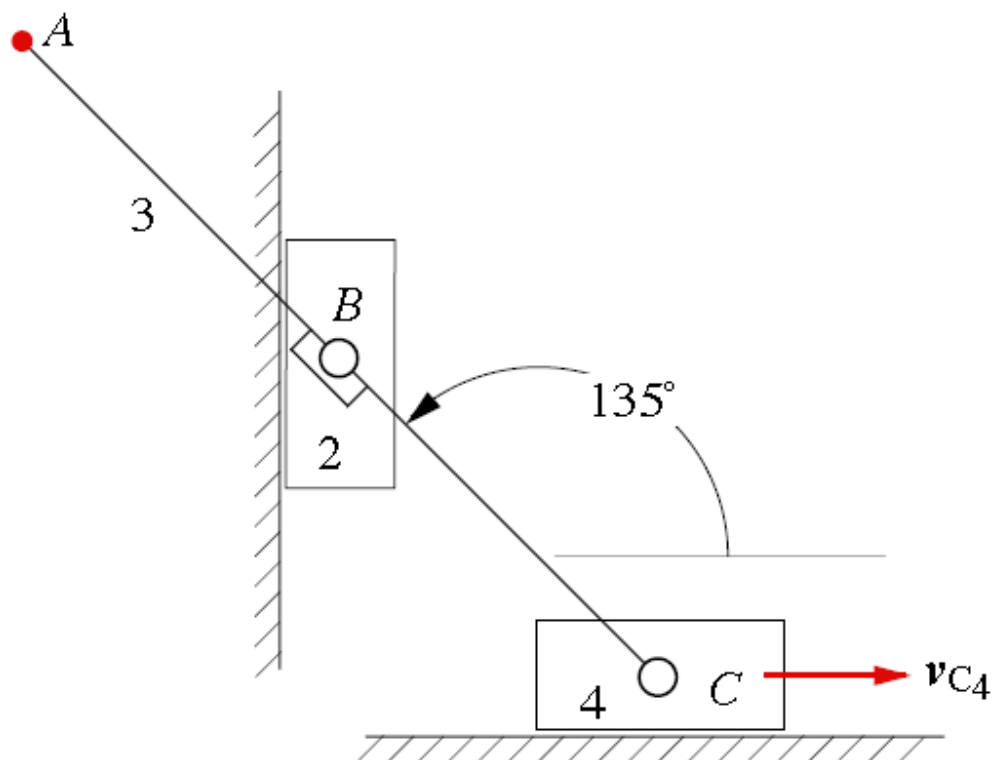
- عضو ۲ با سرعت زاویه ای 1.1 rad/sec در جهت خلاف عقربه های ساعت دوران می کند. سرعت خطی و زاویه ای عضو ۴ را بدست آورید.



فصل ۵ سرعت در مکانیزمها

• تمرینات و مسائل فصل ۵

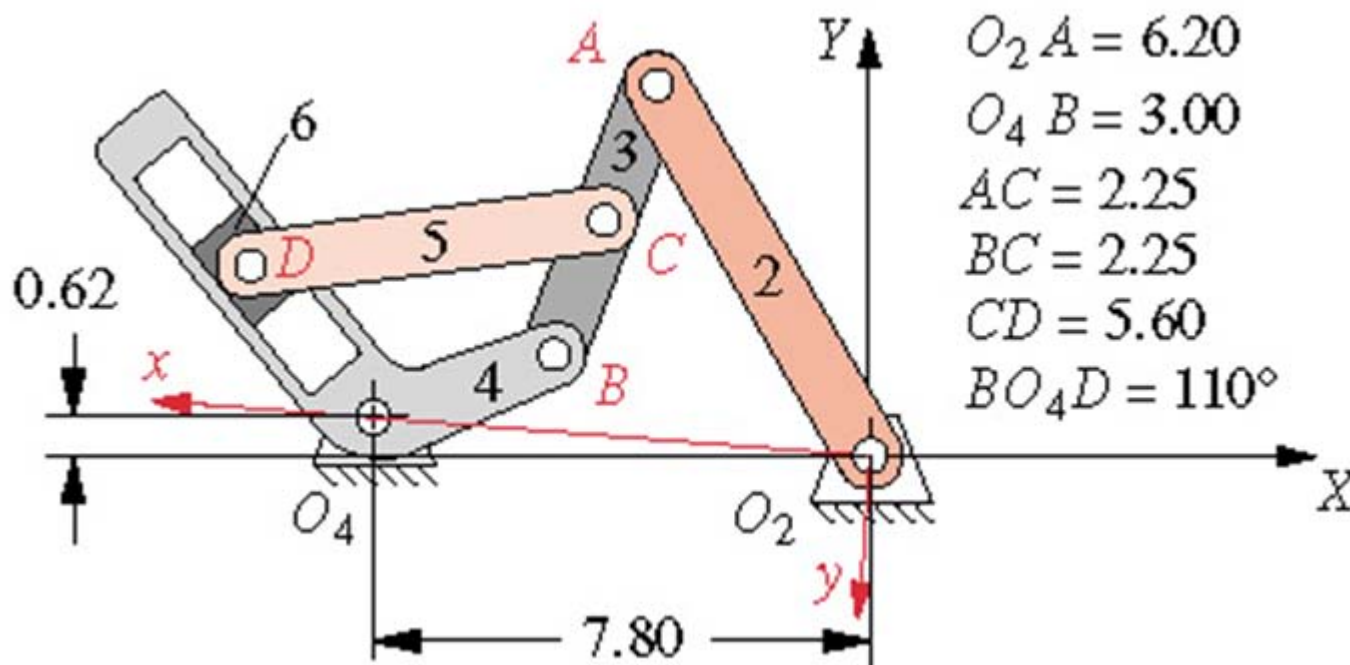
۱- با استفاده از مراکز آنی و روش شعاع دوران سرعت نقطه **A** را بدست آورید.



فصل ۵ سرعت در مکانیزمها

• تمرینات و مسائل فصل ۵

۲- با استفاده از مراکز آنی و روش تجزیه به مولفه ها سرعت نقطه **D** و سرعت زاویه ای عضو ۶ را بدست آورید. سرعت زاویه ای عضو ۲ 10 rad/sec **CCW** در نظر بگیرید. زاویه عضو ۲ 120° می باشد.

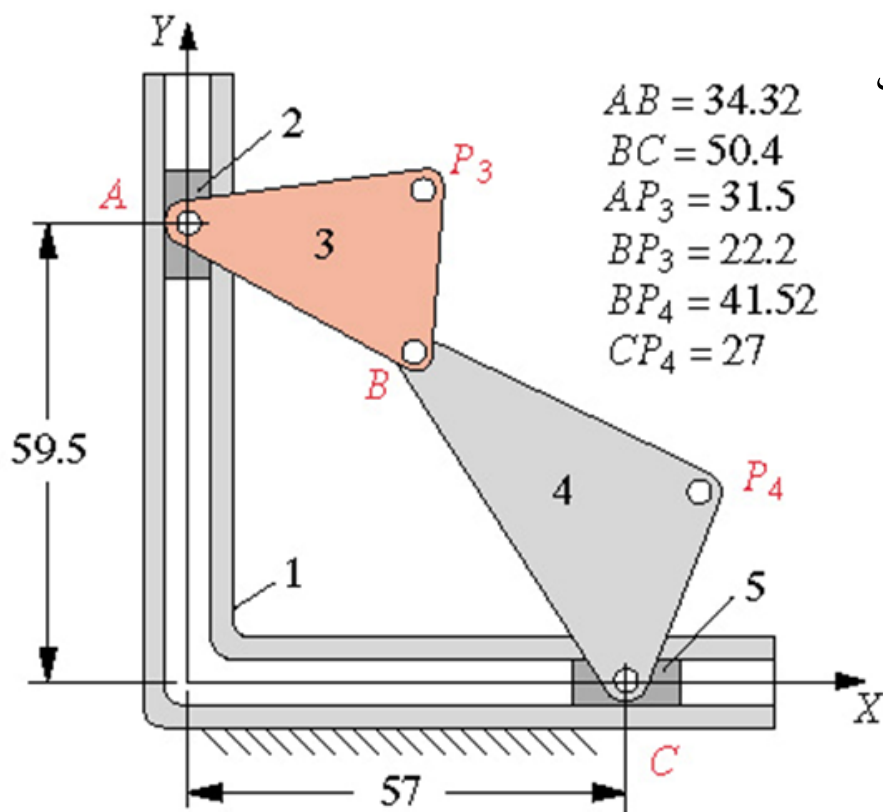


فصل ۵ سرعت در مکانیزمها

• تمرینات و مسائل فصل ۵

۳- مسئله ۲ را با استفاده از روش سزغتهای نسبی و دیاگرام سرعت حل نمایید.

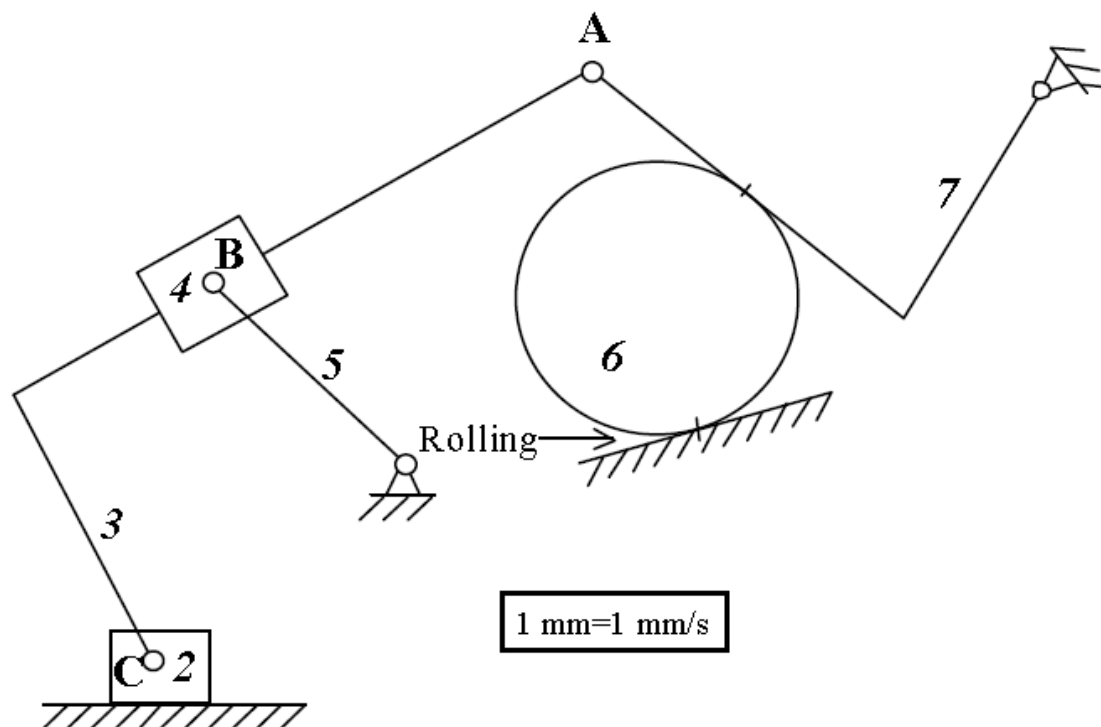
۴- ابتدا تعداد درجات آزادی مکانیزم را بررسی نمایید. در صورتی که لغزنده ۲ و ۵ با سرعت 20 mm/sec به سمت مبدا حرکت نماید، سرعت نقاط B ، P_3 و P_4 با استفاده از روش ترسیمی دلخواه بدست آورید.



فصل ۵ سرعت در مکانیزمها

• تمرینات و مسائل فصل ۵

۵- مکانیزم زیر با مقیاس کامل رسم شده است. عضو ۶ با سرعت زاویه ای 0.9 rad/sec در جهت عقربه های ساعت دوران می کند. سرعت زاویه ای اعضاء ۳، ۴ و ۵ را بدست آورید.



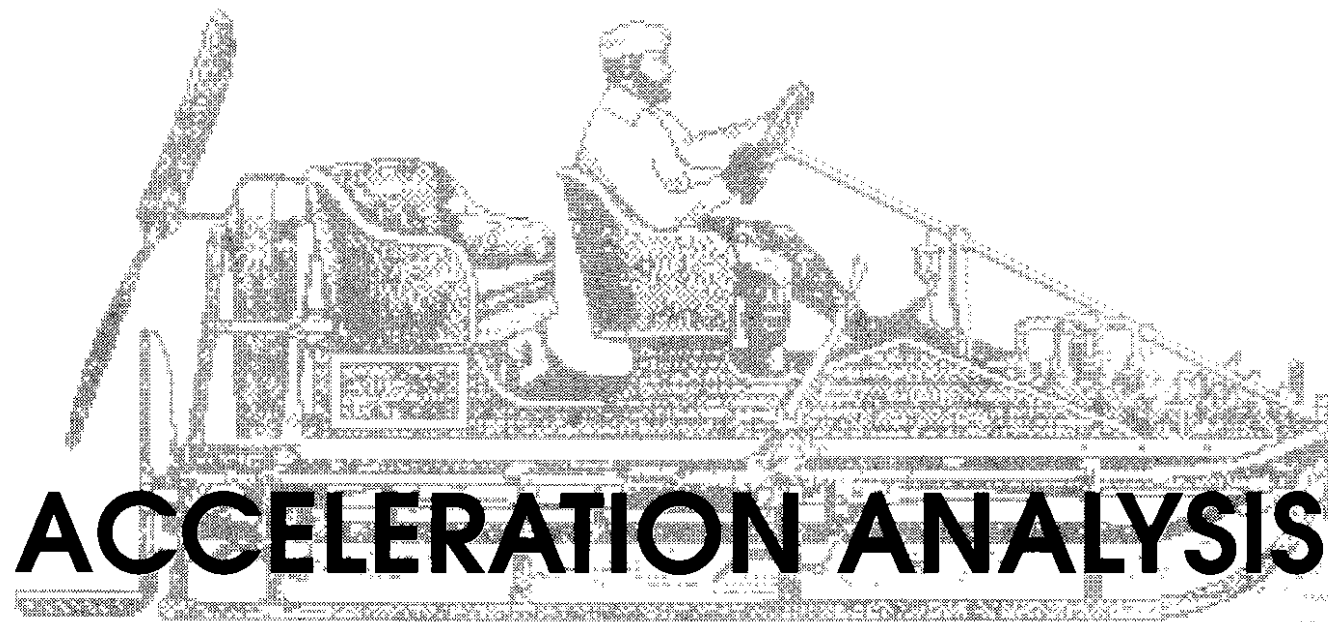


فصل ۵ سرعت در مکانیزمها

پایان فصل ۵



فصل ۶ شتاب در مکانیزمها





فصل ۶ شتاب در مکانیزمها

- در فصلهای قبلی سرعت خطی لحظه ای یک نقطه روی مکانیزم و سرعت زاویه ای لحظه عضو مورد نظر تعیین شدند. در این فصل “شتابهای خطی و زاویه ای” مورد بررسی قرار می گیرند.
- تحلیل شتاب از طریق جمع شتابهای نسبی انجام می شود، این روش شبیه به روش سرعتهای نسبی می باشد.
- در چندضلعی شتاب قطب بصورت “ O (double prime)” نمایش داده می شود.
- سایر نقاط نیز با (double prime) نشان داده می شوند.
- خطوط رسم شده از قطب به نقاط شتاب مطلق و خط بین دو نقطه شتاب نسبی را مشخص می سازد.





فصل ۶ شتاب در مکانیزمها

- معادلات شتاب

$$A^n = \frac{V^2}{R} = R\omega^2 = V\omega$$

$$A^t = R\alpha$$

$$A = \sqrt{(A^n)^2 + (A^t)^2}$$

- علاوه بر مولفه های مماسی و عمودی شتاب مولفه “Coriolis” شتاب نیز مورد بررسی قرار گرفت.

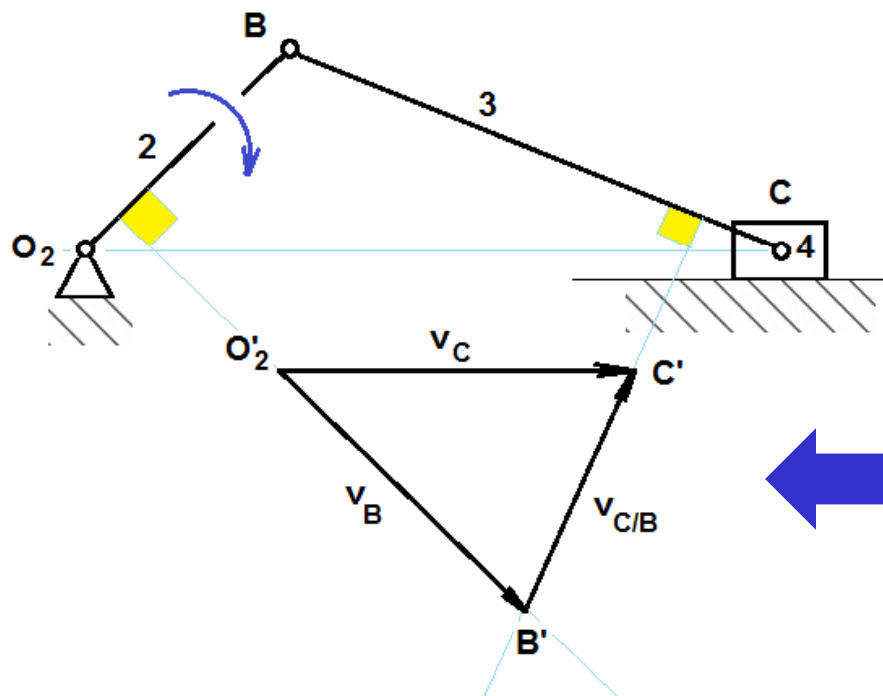
$$A_{cor} = 2V\omega$$



فصل ۶ شتاب در مکانیزمها

• شتاب خطی

– در مکانیزم لغزنده و لنگ، لنگ دارای سرعت یکنواخت ω_2 می باشد. شتاب نقطه C را بدست آورید.

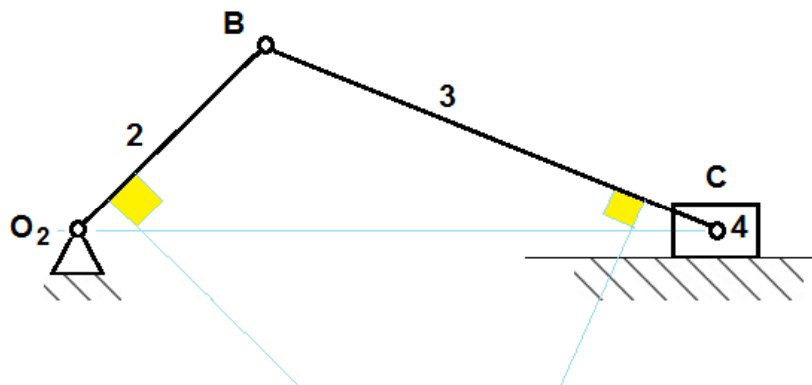


$$V_C = V_B + V_{C/B}$$



فصل ۶ شتاب در مکانیزمها

• رسم دیاگرام شتاب

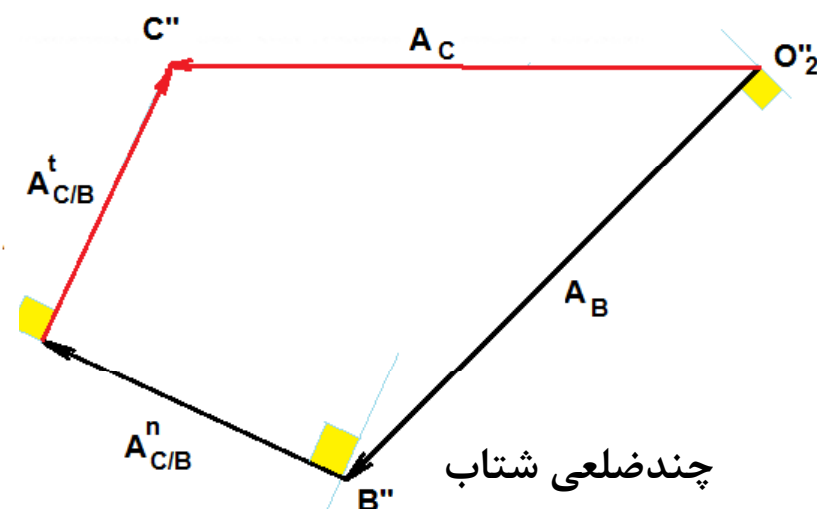
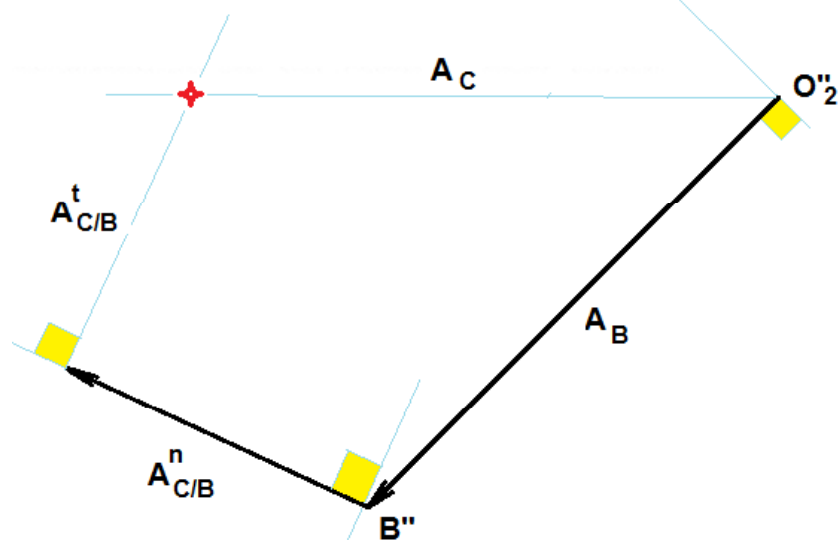


$$A_C = A_B + A_{C/B}$$

$$A_C^n + A_C^t = A_B^n + A_B^t + A_{C/B}^n + A_{C/B}^t$$

$$A_B^t = 0$$

$$A_{C/B}^n = \frac{V_{C/B}^2}{BC}$$



چندضلعی شتاب



فصل ۶ شتاب در مکانیزمها

• تصویر شتاب (Acceleration Image)

- برای هر عضو مکانیزم یک تصویر در چندضلعی شتاب وجود دارد.
- نقاط **B** و **C** را در نظر بگیرید:

$$A_{B/C} = A_{B/C}^n + A_{B/C}^t$$

$$\begin{aligned} |A_{B/C}| &= \sqrt{A_{B/C}^n{}^2 + A_{B/C}^t{}^2} \\ &= \sqrt{(BC \omega^2)^2 + (BC \alpha)^2} \\ &= BC \sqrt{\omega^4 + \alpha^2} \end{aligned}$$

لذا شتاب نسبی متناسب با طول عضو است، به عبارت دیگر نقاط روی چند ضلعی شتاب تصویر نقاط متناظر روی مکانیزم می باشند.

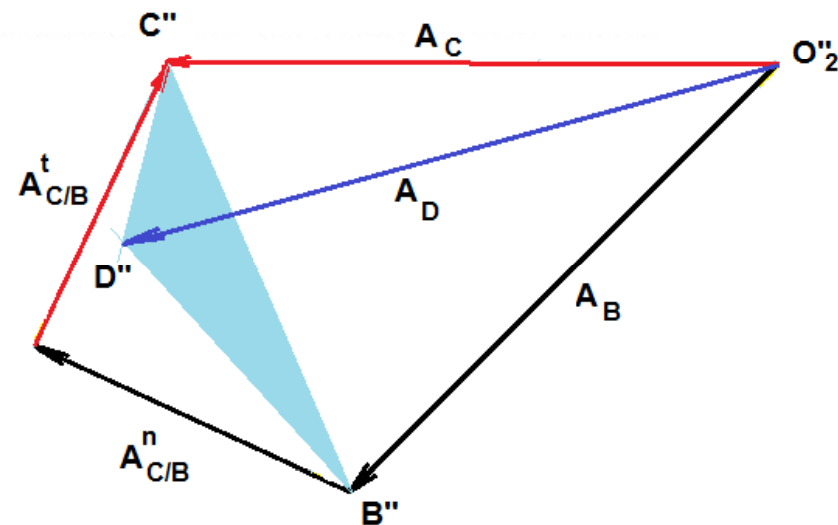
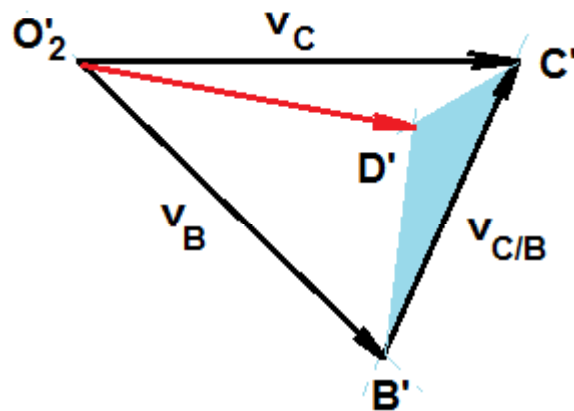
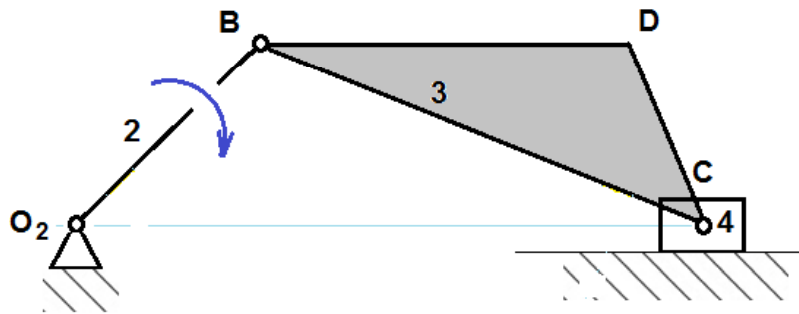




فصل ۶ شتاب در مکانیزمها

• شتاب نقطه D

– شتاب $A_{D/B}$ و $A_{D/C}$ را بدست آورید.



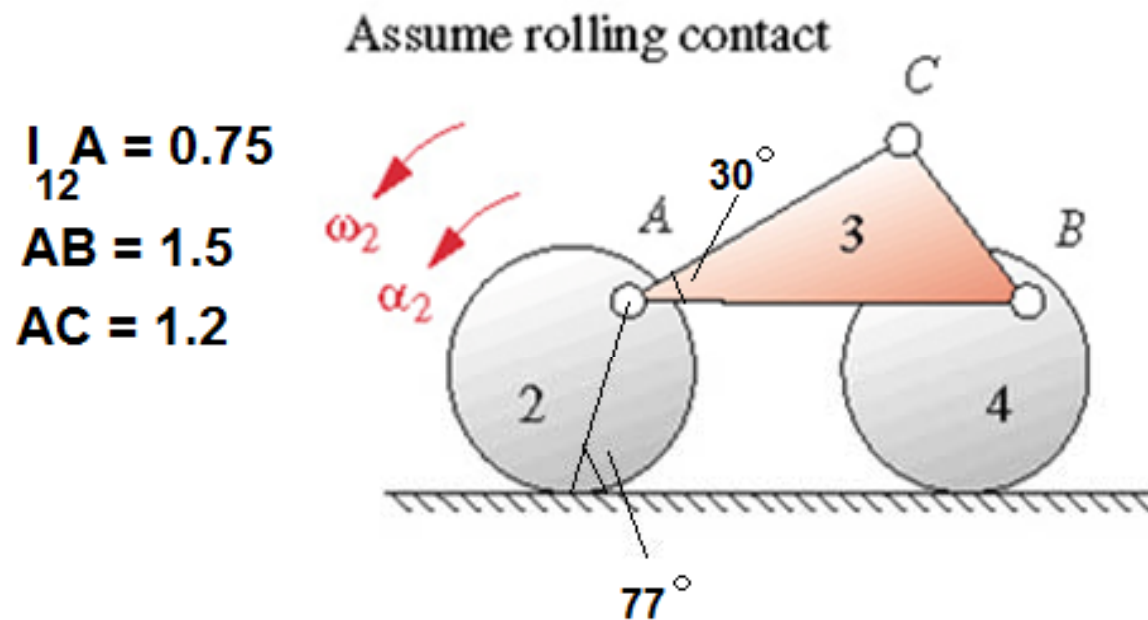


فصل ۶ شتاب در مکانیزمها

شتاب خطی نقاط A، B، C و شتاب زاویه ای عضو ۳ را بدست آورید.

$$\omega_2 = 15 \text{ rad/sec}$$

$$\alpha_2 = 10 \text{ rad/sec}^2$$

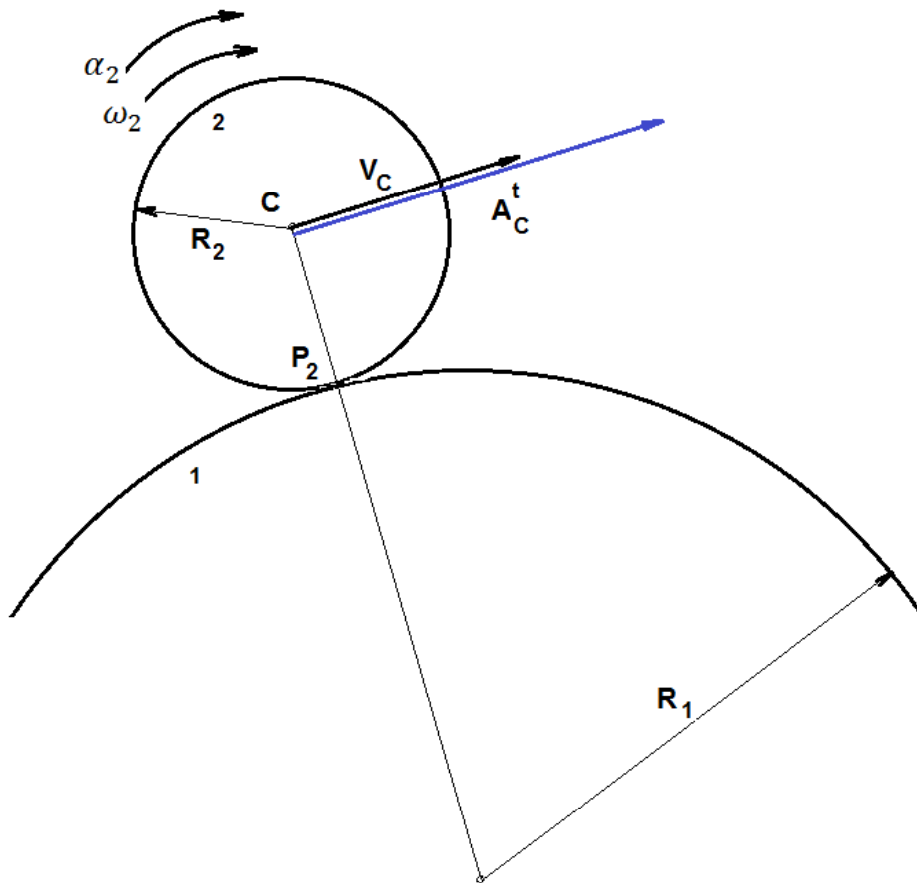


فصل ۶ شتاب در مکانیزمها

قبل از حل مثال فوق، شتاب اعضاء
در تماس غلتشی بررسی می شود

$$A_{P_2} = A_C + A_{P_2/C}$$

$$A_{P_2} = A_C^n + A_C^t + A_{P_2/C}^n + A_{P_2/C}^t$$





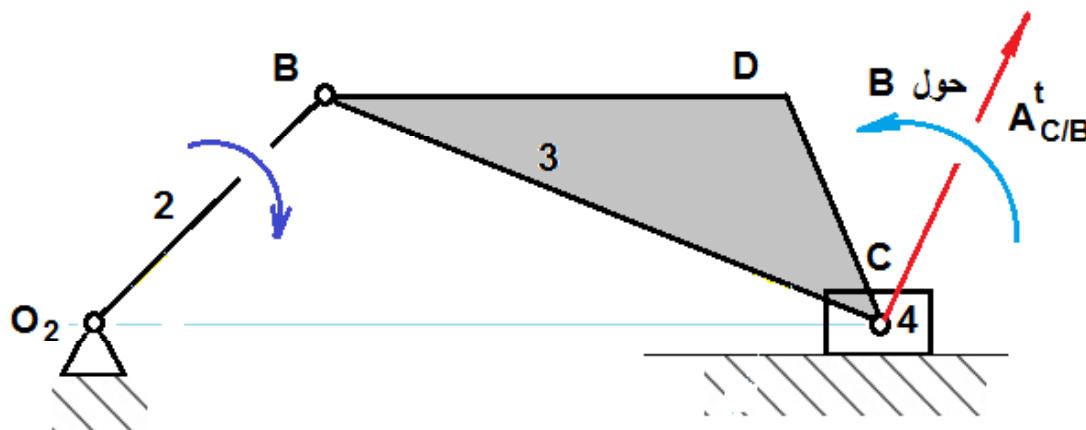
فصل ۶ شتاب در مکانیزمها

• شتاب زاویه ای

- شتاب زاویه ای هر عضو صلب برابر است با شتاب مماسی یک نقطه روی عضو نسبت به نقطه دیگری روی همان عضو تقسیم بر فاصله آن دو نقطه
- در مثال قبل شتاب زاویه عضو ۳ برابر است با

$$\alpha_3 = \frac{A_{C/B}^t}{BC}$$

- جهت شتاب زاویه ای با انتقال شتاب مماسی روی دیاگرام سینماتیکی مکانیزم بدست می آید.





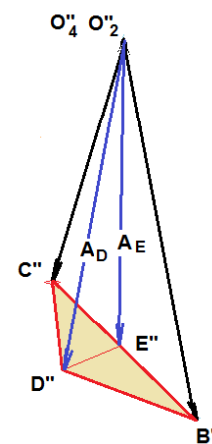
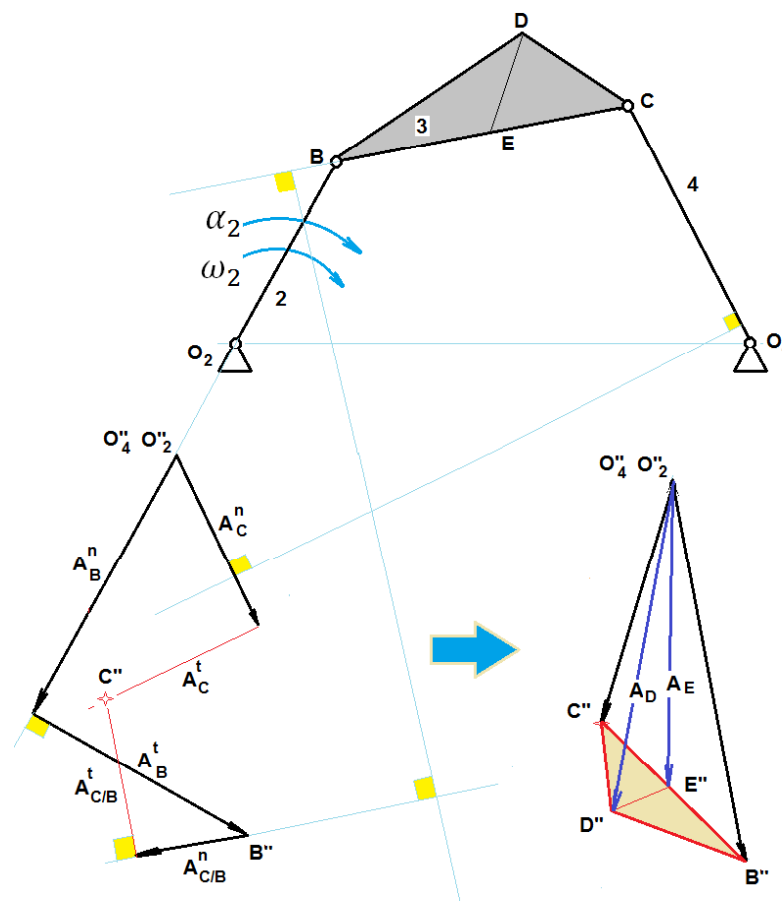
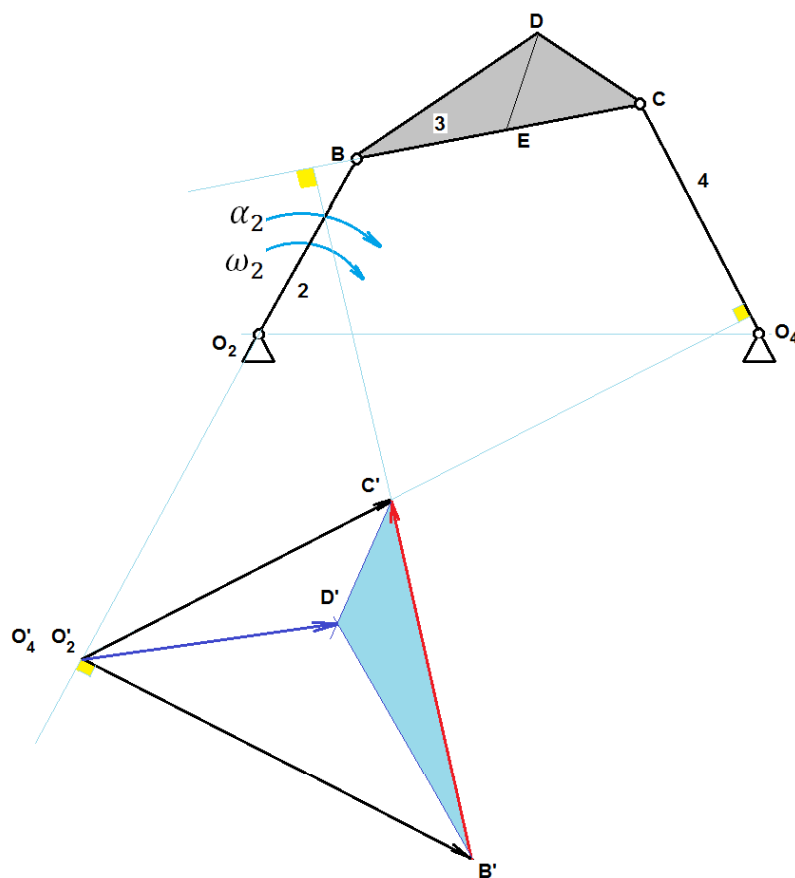
فصل ۶ شتاب در مکانیزمها

$$V_C = V_B + V_{C/B}$$

$$A_C = A_B + A_{C/B}$$

$$A_C^n + A_C^t = A_B^n + A_B^t + A_{C/B}^n + A_{C/B}^t$$

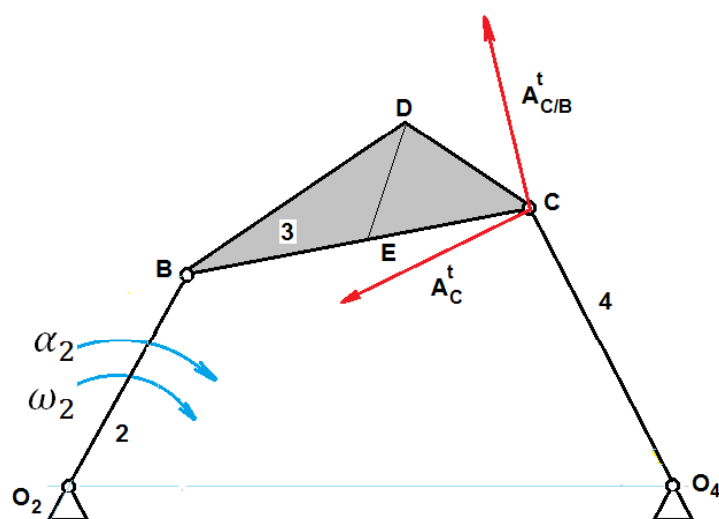
• مکانیزم چهار میله





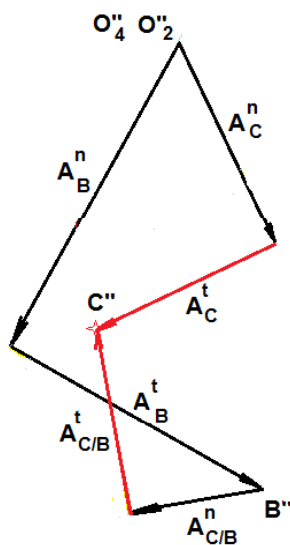
فصل ۶ شتاب در مکانیزمها

• شتاب زاویه ای



$$\alpha_3 = \frac{A_{C/B}^t}{BC}$$

$$\alpha_4 = \frac{A_C^t}{C_4}$$



فصل ۶ شتاب در مکانیزمها

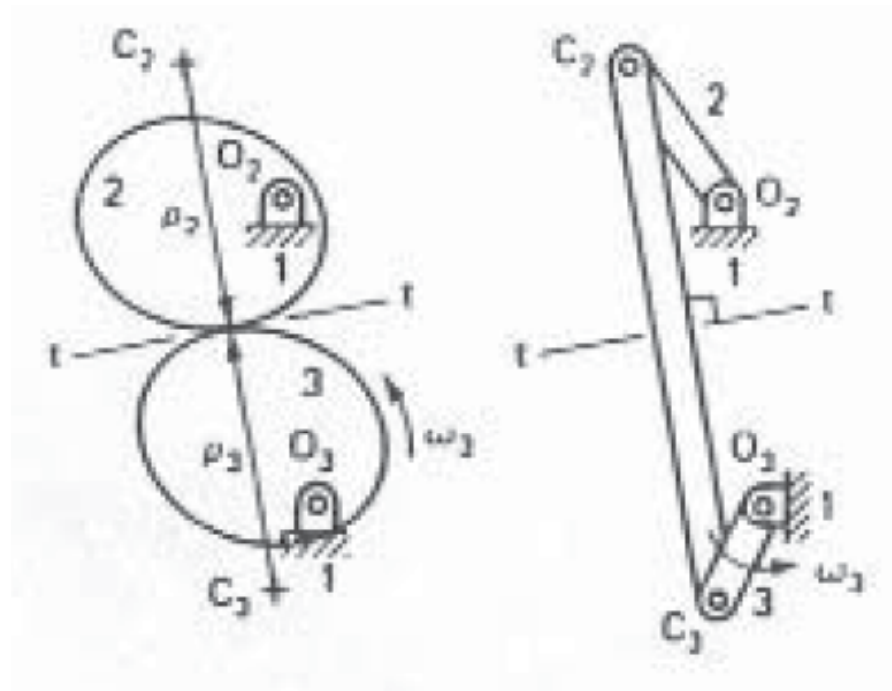
• مکانیزمهای معادل

– هنگام تحلیل شتاب مکانیزمهای تماس مستقیم به منظور ساده شدن تحلیل می توان آنها را با مکانیزم معادل جایگزین کرد.

– C_2C_3 عمود مشترک و C_2 و C_3 مراکز انحنا دو جسم است.

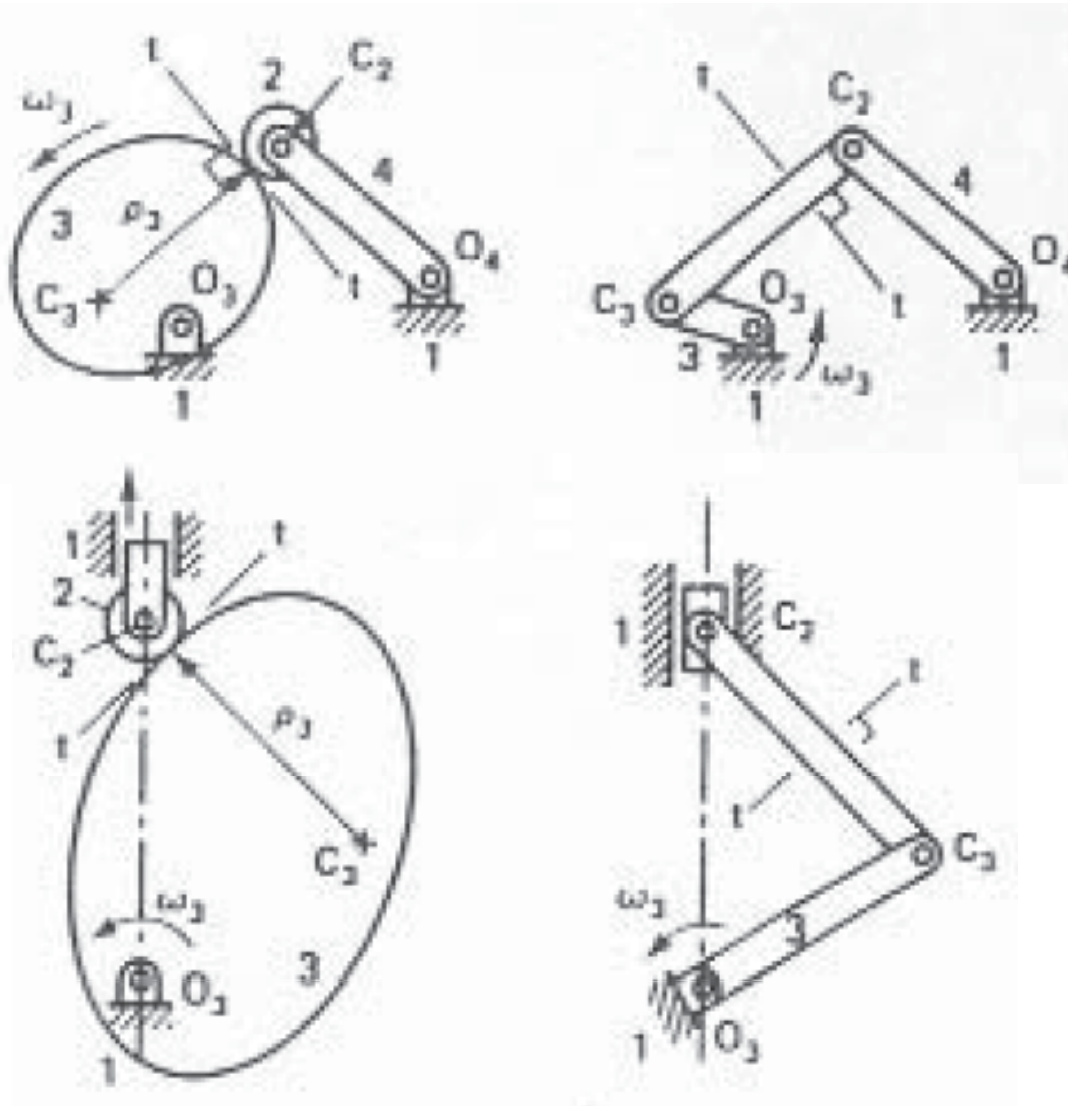
– در صورتیکه پینهای مکانیزم چهار میله در این نقاط قرار گیرد، اثبات می شود دو مکانیزم معادل یکدیگرند.

– به عبارت دیگر در این لحظه عضو محرک ۲ و متحرک ۳ دارای سرعت و شتاب یکسانی می باشند.



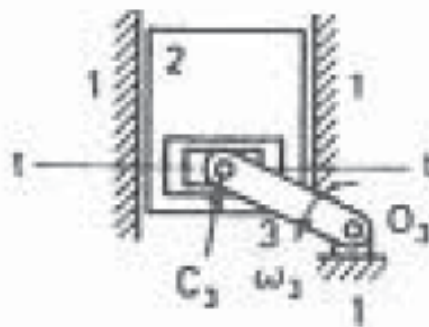
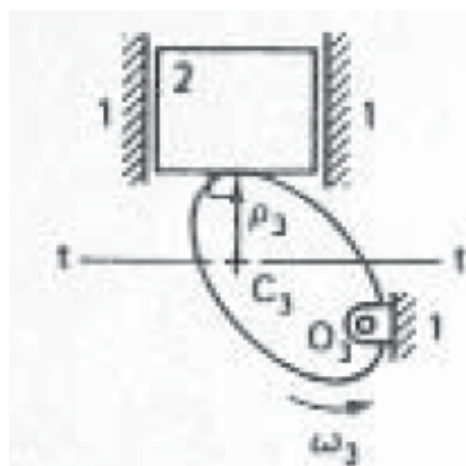
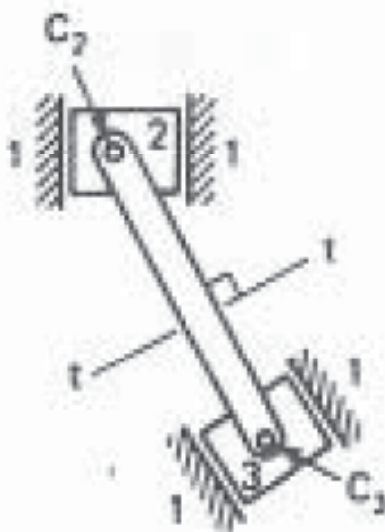
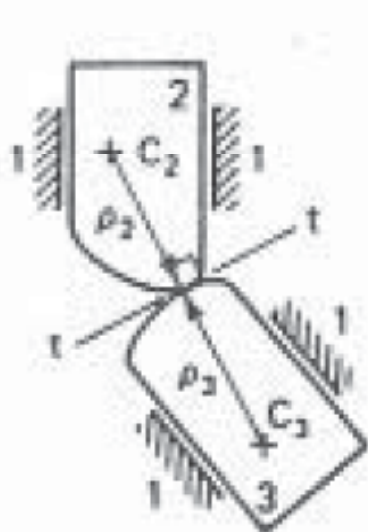
فصل ۶ شتاب در مکانیزمها

• چند مثال دیگر

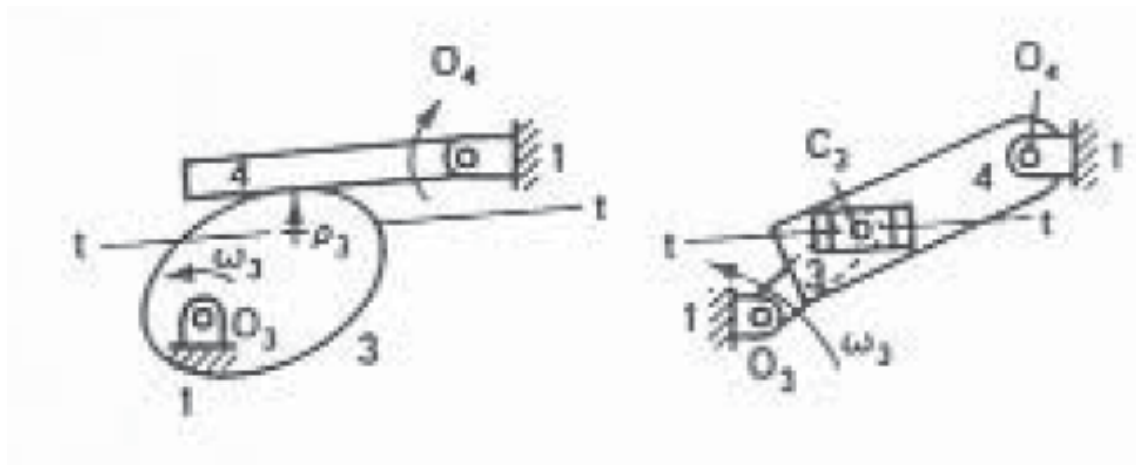
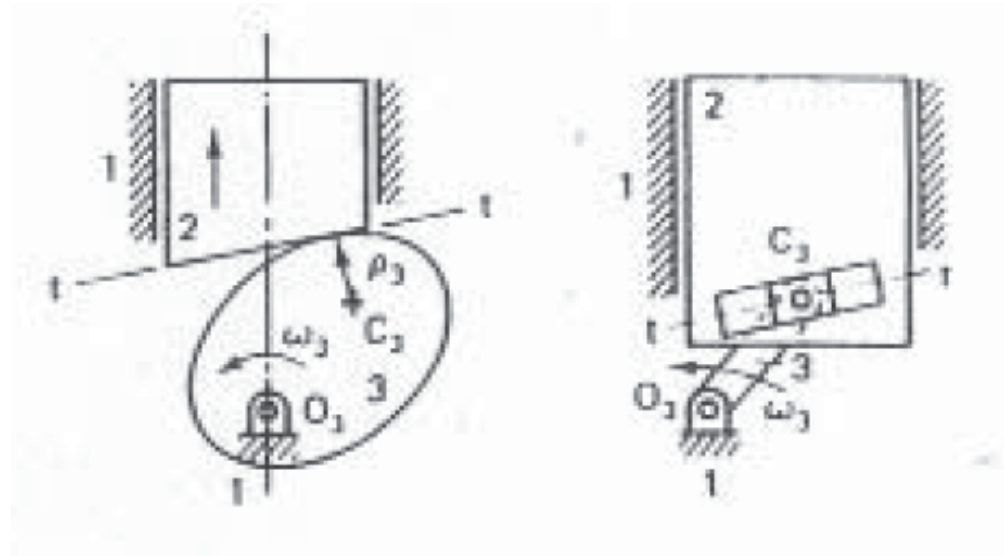




فصل ۶ شتاب در مکانیزمها



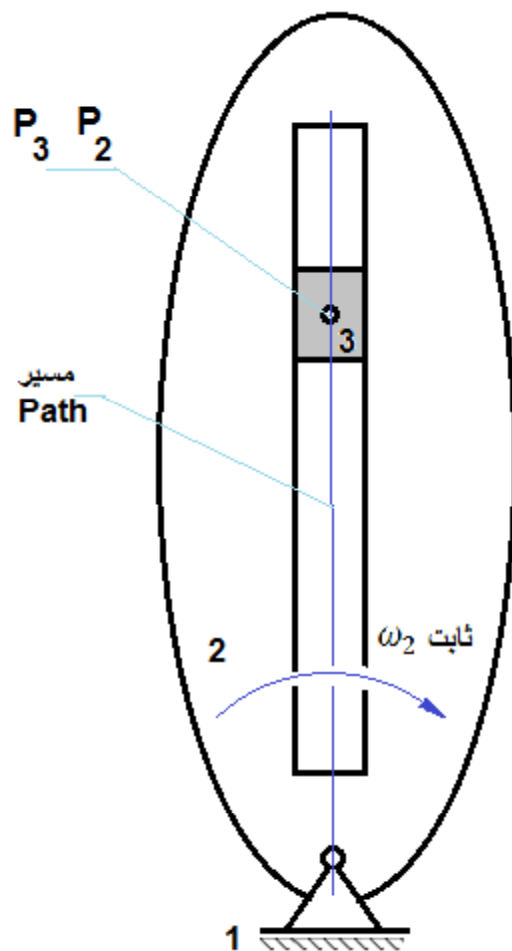
فصل ۶ شتاب در مکانیزمها



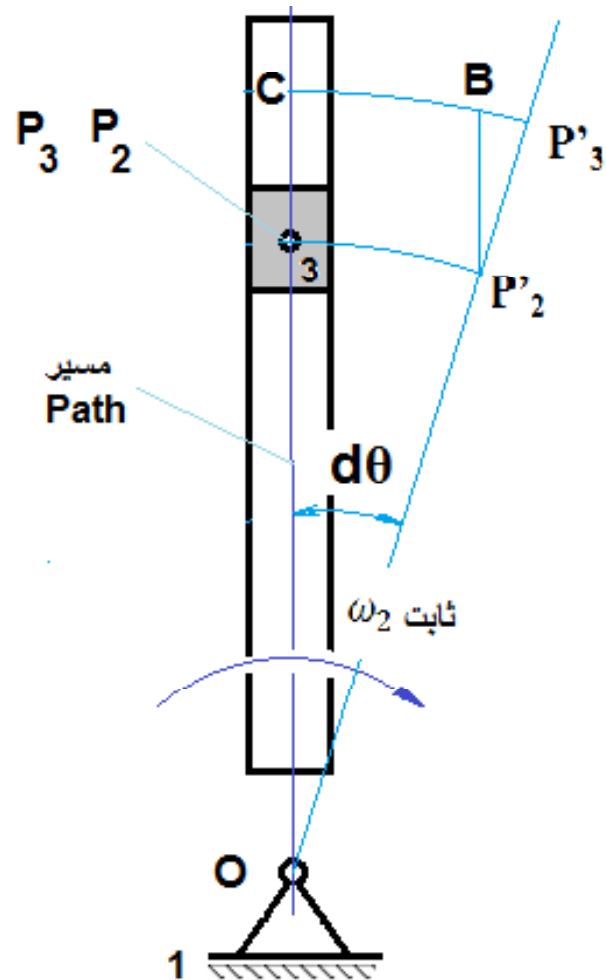
فصل ۶ شتاب در مکانیزمها

• شتاب Coriolis

- مثالهایی که تا کنون برای تحلیل شتاب مکانیزم استفاده شده اند، فقط دارای اتصال پین بوده اند و یا معکوسی از مکانیزم لغزنده لنگ انتخاب شد که عضو لغزنده دورانی نداشته است.
- وقتی که اتصال لغزنده در روی یک عضو دورانی قرار داشته باشد، مولفه دیگری از شتاب به نام “شتاب Coriolis” وجود خواهد داشت.



فصل ۶ شتاب در مکانیزمها



- در مدت زمان dt مسیر به اندازه $d\theta$ با سرعت زاویه ای ثابت ω_2 دوران داشته و نقطه P_2 به نقطه P'_2 منتقل شده است.
- در همین مدت زمان نقطه P_3 به P'_3 منتقل می شود.
- می توان این تغییر مکان را به صورت زیر نمایش داد.

$$P_2P'_2 + P'_2B + BP'_3$$

- تغییر مکان $P_2P'_2$ و P'_2B با سرعت ثابت بوده اما تغییر مکان BP'_3 در نتیجه شتاب در این راستاست:

$$arcBP'_3 = (P'_2B)d\theta$$

$$= (V_{P_3/P_2}dt)(\omega_2dt) = V_{P_3/P_2}\omega_2dt^2$$

- سرعت نقطه P_3 عمود بر خط OF بوده و با نرخ ثابتی زیاد می شود (چرا).

- به عبارت دیگر شتاب نقطه P_3 عمود بر OF ثابت است:

$$BP'_3 = ds = \frac{1}{2}A(dt)^2$$

$$V_{P_3/P_2}\omega_2dt^2 = \frac{1}{2}A(dt)^2$$

$$A = 2V_{P_3/P_2}\omega_2$$



مولفه شتاب Coriolis نقطه P_3

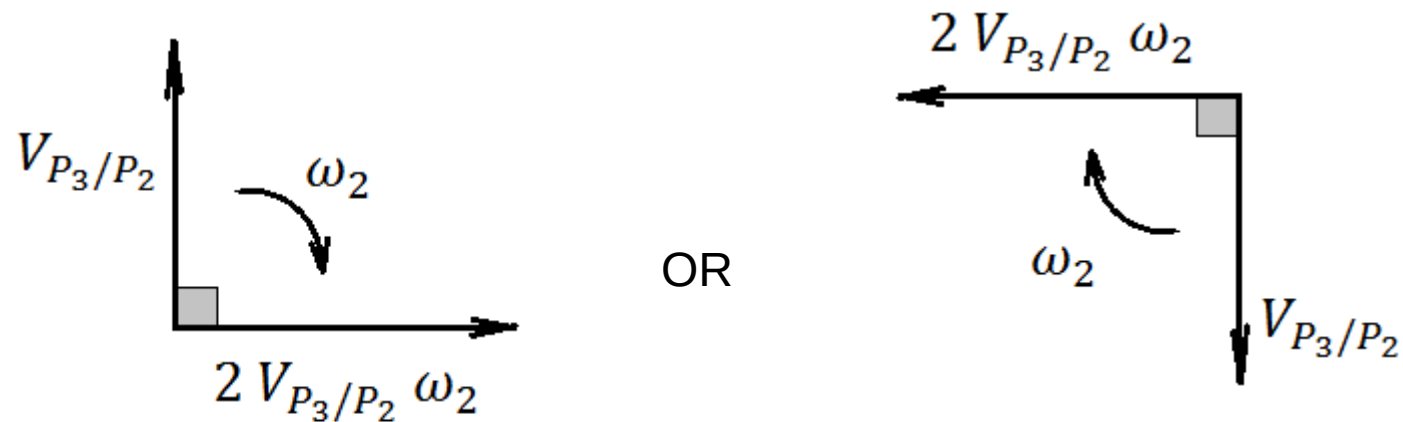




فصل ۶ شتاب در مکانیزمها

• روش تعیین جهت شتاب Coriolis

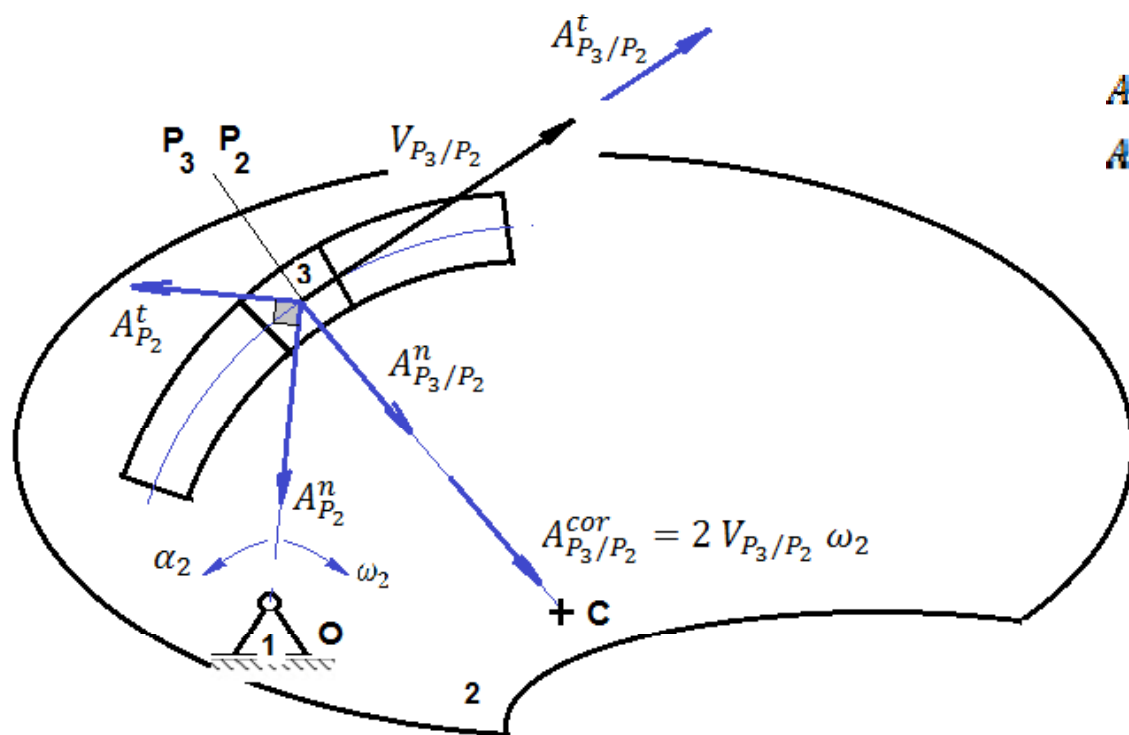
دوران 90° سرعت V_{P_3/P_2} در جهت سرعت زاویه ای ω_2 مسیر





فصل ۶ شتاب در مکانیزمها

• حالت کلی

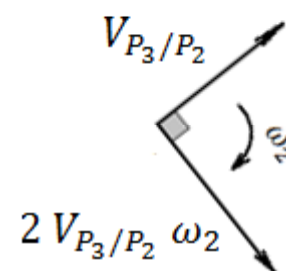


$$A_{P_3} = A_{P_2} + A_{P_3/P_2}$$

$$A_{P_3} = A_{P_2}^n + A_{P_2}^t + A_{P_3/P_2}^n + A_{P_3/P_2}^t + A_{P_3/P_2}^{cor}$$

$$A_{P_3/P_2}^n = \frac{V_{P_3/P_2}^2}{R}$$

$$A_{P_3/P_2}^{cor} = 2 V_{P_3/P_2} \omega_2$$

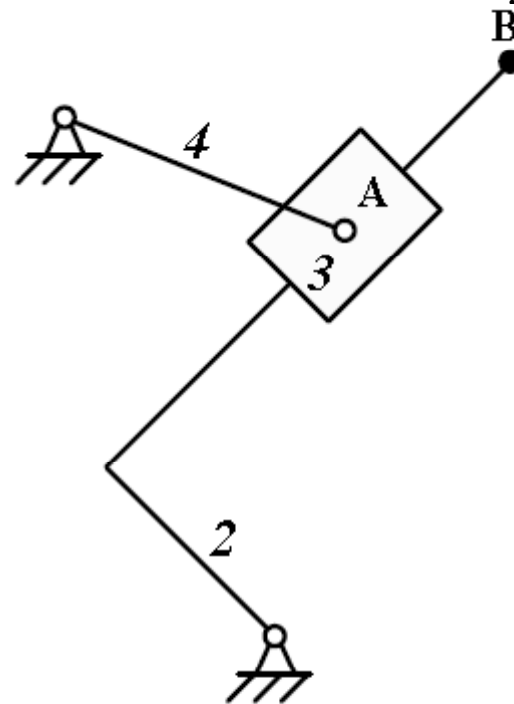




فصل ۶ شتاب در مکانیزمها

حل چند مثال

- مکانیزم نشان داده شده با مقیاس $1/3$ واقعی رسم شده است، بازوی ۴ با نرخ 1 rad/sec CCW دوران می کند و با نرخ 0.5 rad/sec^2 افزایش سرعت دارد. شتاب زاویه ای بازوی ۲ و شتاب خطی نقطه B را بدست آورید.



فصل ۶ شتاب در مکانیزمها

• تحلیل سرعت و شتاب با استفاده از روابط برداری

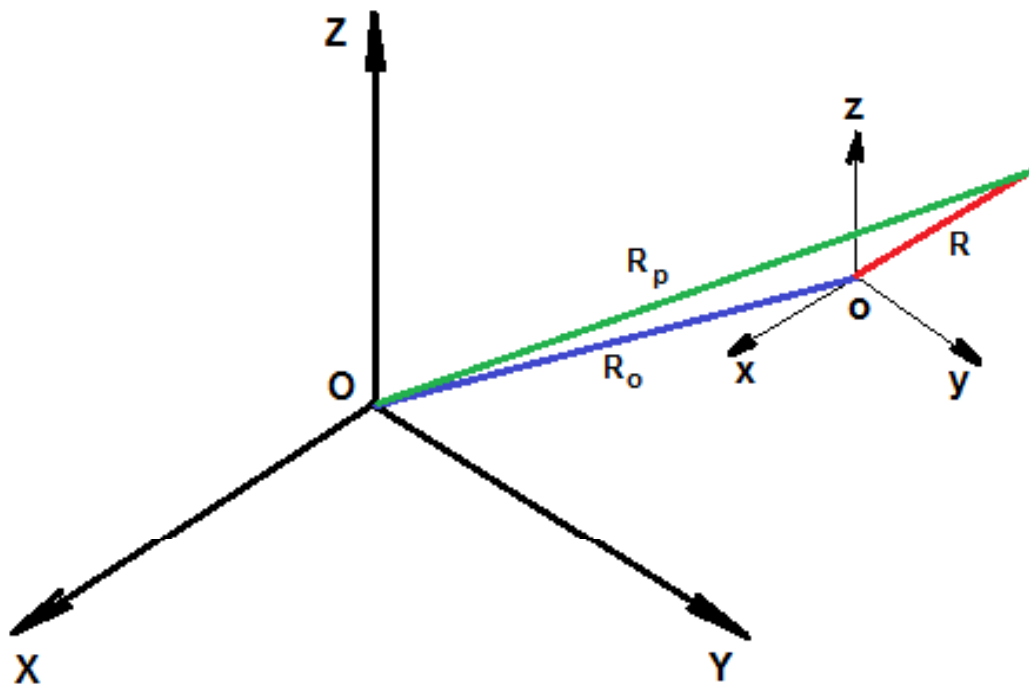
– دستگاه ثابت XYZ دستگاه متحرک xyz

– موقعیت نقطه P نسبت به دستگاه ثابت

$$\vec{R}_P = \vec{R}_O + \vec{R}$$

$$\vec{R}_O = x_o \hat{i} + y_o \hat{j} + z_o \hat{k}$$

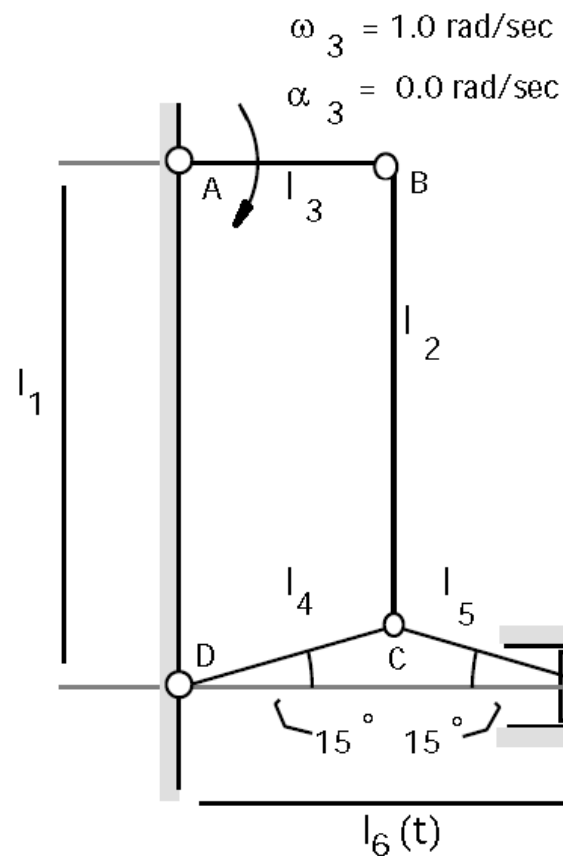
$$\vec{R} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$$





فصل ۶ شتاب در مکانیزمها

تمرینات و مسائل فصل ۶



۱- سرعت و شتاب زاویه ای بازوهای ۲، ۴ و ۵ را بدست آورده سپس شتاب خطی نقطه **E** را محاسبه نمایید.

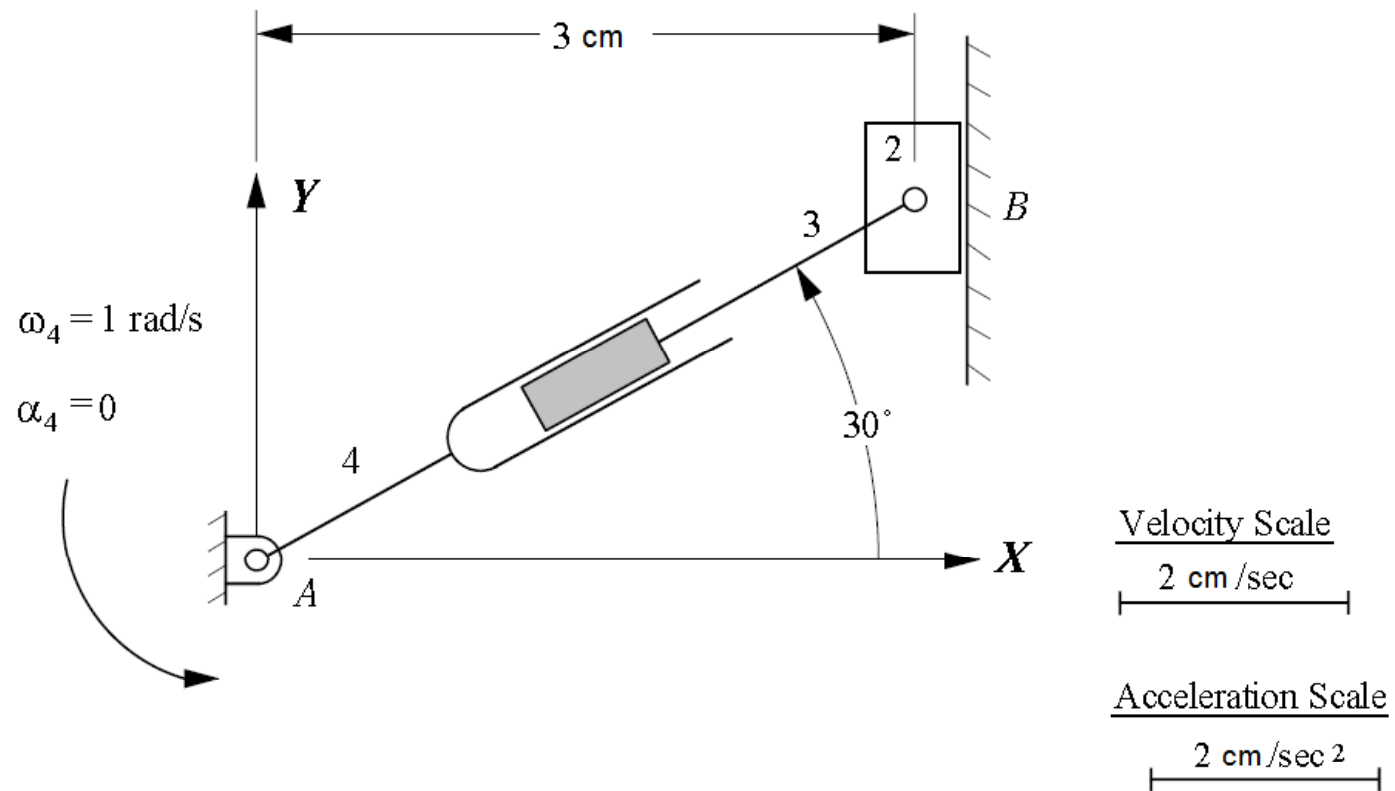
velocity scale: $1 \text{ cm/sec} = 2 \text{ cm}$
 acceleration scale: $1 \text{ cm/sec}^2 = 2 \text{ cm}$





فصل ۶ شتاب در مکانیزمها

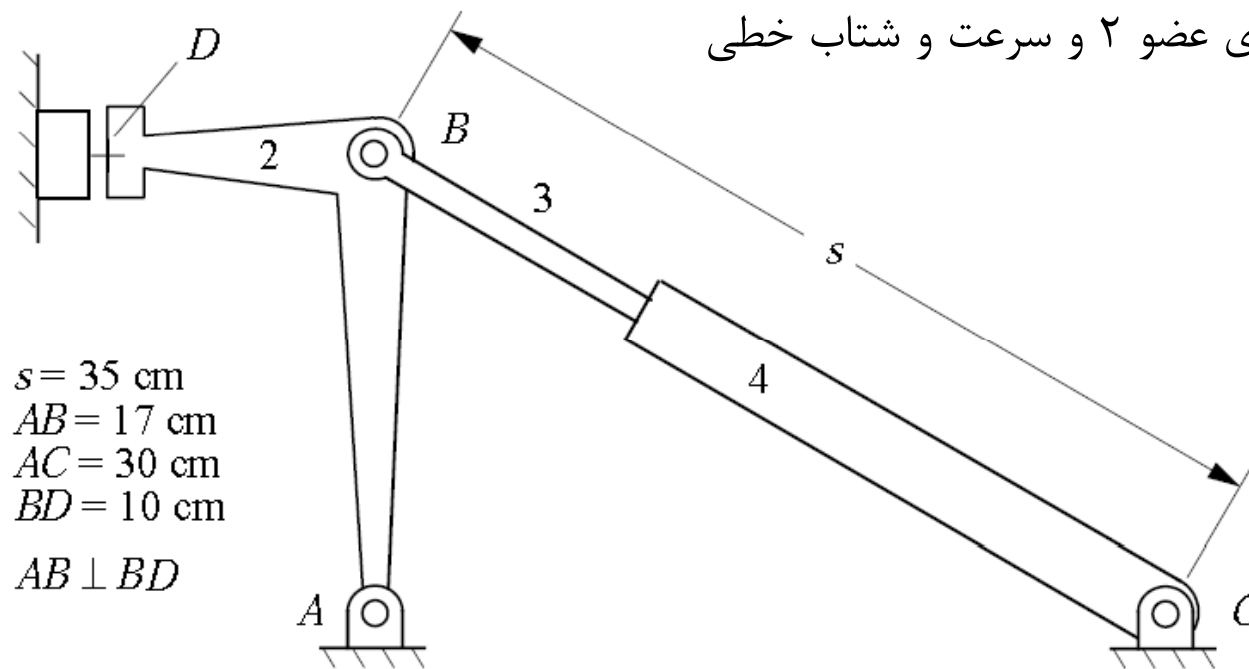
۲- سرعت و شتاب خطی نقطه B را بدست آورید.





فصل ۶ شتاب در مکانیزمها

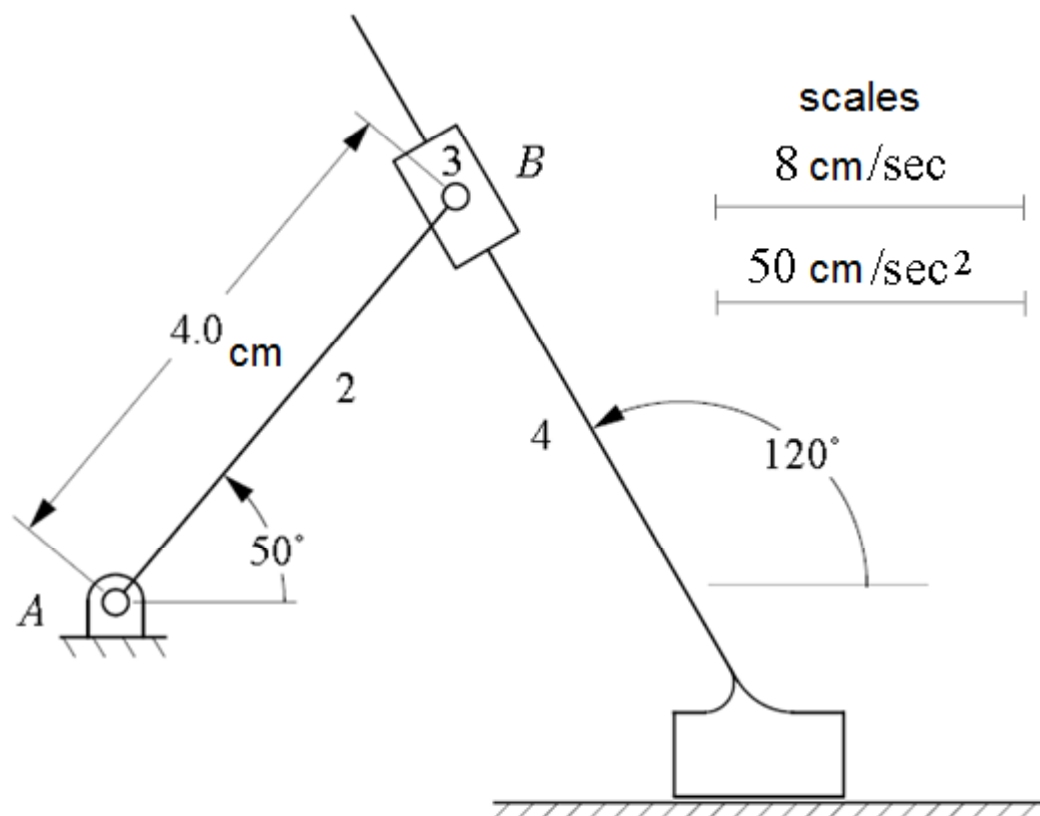
۳- مکانیزم clamping نشان داده شده در شکل توسط یک جک پنوماتیک عمل می کند. اگر سرعت و شتاب باز شدن جک به ترتیب 5 cm/s و 2 cm/s^2 باشد سرعت و شتاب زاویه ای عضو ۲ و سرعت و شتاب خطی نقطه D بدست آورید.





فصل ۶ شتاب در مکانیزمها

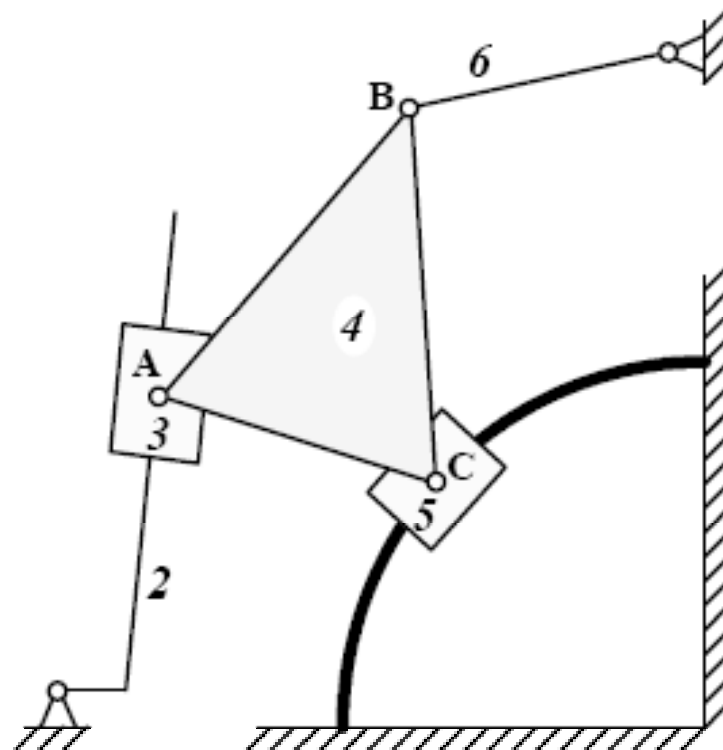
۴- در مکانیزم زیر عضو ۴ با سرعت و شتاب خطی 8 cm/s و 80 cm/s^2 به سمت چپ حرکت می کند. سرعت و شتاب زاویه ای عضو ۲ را بدست آورید.





فصل ۶ شتاب در مکانیزمها

۵- مکانیزم زیر با مقیاس نصف رسم شده است. میله ۶ با سرعت ثابت 1.15 رادیان بر ثانیه CW دوران میکند. سرعت و شتاب زاویه ای میله ۲ را با استفاده از دیاگرام سرعت و شتاب بدست آورید.





فصل ۶ شتاب در مکانیزمها

پایان





فصل ۷ تحلیل مکانیزمها قسمت اول





فصل ۷ تحلیل مکانیزمها

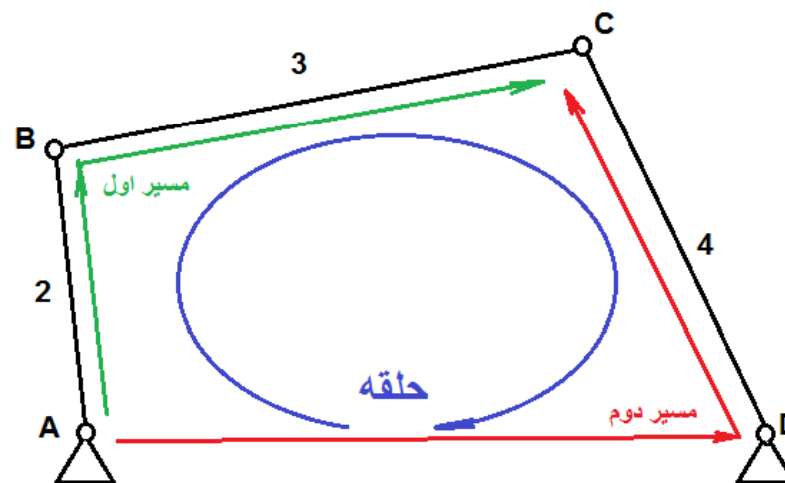
- در فصلهای قبلی از روشهای ترسیمی برای تحلیل مکانیزمها استفاده شد. در این فصل از روشهای تحلیلی یا حل ریاضی معادلات استفاده می شود.
- قیود هندسی یک مکانیزم را می توان با استفاده از معادلات حلقه بسته بردارهای تغییر مکان، سرعت و شتاب نمایش داد.
- معادلات حلقه بسته تغییر مکان بر حسب دو مسیر متفاوت که دو نقطه در یک حلقه (loop) مکانیزم به هم متصل می کنند نوشته می شوند.



فصل ۷ تحلیل مکانیزمها



- به عنوان مثال مکانیزم چهار میله زیر را در نظر بگیرید:



- نقطه **C** از دو مسیر نمایش داده می شود.

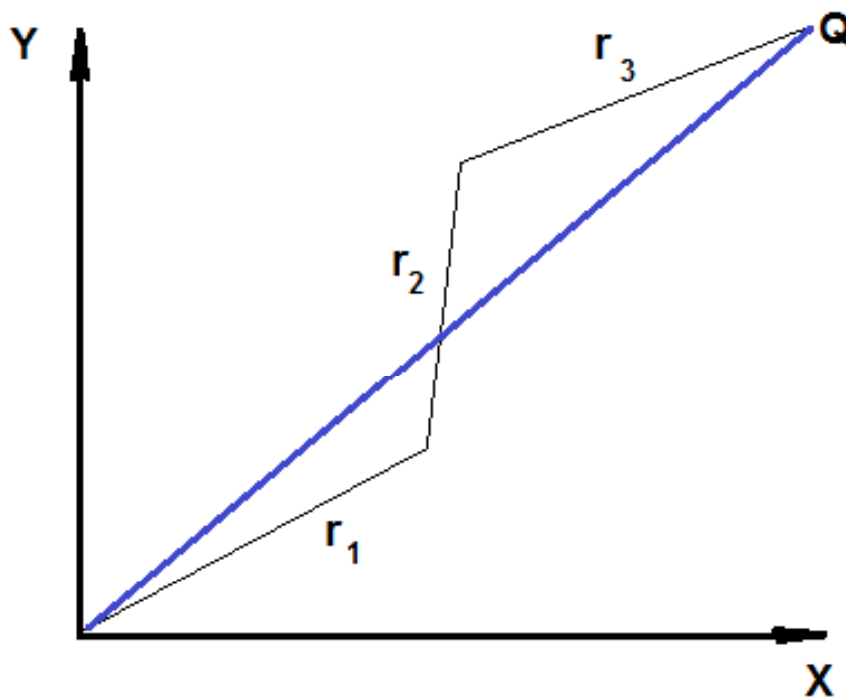


فصل ۷ تحلیل مکانیزمها



• تغییر مکان

هنگام تحلیل یک مکانیزم می توان مکانهای نسبی زنجیره نقاط مورد نظر را با زنجیره ای از بردارها نمایش داد.



$$\vec{r}_Q = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3$$

$$\vec{r}_k = r_k (\cos \theta_k \hat{i} + \sin \theta_k \hat{j})$$

تمرین از معادلات فوق مشتق بگیرید



فصل ۷ تحلیل مکانیزمها

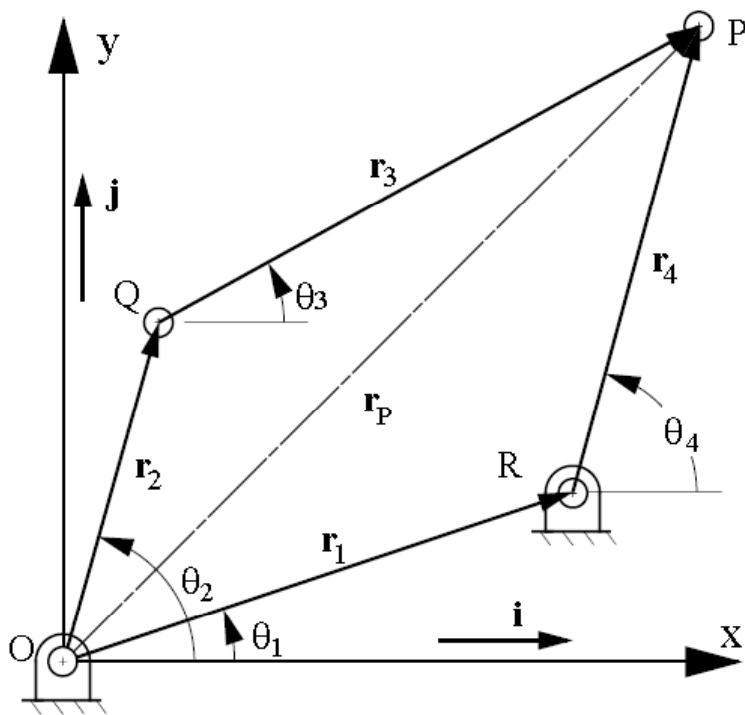


• معادلات تحلیلی مکانیزم چهار میله

معادلات حلقه بسته

$$r_P = r_2 + r_3 = r_1 + r_4$$

$$r_2(\cos\theta_2 i + \sin\theta_2 j) + r_3(\cos\theta_3 i + \sin\theta_3 j) = r_1(\cos\theta_1 i + \sin\theta_1 j) + r_4(\cos\theta_4 i + \sin\theta_4 j)$$



$$r_2 \cos\theta_2 + r_3 \cos\theta_3 = r_1 \cos\theta_1 + r_4 \cos\theta_4$$

$$r_2 \sin\theta_2 + r_3 \sin\theta_3 = r_1 \sin\theta_1 + r_4 \sin\theta_4$$

Loop closure equation



فصل ۷ تحلیل مکانیزمها



حل چهار میله برای حالتی که بازوی ۲ محرک باشد:

• بردار $\mathbf{r}_1$ ثابت، θ_1 و r_1 ثابت می باشند

• ورودی ها

– در حل تغییر مکان θ_2

– در حل سرعت $\dot{\theta}_2$

– در حل شتاب $\ddot{\theta}_2$

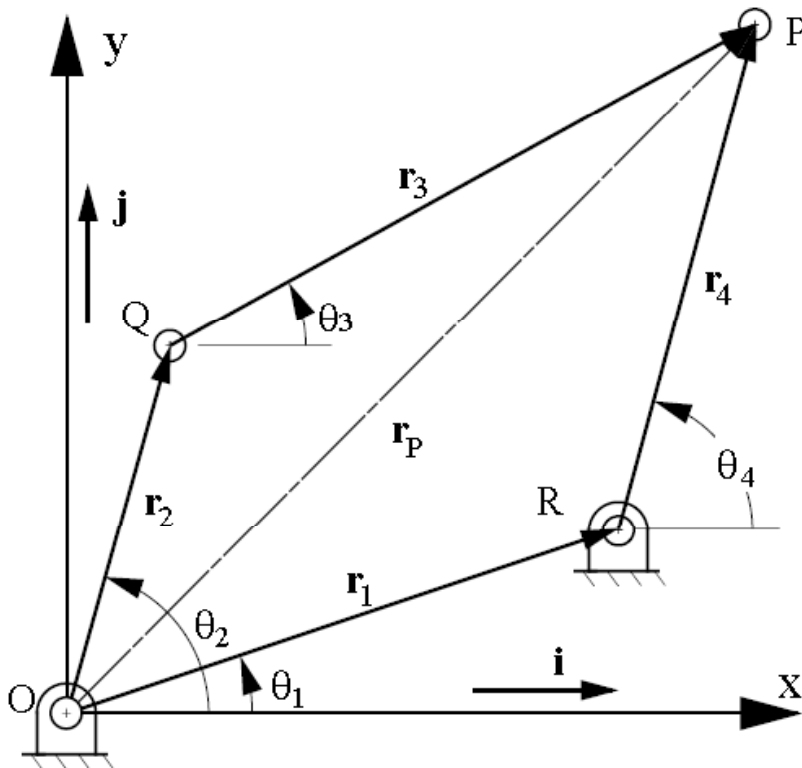
• مجهولات

– در حل تغییر مکان θ_3 θ_4

– در حل سرعت $\dot{\theta}_3$ $\dot{\theta}_4$

– در حل شتاب $\ddot{\theta}_3$ $\ddot{\theta}_4$

آیا قابل حل است؟



فصل ۷ تحلیل مکانیزمها



حل معادلات مکانیزم چهار میله

Position Analysis

دستگاه معادلات غیر خطی



Velocity Analysis

دستگاه معادلات خطی



Acceleration Analysis

دستگاه معادلات خطی



فصل ۷ تحلیل مکانیزمها



• حل معادلات موقعیت

$$r_3 \cos \theta_3 = r_1 \cos \theta_1 + r_4 \cos \theta_4 - r_2 \cos \theta_2$$

– مجهولات θ_3 θ_4

$$r_3 \sin \theta_3 = r_1 \sin \theta_1 + r_4 \sin \theta_4 - r_2 \sin \theta_2$$

– توان ۲ رساندن طرفین و حذف θ_3

$$\begin{aligned} r_3^2 = & r_1^2 + r_2^2 + r_4^2 + 2r_1r_4(\cos \theta_1 \cos \theta_4 + \sin \theta_1 \sin \theta_4) \\ & - 2r_1r_2(\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) + 2r_2r_4(\cos \theta_2 \cos \theta_4 + \sin \theta_2 \sin \theta_4) \end{aligned}$$

در معادله فوق θ_4 برحسب θ_2 بصورت ضمنی داده شده، اما آنچه مورد نظر است حل صریح می باشد.





فصل ۷ تحلیل مکانیزمها



پس از مرتب سازی بر حسب ضرایب θ_2 و θ_4 داریم

$$A \cos \theta_4 + B \sin \theta_4 + C = 0$$

where

$$A = 2r_1 r_4 \cos \theta_1 - 2r_2 r_4 \cos \theta_2$$

$$B = 2r_1 r_4 \sin \theta_1 - 2r_2 r_4 \sin \theta_2$$

$$C = r_1^2 + r_2^2 + r_4^2 - r_3^2 - 2r_1 r_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2)$$



فصل ۷ تحلیل مکانیزمها



برای حل معادله مثلثاتی فوق از تانژانت نصف قوس استفاده می کنیم:

$$\sin \theta_4 = \frac{2 \tan\left(\frac{\theta_4}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\theta_4}{2}\right)}$$

$$\cos \theta_4 = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{\theta_4}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\theta_4}{2}\right)}$$



$$(C - A)t^2 + 2Bt + (A + C) = 0$$

$$t = \tan\left(\frac{\theta_4}{2}\right)$$

t ریشه های معادله درجه ۲ فوق می باشد که هر دو جواب معتبر است

$$t = \frac{-2B + \sigma \sqrt{4B^2 - 4(C - A)(C + A)}}{2(C - A)} = \frac{-B + \sigma \sqrt{B^2 - C^2 + A^2}}{C - A}$$

$\sigma = \pm 1$ is a sign variable identifying the assembly mode





فصل ۷ تحلیل مکانیزمها

$$\theta_4 = 2 \tan^{-1} t$$

دو جواب برای θ_4 وجود دارد که هر دو جواب معتبرند.

پس از بدست آوردن θ_4 می توان معادلات حلقه را برای متغیر θ_3 حل نمود.

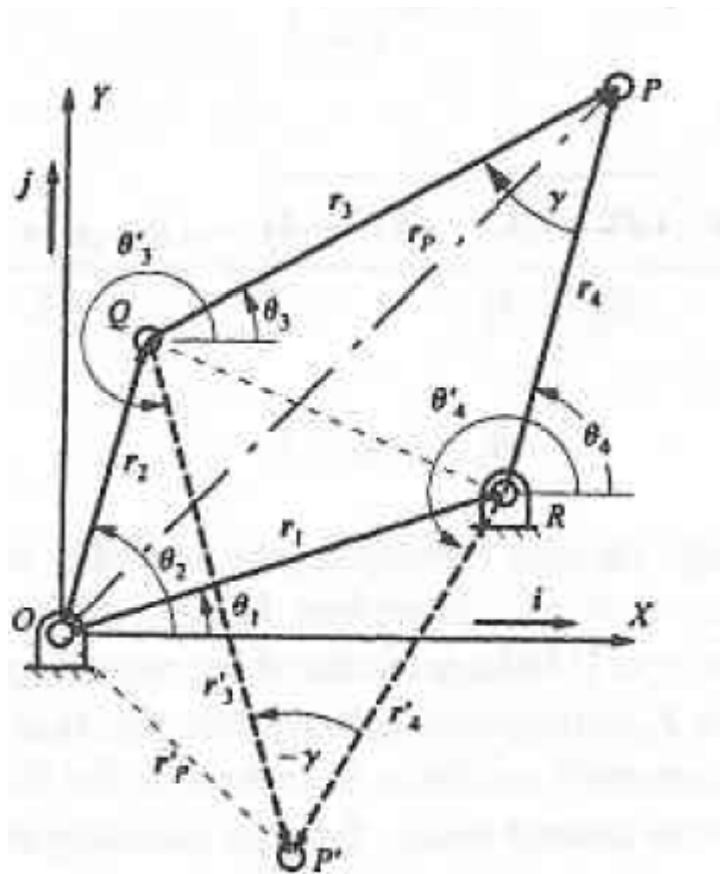
$$\theta_3 = \tan^{-1} \left[\frac{r_1 \sin \theta_1 + r_4 \sin \theta_4 - r_2 \sin \theta_2}{r_1 \cos \theta_1 + r_4 \cos \theta_4 - r_2 \cos \theta_2} \right]$$

واضح است که علامت صورت و مخرج کسر فوق معین می کند که θ_3 در کدام ربع قرار گرفته است لذا از تابع atan2 استفاده می شود.

$$\text{ATAN2}(\sin \theta_3, \cos \theta_3) = \tan^{-1} \left[\frac{\sin \theta_3}{\cos \theta_3} \right]$$



فصل ۷ تحلیل مکانیزمها



همانطوریکه بحث شد برای هر مقدار θ_2 دو مقدار θ_3 و θ_4 بدست می آید.

“ابهام در مونتاژ assembly ambiguity”

- P و P' دو حل ممکن برای برای مسئله فوق است.
- توجه شود که دو حالت نسبت به خط QR متقارن می باشند.
- علامت γ در حل دوم معکوس شده است که می توان از آن به عنوان یک شاخص انتخاب حالت استفاده کرد.



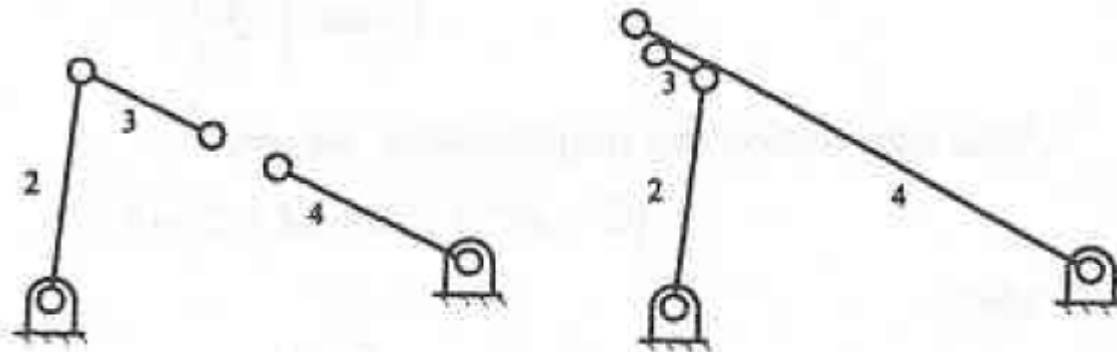


فصل ۷ تحلیل مکانیزمها

• در چه صورت t موهومی است

$$\text{اگر } (A^2 + B^2) < C^2$$

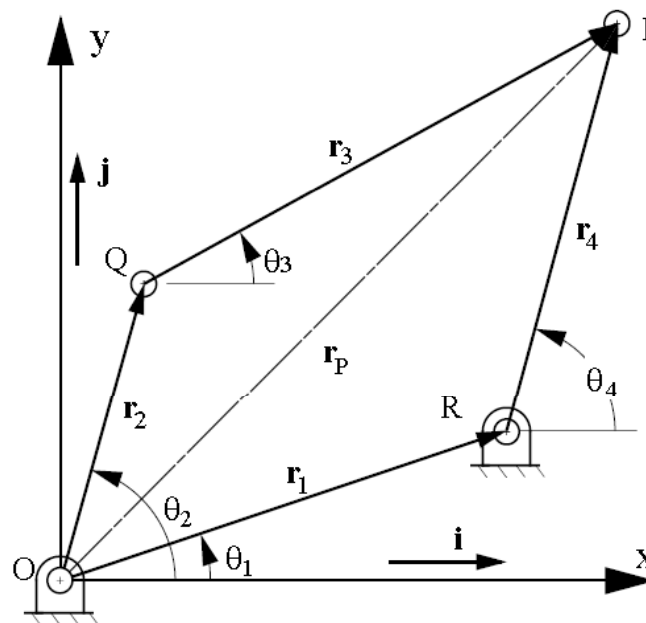
در این صورت مکانیزم داده شده در موقعیت زاویه ای θ_2 **نمی تواند** مونتاژ شود.



فصل ۷ تحلیل مکانیزمها



- پس از تعیین زوایای موقعیت هر نقطه از مکانیزم چهار میله قابل محاسبه است.
- **تمرین** - معادلات موقعیت مکانیزم چهار میله را برای حالتی که **coupler** ورودی است بدست آورید.



فصل ۷ تحلیل مکانیزمها



• معادلات سرعت مکانیزم چهار میله

با مشتق گیری از معادلات حلقه بسته موقعیت داریم

$$\dot{\mathbf{r}}_P = \dot{\mathbf{r}}_2 + \dot{\mathbf{r}}_3 = \dot{\mathbf{r}}_1 + \dot{\mathbf{r}}_4$$

توجه شود که در معادله فوق طول کلیه بازوها ثابت می باشند.

$$r_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + r_3 \dot{\theta}_3 \sin \theta_3 = r_4 \dot{\theta}_4 \sin \theta_4$$

$$r_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + r_3 \dot{\theta}_3 \cos \theta_3 = r_4 \dot{\theta}_4 \cos \theta_4$$

در معادله فوق اگر $\dot{\theta}_2$ ورودی باشد مجهولات عبارتند از $\dot{\theta}_3$ and $\dot{\theta}_4$

در معادله فوق اگر $\dot{\theta}_3$ ورودی باشد مجهولات عبارتند از $\dot{\theta}_2$ and $\dot{\theta}_4$



فصل ۷ تحلیل مکانیزمها



اگر به شکل معادلات توجه شود مشخص می شود که دستگاه معادلات خطی می باشد.
می توان معادلات سرعت به صورت ماتریس نمایش داد:

$$\begin{bmatrix} -r_J \sin \theta_J & r_4 \sin \theta_4 \\ -r_J \cos \theta_J & r_4 \cos \theta_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_J \\ \dot{\theta}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_M \dot{\theta}_M \sin \theta_M \\ r_M \dot{\theta}_M \cos \theta_M \end{Bmatrix}$$

$M = 2$ and $J = 3$ for $\dot{\theta}_2$

$M = 3$ and $J = 2$ for $\dot{\theta}_3$ as the input

وقتی سرعت زاویه ای بازوها محاسبه شدند می توان سرعت خطی هر نقطه مورد نظر روی مکانیزم را محاسبه نمود

$$\begin{aligned} \dot{r}_P &= \dot{r}_2 + \dot{r}_3 = (-r_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 - r_3 \dot{\theta}_3 \sin \theta_3) i + (r_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + r_3 \dot{\theta}_3 \cos \theta_3) j \\ &= \dot{r}_1 + \dot{r}_4 = (-r_4 \dot{\theta}_4 \sin \theta_4) i + (r_4 \dot{\theta}_4 \cos \theta_4) j \end{aligned}$$



فصل ۷ تحلیل مکانیزمها



معادلات شتاب مکانیزم چهار میله

با مشتق گیری از معادلات سرعت معادلات شتاب حاصل می شود.

$$\ddot{\vec{r}}_P = \ddot{\vec{r}}_2 + \ddot{\vec{r}}_3 = \ddot{\vec{r}}_1 + \ddot{\vec{r}}_4$$

$$r_2 \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 + r_2 \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 + r_3 \ddot{\theta}_3 \sin \theta_3 + r_3 \dot{\theta}_3^2 \cos \theta_3 = r_4 \ddot{\theta}_4 \sin \theta_4 + r_4 \dot{\theta}_4^2 \cos \theta_4$$

$$r_2 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 - r_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 + r_3 \ddot{\theta}_3 \cos \theta_3 - r_3 \dot{\theta}_3^2 \sin \theta_3 = r_4 \ddot{\theta}_4 \cos \theta_4 + r_4 \dot{\theta}_4^2 \sin \theta_4$$

اگر $\ddot{\theta}_2$ و تمامی جملات مربوط به سرعت و شتاب معلوم باشند، مجهولات عبارتند از $\ddot{\theta}_3$ and $\ddot{\theta}_4$

او وقتی که $\ddot{\theta}_3$ و تمامی جملات مربوط به سرعت و شتاب معلوم باشند، مجهولات عبارتند از $\ddot{\theta}_2$ and $\ddot{\theta}_4$



فصل ۷ تحلیل مکانیزمها



دستگاه فوق خطی بوده و به آسانی قابل حل است.

$$\begin{bmatrix} -r_J \sin \theta_J & r_4 \sin \theta_4 \\ -r_J \cos \theta_J & r_4 \cos \theta_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_J \\ \ddot{\theta}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_M \ddot{\theta}_M \sin \theta_M + r_M \dot{\theta}_M^2 \cos \theta_M + r_J \dot{\theta}_J^2 \cos \theta_J - r_4 \dot{\theta}_4^2 \cos \theta_4 \\ r_M \ddot{\theta}_M \cos \theta_M - r_M \dot{\theta}_M^2 \sin \theta_M - r_J \dot{\theta}_J^2 \sin \theta_J - r_4 \dot{\theta}_4^2 \sin \theta_4 \end{Bmatrix}$$

$M = 2$ and $J = 3$ for $\ddot{\theta}_2$ as the input

$M = 3$ and $J = 2$ for $\ddot{\theta}_3$ as the input

وقتی شتاب زاویه ای بازوها محاسبه شدند می توان شتاب خطی هر نقطه مورد نظر روی مکانیزم را محاسبه نمود

$$\begin{aligned} \vec{r}_P &= \vec{r}_2 + \vec{r}_3 = -\left(r_2 \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 + r_2 \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 + r_3 \ddot{\theta}_3 \sin \theta_3 + r_3 \dot{\theta}_3^2 \cos \theta_3\right) i \\ &\quad + \left(r_2 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 - r_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 + r_3 \ddot{\theta}_3 \cos \theta_3 - r_3 \dot{\theta}_3^2 \sin \theta_3\right) j \\ &= \vec{r}_1 + \vec{r}_4 = -\left(r_4 \ddot{\theta}_4 \sin \theta_4 + r_4 \dot{\theta}_4^2 \cos \theta_4\right) i + \left(r_4 \ddot{\theta}_4 \cos \theta_4 - r_4 \dot{\theta}_4^2 \sin \theta_4\right) j \end{aligned}$$



فصل ۷ تحلیل مکانیزمها



خلاصه معادلات مورد نیاز برای حل موقعیت، سرعت و شتاب مکانیزم چهار میله

Position	Velocity
$A = 2r_1r_4 \cos \theta_1 - 2r_Mr_4 \cos \theta_M$ $B = 2r_1r_4 \sin \theta_1 - 2r_Mr_4 \sin \theta_M$ $C = r_1^2 + r_M^2 + r_4^2 - r_J^2 - 2r_1r_M(\cos \theta_1 \cos \theta_M + \sin \theta_1 \sin \theta_M)$ $\theta_4 = 2 \tan^{-1} \left[\frac{-B + \sigma \sqrt{B^2 - C^2 + A^2}}{C - A} \right]; \quad \sigma = \pm 1$	$\begin{bmatrix} -r_J \sin \theta_J & r_4 \sin \theta_4 \\ -r_J \cos \theta_J & r_4 \cos \theta_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_J \\ \dot{\theta}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_M \dot{\theta}_M \sin \theta_M \\ r_M \dot{\theta}_M \cos \theta_M \end{Bmatrix}$ $\dot{r}_Q = \dot{r}_2 = r_2 \dot{\theta}_2 (-\sin \theta_2 i + \cos \theta_2 j)$ $\dot{r}_P = (-r_4 \dot{\theta}_4 \sin \theta_4) i + (r_4 \dot{\theta}_4 \cos \theta_4) j$
Acceleration	Acceleration
$\theta_J = \tan^{-1} \left[\frac{r_1 \sin \theta_1 + r_4 \sin \theta_4 - r_M \sin \theta_M}{r_1 \cos \theta_1 + r_4 \cos \theta_4 - r_M \cos \theta_M} \right]$ $r_Q = r_2 = r_2 (\cos \theta_2 i + \sin \theta_2 j)$ $r_P = r_2 + r_3 = r_2 (\cos \theta_2 i + \sin \theta_2 j) + r_3 (\cos \theta_3 i + \sin \theta_3 j)$ $= r_1 + r_4 = r_1 (\cos \theta_1 i + \sin \theta_1 j) + r_4 (\cos \theta_4 i + \sin \theta_4 j)$ $r_R = r_1 = r_1 (\cos \theta_1 i + \sin \theta_1 j)$	$\begin{bmatrix} -r_J \sin \theta_J & r_4 \sin \theta_4 \\ -r_J \cos \theta_J & r_4 \cos \theta_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_J \\ \ddot{\theta}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_M \ddot{\theta}_M \sin \theta_M + r_M \dot{\theta}_M^2 \cos \theta_M + r_J \ddot{\theta}_J \cos \theta_J - r_4 \ddot{\theta}_4 \cos \theta_4 \\ r_M \ddot{\theta}_M \cos \theta_M - r_M \dot{\theta}_M^2 \sin \theta_M - r_J \ddot{\theta}_J \sin \theta_J + r_4 \ddot{\theta}_4 \sin \theta_4 \end{Bmatrix}$ $\ddot{r}_Q = \ddot{r}_2 = (-r_2 \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 - r_2 \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2) i + (r_2 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 - r_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2) j$ $\ddot{r}_P = -(r_4 \ddot{\theta}_4 \sin \theta_4 + r_4 \dot{\theta}_4^2 \cos \theta_4) i + (r_4 \ddot{\theta}_4 \cos \theta_4 - r_4 \dot{\theta}_4^2 \sin \theta_4) j$



فصل ۷ تحلیل مکانیزمها



مثال: در مکانیزم زیر در صورتی که $r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = 3.5, r_4 = 4$, and $\theta_1 = 0$

باشد، مقادیر θ_3 and θ_4 را برای هر یک از حالات حل بدست آورید.

$$\theta_2 = 0, \pi/2, \pi, \text{ and } -\pi/2$$

for $\theta_2 = 0$

$$A = 2r_1r_4 \cos \theta_1 - 2r_2r_4 \cos \theta_2 = 2(1)(4) - 2(2)(4) = -8$$

$$B = 2r_1r_4 \sin \theta_1 - 2r_2r_4 \sin \theta_2 = 0$$

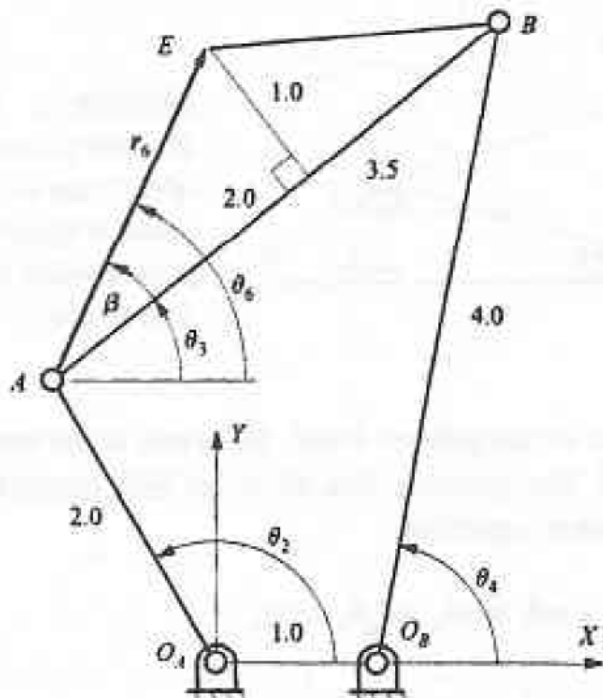
$$C = r_1^2 + r_2^2 + r_4^2 - r_3^2 - 2r_1r_2(\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) = 1^2 + 2^2 + 4^2 - 3.5^2 - 2(1)(2) = 4.75$$

$$\theta_4 = 2 \tan^{-1} \left[\frac{-B + \sqrt{B^2 - C^2 + A^2}}{C - A} \right]$$

$$= 2 \tan^{-1} \left[\frac{-0 + \sqrt{0^2 - 4.75^2 + (-8)^2}}{4.75 + 8} \right] = 2 \tan^{-1} (0.5049) = 53.58^\circ$$

$$\theta_3 = \tan^{-1} \left[\frac{r_1 \sin \theta_1 + r_4 \sin \theta_4 - r_2 \sin \theta_2}{r_1 \cos \theta_1 + r_4 \cos \theta_4 - r_2 \cos \theta_2} \right]$$

$$= \tan^{-1} \left[\frac{4 \sin(53.58^\circ)}{1 + 4 \cos(53.58^\circ) - 2} \right] = \tan^{-1} \left[\frac{3.2187}{1.3748} \right] = \tan^{-1} (2.3412) = 66.87^\circ$$



فصل ۷ تحلیل مکانیزمها



جدول خلاصه نتایج

θ_2	σ	A	B	C	θ_4	θ_3
0	1	-8	0	4.75	53.58°	66.87°
	-1				- 53.58°	- 66.87°
$\pi/2$	1	87	- 16	8.75	177.28°	- 143.85°
	-1				55.85°	21.98°
π	1	24	0	12.75	- 122.09°	- 75.52°
	-1				122.09°	75.52°
$\sim \pi/21$	1	8	16	8.75	- 55.85°	- 21.98°
	-1				- 177.28°	148.85°



فصل ۷ تحلیل مکانیزمها



در صورتی که $\dot{\theta}_2 = 10 \text{ rad/s}$ and $\ddot{\theta}_2 = 0$ مقادیر $\dot{\theta}_3, \dot{\theta}_4, \ddot{\theta}_3, \ddot{\theta}_4$ برای حالت $\theta_2 = 0$ محاسبه نمایید.

$$\begin{bmatrix} -r_3 \sin \theta_3 & r_4 \sin \theta_4 \\ -r_3 \cos \theta_3 & r_4 \cos \theta_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\ r_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3.5 \sin(66.87^\circ) & 4 \sin(53.58^\circ) \\ -3.5 \cos(66.87^\circ) & 4 \cos(53.58^\circ) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2(10) \sin(0^\circ) \\ 2(10) \cos(0^\circ) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.2187 & 3.2187 \\ -1.3749 & 2.3748 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 20 \end{Bmatrix}$$

$$\longrightarrow \dot{\theta}_3 = 20 \text{ rad/s and } \dot{\theta}_4 = 20.0 \text{ rad/s}$$

$$\begin{bmatrix} -r_3 \sin \theta_3 & r_4 \sin \theta_4 \\ -r_3 \cos \theta_3 & r_4 \cos \theta_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_2 \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 + r_2 \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 + r_3 \dot{\theta}_3^2 \cos \theta_3 - r_4 \dot{\theta}_4^2 \cos \theta_4 \\ r_2 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 - r_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 - r_3 \dot{\theta}_3^2 \sin \theta_3 - r_4 \dot{\theta}_4^2 \sin \theta_4 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3.2187 & 3.2187 \\ -1.3749 & 2.3748 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 + 2(10)^2 + 3.5(20)^2 \cos(66.87^\circ) - 4(20)^2 \cos(53.58^\circ) \\ 0 - 0 - 3.5(20)^2 \sin(66.87^\circ) + 4(20)^2 \sin(53.58^\circ) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -200.0265 \\ -0.0363 \end{Bmatrix}$$

$$\longrightarrow \ddot{\theta}_3 = 147.5634 \text{ rad/s}^2 \text{ and } \ddot{\theta}_4 = 85.4150 \text{ rad/s}^2$$

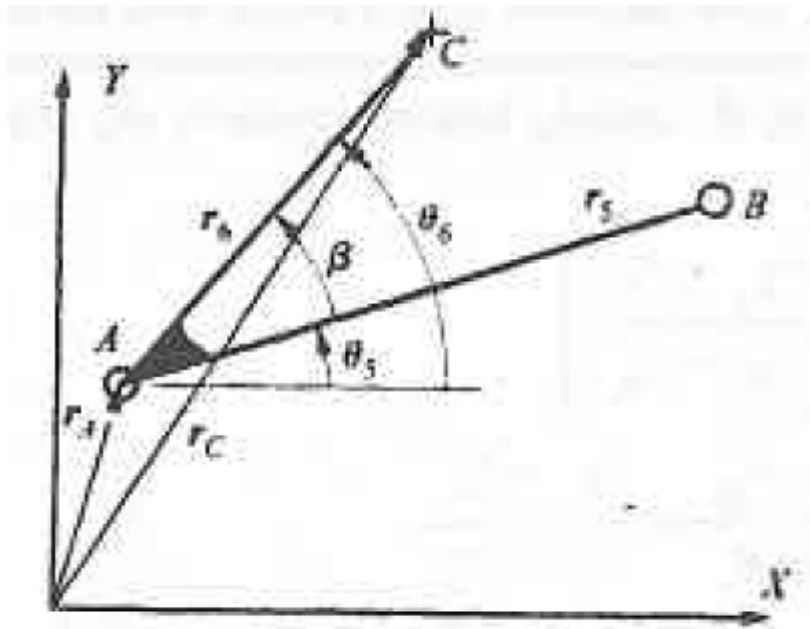


فصل ۷ تحلیل مکانیزمها



معادلات تحلیلی برای جسم صلب پس از تعیین سینماتیک دو نقطه

حالت اول: θ_5 , $\dot{\theta}_5$, and $\ddot{\theta}_5$ are known



$$\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_6$$

$$\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_A + r_6(\cos \theta_6 \mathbf{i} + \sin \theta_6 \mathbf{j})$$

$$\theta_6 = \beta + \theta_5$$

$$\dot{\mathbf{r}}_C = \dot{\mathbf{r}}_A + r_6 \dot{\theta}_5 (-\sin \theta_6 \mathbf{i} + \cos \theta_6 \mathbf{j})$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_C = \ddot{\mathbf{r}}_A + r_6 \ddot{\theta}_5 (-\sin \theta_6 \mathbf{i} + \cos \theta_6 \mathbf{j}) - r_6 \dot{\theta}_5^2 (\cos \theta_6 \mathbf{i} + \sin \theta_6 \mathbf{j})$$



فصل ۷ تحلیل مکانیزمها



حالت دوم: وقتی سینماتیک دو نقطه از جسم داده شده است.

$$\theta_5 = \tan^{-1} \left[\frac{r_{B_r} - r_{A_r}}{r_{B_t} - r_{A_t}} \right]$$

$$\dot{r}_B = \dot{r}_A + r_5 \dot{\theta}_5 (-\sin \theta_5 i + \cos \theta_5 j)$$

$$\dot{\theta}_5 = -\frac{\dot{r}_{B_t} - \dot{r}_{A_t}}{r_5 \sin \theta_5} = \frac{\dot{r}_{B_r} - \dot{r}_{A_r}}{r_5 \cos \theta_5}$$

$$\ddot{r}_B = \ddot{r}_A + r_5 \ddot{\theta}_5 (-\sin \theta_5 i + \cos \theta_5 j) - r_5 \dot{\theta}_5^2 (\cos \theta_5 i + \sin \theta_5 j)$$

$$\ddot{\theta}_5 = -\frac{(\ddot{r}_{B_t} - \ddot{r}_{A_t}) + r_5 \dot{\theta}_5^2 \cos \theta_5}{r_5 \sin \theta_5} = \frac{(\ddot{r}_{B_r} - \ddot{r}_{A_r}) + r_5 \dot{\theta}_5^2 \sin \theta_5}{r_5 \cos \theta_5}$$



فصل ۷ تحلیل مکانیزمها



$$r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = 3.5, r_4 = 4, \text{ and } \theta_1 = 0$$

مثال: در مثال قبل سرعت و شتاب نقطه E_3 را

$$\theta_2 = 0, \dot{\theta}_2 = 10 \text{ rad/s}, \ddot{\theta}_2 = 0, \text{ and } \sigma = 1 \text{ بدست آورید.}$$

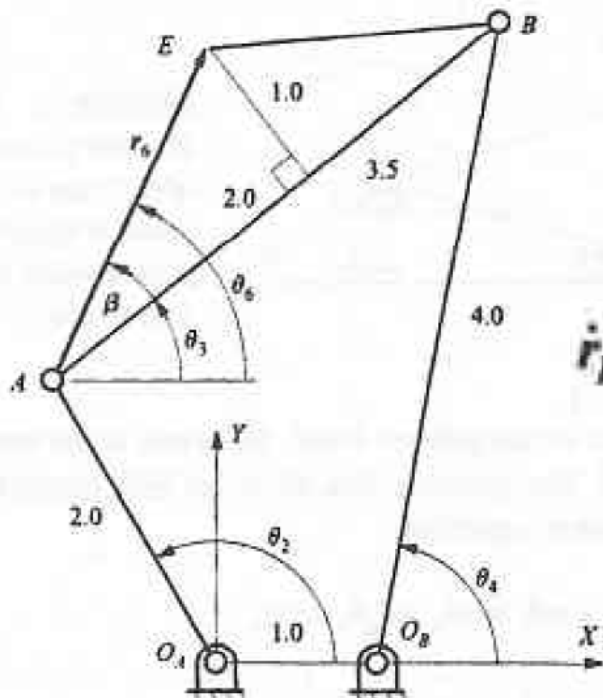
$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 26.565^\circ$$

$$r_6 = AE = 2.0 / \cos(26.565^\circ) = 2.236 \text{ cm}$$

$$\dot{\mathbf{r}}_{E_3} = r_2 \dot{\theta}_2 (-\sin \theta_2 \mathbf{i} + \cos \theta_2 \mathbf{j}) + r_6 \dot{\theta}_3 (-\sin \theta_6 \mathbf{i} + \cos \theta_6 \mathbf{j})$$

$$\theta_2 = 0, \theta_3 = 66.87^\circ, \dot{\theta}_2 = 10.0 \text{ rad/s}, \text{ and } \dot{\theta}_3 = 20.0 \text{ rad/s}$$

$$\theta_6 = \theta_3 + \beta = 66.87^\circ + 26.565^\circ = 93.435^\circ$$



$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_{E_3} &= 2(10)(0\mathbf{i} + \mathbf{j}) + 2.236(20.0)(-\sin(93.435^\circ)\mathbf{i} + \cos(93.435^\circ)\mathbf{j}) \\ &= 20\mathbf{j} - 44.640\mathbf{i} - 2.679\mathbf{j} = -44.64\mathbf{i} + 17.32\mathbf{j} \text{ cm/s} \end{aligned}$$





فصل ۷ تحلیل مکانیزمها

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}}_{E_3} = & r_2 \ddot{\theta}_2 (-\sin \theta_2 \mathbf{i} + \cos \theta_2 \mathbf{j}) - r_2 \dot{\theta}_2^2 (\cos \theta_2 \mathbf{i} + \sin \theta_2 \mathbf{j}) \\ & + r_6 \ddot{\theta}_3 (-\sin \theta_6 \mathbf{i} + \cos \theta_6 \mathbf{j}) - r_6 \dot{\theta}_3^2 (\cos \theta_6 \mathbf{i} + \sin \theta_6 \mathbf{j})\end{aligned}$$

$$\theta_2 = 0, \theta_3 = 66.87^\circ, \dot{\theta}_2 = 10.0 \text{ rad/s}, \ddot{\theta}_2 = 0 \text{ rad/s}^2, \dot{\theta}_3 = 20.0 \text{ rad/s}, \text{ and } \ddot{\theta}_3 = 147.56 \text{ rad/s}^2$$

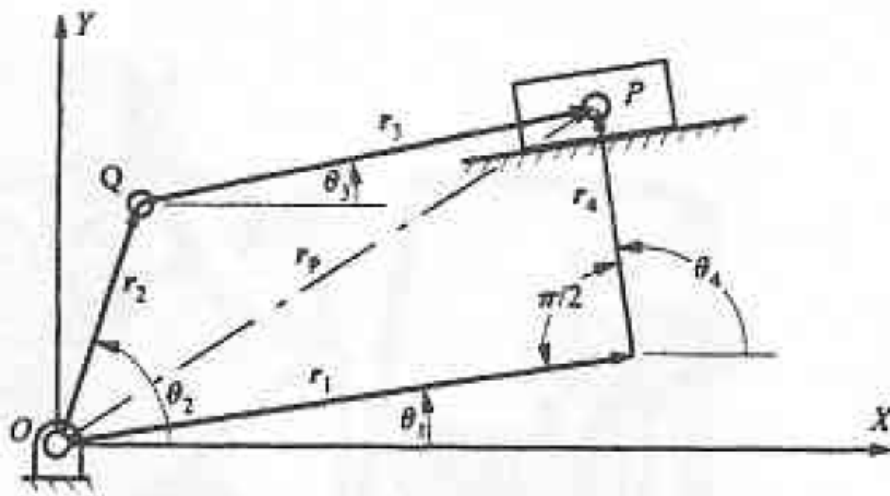
$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}}_{E_3} = & 0 - 2(10)^2 (\mathbf{i} + 0\mathbf{j}) + 2.236(147.56) [-\sin(93.435^\circ)\mathbf{i} + \cos(93.435^\circ)\mathbf{j}] \\ & - 2.236(20.0)^2 [\cos(93.435^\circ)\mathbf{i} + \sin(93.435^\circ)\mathbf{j}] = -475.76\mathbf{i} - 912.56\mathbf{j} \text{ cm/s}^2\end{aligned}$$



فصل ۷ تحلیل مکانیزمها



معادلات تحلیلی برای مکانیزم لغزنده و لنگ



$$r_P = r_2 + r_3 = r_1 + r_4$$

$$\theta_4 = \theta_1 + \pi/2$$

$$r_2 \sin \theta_2 + r_3 \sin \theta_3 = r_1 \sin \theta_1 + r_4 \sin \theta_4$$

$$r_2 \cos \theta_2 + r_3 \cos \theta_3 = r_1 \cos \theta_1 + r_4 \cos \theta_4$$

معادلات فوق باید در کل سیکل حرکت مکانیزم برقرار باشد.
توجه نمایید که اندازه بردار r_1 تغییر می کند اما راستای آن (θ_1) ثابت است.

r_2, r_3, r_4, θ_1 , and θ_4 are constants

If θ_2 is given, solve θ_3 and r_1 in terms of θ_2

if θ_3 is given, solve θ_2 and r_1 in terms of θ_3





فصل ۷ تحلیل مکانیزمها



حل موقعیت مکانیزم لغزنده-لنگ وقتی که θ_2 ورودی است
مجهولات r_1 و θ_3

$$r_3 \cos \theta_3 = r_1 \cos \theta_1 + r_4 \cos \theta_4 - r_2 \cos \theta_2$$

$$r_3 \sin \theta_3 = r_1 \sin \theta_1 + r_4 \sin \theta_4 - r_2 \sin \theta_2$$

$$r_3^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_4^2 + 2r_1r_4(\cos \theta_1 \cos \theta_4 + \sin \theta_1 \sin \theta_4) \\ - 2r_1r_2(\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) - 2r_2r_4(\cos \theta_2 \cos \theta_4 + \sin \theta_2 \sin \theta_4)$$

$$A = 2r_4(\cos \theta_1 \cos \theta_4 + \sin \theta_1 \sin \theta_4) - 2r_2(\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2)$$

$$B = r_2^2 + r_4^2 - r_3^2 - 2r_2r_4(\cos \theta_2 \cos \theta_4 + \sin \theta_2 \sin \theta_4)$$

$$r_1^2 + Ar_1 + B = 0$$



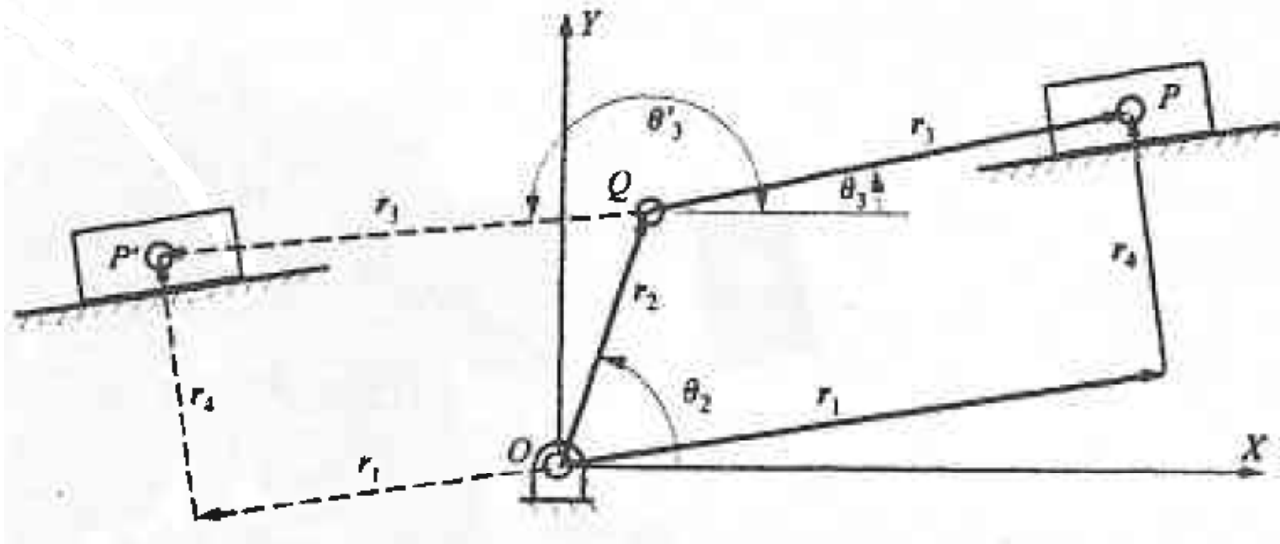
فصل ۷ تحلیل مکانیزمها



- معادلات سرعت مکانیزم چهار میله

$$r_1 = \frac{-A + \sigma \sqrt{A^2 - 4B}}{2}$$

$\sigma = \pm 1$ is a sign variable identifying the assembly mode

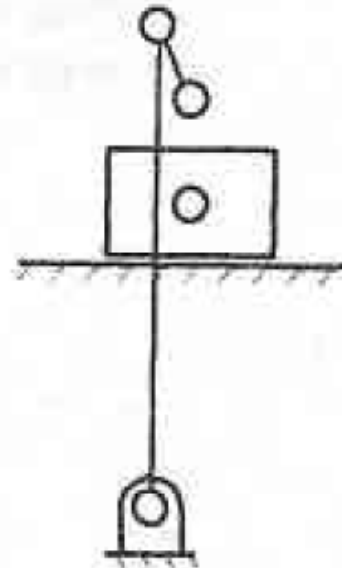
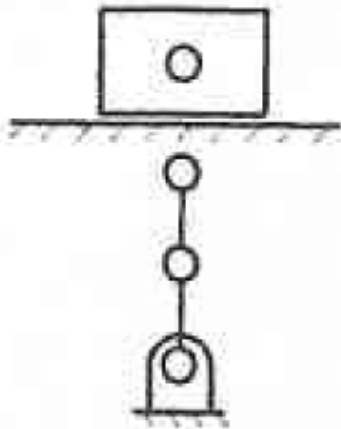


فصل ۷ تحلیل مکانیزمها



- معادلات سرعت مکانیزم چهار میله

r_1 can be complex ($\bar{A}^2 < 4B$)



مکانیزم قابل مونتاژ نیست





فصل ۷ تحلیل مکانیزمها



وقتی که r_1 محاسبه شده، می توان از معادلات حلقه بسته θ_3 را بدست آورد.

$$\theta_3 = \tan^{-1} \left[\frac{r_1 \sin \theta_1 + r_4 \sin \theta_4 - r_2 \sin \theta_2}{r_1 \cos \theta_1 + r_4 \cos \theta_4 - r_2 \cos \theta_2} \right]$$

با استفاده از تابع atan2 می توان ناحیه مثلثاتی θ_3 را تعیین کرد.

پس از محاسبه کمیات مجهول می توان مختصات هر نقطه روی حلقه برداری را محاسبه نمود.

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 = r_2 (\cos \theta_2 \mathbf{i} + \sin \theta_2 \mathbf{j}) + r_3 (\cos \theta_3 \mathbf{i} + \sin \theta_3 \mathbf{j})$$



فصل ۷ تحلیل مکانیزمها



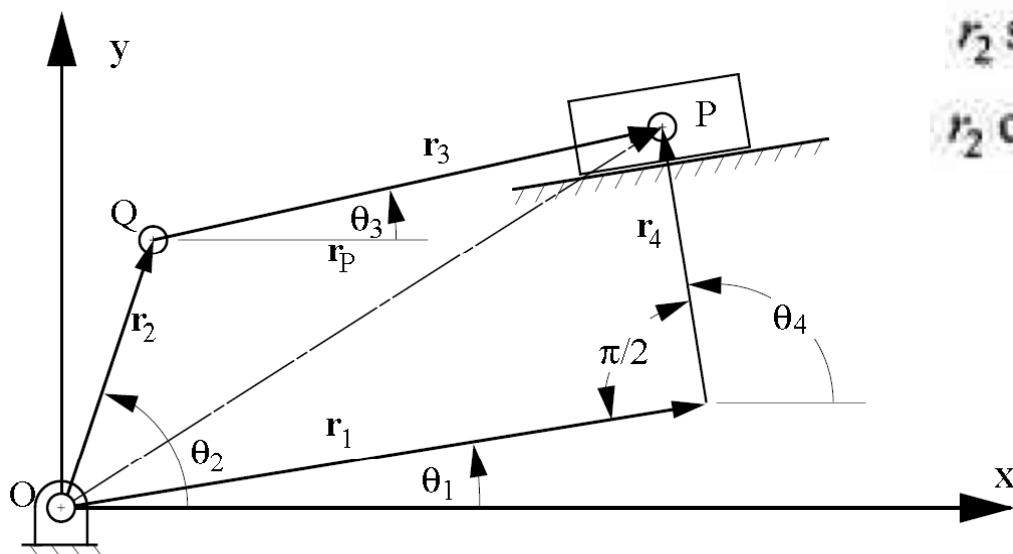
حل موقعیت مکانیزم لغزنده-لنگ وقتی که r_1 ورودی است

$$r_2 \sin \theta_2 + r_3 \sin \theta_3 = r_1 \sin \theta_1 + r_4 \sin \theta_4$$

$$r_2 \cos \theta_2 + r_3 \cos \theta_3 = r_1 \cos \theta_1 + r_4 \cos \theta_4$$

با حذف r_3 در معادلات فوق داریم:

$$A \cos \theta_2 + B \sin \theta_2 + C = 0$$



$$A = -2r_1r_2 \cos \theta_1 - 2r_2r_4 \cos \theta_4$$

$$B = -2r_1r_2 \sin \theta_1 - 2r_2r_4 \sin \theta_4$$

$$C = r_1^2 + r_2^2 + r_4^2 - r_3^2 + 2r_1r_4(\cos \theta_1 \cos \theta_4 + \sin \theta_1 \sin \theta_4)$$



فصل ۷ تحلیل مکانیزمها



$$A(1-t^2) + B(2t) + C(1+t^2) = 0$$

$$t = \tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right)$$

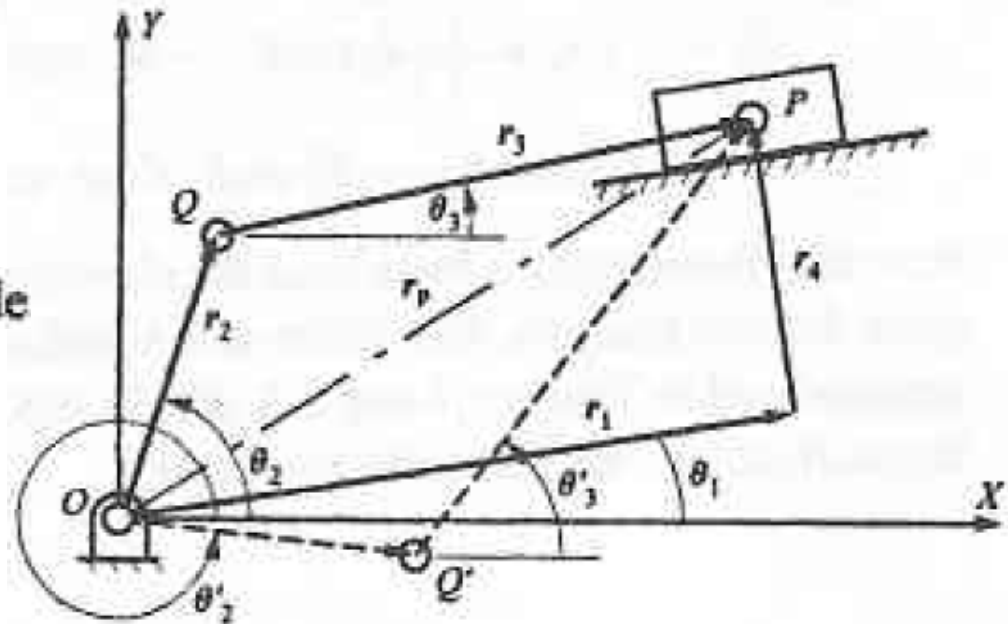


$$(C-A)t^2 + 2Bt + (A+C) = 0$$

$$t = \frac{-2B \pm \sqrt{4B^2 - 4(C-A)(C+A)}}{2(C-A)} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - C^2 + A^2}}{C-A}$$

$$\theta_2 = 2 \tan^{-1} t$$

$\sigma = \pm 1$ is a sign variable
identifying the assembly mode



فصل ۷ تحلیل مکانیزمها



$$\dot{r}_P = \dot{r}_2 + \dot{r}_3 = \dot{r}_1 + \dot{r}_4$$

$$-r_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 - r_3 \dot{\theta}_3 \sin \theta_3 = \dot{r}_1 \cos \theta_1$$

$$r_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + r_3 \dot{\theta}_3 \cos \theta_3 = \dot{r}_1 \sin \theta_1$$

$$\begin{bmatrix} \cos \theta_1 & r_J \sin \theta_J \\ \sin \theta_1 & -r_J \cos \theta_J \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{r}_1 \\ \dot{\theta}_J \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -r_M \dot{\theta}_M \sin \theta_M \\ r_M \dot{\theta}_M \cos \theta_M \end{Bmatrix}$$

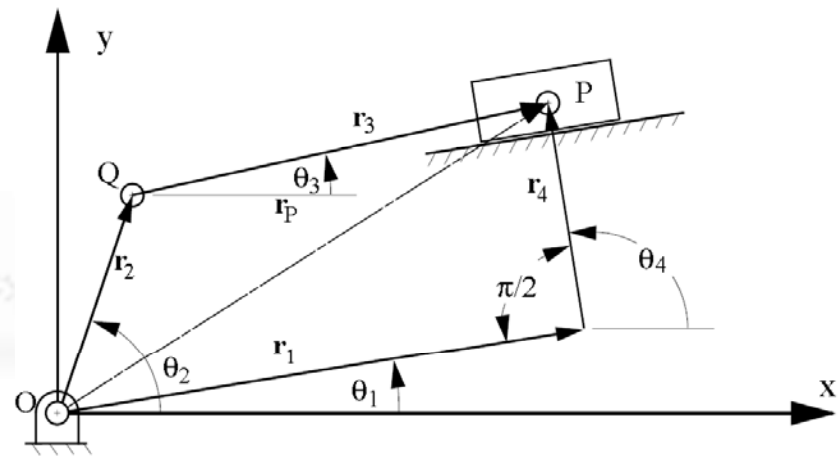
$M = 2$ and $J = 3$ for link 2 as the input,
 $M = 3$ and $J = 2$ for link 3 as the input.

If $\dot{r}_1$ is input,
 then $\dot{\theta}_2$ and $\dot{\theta}_3$ will be unknown



$$\begin{bmatrix} -r_2 \sin \theta_2 & -r_3 \sin \theta_3 \\ r_2 \cos \theta_2 & r_3 \cos \theta_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{r}_1 \cos \theta_1 \\ \dot{r}_1 \sin \theta_1 \end{Bmatrix}$$

حل سرعت مکانیزم لغزنده و لنگ



فصل ۷ تحلیل مکانیزمها



حل شتاب مکانیزم لغزنده و لنگ

$$\vec{r}_P = \vec{r}_2 + \vec{r}_3 = \vec{r}_1 + \vec{r}_4$$

$$-r_2\ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 - r_2\dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 - r_3\ddot{\theta}_3 \sin \theta_3 - r_3\dot{\theta}_3^2 \cos \theta_3 = \ddot{r}_1 \cos \theta_1$$

$$r_2\ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 - r_2\dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 + r_3\ddot{\theta}_3 \cos \theta_3 - r_3\dot{\theta}_3^2 \sin \theta_3 = \ddot{r}_1 \sin \theta_1$$

$$\begin{bmatrix} \cos \theta_1 & r_J \sin \theta_J \\ \sin \theta_1 & -r_J \cos \theta_J \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{r}_1 \\ \ddot{\theta}_J \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -r_M \ddot{\theta}_M \sin \theta_M - r_M \dot{\theta}_M^2 \cos \theta_M - r_J \dot{\theta}_J^2 \cos \theta_J \\ r_M \ddot{\theta}_M \cos \theta_M - r_M \dot{\theta}_M^2 \sin \theta_M - r_J \dot{\theta}_J^2 \sin \theta_J \end{Bmatrix}$$

$M = 2$ and $J = 3$ for link 2 as the input,

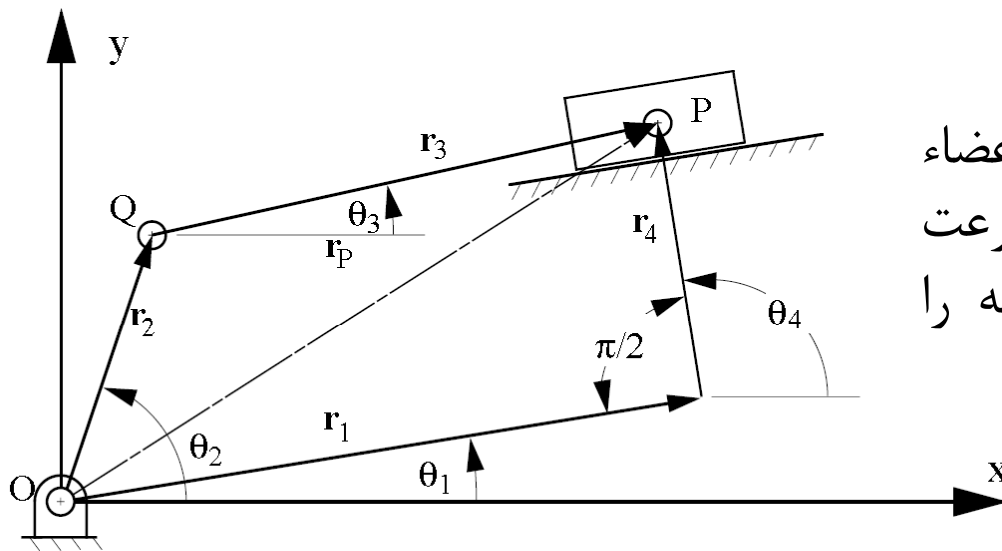
$M = 3$ and $J = 2$ for link 3 as the input.

If $\ddot{r}_1$ is input, then $\ddot{\theta}_2$ and $\ddot{\theta}_3$ will be unknown

$$\begin{bmatrix} -r_2 \sin \theta_2 & -r_3 \sin \theta_3 \\ r_2 \cos \theta_2 & r_3 \cos \theta_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_2 \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 + r_3 \dot{\theta}_3^2 \cos \theta_3 + \ddot{r}_1 \cos \theta_1 \\ r_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 + r_3 \dot{\theta}_3^2 \sin \theta_3 + \ddot{r}_1 \sin \theta_1 \end{Bmatrix}$$



فصل ۷ تحلیل مکانیزمها



سرعت و شتاب نقطه P

وقتی سرعت و شتاب زاویه ای اعضا محاسبه شدند، براحتی می توان سرعت و شتاب خطی هر نقطه روی حلقه را بدست آورد.

$$\dot{\mathbf{r}}_P = \dot{\mathbf{r}}_2 + \dot{\mathbf{r}}_3 = (-r_2\dot{\theta}_2 \sin \theta_2 - r_3\dot{\theta}_3 \sin \theta_3)\mathbf{i} + (r_2\dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + r_3\dot{\theta}_3 \cos \theta_3)\mathbf{j}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_P = \ddot{\mathbf{r}}_2 + \ddot{\mathbf{r}}_3 = & -\left(r_2\ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 + r_2\dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 + r_3\ddot{\theta}_3 \sin \theta_3 + r_3\dot{\theta}_3^2 \cos \theta_3\right)\mathbf{i} \\ & + \left(r_2\ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 - r_2\dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 + r_3\ddot{\theta}_3 \cos \theta_3 - r_3\dot{\theta}_3^2 \sin \theta_3\right)\mathbf{j} \end{aligned}$$

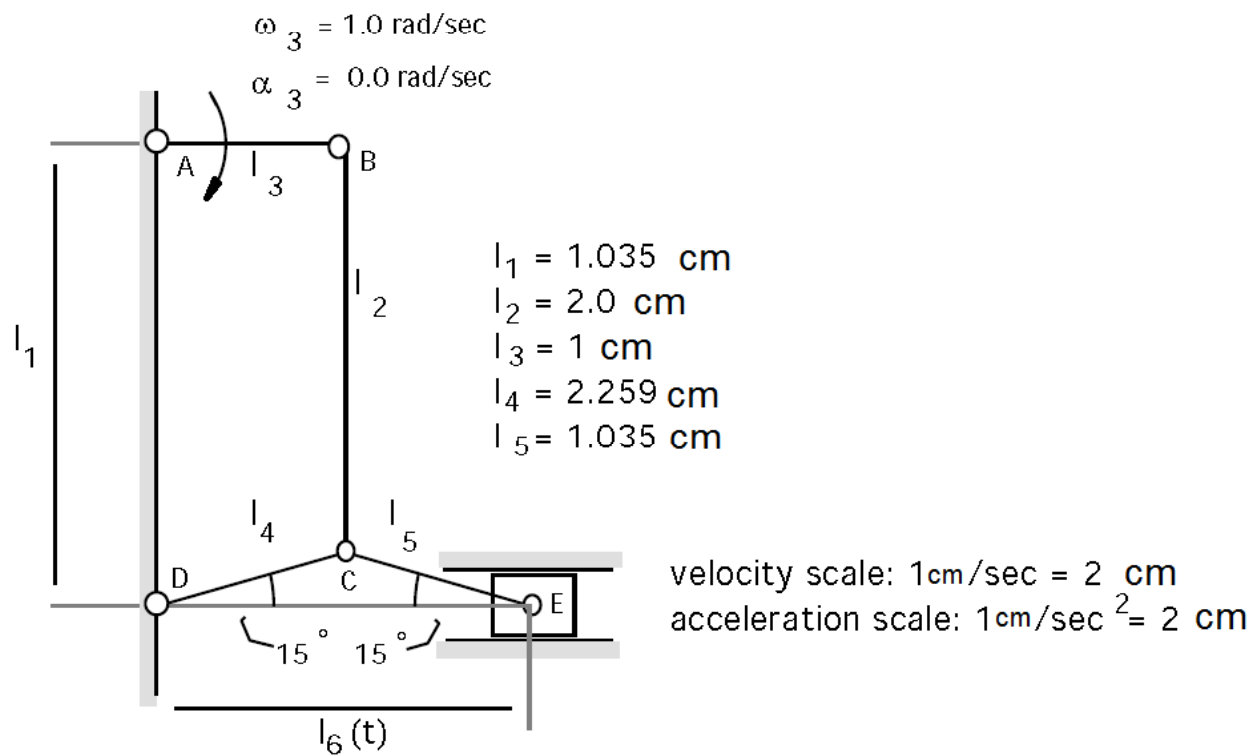


فصل ۷ تحلیل مکانیزمها



تمرینات و مسائل فصل ۷ قسمت اول

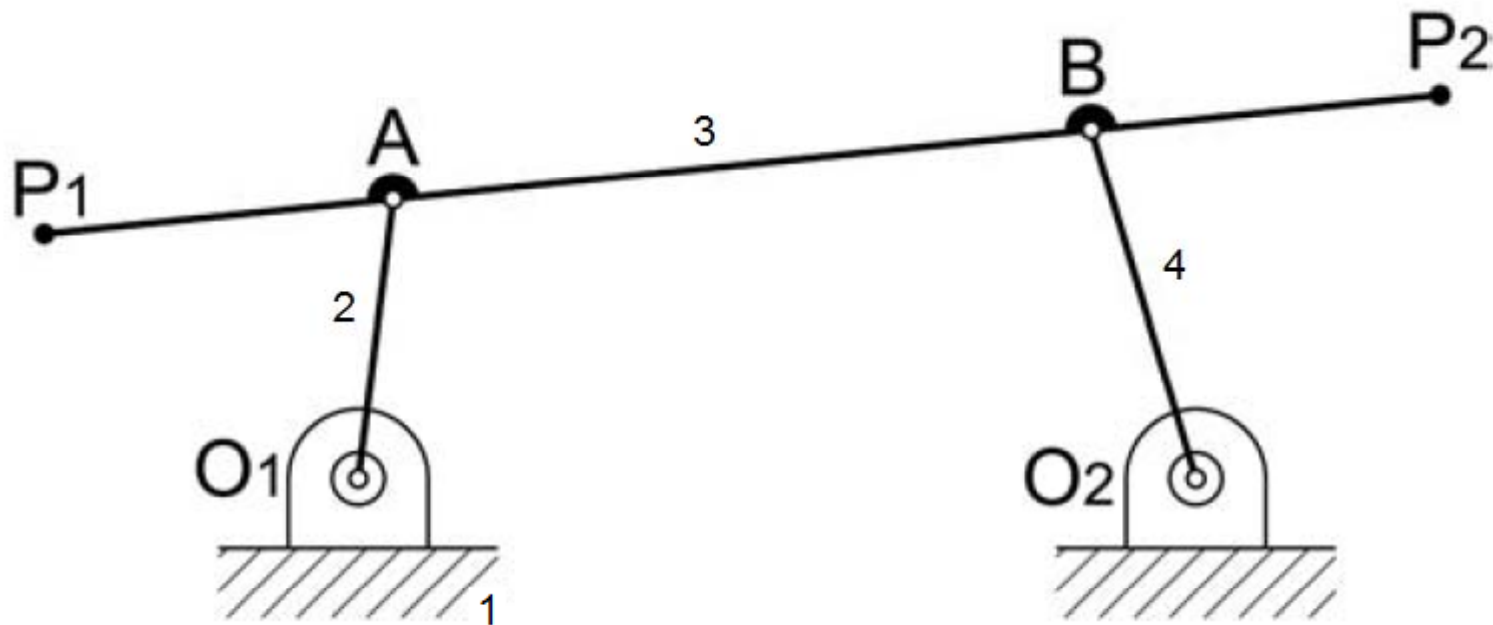
۱- با استفاده از روش تحلیلی سرعت و شتاب زاویه ای بازوهای ۲، ۴ و ۵ را بدست آورده سپس شتاب خطی نقطه E را محاسبه نمایید.



فصل ۷ تحلیل مکانیزمها



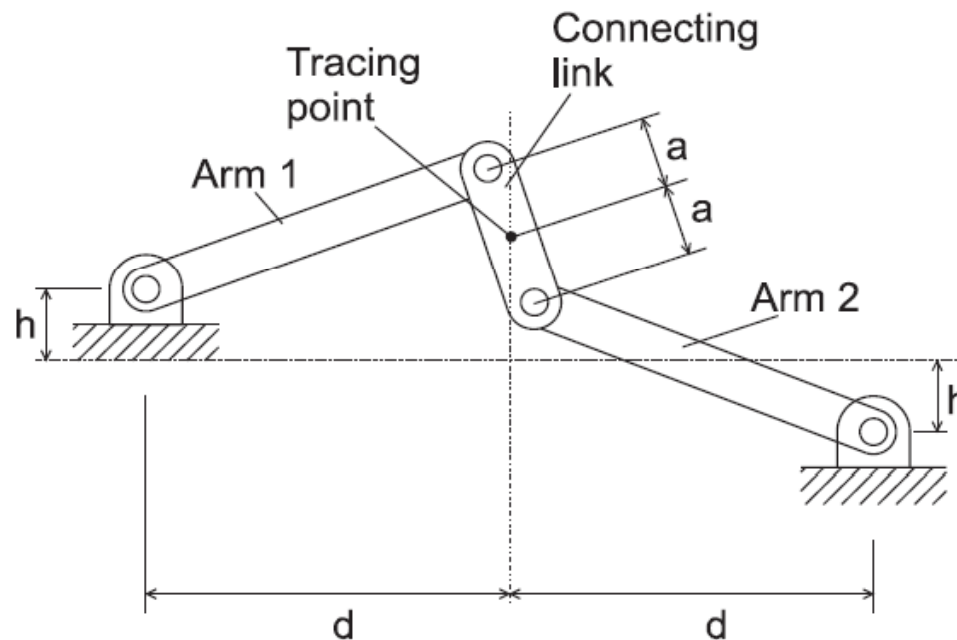
۲- در مکانیزم چهار میله زیر اگر عضو ۲ محرک باشد، معادلات تغییر مکان، سرعت و شتاب نقاط P_1 و P_2 را بدست آورده و برای یک سیکل حرکت آنها را رسم نمایید.



فصل ۷ تحلیل مکانیزمها



۳- در مکانیزم چهار میله double-rocker نشان داده شده چه رابطه ای باید بین ابعاد اعضاء برقرار باشد تا coupler دوران کامل داشته باشد. مسیر حرکت (tracing point) را رسم نمایید.



$2a = 1 \text{ cm}$, $h = 0.5 \text{ cm}$, $2d = 10 \text{ cm}$, and that the arms have equal length 7 cm.



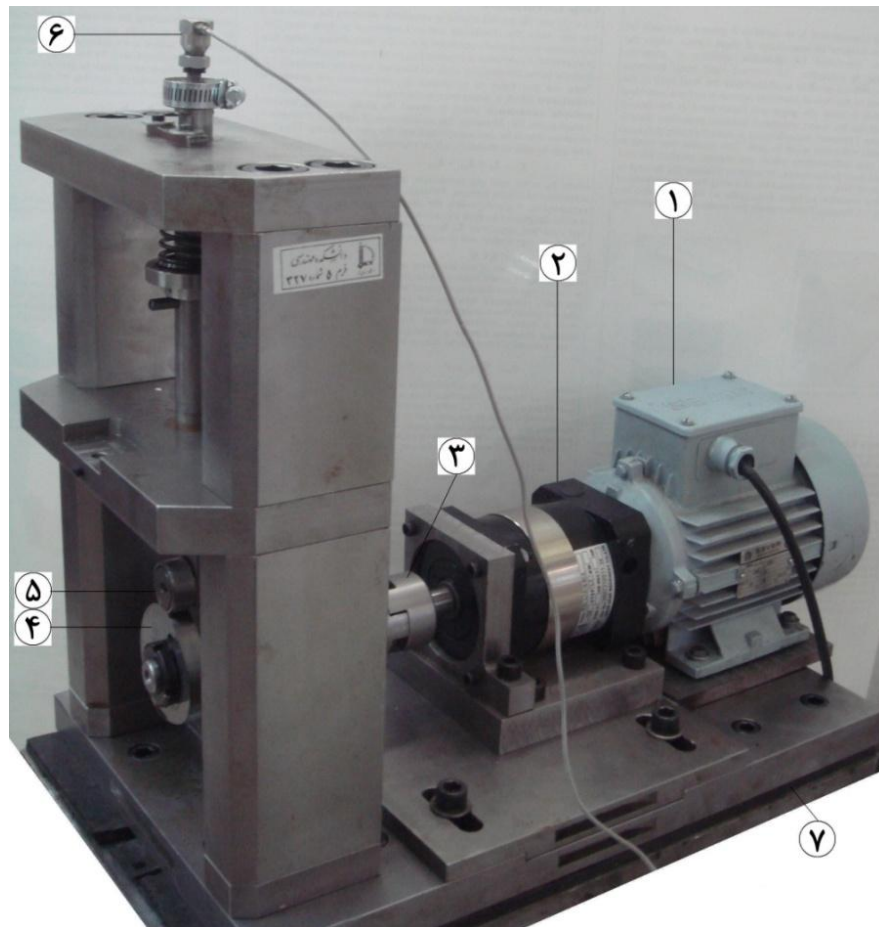
فصل ۷ تحلیل مکانیزمها



پایان



فصل ۸ طراحی بادامک ها



- ۱-موتور الکتریکی ،
- ۲- گیربکس خورشیدی ،
- ۳- کوپلینگ ،
- ۴- بادامک ،
- ۵- پیرو ،
- ۶- شتاب سنج ،
- ۷- لاستیک



فصل ۸ طراحی بادامک ها

بادامکها برای حرکات و مشخصات محدودتری نسبت مکانیزمهای میله ای استفاده می شوند.
در حقیقت هر نوع حرکت مورد نظر با پروفیل بادامک قابل تولید است.

معایب بادامکها عبارتند از:

هزینه ساخت

مقاومت سایشی کم

قابلیتهای کم در سرعتهای زیاد





فصل ۸ طراحی بادامک ها

از نقطه نظر هندسی طراحی بادامک معمولاً در دو مرحله انجام می شود.

۱- سنتز برنامه حرکت (motion program) دنبال کننده

۲- ایجاد پروفیل بادامک

در اکثر اوقات برنامه حرکت برای قسمت هایی از سیکل حرکت داده شده و سایر قسمت های باقیمانده پروفیل باید برای کارائی دینامیکی بهینه طراحی شوند.

در مرحله دوم ، پروفیل بادامک از طریق معکوس سینماتیکی (kinematic inversion) انجام می گردد. بادامک ثابت در نظر گرفته شده و موقعیت های مورد نظر دنبال کننده نسبت به بادامک رسم می شود.

در نهایت ، یک منحنی در نقاط بدست آمده مماس بر دنبال کننده رسم می شود.



فصل ۸ طراحی بادامک ها

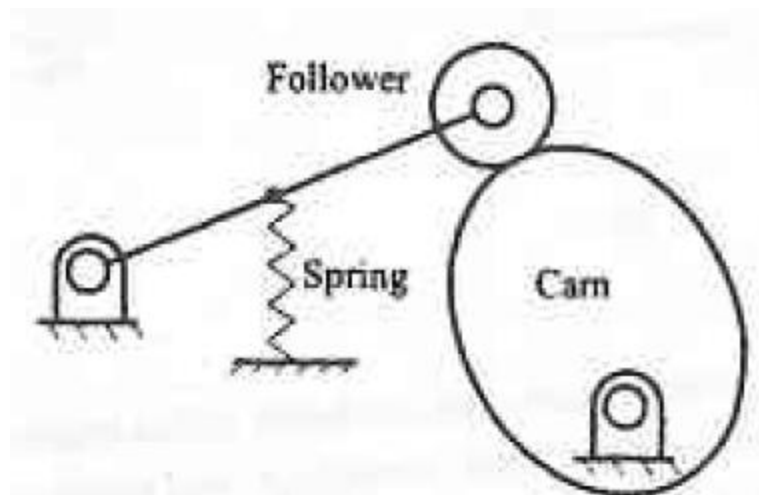
سیستمهای بادامک-پیرو

یک سیستم بادامک-پیرو از سه جزء اصلی تشکیل شده است:

۱- بادامک

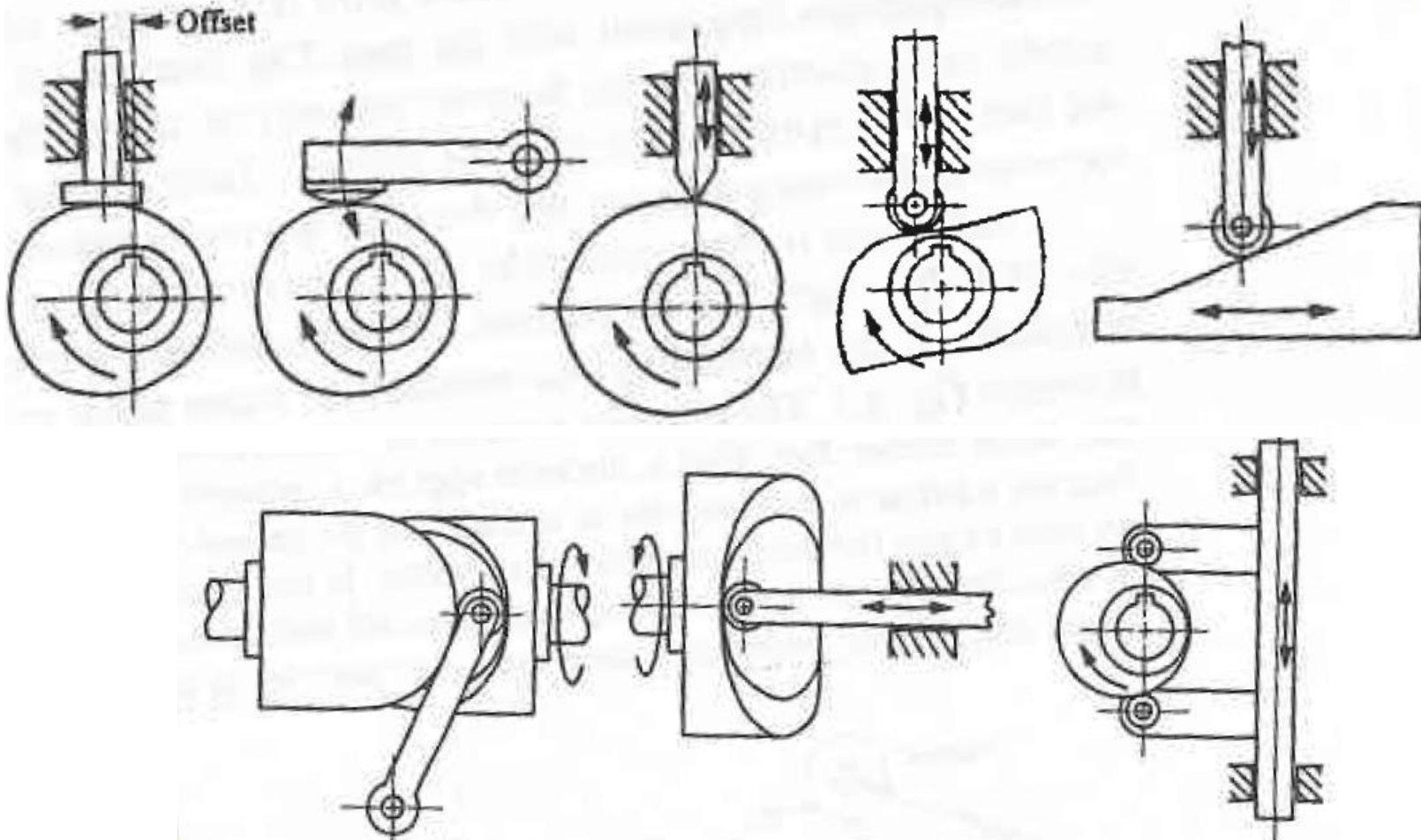
۲- دنبال کننده

۳- فنر یا مکانیزم ایجاد تماس



فصل ۸ طراحی بادامک ها

انواع مکانیزمهای بادامکی



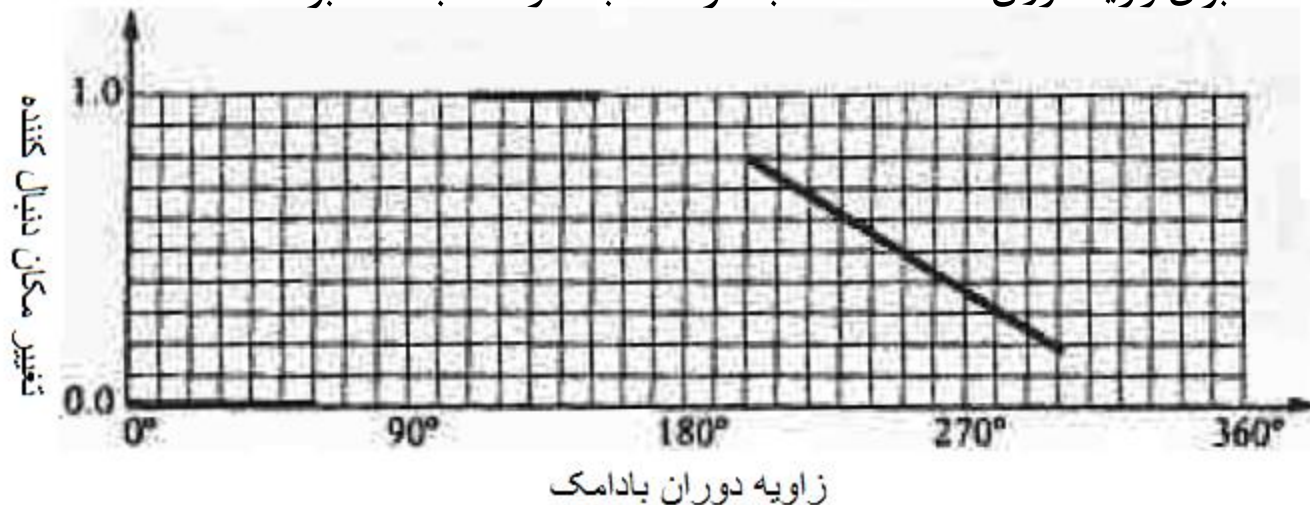
سنتز برنامه حرکت (Synthesis of Motion Program)

در واقع قسمتهایی از سیکل حرکت که معین نشده اند بصورت بهینه محاسبه می شوند.
در نظر بگیرید که

۱- دنبال کننده برای زاویه دوران 60° در صفر ثابت بهمانند Dwell

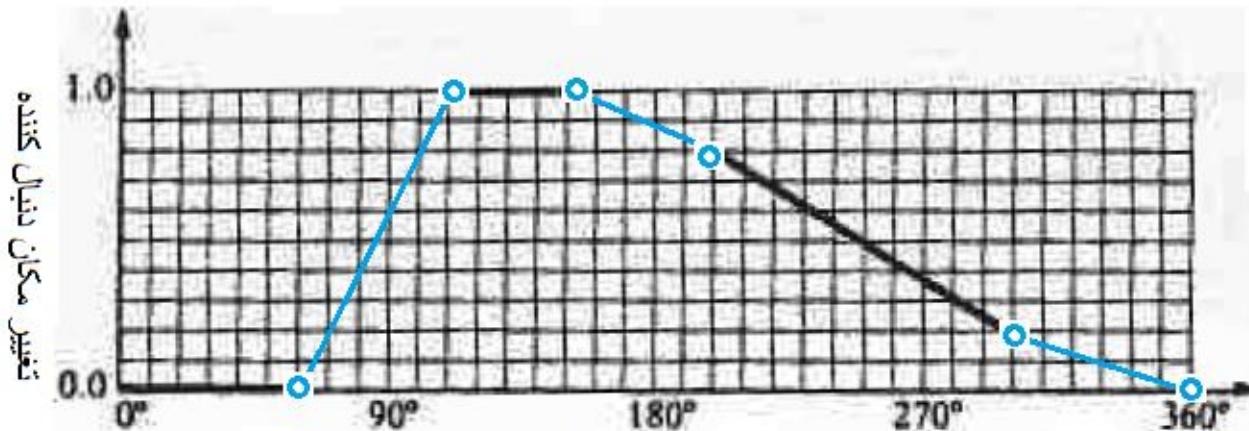
۲- دنبال کننده برای زاویه دوران $150^\circ - 110^\circ$ در یک ثابت بهمانند Dwell

۳- دنبال کننده برای زاویه دوران $300^\circ - 200^\circ$ با سرعت ثابت از ۰.۸ به ۰.۲ برسد.



فصل ۸ طراحی بادامک ها

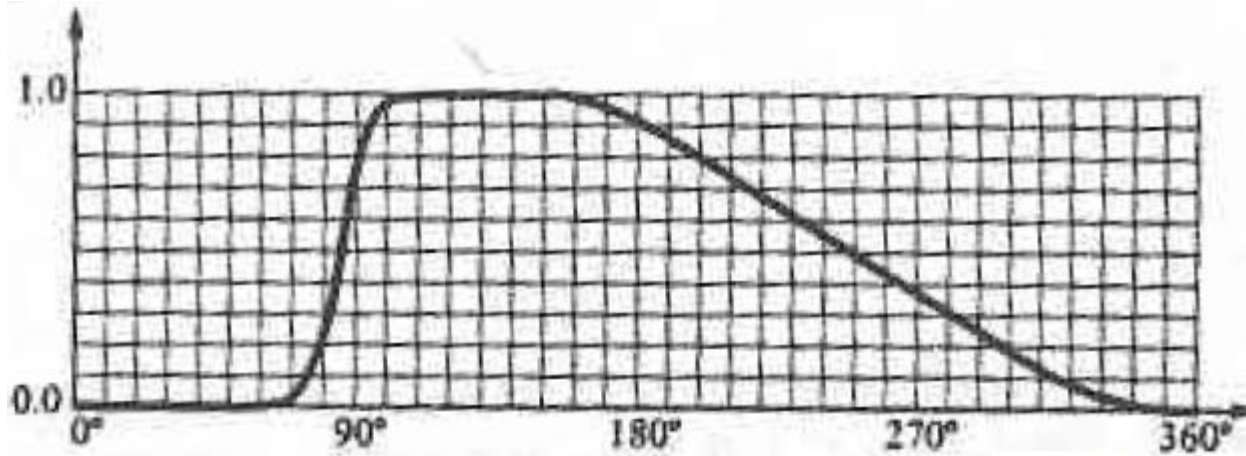
در صورتی که انتهای تغییر مکان مورد نظر با خطوط مستقیم متصل شوند ، در نقاط اتصال سرعت ناپیوسته و شتاب بینهایت خواهد بود که در نتیجه اتصال قطع شده یا مشکل تنشهای تماسی زیاد پیش خواهد آمد.



مشکل شتاب بینهایت از طریق مطابقت تغییرات موقعیت ، سرعت و شتاب در نقاط اتصال رفع میگردد. در واقع هر قسمت اتصال از سه ناحیه شتاب مثبت ، سرعت ثابت و شتاب منفی تشکیل شده است.

فصل ۸ طراحی بادامک ها

روابط شتاب ثابت



$$v = v_0 + at$$

$$y = s_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2$$

$$\theta = \theta_0 + \omega t$$

در صورتی که بادامک
با سرعت ثابت دورا کند

$$t = \frac{(\theta - \theta_0)}{\omega}$$

$$v = v_0 + a \frac{(\theta - \theta_0)}{\omega}$$

$$y = s_0 + v_0 \frac{(\theta - \theta_0)}{\omega} + a \frac{(\theta - \theta_0)^2}{2\omega^2}$$





فصل ۸ طراحی بادامک ها

تحلیل انواع مختلف توابع تغییر مکان دنبال کننده

توابع متعددی برای اتصال قسمتهای دیاگرام تغییر مکان استفاده می شوند. شکل نهائی بادامک در نهایت به پروفیل تغییر مکان بستگی خواهد داشت. انواع حرکات عبارتند از:

- ۱- حرکت یکنواخت
- ۲- حرکت سهموی
- ۳- حرکت هامونیک ساده
- ۴- حرکت سیکلوئیدی
- ۵- حرکت چند جمله ای

چهار نوع اول را می توان بصورت ترسیمی یا تحلیلی ایجاد نمود ، در حالیکه نوع پنجم فقط از روش تحلیل ایجاد می شود.





فصل ۸ طراحی بادامک ها

در روش حل ترسیمی یا تحلیلی فرض این است که سرعت زاویه ای بادامک ثابت است:

$$y = y(\theta)$$

$$\theta = \theta_0 + \omega t$$

θ و y می توانند خطی و یا زاویه ای باشند

با استفاده از روابط فوق می توان حرکت را به صورت تابعی از زمان نمایش داد.

$$\dot{y} = \frac{dy(\theta)}{dt} = \frac{dy}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = y' \omega$$

$$\ddot{y} = \frac{d^2 y(\theta)}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \right) = \frac{d^2 y}{d\theta^2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{dy}{d\theta} \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{d^2 y}{d\theta^2} \omega^2 + \frac{dy}{d\theta} \alpha$$

$$\omega \text{ is constant, } \alpha = 0$$

$$\ddot{y} = y'' \omega^2$$



فصل ۸ طراحی بادامک ها

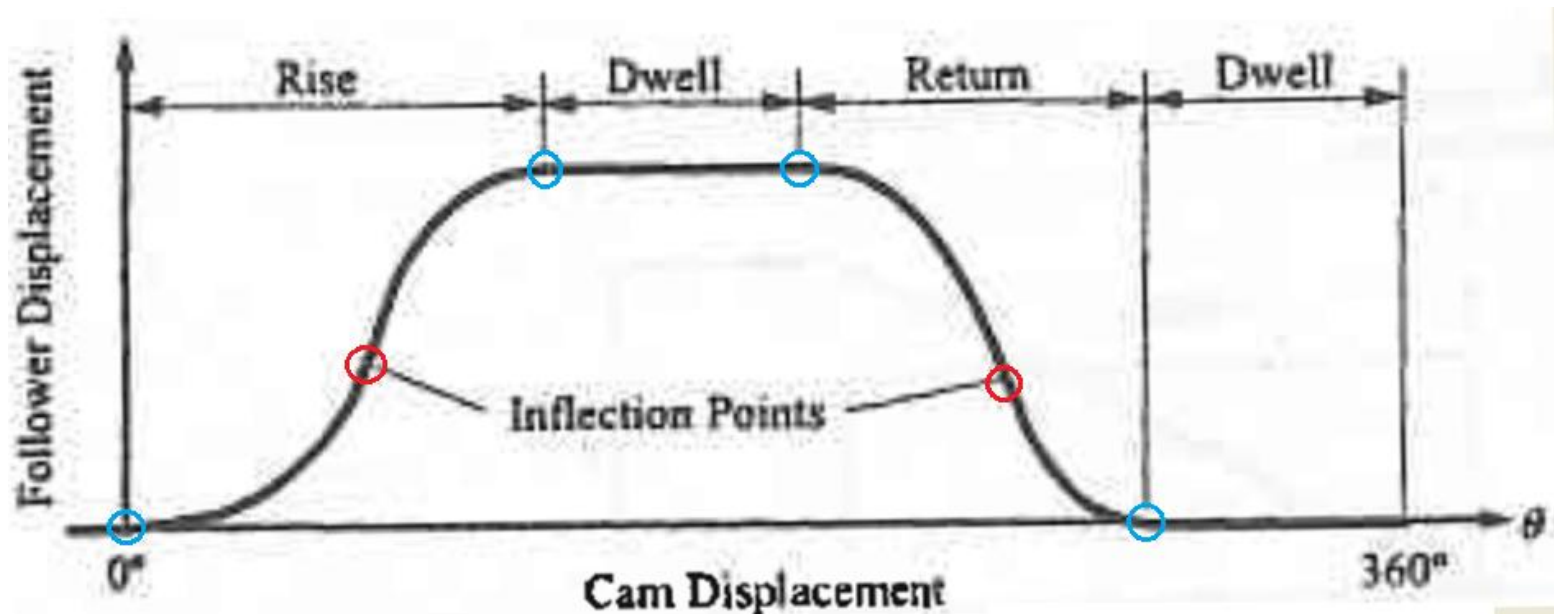
بنابر این در حالتیکه سرعت بادامک ثابت است داریم:

$\dot{y}$ is a simple constant times y'

$\ddot{y}$ is also a constant times y''

منحنی حرکت دنبال کننده به سه قسمت تقسیم می شود:

خواص نقاط مشخص شده را بررسی نمایید

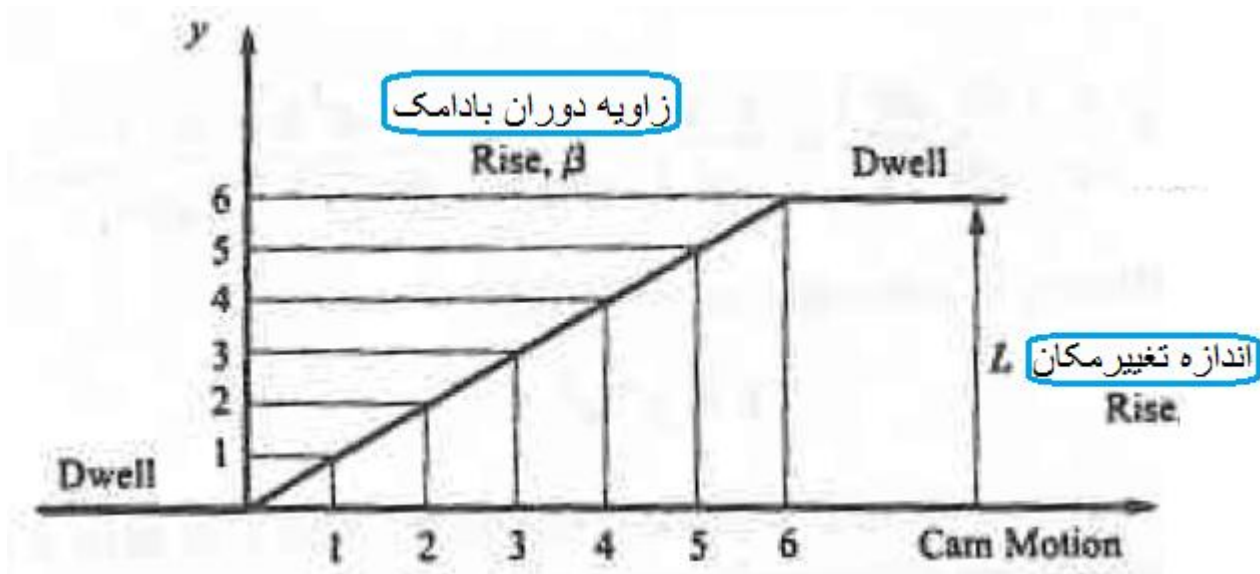


فصل ۸ طراحی بادامک ها

حرکت یکنواخت Uniform Motion

شکل عمومی منحنی

$$y = C\theta$$



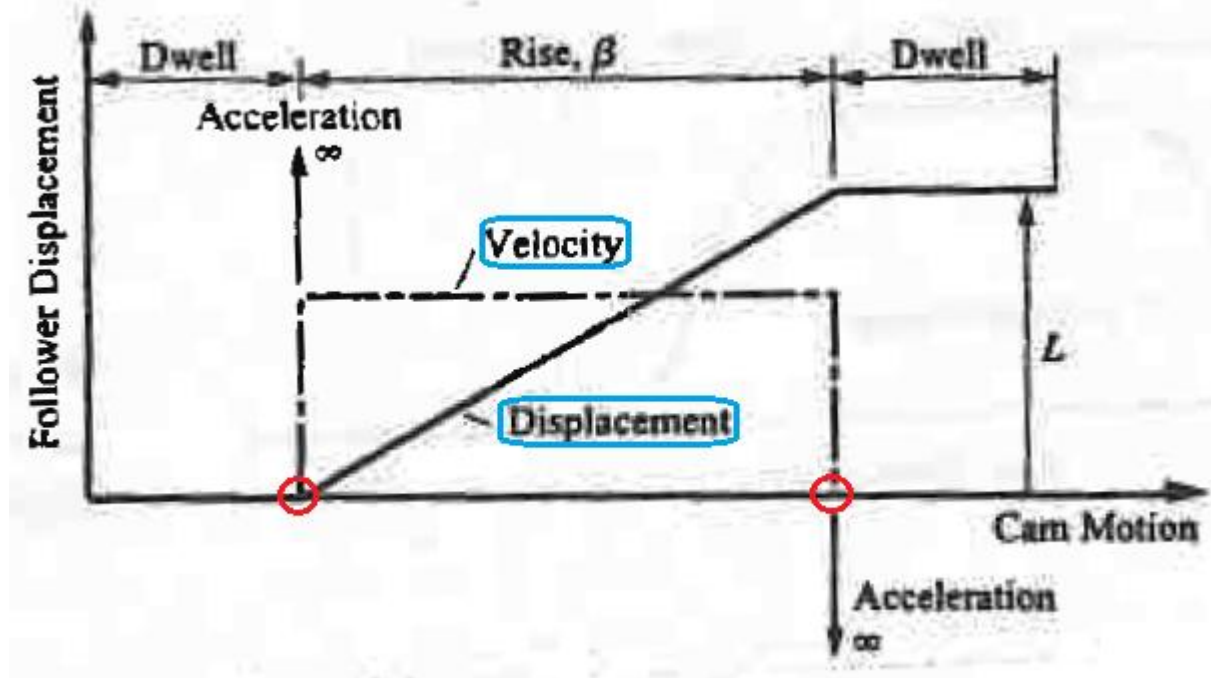
فصل ۸ طراحی بادامک ها

حرکت یکنواخت

$$y = \frac{L}{\beta} \theta$$

$$\dot{y} = \frac{L}{\beta} \omega$$

$$\ddot{y} = 0$$





فصل ۸ طراحی بادامک ها

حرکت سهموی Parabolic Motion

توجه نمایید که در هر انتقال از دو سهمی باید استفاده شود

$$y = C_0 + C_1\theta + C_2\theta^2$$

$$y' = C_1 + 2C_2\theta$$

$$y'' = 2C_2$$

اگر در شروع حرکت $\theta=0$ و $y=y'=0$ باشد، داریم

$$C_0 = C_1 = 0$$

اگر فرض شود در نقطه میانی

$$\theta = \beta/2, y = L/2$$

$$C_2 = 2L/\beta^2$$





فصل ۸ طراحی بادامک ها

در قسمت اول Rise

تغییر مکان و مشتق اول و دوم آن نسبت به θ

$$y = 2L \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^2$$

$$y' = 4 \frac{L}{\beta^2} \theta$$

$$y'' = 4 \frac{L}{\beta^2}$$

$$\dot{y} = 4 \frac{L\omega}{\beta^2} \theta$$

$$\ddot{y} = 4 \frac{L\omega^2}{\beta^2}$$

سرعت و شتاب





فصل ۸ طراحی بادامک ها

در قسمت دوم Rise

$$\theta = \beta/2, y = L/2,$$

$$\theta = \beta, y = L, \text{ and } y' = 0$$

$$\frac{L}{2} = C_0 + C_1 \frac{\beta}{2} + C_2 \left(\frac{\beta}{2} \right)^2$$

$$L = C_0 + C_1 \beta + C_2 \beta^2$$

$$0 = C_1 + 2C_2 \beta$$

linear set of equations

$$C_0 = -L$$

$$C_1 = \frac{4L}{\beta}$$

$$C_2 = -\frac{2L}{\beta^2}$$

$$y = L \left[1 - 2 \left(1 - \frac{\theta}{\beta} \right)^2 \right]$$



فصل ۸ طراحی بادامک ها

$$y = L \left[1 - 2 \left(1 - \frac{\theta}{\beta} \right)^2 \right]$$

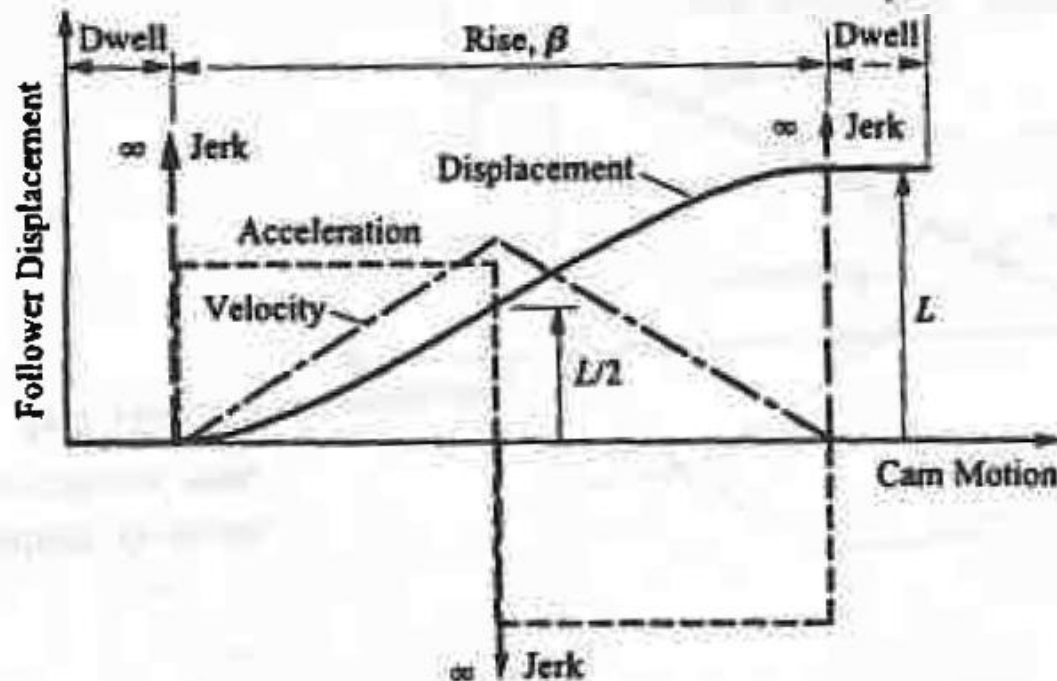
$$y' = \frac{4L}{\beta} \left(1 - \frac{\theta}{\beta} \right)$$

$$y'' = -\frac{4L}{\beta^2}$$

$$\dot{y} = \frac{4L\omega}{\beta} \left(1 - \frac{\theta}{\beta} \right)$$

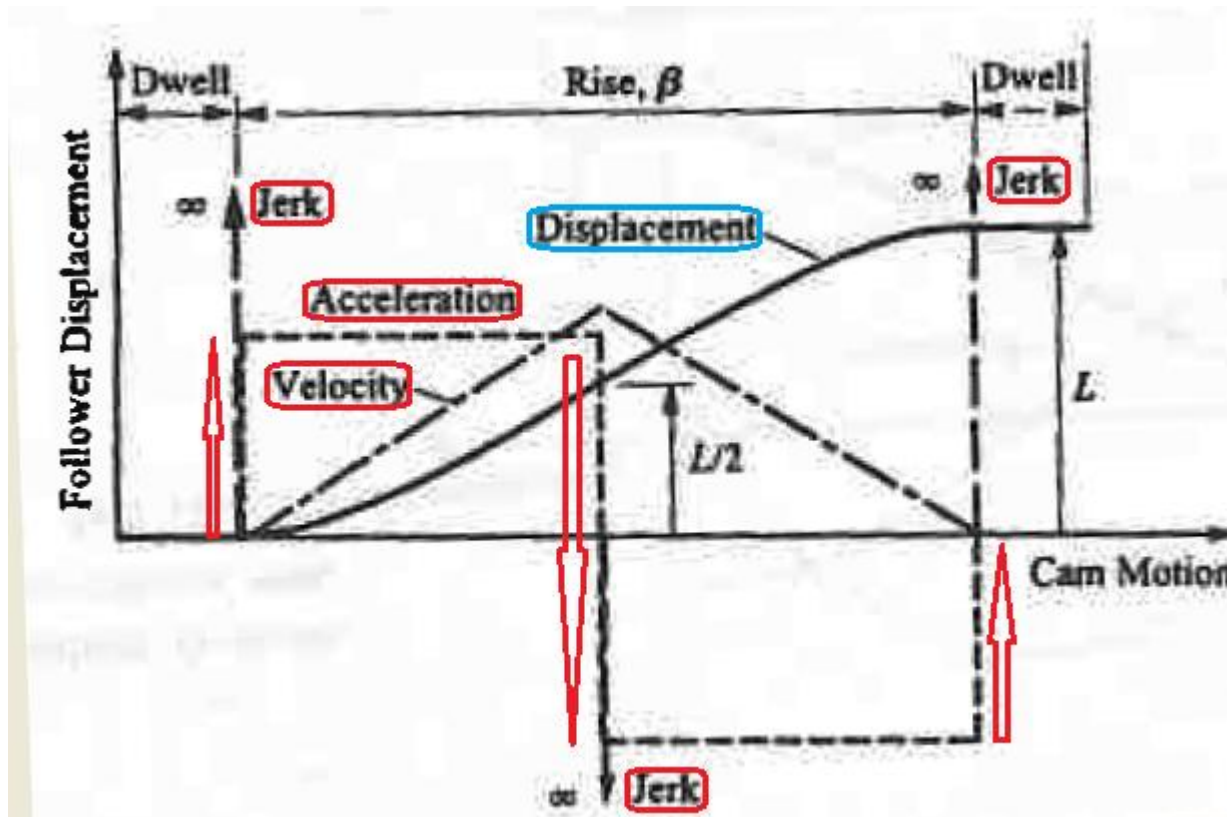
$$\ddot{y} = -\frac{4L\omega^2}{\beta^2}$$

در نهایت



فصل ۸ طراحی بادامک ها

اگرچه در نقاط اتصال شتاب مقادیر محدودی دارد اما مشتق سوم نسبت به زمان یا اصطلاحاً **Jerk** بینهایت است که نشاندهنده ضربه به سیستم است.





فصل ۸ طراحی بادامک ها

Return

قسمت اول

$y = L$ to 0 angular displacement β

$y = L$ and $y' = 0$ at $\theta = 0$ and $y = L/2$ at $\theta = \beta/2$

$C_0 = L$, $C_1 = 0$, and $C_2 = \frac{-2L}{\beta^2}$

$$y = L \left[1 - 2 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^2 \right]$$





فصل ۸ طراحی بادامک ها

Return

قسمت دوم

$$\theta = \beta/2, y = L/2,$$

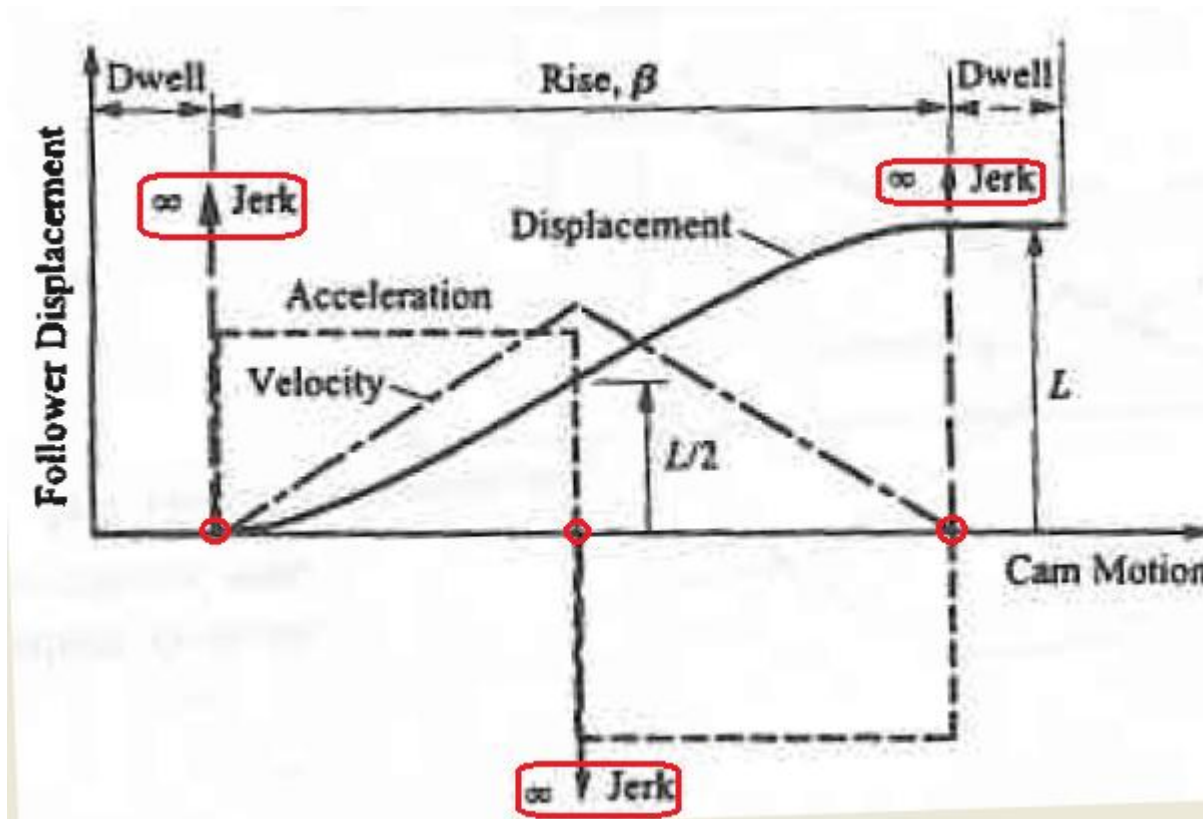
$$\theta = \beta, y = 0, \text{ and } y' = 0$$

$$y = 2L \left(1 - \frac{\theta}{\beta} \right)^2$$



فصل ۸ طراحی بادامک ها

در نقاط اتصال **Jerk** بینهایت است





فصل ۸ طراحی بادامک ها

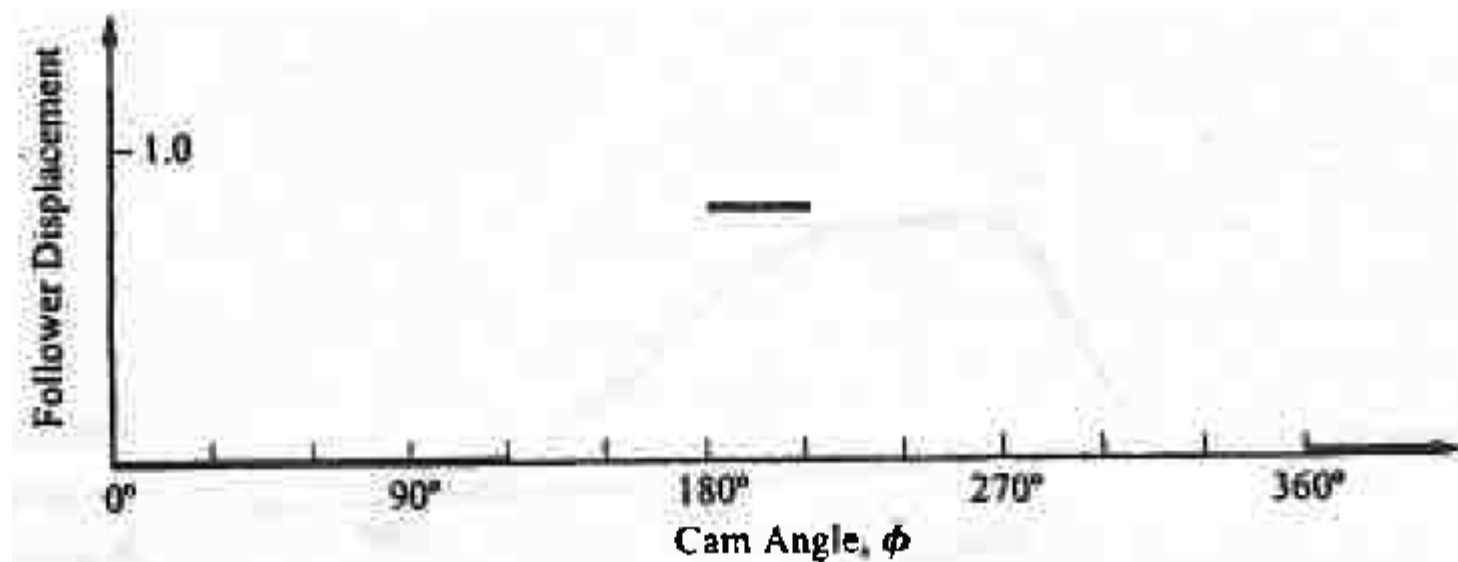
مثال: طراحی بادامک برای حرکت “Parabolic”

dwell at zero lift for the first 120°

dwell at 0.8 in lift for cam angles from 180° to 210°

cam rotates with constant angular velocity

10° plotting intervals





فصل ۸ طراحی بادامک ها

Rise

در زاویه 120° to 180° ده است

در قسمت اول Rise از 120° الی 180° داریم:

$$\beta = 180 - 120 = 60^\circ$$

$$L = 0.8$$

$$\theta = (\phi - 120^\circ)$$

$$y = 2L \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^2 = 1.6 \left(\frac{\phi - 120^\circ}{60^\circ} \right)^2$$





فصل ۸ طراحی بادامک ها

در قسمت دوم Rise از ۱۵۰ الی ۱۸۰ داریم:

$$\theta = (\phi - 120^\circ)$$

$$y = L \left[1 - 2 \left(1 - \frac{\theta}{\beta} \right)^2 \right] = 0.8 \left[1 - 2 \left(1 - \frac{(\phi - 120^\circ)}{60^\circ} \right)^2 \right]$$

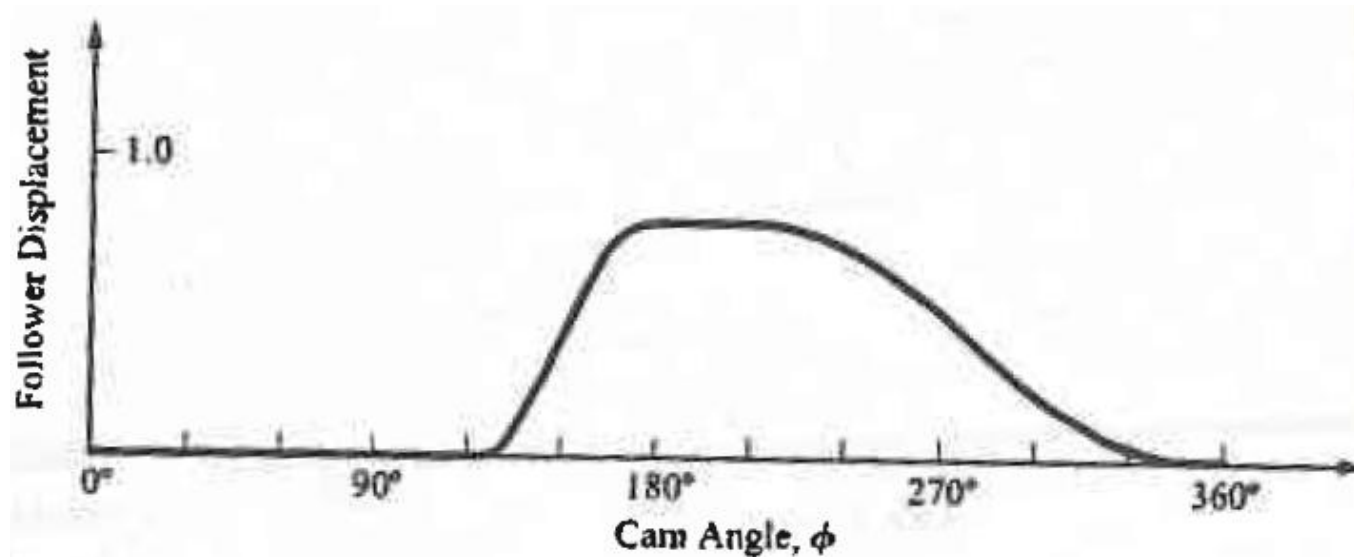


فصل ۸ طراحی بادامک ها

θ	120°	130°	140°	150°	160°	170°	180°
y	0.0000	0.0444	0.1778	0.4000	0.6222	0.7556	0.8000

θ	210°	220°	230°	240°	250°	260°	270°	280°
y	0.8000	0.7929	0.7716	0.7360	0.6862	0.6222	0.5440	0.4516

θ	290°	300°	310°	320°	330°	340°	350°	360°
y	0.3484	0.2560	0.1778	0.1138	0.0640	0.0284	0.0071	0.0000





فصل ۸ طراحی بادامک ها

برنامه حرکت هامونیکي در دامنه زمان

حرکت هامونیکي ساده را می توان توسط یک بادامک دایره ای خارج از مرکز و یک دنبال کننده شعاعي بدست آورد.

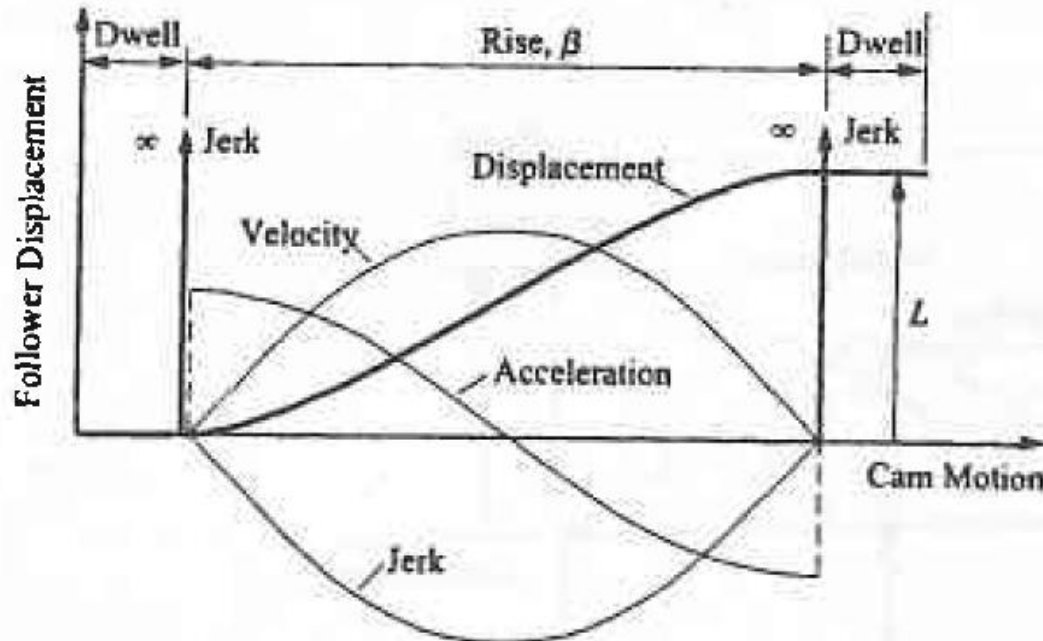
معادلات حرکت هامونیکي دارای شکل اصلی زیر است:

$$y = C_0 + C_1 \cos C_2 \theta = C_0 \left(1 + \frac{C_1}{C_0} \cos C_2 \theta \right)$$



فصل ۸ طراحی بادامک ها

دیاگرام تغییرمکان ، سرعت ، شتاب و جرک در شکل زیر نشان داده شده



حرکت هارمونیک ، منحنی سرعت سینوسی و شتاب کسینوسی ایجاد می کند.
در نقطه اتصال ناپیوستگی وجود ندارد
با یک ضابطه برای زاویه β تعریف می شود



فصل ۸ طراحی بادامک ها

برنامه حرکت هامونیکی

a rise starting from $\theta = 0$ and ending at $\theta = \beta$ and $y = L$

$$y = \frac{L}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi \theta}{\beta} \right)$$

$$y' = \frac{\pi L}{2\beta} \sin \frac{\pi \theta}{\beta}, \quad \dot{y} = \frac{\pi L \omega}{2\beta} \sin \frac{\pi \theta}{\beta}$$

$$y'' = \frac{L}{2} \left(\frac{\pi}{\beta} \right)^2 \cos \frac{\pi \theta}{\beta}, \quad \ddot{y} = \frac{L}{2} \left(\frac{\pi \omega}{\beta} \right)^2 \cos \frac{\pi \theta}{\beta}$$

$$y''' = -\frac{L}{2} \left(\frac{\pi}{\beta} \right)^3 \sin \frac{\pi \theta}{\beta}, \quad \dddot{y} = -\frac{L}{2} \left(\frac{\pi \omega}{\beta} \right)^3 \sin \frac{\pi \theta}{\beta}$$





فصل ۸ طراحی بادامک ها

return from $\theta = 0, y = L$ to $\theta = \beta, y = 0$

$$y = \frac{L}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi \theta}{\beta} \right)$$

$$y' = -\frac{\pi L}{2\beta} \sin \frac{\pi \theta}{\beta}, \quad \dot{y} = -\frac{\pi L \omega}{2\beta} \sin \frac{\pi \theta}{\beta}$$

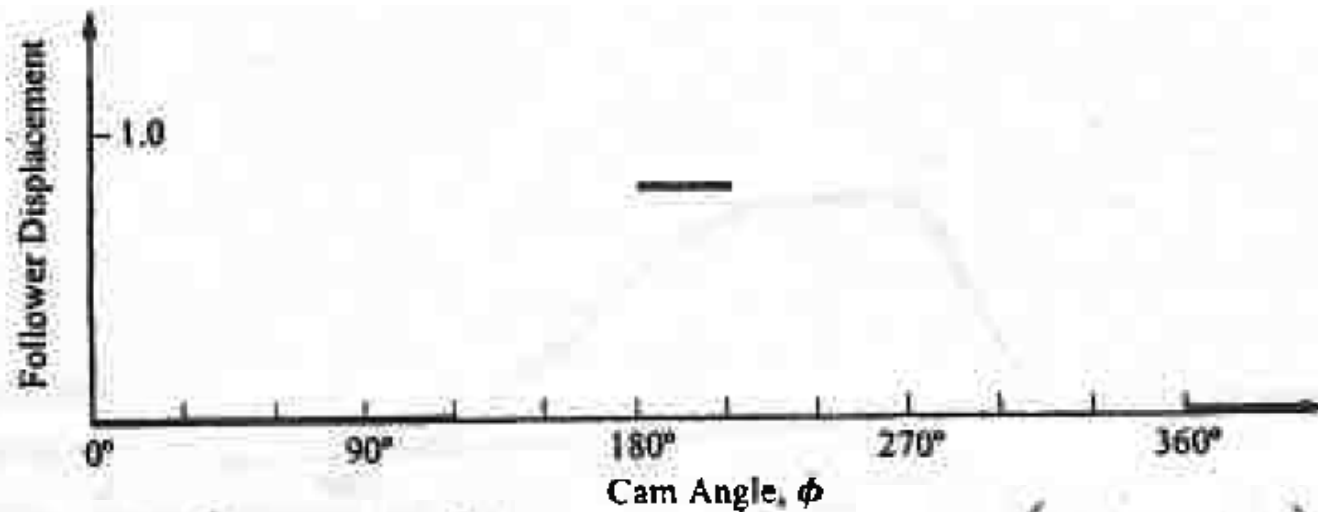
$$y'' = -\frac{L}{2} \left(\frac{\pi}{\beta} \right)^2 \cos \frac{\pi \theta}{\beta}, \quad \ddot{y} = -\frac{L}{2} \left(\frac{\pi \omega}{\beta} \right)^2 \cos \frac{\pi \theta}{\beta}$$

$$y''' = \frac{L}{2} \left(\frac{\pi}{\beta} \right)^3 \sin \frac{\pi \theta}{\beta}, \quad \dddot{y} = \frac{L}{2} \left(\frac{\pi \omega}{\beta} \right)^3 \sin \frac{\pi \theta}{\beta}$$



فصل ۸ طراحی بادامک ها

مثال قبل را برای برنامه حرکت هامونیکی حل نمایید.



$$y = \frac{L}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi \theta}{\beta} \right)$$

$$= 0.4 \left(1 - \cos \frac{\pi(\phi - 120^\circ)}{60^\circ} \right)$$

$$y = \frac{L}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi \theta}{\beta} \right)$$

$$= 0.4 \left(1 + \cos \frac{\pi(\phi - 210^\circ)}{150^\circ} \right)$$



فصل ۸ طراحی بادامک ها

حل در نرم افزار matlab





فصل ۸ طراحی بادامک ها

برنامه حرکت سیکلوئیدی در دامنه زمان

- حرکت هائیکه تا کنون بررسی شده اند در نقاط شروع و خاتمه دارای شتاب غیر صفر می باشند.
- در این نقاط جرک بینهایت دارند
- در نتیجه محدود به سرعت های کم می باشند.
- حرکت سیکلوئیدی در نقاط شروع و خاتمه شتاب صفر ایجاد می کند به عبارت دیگر اتصال سیکلوئیدی یک منحنی شتاب سینوسی ایجاد می کند.
- حرکت سیکلوئیدی را می توان توسط غلتاندن یک دایره به شعاع $(L/2\pi)$ روی محور عمودی بدست آورد.





فصل ۸ طراحی بادامک ها

معادلات Rise

$$y = L \left(\frac{\theta}{\beta} - \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi\theta}{\beta} \right)$$

$$y' = \frac{L}{\beta} \left(1 - \cos \frac{2\pi\theta}{\beta} \right), \quad \dot{y} = \frac{L\omega}{\beta} \left(1 - \cos \frac{2\pi\theta}{\beta} \right)$$

$$y'' = \frac{2L\pi}{\beta^2} \sin \frac{2\pi\theta}{\beta}, \quad \ddot{y} = 2L\pi \left(\frac{\omega}{\beta} \right)^2 \sin \frac{2\pi\theta}{\beta}$$

$$y''' = \frac{4L\pi^2}{\beta^3} \cos \frac{2\pi\theta}{\beta}, \quad \ddot{\dot{y}} = 4L\pi^2 \left(\frac{\omega}{\beta} \right)^3 \cos \frac{2\pi\theta}{\beta}$$

equations are valid for values of θ from zero to β

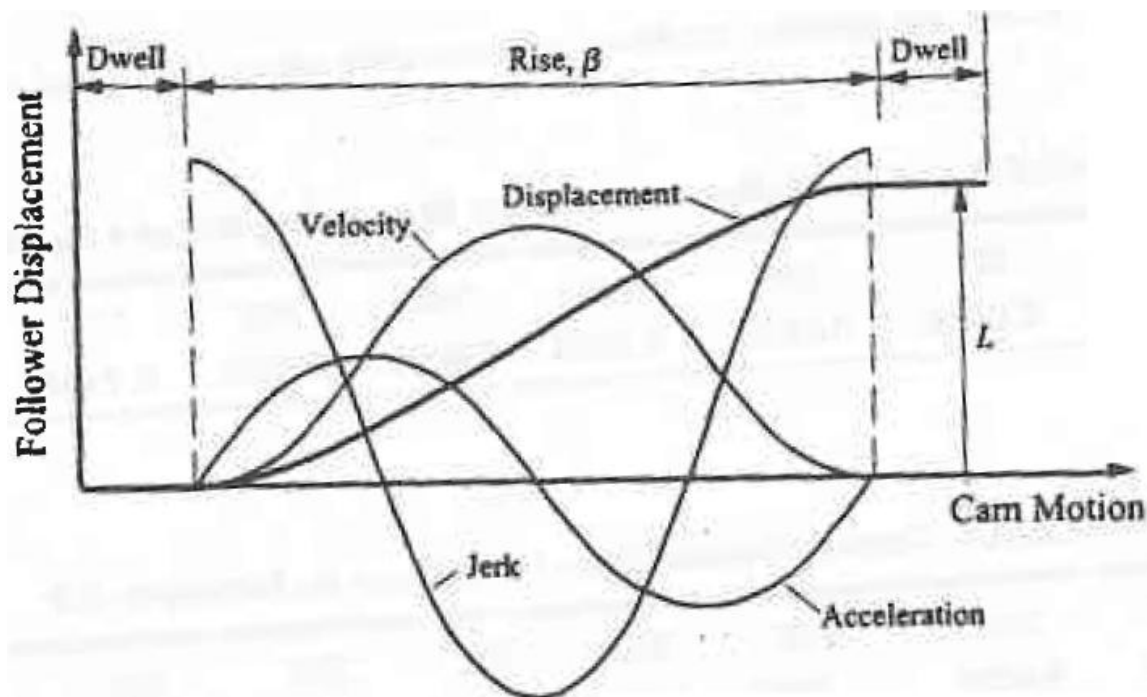




فصل ۸ طراحی بادامک ها

معادلات حرکت Return مقارن است بنابراین

return is given by $\bar{y} = L - y$. Therefore, $\bar{y}' = -y'$, $\bar{y}'' = -y''$, and $\bar{y}''' = -y'''$





فصل ۸ طراحی بادامک ها

برنامه حرکت توسط چندجمله ایها

- برای ماشینهای سریع (high speed) متداول است از پروفیل های چند جمله ای استفاده گردد.

- با افزایش درجه چند جمله ای می توان قیودیکه طراح در مد نظر دارد را اعمال کرد.

- در صورتیکه شرایط در دو انتهای Dwell یکسان باشد ، از چند جمله ایهای فرد استفاده می شود.





فصل ۸ طراحی بادامک ها

چند جمله ای درجه ۳ :

دارای تغییرات درجه ۲ سرعت ، تغییرات خطی شتاب و جرک بینهایت در نقاط شروع و خاتمه ناحیه انتقال است.

چند جمله ای درجه ۵ :

- شتاب و جرک محدود ایجاد می کند
- اما تغییرات جرک در نقاط شروع و خاتمه ناحیه انتقال بینهایت است.
- اگر از چند جمله ای درجه ۵ استفاده شود اثرات دینامیکی ناشی از خطاهای ساخت اهمیت بیشتری پیدا می کند.





فصل ۸ طراحی بادامک ها

تابع تغییرمکان به صورت زیر تعریف می شود:

$$y = f(\theta) = \sum_{i=0}^n A_i \theta^i$$

θ is the cam angle

A 's must be determined from the conditions to be matched.

برای تعیین ضرایب فوق $n+1$ شرط لازم است.
وقتی n بزرگ باشد و زاویه بر حسب درجه بیان شده باشد، جملات اختلاف زیادی خواهند داشت. خطاهای عددی رسیدن به جواب دقیق را مشکل می سازد.

$$y = f(\theta) = \sum_{i=0}^n C_i \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^i$$

constants are always numbers between 0 and 1





فصل ۸ طراحی بادامک ها

شرایط مورد نظر معمولاً سرعت و شتاب دنبال کننده می باشند:

$$\dot{y} = \dot{f}(\theta) = \frac{1}{\beta} \frac{d\theta}{dt} \sum_{i=1}^n i C_i \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^{(i-1)}$$

$$\ddot{y} = \ddot{f}(\theta) = \frac{1}{\beta} \frac{d^2\theta}{dt^2} \sum_{i=1}^n i C_i \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^{(i-1)} + \frac{1}{\beta^2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \sum_{i=2}^n i(i-1) C_i \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^{(i-2)}$$

constant-velocity cam

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$$



$$y = f(\theta) = \sum_{i=1}^n C_i \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^i$$

$$\dot{y} = \dot{f}(\theta) = \frac{\omega}{\beta} \sum_{i=1}^n i C_i \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^{(i-1)}$$

$$\ddot{y} = \ddot{f}(\theta) = \left(\frac{\omega}{\beta} \right)^2 \sum_{i=2}^n i(i-1) C_i \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^{(i-2)}$$

$$\ddot{y} = \ddot{f}(\theta) = \left(\frac{\omega}{\beta} \right)^3 \sum_{i=3}^n i(i-1)(i-2) C_i \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^{(i-3)}$$





فصل ۸ طراحی بادامک ها

در نظر بگیرید که در نقاط شروع و خاتمه ناحیه انتقال باید مکان ، سرعت و شتاب یکسان باشد ،
که شش شرط می باشد:

$$\theta = 0 \Rightarrow y = \dot{y} = \ddot{y} = 0$$

$$\theta = \beta \Rightarrow y = L$$

$$\dot{y} = \ddot{y} = 0$$

معادلات برای شش ثابت باید حل شود

$$y = C_0 + C_1 \left(\frac{\theta}{\beta} \right) + C_2 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^2 + C_3 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^3 + C_4 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^4 + C_5 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^5$$
$$\dot{y} = \frac{\omega}{\beta} \left[C_1 + 2C_2 \left(\frac{\theta}{\beta} \right) + 3C_3 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^2 + 4C_4 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^3 + 5C_5 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^4 \right]$$
$$\ddot{y} = \left(\frac{\omega}{\beta} \right)^2 \left[2C_2 + 6C_3 \left(\frac{\theta}{\beta} \right) + 12C_4 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^2 + 20C_5 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^3 \right]$$



فصل ۸ طراحی بادامک ها

بر طبق شرایط در شروع و انتهای Rise داریم:

$$0 = C_0$$

$$L = C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5$$

$$0 = \frac{\omega}{\beta} C_1$$

$$0 = \frac{\omega}{\beta} [C_1 + 2C_2 + 3C_3 + 4C_4 + 5C_5]$$

$$0 = \left(\frac{\omega}{\beta}\right)^2 2C_2$$

$$0 = \left(\frac{\omega}{\beta}\right)^2 [2C_2 + 6C_3 + 12C_4 + 20C_5]$$

$$C_0 = C_1 = C_2 = 0$$

$$C_3 = 10L, \quad C_4 = -15L, \quad C_5 = 6L$$

$$y = 10L \left(\frac{\theta}{\beta}\right)^3 - 15L \left(\frac{\theta}{\beta}\right)^4 + 6L \left(\frac{\theta}{\beta}\right)^5$$

3-4-5 polynomial transition





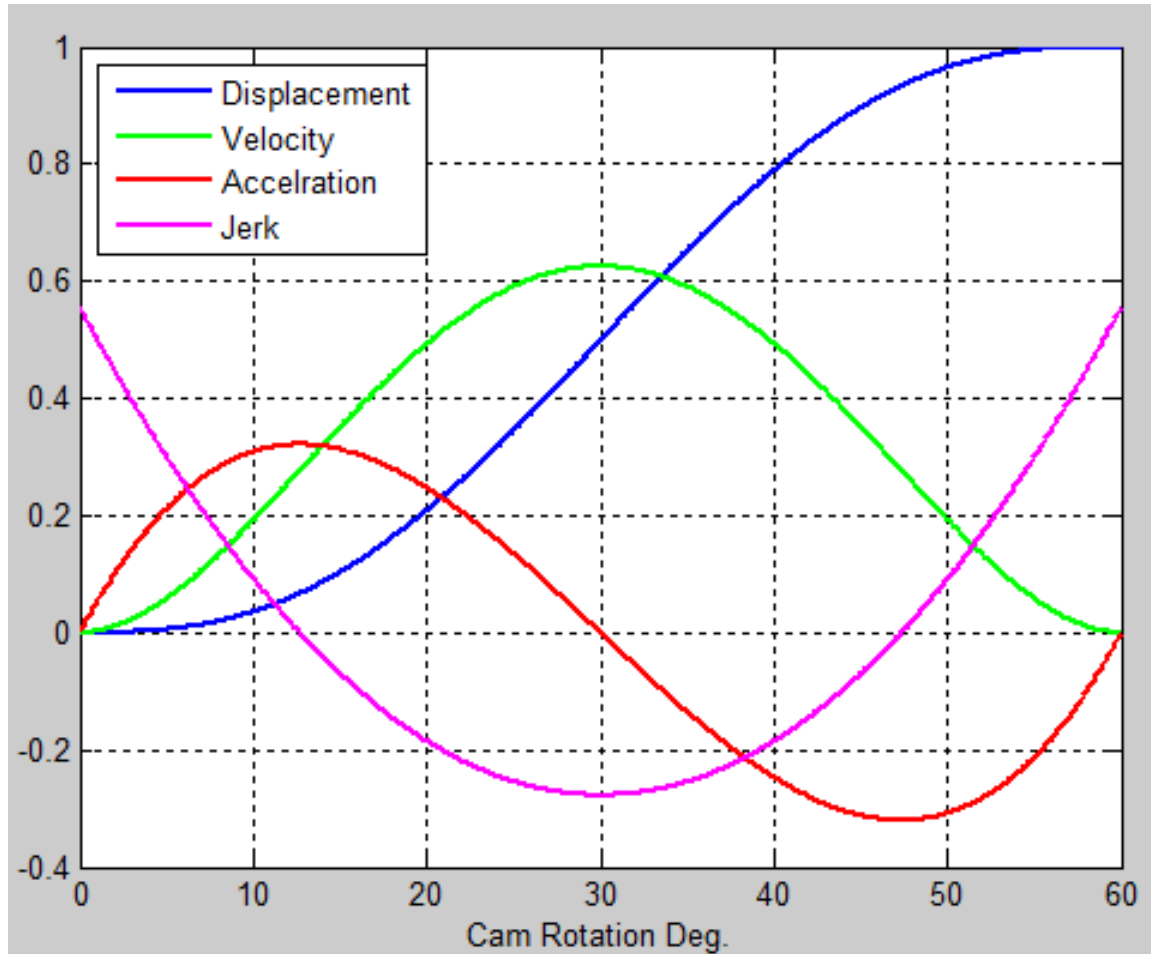
فصل ۸ طراحی بادامک ها

مشتق گیری

$$\begin{aligned} y' &= \frac{30L}{\beta} \left[\left(\frac{\theta}{\beta} \right)^2 - 2 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^3 + \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^4 \right], & \dot{y} &= \frac{30\omega L}{\beta} \left[\left(\frac{\theta}{\beta} \right)^2 - 2 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^3 + \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^4 \right] \\ y'' &= \frac{60L}{\beta^2} \left[\left(\frac{\theta}{\beta} \right) - 3 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^2 + 2 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^3 \right], & \ddot{y} &= 60L \left(\frac{\omega}{\beta} \right)^2 \left[\left(\frac{\theta}{\beta} \right) - 3 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^2 + 2 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^3 \right] \\ y''' &= \frac{60L}{\beta^3} \left[1 - 6 \left(\frac{\theta}{\beta} \right) + 6 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^2 \right], & \dddot{y} &= 60L \left(\frac{\omega}{\beta} \right)^3 \left[1 - 6 \left(\frac{\theta}{\beta} \right) + 6 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^2 \right] \end{aligned}$$



فصل ۸ طراحی بادامک ها



حرکت چند جمله ای ۳-۴-۵



برنامه Matlab برای ایجاد حرکت 3-4-5 polynomial

```
clear
teta=sym('teta');
y= '10*L*(teta/beta)^3 -
15*L*(teta/beta)^4 +
6*L*(teta/beta)^5';
yd=diff(y);
ydd=diff(yd);
yddd=diff(ydd);
L=1; % Rise cm
beta = 60; % Rise Angle deg
ii=1;
for teta=0:0.1:beta
    tteta(ii)=teta;
    yy(ii)=eval(y);
    yyd(ii)=eval(yd);
    yydd(ii)=eval(ydd);
```

```
    yyddd(ii)=eval(yddd);
    ii=ii+1;
end
plot(tteta,yy,'LineWidth',2)
hold on
plot(tteta,20*yyd,'g','LineWidth',2)
plot(tteta,200*yydd,'r','LineWidth',2)
plot(tteta,2000*yyddd,'m','LineWidth',2)
grid
legend('Displacement','Velocity','Accelrati
on','Jerk',...
'Location','NorthWest')
xlabel('Cam Rotation Deg.')
```





فصل ۸ طراحی بادامک ها

تعیین پروفیل بادامک

پس از تعیین حرکت دنبال کننده بصورت تابعی از حرکت بادامک ، پروفیل بادامک بصورت ترسیمی یا تحلیلی بدست می آید.

پروفیل بادامکهای دقیق و سرعت بالا باید از روش تحلیلی محاسبه شده و با استفاده از ماشینهای CNC تولید شوند.

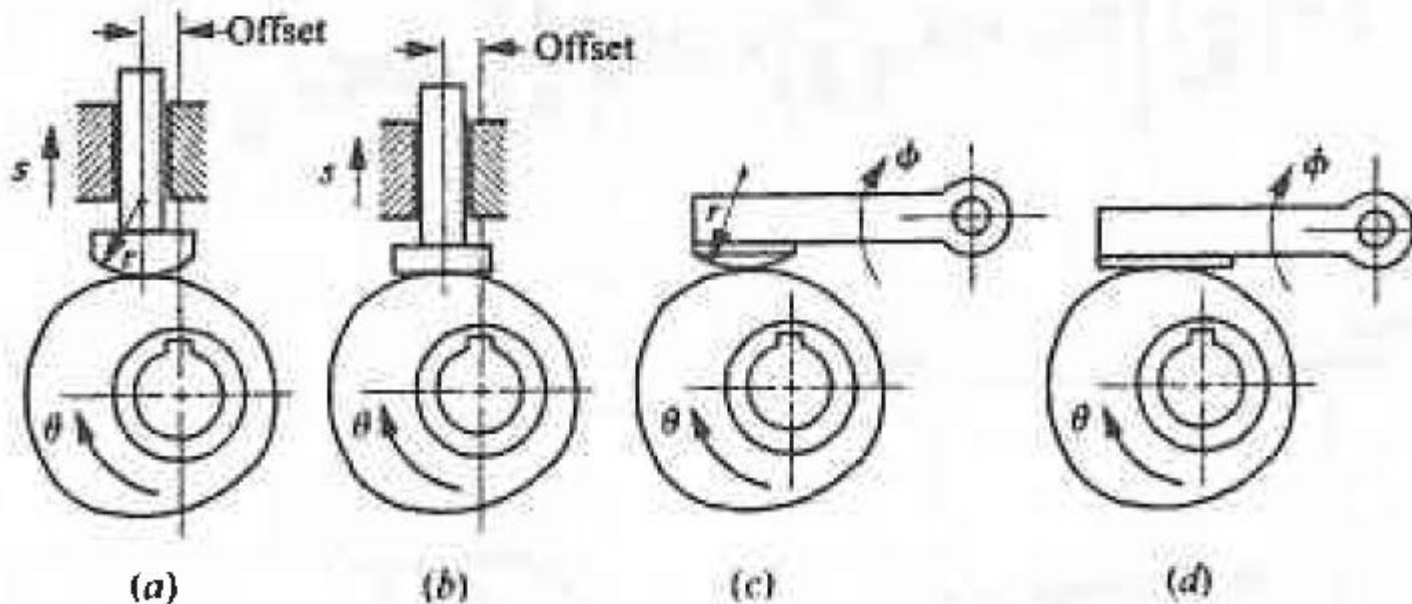
بادامک ثابت در نظر گرفته شده و مرجع (قاب) به همراه دنبال کننده بسبت به بادامک در جهت عکس حرکت می نمایند.



فصل ۸ طراحی بادامک ها

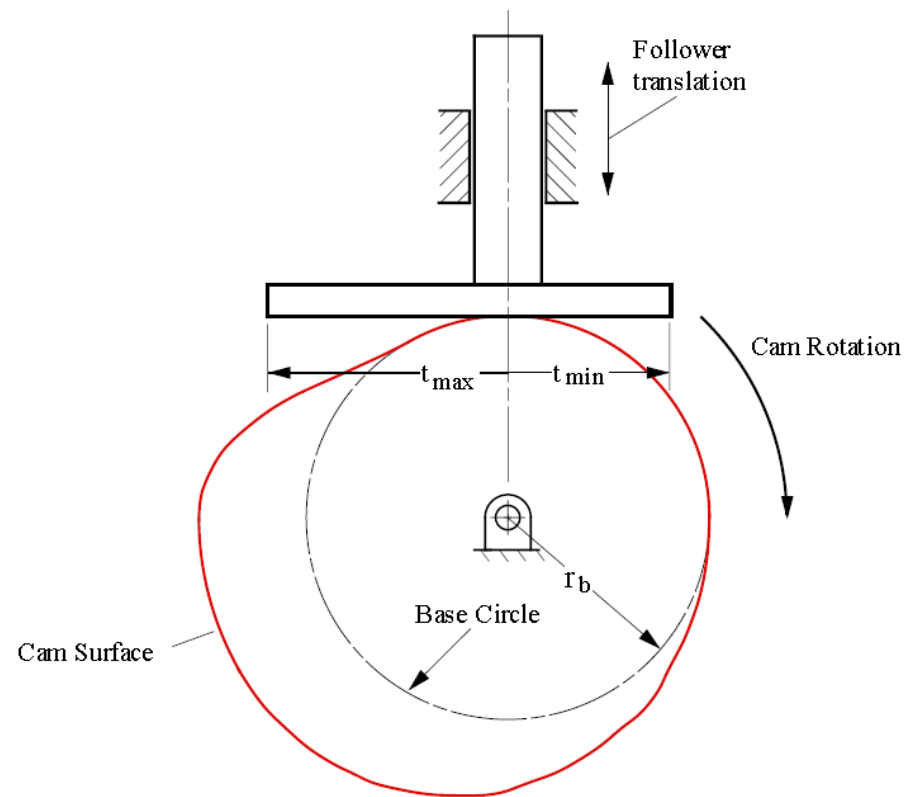
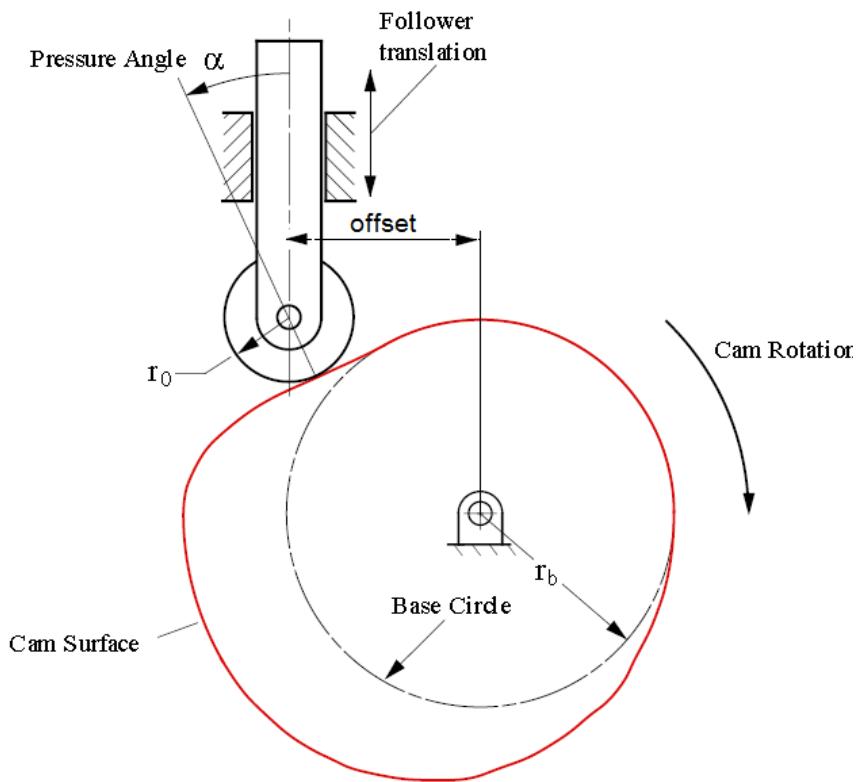
اگر بحث محدود به بادامکهای مسطح دورانی باشد ، چهار نوع دنبال کننده وجود دارد:

- (a) دنبال کننده انتقالی با سطح استوانه ای
- (b) دنبال کننده انتقالی با سطح تخت
- (c) دنبال کننده دورانی با سطح استوانه ای
- (d) دنبال کننده دورانی با تخت



فصل ۸ طراحی بادامک ها

تعیین پروفیل بادامک برای دنبال کننده غلتشی و مسطح





فصل ۸ طراحی بادامک ها

تعریف چند پارامتر:

○ زاویه فشار

زاویه بین جهت حرکت (سرعت) دنبال کننده و راستای خط انتقال حرکت

برای دنبال کننده های انتقالی زاویه فشار کمتر از 30° انتخاب می گردد تا از بارهای جانبی زیاد در اتصال لغزشی جلوگیری شود.

اگر دنبال کننده حول یک مفصل R نوسان می کند ، زاویه فشار تا 35° قابل قبول است.





فصل ۸ طراحی بادامک ها

دایره مبنا (base circle)

دایره مبنا کوچکترین دایره ای که مماس بر بادامک رسم گردد.

دایره اولیه (*prime circle*)

کوچکترین دایره ای که مماس بر مکان هندسی مرکز دنبال کننده رسم شود.

منحنی گام (*pitch curve*)

مکان هندسی مرکز دنبال کننده که در یک سیکل حرکت طی می شود.

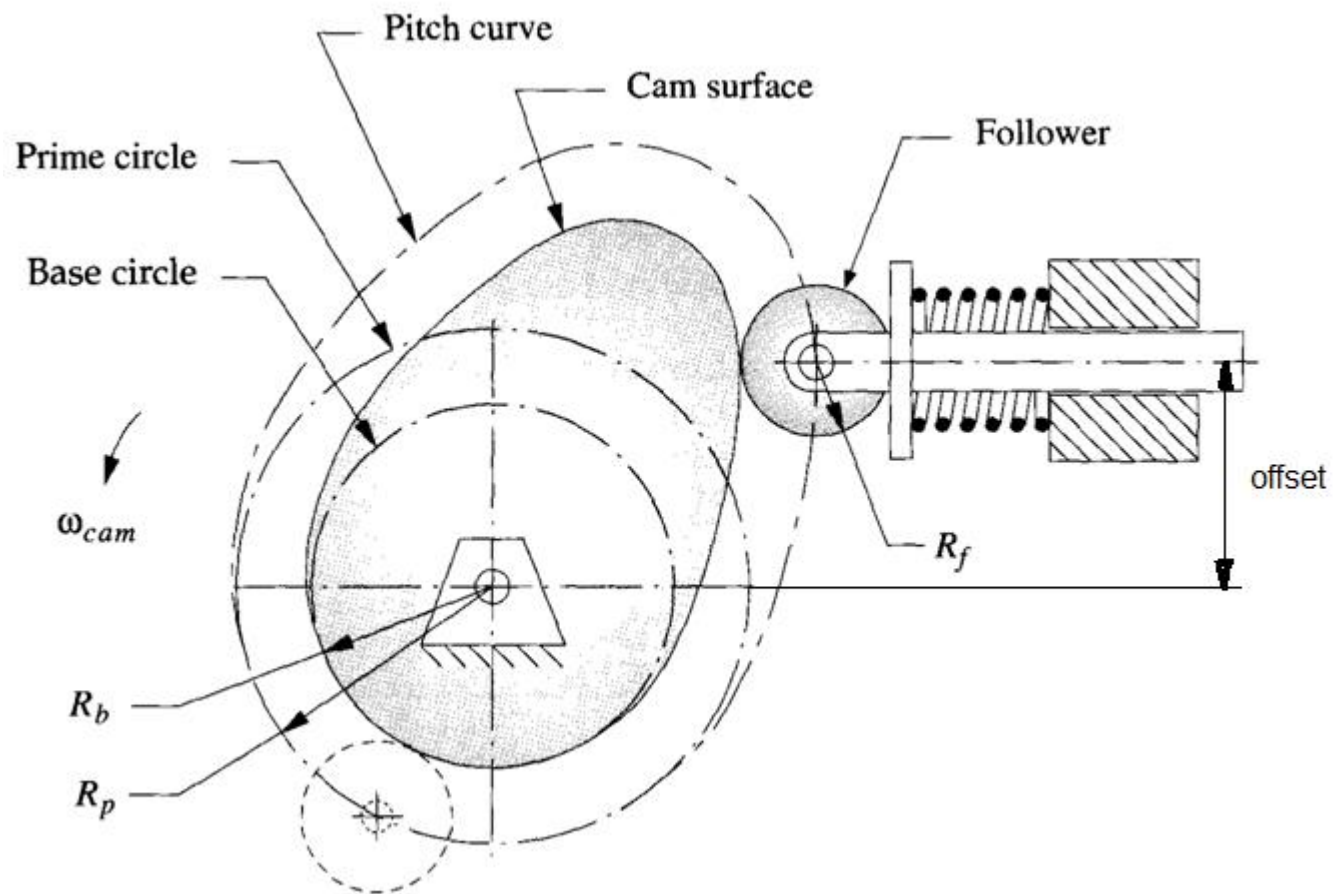
خروج از مرکز *eccentricity* یا *offset*

فاصله عمودی بین راستای حرکت دنبال کننده و مرکز دوران بادامک



فصل ۸ طراحی بادامک ها

تعاریف فوق را در شکل بررسی کنید.





فصل ۸ طراحی بادامک ها

انتخاب اندازه بادامک

دو عامل اصلی که روی اندازه بادامک موثرند:

(a) زاویه فشار pressure angle

(b) شعاع انحنا radius of curvature

این دو نیز بستگی به شعاع دایره مبنا در دنبال کننده مسطح و شعاع دایره اولیه در دنبال کننده استوانه ای دارند.





فصل ۸ طراحی بادامک ها

حرکت دنبال کننده بصورت هارمونیک و شرایط

Offset=0

dwell at zero lift for the first 120° of the motion cycle and

dwell at 0.8 lift for cam angles from 180° to 210°

قطر غلتک ۱ inch و بادامک در جهت ساعتگرد دوران می کند.

نتایج محاسبات حرکت دنبال کننده نسبت به زاویه دوران بادامک در جدول زیر آورده شده است.

θ	$0, 360^\circ$	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
y	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
θ	90°	100°	110°	120°	130°	140°	150°	160°	170°
y	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0536	0.2000	0.4000	0.6000	0.7464
θ	180°	190°	200°	210°	220°	230°	240°	250°	260°
y	0.8000	0.8000	0.8000	0.8000	0.7913	0.7654	0.7236	0.6677	0.6000
θ	270°	280°	290°	300°	310°	320°	330°	340°	350°
y	0.5236	0.4418	0.3582	0.2764	0.2000	0.1323	0.0764	0.0346	0.0087



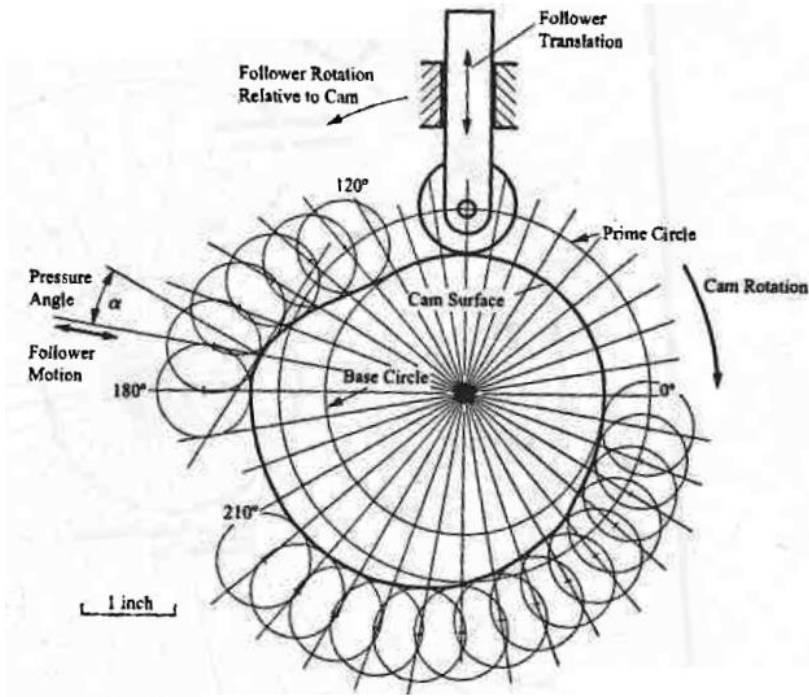
فصل ۸ طراحی بادامک ها

آلگوریتم حل:

۱- ابتدا خطوط شعاعی با نمو 10° در جهت خلاف عقربه های ساعت رسم می شود.

۲- سپس دایره مبنا و دایره اولیه رسم می شوند.

شعاع دایره مبنا انتخابی است (۱.۵ inch) و شعاع دایره اولیه از رابطه زیر بدست می آید.



$$\begin{aligned} \text{radius of prime circle} &= r_b + r_o \\ &= 1.5 + 0.5 = 2 \text{ inch} \end{aligned}$$



فصل ۸ طراحی بادامک ها

- موقعیتهای متوالی مرکز دنبال کننده بصورت شعاعی به سمت خارج دایره مبنا خواهد بود.
- در صورتیکه شعاع دایره مبنا کوچکتر از حد مجاز باشد موقعیتهایی پیش خواهد آمد که شعاع پروفیل بادامک کوچکتر از شعاع دنبال کننده شود که باید از آن اجتناب کرد.
- دایره های رسم شده به مرکز این نقاط و شعاع دنبال کننده رسم شده ، پوش یا منحنی مماس به این دایره ها پروفیل بادامک مورد نظر خواهد بود.





فصل ۸ طراحی بادامک ها

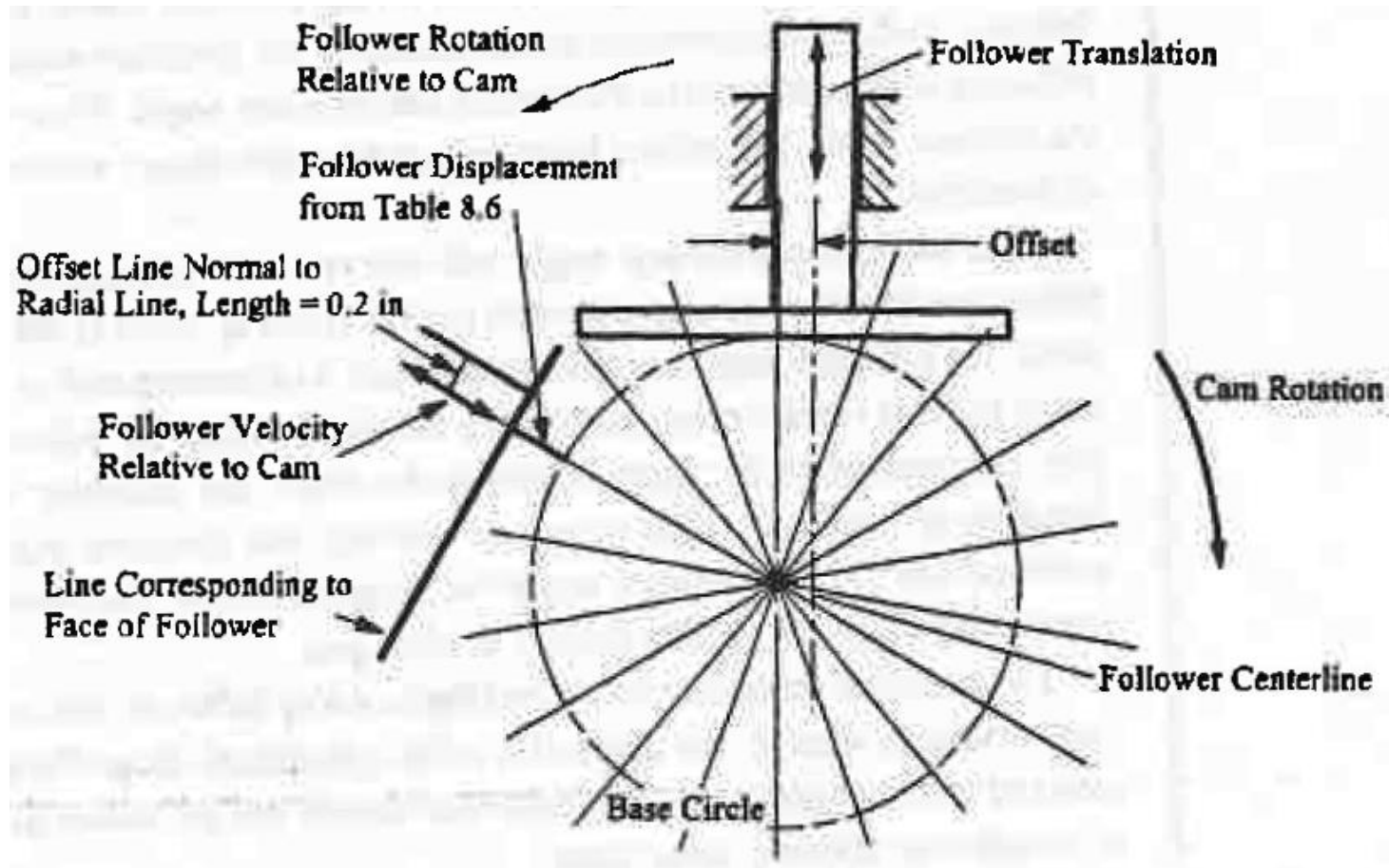
رسم پروفیل بادامک برای Radial Flat-faced Follower

- پروفیل تغییر مکان هارمونیکی و جدول تغییر مکان مطابق مثال قبلی می باشد.
- در این حالت دایره اولیه وجود ندارد ، اما روی انتخاب شعاع دایره مبنا باید دقت نمود
- خطوط شعاعی با نمو مورد نظر مطابق قبل رسم می شوند
- تغییر مکانها بر اساس اعداد داده شده در جدول در امتداد شعاعی در نظر گرفته شده
- خط عمود در این نقاط بر راستای شعاعی ، سطح بادامک را معین می سازد
- محور دنبال کننده **offset** راستای شعاعی به اندازه داده شده است.



فصل ۸ طراحی بادامک ها

مراحل فوق را در شکل زیر بررسی نمایید





فصل ۸ طراحی بادامک ها

قید اصلی روی پروفیل بادامک برای دنبال کننده تخت این است که باید محدب باشد (Convex).

در غیر این صورت تماس در قسمتهایی از پروفیل بادامک قطع خواهد شد.

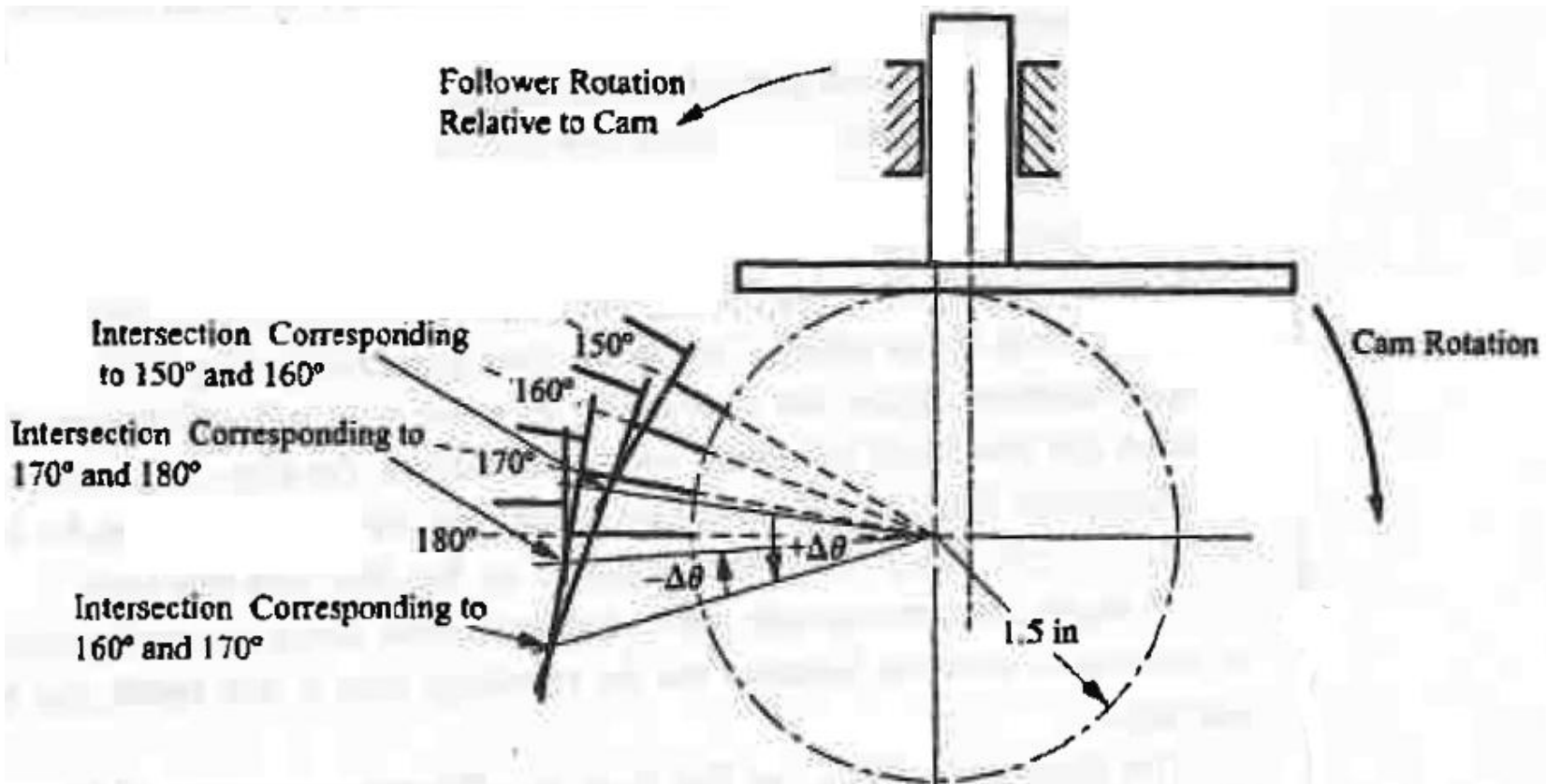
تحدب (Convexity) از روی جهت شعاع انحناء و یا از روی تغییر زاویه خط مماس قابل تشخیص است.

بادامک رسم شده در شکل قبل شرط تحدب را نقض می کند.



فصل ۸ طراحی بادامک ها

نقض شرط تحدب را بررسی نمایید



base circle is too small to generate an acceptable cam for a flat-faced follower



فصل ۸ طراحی بادامک ها

خطوط سطح دنبال کننده تخت رسم شده و نقطه تلاقی خطوط متوالی مشخص می شود.

جهت بدست آوردن سطح محدب باید نمو زاویه ای در نقاط تلاقی متوالی مثبت باشد.

اگر نمو منفی باشد باید شعاع دایره مبنا بزرگتر انتخاب شود.

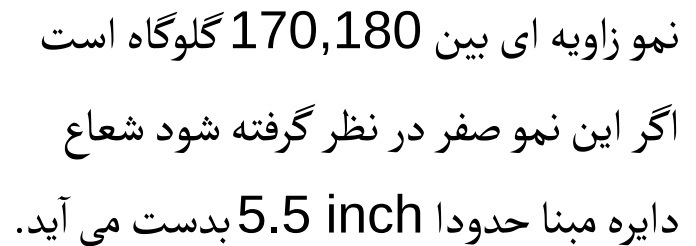
برای بررسی این مشکل موقعیتهاب متوالی **150, 160, 170, 180** را در نظر بگیرید.

ابتدا شعاع دایره مبنا **1.5 inch** انتخاب شده است.

نمو زاویه ای در تقاطع **160, 170** مثبت و در **170, 180** منفی می باشد.

لذا شعاع دایره مبنا باید بزرگتر انتخاب شود.





برای این دایره مبنا ، پروفیل بادامک یک
نقطه تیز cusp در نقطه تلاقی دو خط
170,180 درجه دارد.

در شکل پروفیل‌های بادامک برای دنبال کننده های غلتکی و تخت مقایسه شده اند.





فصل ۸ طراحی بادامک ها

ابعاد بادامک برای دنبال کننده تخت بزرگتر است ، نقطه **cusp** دارد و ابعاد سطح صاف دنبال کننده نیز باید بزرگتر باشد.

از طرف دیگر زاویه فشار در دنبال کننده مسطح همیشه صفر است.

اما نیروی جانبی روی یاتاقانها وجود دارد.

○ اصطکاک

○ گشتاور به علت **offset**





فصل ۸ طراحی بادامک ها

تعیین تحلیلی پروفیل بادامک

○ در کاربردهای high speed دقت بالاتری برای پروفیل بادامک مورد نیاز است و باید از روشهای تحلیلی استفاده کرد.

○ یک دستگاه مختصات ثابت در روی بادامک و یک دستگاه متحرک در روی دنبال کننده در نظر گرفته می شود.

○ برای بدست آوردن موقعیتهای دنبال کننده نسبت به بادامک کافی است که موقعیت دستگاه متحرک نسبت به ثابت محاسبه گردد.





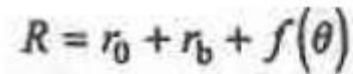
فصل ۸ طراحی بادامک ها

پروفیل بادامک برای offset radial roller follower

○ قبل از شروع حل فرض می شود که روابط حرکت دنبال کننده $y=f(\theta)$ ، شعاع دایره مبنا ؛ شعاع غلتک و مقدار offset داده شده اند.

○ ابتدا مکانهای متوالی مرکز غلتک تعیین شده سپس منحنی پوش (envelope) بدست می آید.





$$y = R \sin \theta + \delta \cos \theta = [r_0 + r_b + f(\theta)] \sin \theta - \delta \cos \theta$$

خواهد بود.

پوش یک سری دایره خواهد بود.





فصل ۸ طراحی بادامک ها

- تئوری پوش خیلی پیچیده است و بهتر است که از روشهای عددی استفاده شود.
- در روش عددی اگر نمو زاویه ای به اندازه کافی کوچک باشد ، دقت قابل قبولی بدست خواهد آمد.
- برخی از روشهای عددی عبارتند از:

1. intersections of roller circles
2. average tangent location formed by successive tangent lines
3. intersections of successive tangent lines, and
4. tangent points formed by a circle tangent to three successive positions of the roller .





فصل ۸ طراحی بادامک ها

شعاع انحنا بادامک به چند دلیل مهم است:

- اگر در ناحیه ای بادامک مقعر باشد ، شعاع انحنا حداقل قطربزار را مشخص می کند.
- اگر در ناحیه ای بادامک مقعر باشد ، شعاع انحنا حداقل قطررولر دنبال کننده را مشخص می کند.
-
- تنشهای تماسی تابعی از شعاع انحنا بادامک می باشند.





فصل ۸ طراحی بادامک ها

اگر رابطه پارامتری برای $x(\theta)$ و $y(\theta)$ وجود داشته باشد، می توان شعاع انحناء ρ را از رابطه زیر محاسبه نمود

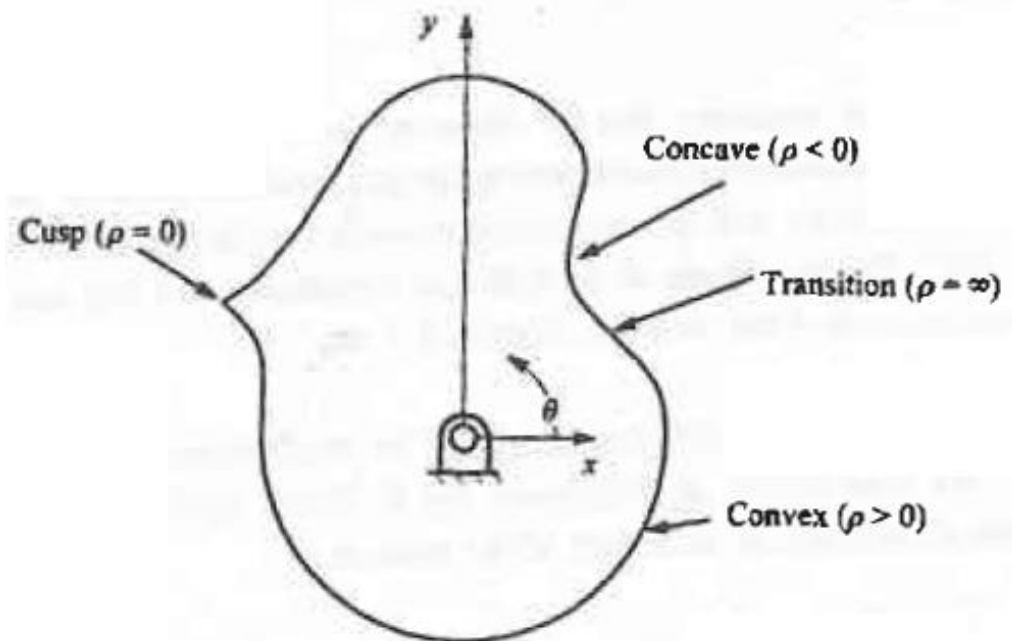
$$\rho = \frac{\sqrt{\left[\left(\frac{dx}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta} \right)^2 \right]^3}}{\left(\frac{dx}{d\theta} \right) \left(\frac{d^2 y}{d\theta^2} \right) - \left(\frac{dy}{d\theta} \right) \left(\frac{d^2 x}{d\theta^2} \right)}$$

توجه نمایید که شعاع انحناء دارای اندازه و جهت است. وقتی پروفیل محدب باشد شعاع انحناء مثبت و در صورتی که پروفیل مقعر باشد شعاع انحناء منفی است.



فصل ۸ طراحی بادامک ها

- شعاع می تواند صفر باشد ، که نشاندهنده نقطه cusp می باشد.
- انتقال بین نواحی محدب و مقعر باعث ایجاد شعاع انحناء بینهایت یا نقطه عطف می شود.
- تعبیر هندسی مقادیر مختلف ρ در شکل نشان داده شده است.





فصل ۸ طراحی بادامک ها

تعیین مرکز انحنا پروفیل بادامک در نقطه دلخواه

- برای زاویه θ داده شده مرکز انحنا پروفیل بادامک همان مرکز انحنا منحنی گام می باشد که با مراکز متوالی رولر دنبال کننده تعیین می شود.
- مرکز انحنا منحنی گام با برازش دایره ای به سه نقطه متوالی مرکز رولر بدست می آید.

$$p_{i-1} = (x_{i-1}, y_{i-1})$$

$$p_i = (x_i, y_i)$$

$$p_{i+1} = (x_{i+1}, y_{i+1})$$

○ موقعیت تقریبی مرکز انحنا

$$p_c = (x_c, y_c)$$





فصل ۸ طراحی بادامک ها

دستگاه معادلات خطی برای بدست آوردن موقعیت P_C

$$\begin{bmatrix} 2(x_{i+1} - x_i) & 2(y_{i+1} - y_i) \\ 2(x_{i-1} - x_i) & 2(y_{i-1} - y_i) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_c \\ y_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (x_{i+1}^2 - x_i^2) + (y_{i+1}^2 - y_i^2) \\ (x_{i-1}^2 - x_i^2) + (y_{i-1}^2 - y_i^2) \end{Bmatrix}$$

مقدار شعاع انحناء

$$\rho = |r_{P_i/P_c}| = \sqrt{(x_i - x_c)^2 + (y_i - y_c)^2}$$

جهت یا علامت شعاع انحناء

$$r_{P_i/P_{i-1}} \times r_{P_{i+1}/P_i} = [(x_i - x_{i-1})(y_{i+1} - y_i) - (x_{i+1} - x_i)(y_i - y_{i-1})]k$$

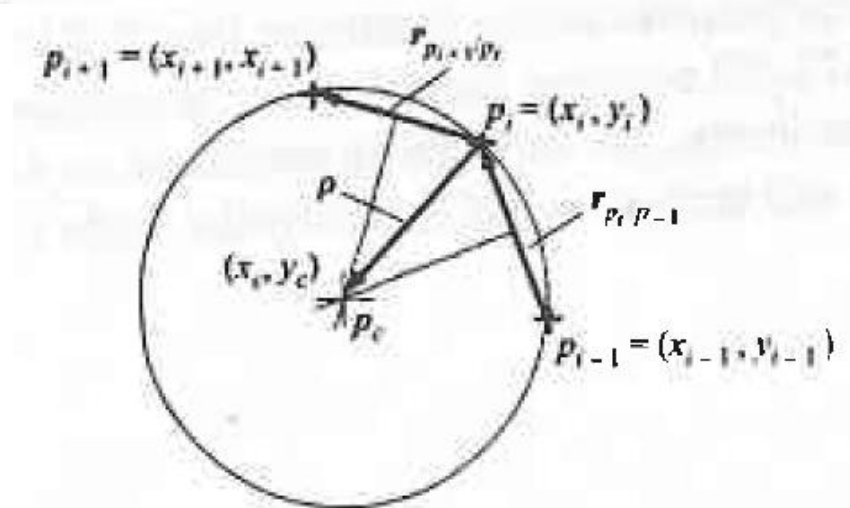


فصل ۸ طراحی بادامک ها

علامت شعاع انحناء با استفاده از ضرب خارجی بدست می آید:

- اگر حاصلضرب در راستای مثبت k باشد ، علامت مثبت و پروفیل محدب است.
- اگر حاصلضرب در راستای منفی k باشد ، علامت منفی و پروفیل مقعر است.
- اگر دترمینان ضرایب صفر باشد ، مرکز انحناء در بینهایت و شعاع انحناء بینهایت و پروفیل نقطه عطف دارد.
- اگر $p_i = (x_i, y_i) = p_c = (x_c, y_c)$ شعاع انحناء صفر و نقطه تیز وجود دارد.

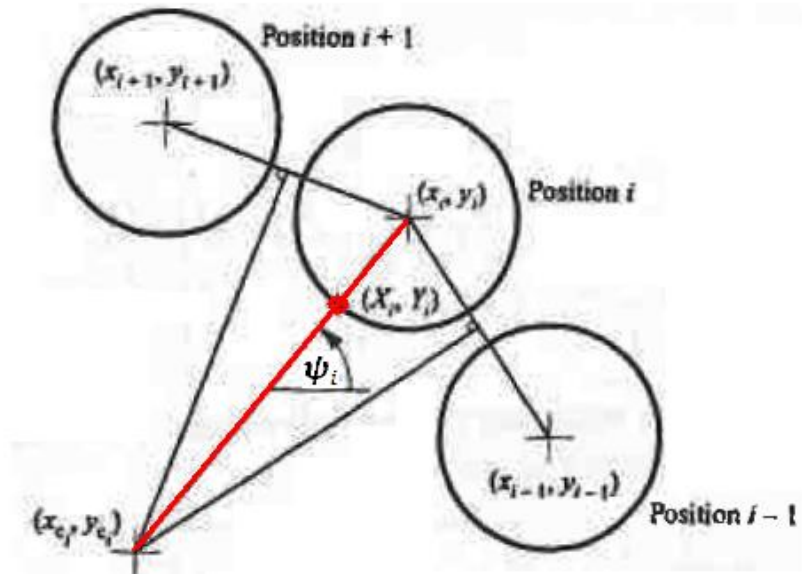
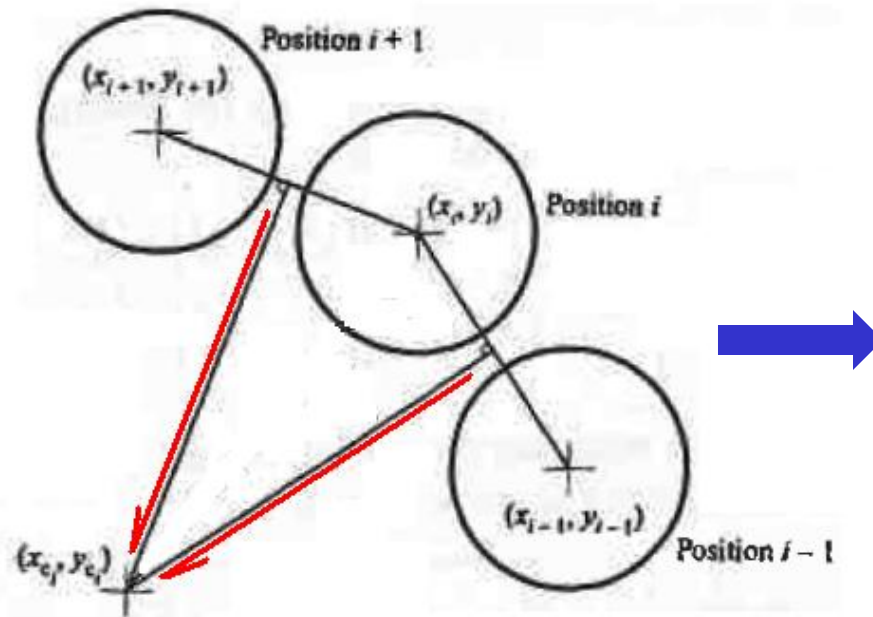
$$\mathbf{r}_{p_i/p_{i-1}} \times \mathbf{r}_{p_{i+1}/p_i} = \left[(x_i - x_{i-1})(y_{i+1} - y_i) - (x_{i+1} - x_i)(y_i - y_{i-1}) \right] k$$



فصل ۸ طراحی بادامک ها

تقریب پروفیل با استفاده از مرکز انحنا

- سه نقطه متوالی مراکز غلتک رسم می شود.
- مرکز انحنا برخورد خطوط عمود بر پاره خطهای متوالی در نقطه میانی می باشند.
- نقطه روی پروفیل بادامک در روی خط گذرنده از مرکز انحنا و مرکز رولر قرار دارد.
- (X_i, Y_i) محل برخورد این خط با دایره غلتک است.





فصل ۸ طراحی بادامک ها

شیب خط گذرنده از مرکز انحنا و مرکز غلتک دوم

$$\psi_i = \tan^{-1} \left(\frac{y_i - y_c}{x_i - x_c} \right)$$

مختصات نقطه روی بادامک برای وقتی که پروفیل محدب است:

$$X_i = x_i - r_0 \cos \psi_i$$

$$Y_i = y_i - r_0 \sin \psi_i$$

مختصات نقطه روی بادامک برای وقتی که پروفیل مقعر است:

$$X_i = x_i + r_0 \cos \psi_i$$

$$Y_i = y_i + r_0 \sin \psi_i$$





فصل ۸ طراحی بادامک ها

محاسبه زاویه فشار

زاویه بین عمود بر پروفیل بادامک و راستای حرکت دنبال کننده

$$\phi_i = \psi_i - \theta \quad \text{○ روش اول:}$$

○ روش دوم: مختصات مرکز انحنا نسبت به دستگاه ثابت محاسبه شود. در صورتی که فرض شود دنبال کننده افقی حرکت می کند ، شیب خط متصل کننده مرکز انحنا و مرکز غلتک زاویه فشار را معین می سازد.





فصل ۸ طراحی بادامک ها

خلاصه روابط محاسبات

Radius of curvature

$$\begin{Bmatrix} x_c \\ y_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(X_{i+1} - X_i) & 2(Y_{i+1} - Y_i) \\ 2(X_{i-1} - X_i) & 2(Y_{i-1} - Y_i) \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} (X_{i+1}^2 - X_i^2) + (Y_{i+1}^2 - Y_i^2) \\ (X_{i-1}^2 - X_i^2) + (Y_{i-1}^2 - Y_i^2) \end{Bmatrix}$$

$$\rho = \frac{\left[(X_i - X_{i-1})(Y_{i+1} - Y_i) - (X_{i+1} - X_i)(Y_i - Y_{i-1}) \right]}{\left| (X_i - X_{i-1})(Y_{i+1} - Y_i) - (X_{i+1} - X_i)(Y_i - Y_{i-1}) \right|} \sqrt{(X_i - x_c)^2 + (Y_i - y_c)^2}$$

Cam coordinates

$$x_i = [r_0 + r_b + f(\theta_i)] \cos \theta_i - \delta \sin \theta_i$$

$$y_i = [r_0 + r_b + f(\theta_i)] \sin \theta_i + \delta \cos \theta_i$$

$$\psi_i = \tan^{-1} \left(\frac{y_i - y_c}{x_i - x_c} \right) \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

$$X_i = x_i - r_0 \cos \psi_i \quad (\text{convex})$$

$$Y_i = y_i - r_0 \sin \psi_i$$

$$X_i = x_i + r_0 \cos \psi_i \quad (\text{concave})$$

$$Y_i = y_i + r_0 \sin \psi_i$$

Pressure angle

$$\phi_i = \psi_i - \theta$$





فصل ۸ طراحی بادامک ها

مثال: پروفیل بادامک با مشخصات زیر را تعیین نمایید،

the follower starts from a dwell 0 to 90° and rotate CW.

The rise occurs with cycloidal motion for rotation from 90° to 180°. The follower then dwells for 60° of cam rotation, and

the return by harmonic motion for the cam rotation from 240° to 360°.

Rise is 2 cm, and the follower radius is 1 cm.

the base circle radius is 4 cm and the offset is 0.5 cm.

$$0 \leq \theta \leq \pi/2: \quad y = 0$$

$$\pi/2 \leq \theta \leq \pi: \quad f(\theta) = \frac{2L}{\pi} \left(\left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{4} \sin 4 \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

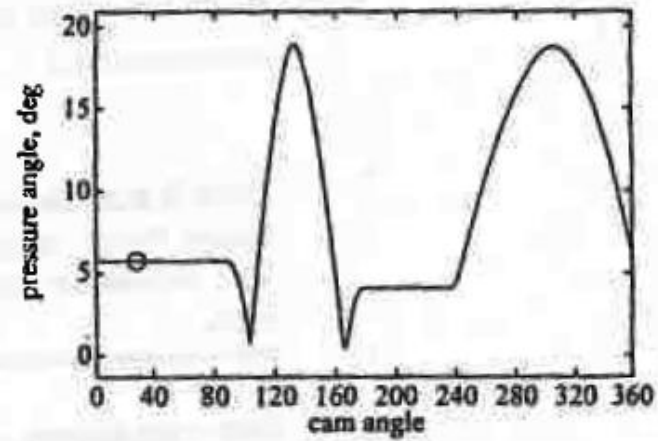
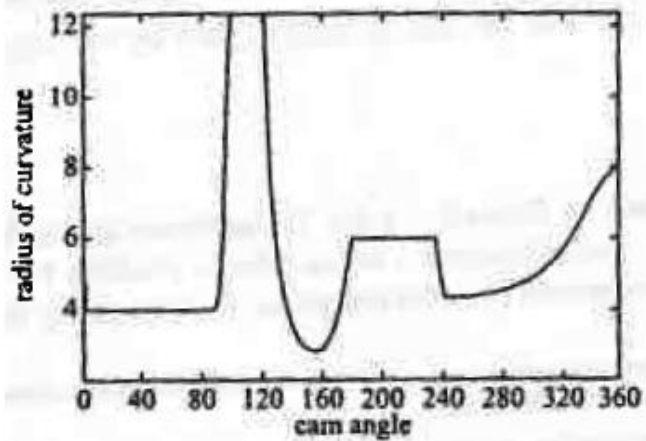
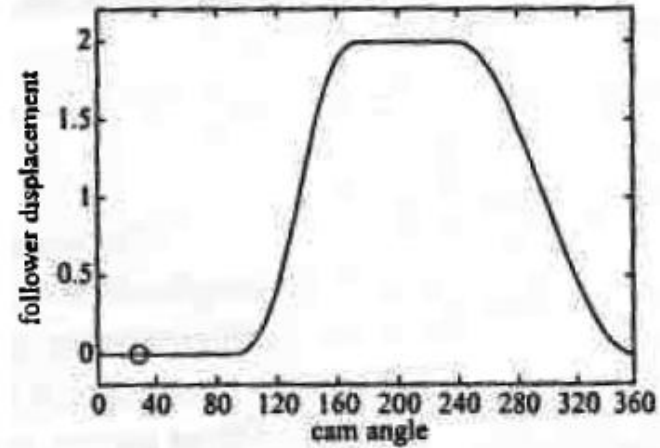
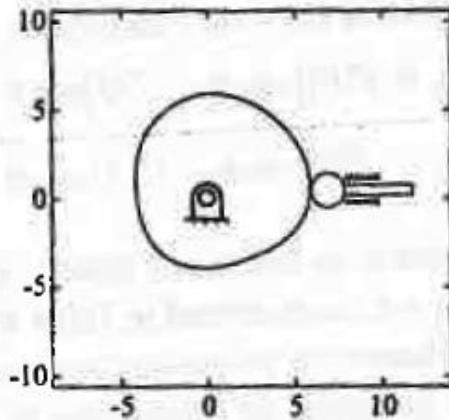
$$\pi \leq \theta \leq 4\pi/3: \quad f(\theta) = 2, \quad f'(\theta) = f''(\theta) = 0$$

$$4\pi/3 \leq \theta \leq 2\pi: \quad f(\theta) = \frac{L}{2} \left(1 + \cos \frac{3}{2} \left(\theta - \frac{4\pi}{3} \right) \right)$$



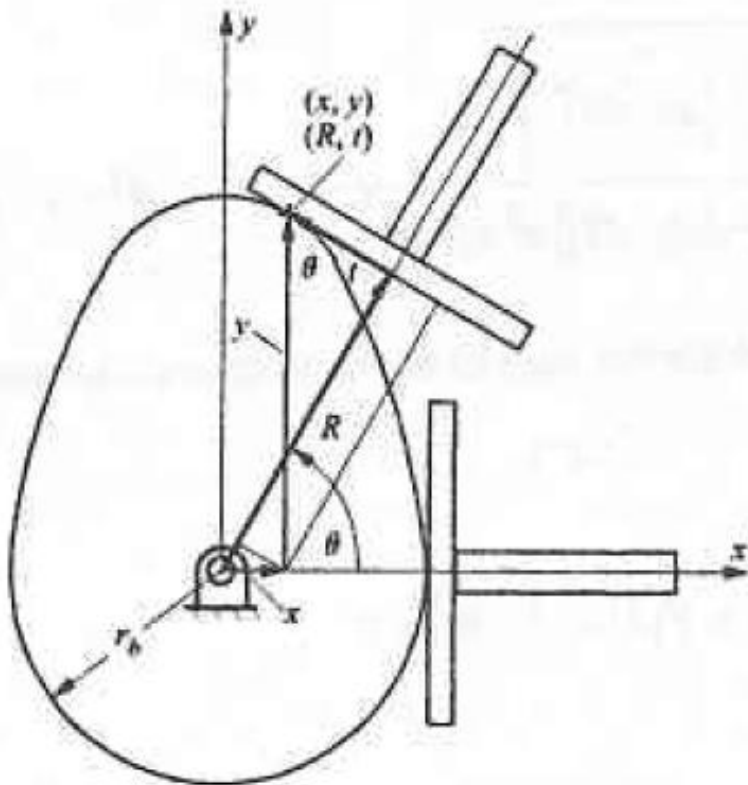
فصل ۸ طراحی بادامک ها

حل توسط نرم افزار Matlab



فصل ۸ طراحی بادامک ها

تعیین تحلیلی پروفیل بادامک برای دنبال کننده تخت شعاعی
تغییر مکان شعاعی دنبال کننده



$$R = r_b + f(\theta)$$

$$R = y \sin \theta + x \cos \theta$$

$$t = y \cos \theta - x \sin \theta = \frac{dR}{d\theta} = f'(\theta)$$

$$x = R \cos \theta - t \sin \theta$$

$$y = R \sin \theta + t \cos \theta$$

$$x = [r_b + f(\theta)] \cos \theta - f'(\theta) \sin \theta$$

$$y = [r_b + f(\theta)] \sin \theta + f'(\theta) \cos \theta$$

فصل ۸ طراحی بادامک ها

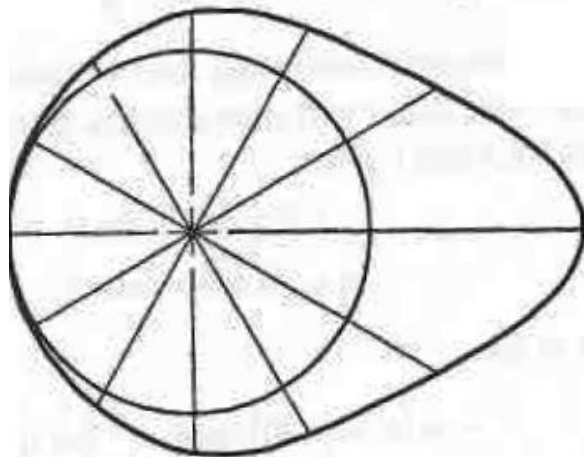
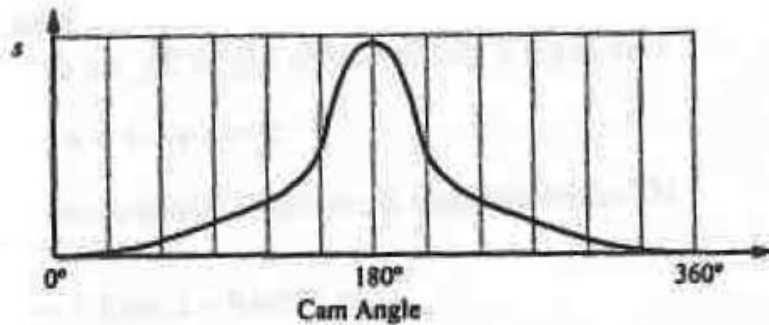
حداقل شعاع دایره مبنا برای دنبال کننده تخت ، شعاعی که از cusp جلوگیری نماید.

برای برنامه حرکت داده شده با کاهش

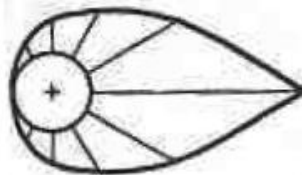
شعاع دایره مبنا ، شیب پروفیل بادامک

تندتر می شود. و نهایتاً به نقطه تیز

منتهی می شود



Large Base Circle



Small Base Circle



فصل ۸ طراحی بادامک ها

محاسبه حداقل شعاع دایره مبنا

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = f'(\theta) \cos \theta - [r_b + f(\theta)] \sin \theta - f''(\theta) \sin \theta - f'(\theta) \cos \theta = -[r_b + f(\theta) + f''(\theta)] \sin \theta$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \theta^2} = -[f'(\theta) + f'''(\theta)] \sin \theta - [r_b + f'(\theta) + f'''(\theta)] \cos \theta$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = f'(\theta) \sin \theta + [r_b + f(\theta)] \cos \theta + f''(\theta) \cos \theta - f'(\theta) \sin \theta = [r_b + f(\theta) + f''(\theta)] \cos \theta$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} = [f'(\theta) + f'''(\theta)] \cos \theta - [r_b + f(\theta) + f'''(\theta)] \sin \theta$$

$$\rho = \frac{\sqrt{[(dx/d\theta)^2 + (dy/d\theta)^2]^3}}{(dx/d\theta)(d^2y/d\theta^2) - (dy/d\theta)(d^2x/d\theta^2)} = [r_b + f(\theta) + f''(\theta)]$$





فصل ۸ طراحی بادامک ها

شرط محدب بودن و عدم وجود cusp

$$\rho \geq 0$$

$$[r_b + f(\theta) + f''(\theta)] \geq 0$$



$$r_b \geq -f(\theta) - f''(\theta)$$





Cam coordinates—clockwise rotation of cam

$$x_i = [r_b + f(\theta_i)] \cos \theta_i - f'(\theta_i) \sin \theta_i$$

$$y_i = [r_b + f(\theta_i)] \sin \theta_i + f'(\theta_i) \cos \theta_i$$

Cam coordinates—counterclockwise rotation of cam

$$x = [r_b + f(\theta)] \cos \theta + f'(\theta) \sin \theta$$

$$y = [r_b + f(\theta)] \sin \theta - f'(\theta) \cos \theta$$

Minimum face length

$$t_{\max, \min} = f'(\theta_i) \Big|_{\max, \min}$$

Radius of curvature

$$\rho = [r_b + f(\theta) + f''(\theta)]$$





فصل ۸ طراحی بادامک ها

• مثال:

— براساس برنامه حرکت مثال قبل ، پروفیل بادامک را برای دنبال کننده تخت شعاعی محاسبه نمایید.
حداقل شعاع دایره مبنا را بدست آورید.

$$0 \leq \theta \leq \pi/2: f(\theta) = f'(\theta) = f''(\theta) = 0$$

$$\pi/2 \leq \theta \leq \pi: f(\theta) = \frac{2L}{\pi} \left(\left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{4} \sin 4 \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \right), \quad f'(\theta) = \frac{2L}{\pi} \left(1 - \cos 4 \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \right),$$
$$f''(\theta) = \frac{8L}{\pi} \left(\sin 4 \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

$$\pi \leq \theta \leq 4\pi/3: f(\theta) = 2, \quad f'(\theta) = f''(\theta) = 0$$

$$4\pi/3 \leq \theta \leq 2\pi: f(\theta) = \frac{L}{2} \left(1 + \cos \frac{3}{2} \left(\theta - \frac{4\pi}{3} \right) \right), \quad f'(\theta) = -\frac{3L}{4} \sin \frac{3}{2} \left(\theta - \frac{4\pi}{3} \right),$$
$$f''(\theta) = -\frac{9L}{8} \cos \frac{3}{2} \left(\theta - \frac{4\pi}{3} \right)$$





فصل ۸ طراحی بادامک ها

θ	$f(\theta)$ (cm)	$f'(\theta)$ (cm)	$f''(\theta)$ (cm)	r_{bmin} (cm)	t (cm)
0°	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
			—dwell—		
90°	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
100°	0.018	0.298	3.274	- 3.291	0.298
110°	0.131	1.052	5.016	- 5.147	1.052
120°	0.391	1.910	4.411	- 4.802	1.910
130°	0.780	2.470	1.742	- 2.522	2.470
140°	1.220	2.470	- 1.742	0.522	2.470
150°	1.609	1.910	- 4.411	2.802	1.910
160°	1.869	1.052	- 5.016	3.147	1.052
170°	1.982	0.298	- 3.274	1.291	0.298
180°	2.000	0.000	0.000	- 2.000	0.000
			—dwell—		
240°	2.000	- 0.000	- 2.250	0.250	- 0.000
250°	1.966	- 0.388	- 2.173	0.207	- 0.388
260°	1.866	- 0.750	- 1.949	0.083	- 0.750
270°	1.707	- 1.061	- 1.591	- 0.116	- 1.061
280°	1.500	- 1.299	- 1.125	- 0.375	- 1.299
290°	1.259	- 1.449	- 0.582	- 0.676	- 1.449
300°	1.000	- 1.500	0.000	- 1.000	- 1.500
310°	0.741	- 1.449	0.582	- 1.324	- 1.449
320°	0.500	- 1.299	1.125	- 1.625	- 1.299
330°	0.293	- 1.061	1.591	- 1.884	- 1.061
340°	0.134	- 0.750	1.949	- 2.083	- 0.750
350°	0.034	- 0.388	2.173	- 2.207	- 0.388

براساس محاسبات انجام شده

حداقل شعاع دایره مبنا

$$r_b = 3.147 \text{ cm}$$

و حداقل $t = 2.47 \text{ cm}$ بالای

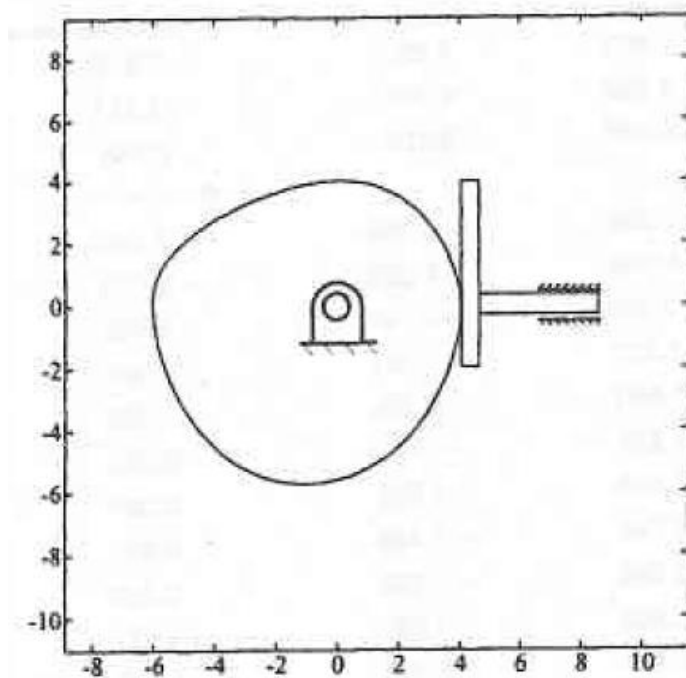
خط مرکز و 1.5 cm پایین

خط مرکز باید باشد تا تماس

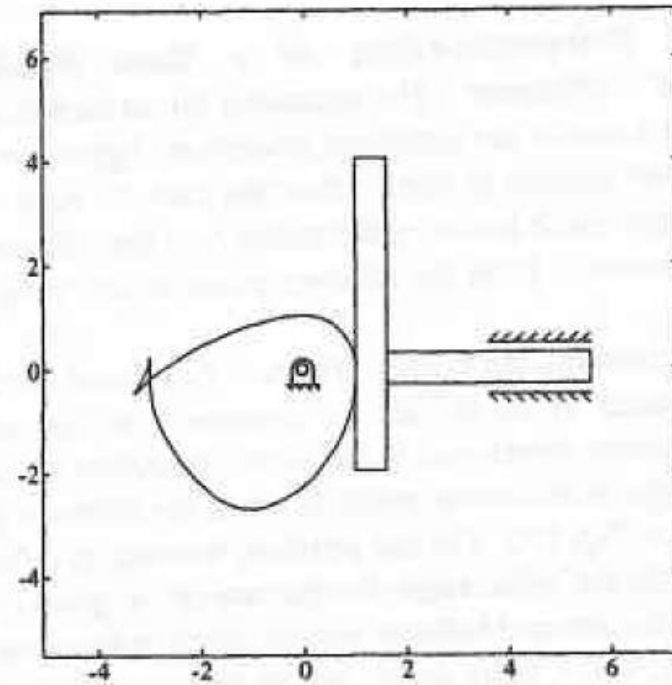
در روی سطح تخت واقع شود.



فصل ۸ طراحی بادامک ها



cam with a base circle radius 3.2 cm,
and the follower face will be 2.6 cm
above centerline and 1.6 cm below it



cam with a base circle
radius 1 cm



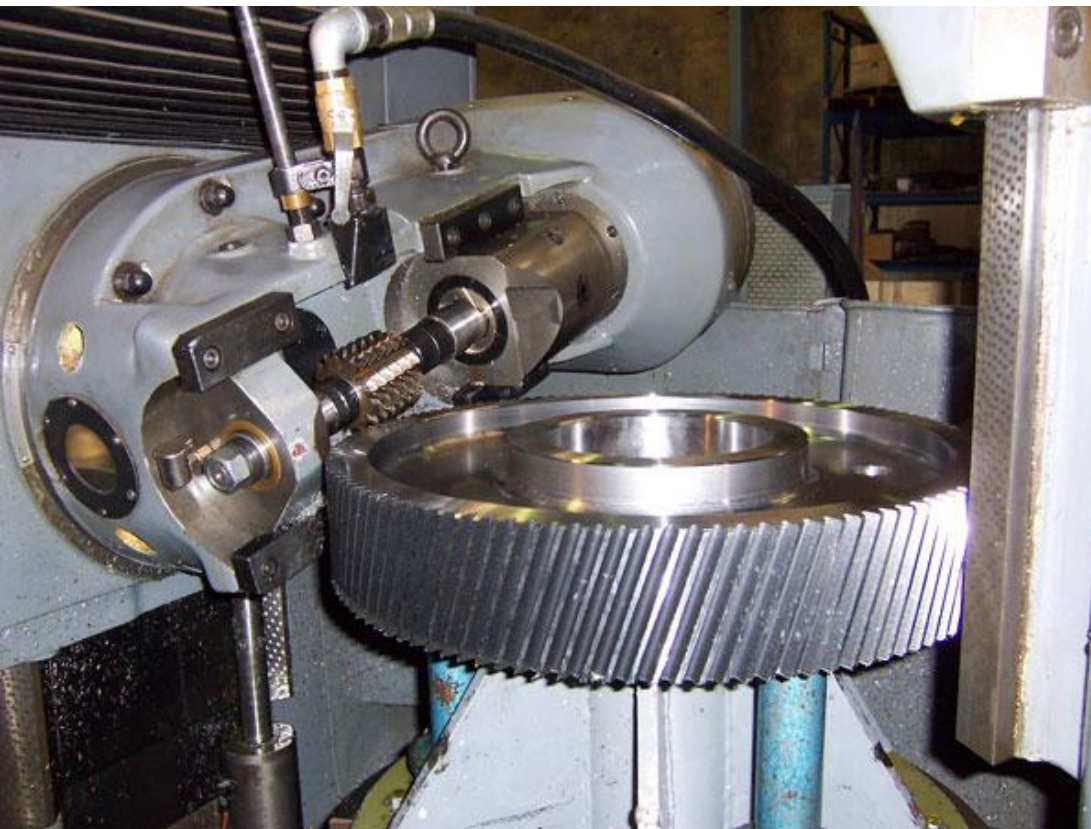
فصل ۸ طراحی بادامک ها

پایان فصل ۸



فصل ۹

چرخنده و مجموعه چرخنده ها





فصل ۹ چرخنده و انواع آن

Non-uniform motion or force transformer

مکانیزم هایی که در فصلهای قبلی مورد بررسی قرار گرفته اند ، به عنوان:

شناخته می شوند. در حالاتی که انتقال حرکت یکنواخت (نسبت سرعت ثابت) لازم باشد از چرخنده ، تسمه یا زنجیر استفاده می شود.

در این مکانیزم ها اگر محور ورودی با سرعت زاویه ای ثابت دوران نماید ، محور خروجی نیز با سرعت ثابت دوران می کند. اگرچه در عمل ممکن است اندکی نوسان در خروجی وجود داشته باشد.

علت این نواسانات از نحوه عملکرد سیستم یا از نواقص ساخت است.



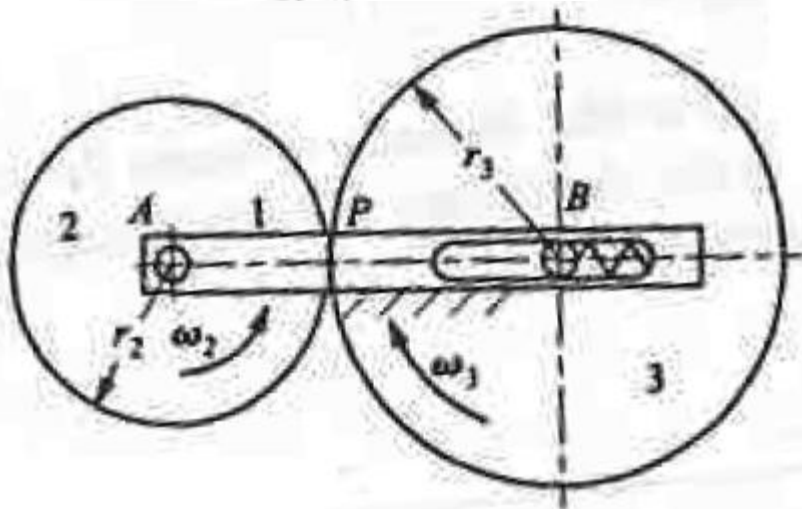
فصل ۹ چرخنده و انواع آن

- انتقال قدرت کم توسط مکانیزمهای اصطکاکی صورت می گیرد.

$$v_{P_2} = v_{P_3}$$

$$\omega_2 \times r_{P/A} = \omega_3 \times r_{P/B}$$

$$\omega_2 r_2 = \omega_3 r_3$$



- اگر حرکت بدون لغزش باشد:
- دو دیسک در خلاف جهت هم دوران می کنند.
- مزایا: سروصدا کم ، هزینه کم و نرم بودن حرکت
- معایب: توان کم ، حساس بودن به ذرات



• چرخنده مستقیم (Spur Gears)

- برای انتقال قدرت از یک محور به محور دیگر استفاده می شود
- لزوم نسبت سرعت ثابت
 - محور خروجی بطور پیوسته حرکت شتابدار افزایشی کاهش می خواهد داشت.
 - تنشهای سیکلی ، ارتعاشات ، سروصدا ، تلف شدن توان و
- پروفیل تماس دندانه هایی که نسبت سرعت ثابت ایجاد می کنند ، conjugate یا مزدوج نامیده می شود.
- اگر پروفیل یک دندانه داده شده باشد می توان پروفیل دندانه مقابل را با استفاده از روشهای ترسیمی یا تحلیلی بست آورد.





فصل ۹ چرخنده و انواع آن

- در عمل تعداد کمی پروفیل مورد استفاده قرار می گیرند.

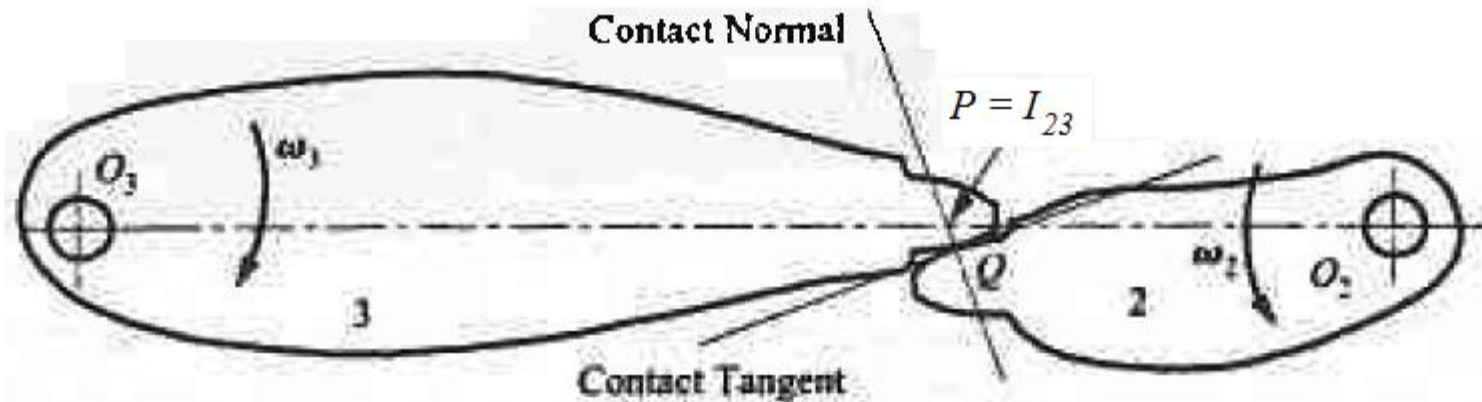
— ساده ترین نوع چرخنده ، چرخنده مستقیم است

- محورهای خروجی موازیند
- پروفیل دندانه ها involute
- انواع دیگر چرخنده



فصل ۹ چرخنده و انواع آن

- شرط نسبت سرعت ثابت



- مرکز آنی I_{23} در محل برخورد عمود مشترک و خط مرکز قرار گرفته است.
- I_{23} نقطه گام (pitch point) نامیده می شود

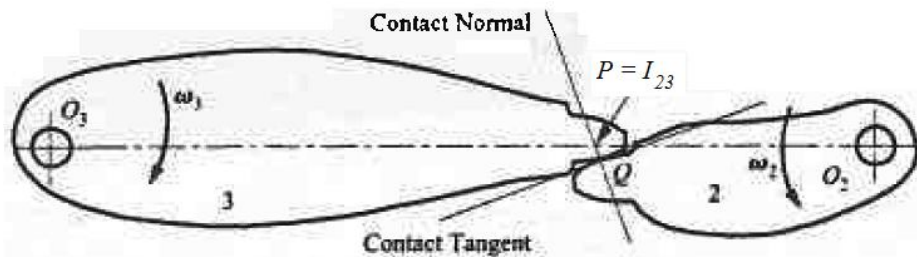
فصل ۹ چرخنده و انواع آن

- اندازه نسبت سرعت

$$\omega_2 O_2 P = \omega_2 O_2 I_{23} = -\omega_3 O_3 I_{23} = -\omega_3 O_3 P$$

$$R = \frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{O_3 P}{O_2 P}$$

- جهت بدست آوردن نسبت سرعت ثابت باید موقعیت نقطه P در روی خط مراکز ثابت باقی بماند.





فصل ۹ چرخنده و انواع آن

• سرعت لغزش (V_s)

– پارامتر مهمی در ارتباط با نرخ سایش دندانه می باشد.

$$v_s = {}^1v_{Q_1/Q_3} = {}^3v_{Q_1/Q_3} = {}^3v_{Q_1/P_2} + {}^3v_{P_2/P_3} + {}^3v_{P_3/Q_3} = {}^3v_{Q_1/P_2} = {}^3\omega_2 (r_{Q/P})$$

$${}^3\omega_2 = {}^1\omega_2 - {}^1\omega_3$$

$$v_s = (r_{Q/P})(\omega_2 - \omega_3)$$

$$v_s = PQ|\omega_2 - \omega_3|$$

سرعت لغزش در نقطه تماس

سرعت لغزش به نسبت فاصله بین نقطه تماس P و نقطه گام Q می باشد.
وقتی این دو منطبق باشند، بطور لحظه ای لغزش داریم.





Involutes •

– بین پروفیل‌های ارائه شده برای چرخنده ها ، **cycloid** و **involutes** متداول تر می باشند.

– بین ایندو نیز در اغلب موارد از **involutes** استفاده می شود.

– **Involutes** مزایای متعددی دارد اما دو مورد مهمتر است:

(۱) از لحاظ ساخت با ابزارآلات ساده تری ساخته می شود.

(۲) نسبت سرعت حتی در صورت تغییر فاصله مراکز ثابت باقی می ماند.

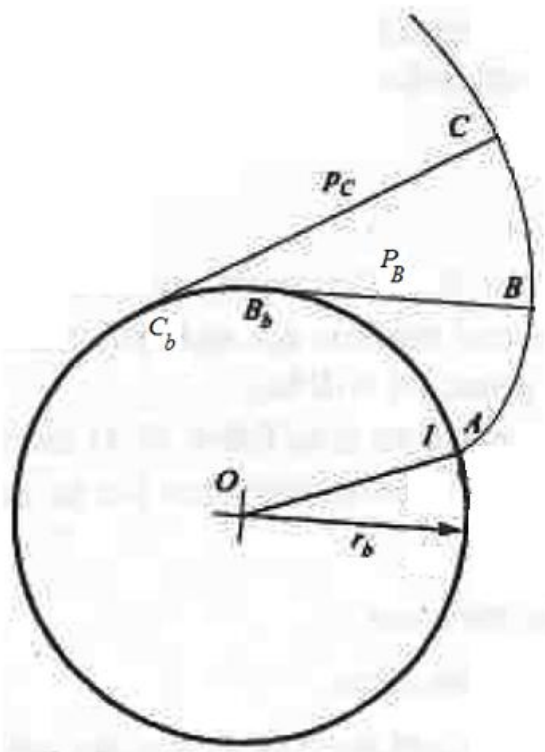




فصل ۹ چرخنده و انواع آن

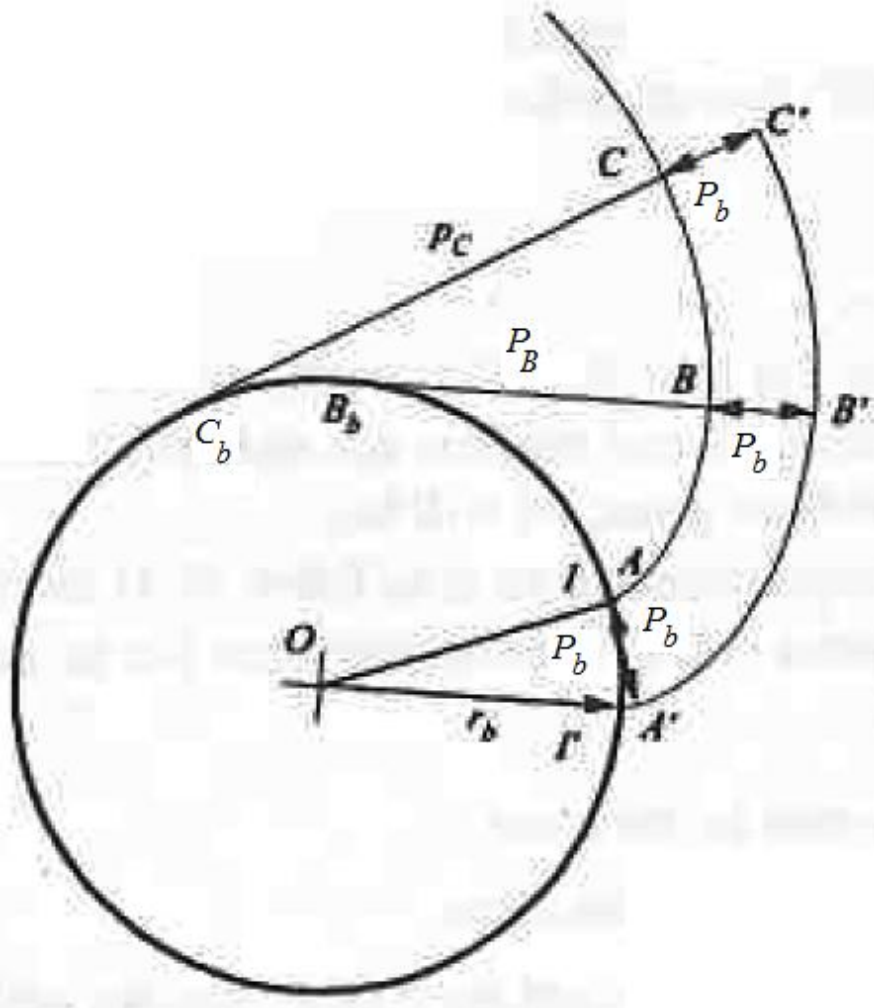
• پروفیل involutes

— مسیر طی شده توسط نقطه انتهای یک رشته که بصورت کاملاً کشیده از روی یک دایره باز می شود.



— این دایره **base circle** نامیده می شود





خواص منحنی involutes

(۱) عمود بر منحنی در هر نقطه مماس بر دایره پایه است.

(۲) طول عمود مساوی قوس متناظر روی دایره پایه است.

$$B_bB = \text{arc } B_bJ \quad C_bC = \text{arc } C_bJ$$

فاصله عمودی بین دو involutes

که از روی یک دایره پایه باز می شوند مساوی است

$$AA' = BB' = CC'$$



فصل ۹ چرخنده و انواع آن

(۱) طول عمود مساوی شعاع انحنا involutes در آن نقطه است.

$$B_b B' = \rho_B, C_b C' = \rho_C$$

(۲) هر دو منحنی involutes دلخواه بدون در نظر گرفتن قطر دایره پایه conjugate یکدیگرند.

(۳) مسیر تماس بین دو پروفیل involutes خطی است، در نتیجه زاویه فشار ثابت باقی می ماند.

(۴) چرخنده با دندانه های involutes را می توان توسط یک Straight-sided Rack Cutter تولید کرد.

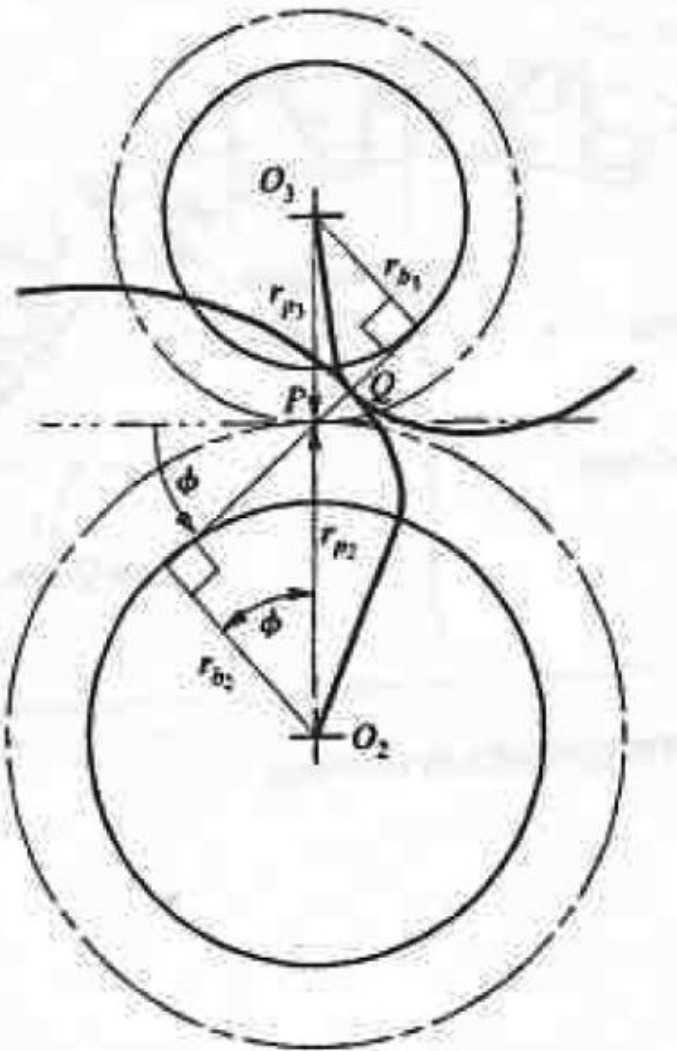
(۵) دو منحنی involutes مزدوج باقی می ماند حتی اگر اندکی فاصله مرکز تغییر نماید.



فصل ۹ چرخنده و انواع آن

در شکل مقابل دو منحنی involutes در موقعیت دلخواه در تماس (نقطه Q) می باشند. عمود در نقطه تماس با دو دایره پایه مماس می باشد. لذا عمود مشترک ثابت باقی می ماند. همچنین محل تلاقی عمود با خط مراکز نقطه P ثابت باقی می ماند. در نتیجه نسبت سرعت ثابت است. (r_p شعاع دایره گام)

$$R = \frac{O_3P}{O_2P} = \frac{r_{p1}}{r_{p2}}$$





فصل ۹ چرخنده و انواع آن

- ارتباط شعاع دایره گام و پایه

$$r_{p2} = \frac{r_{b2}}{\cos \phi} \quad r_{p1} = \frac{r_{b1}}{\cos \phi}$$

- زاویه فشار (ϕ) زاویه بین عمود در نقطه تماس و مماس بر دایره های گام می باشد.
- از آنجائیکه عمود در نقطه تماس ثابت است ، نقطه تماس در روی عمود جابجا می شود.



فصل ۹ چرخنده و انواع آن

این پروفیل مزدوج یک Straight-Sided Rack می باشد.

اگر یک پروفیل خطی با زاویه ϕ نسبت به

خط OP داشته باشیم ، این خط حرکت

انتقالی داشته و حرکت دورانی نخواهد

داشت. عمود در نقطه تماس همیشه

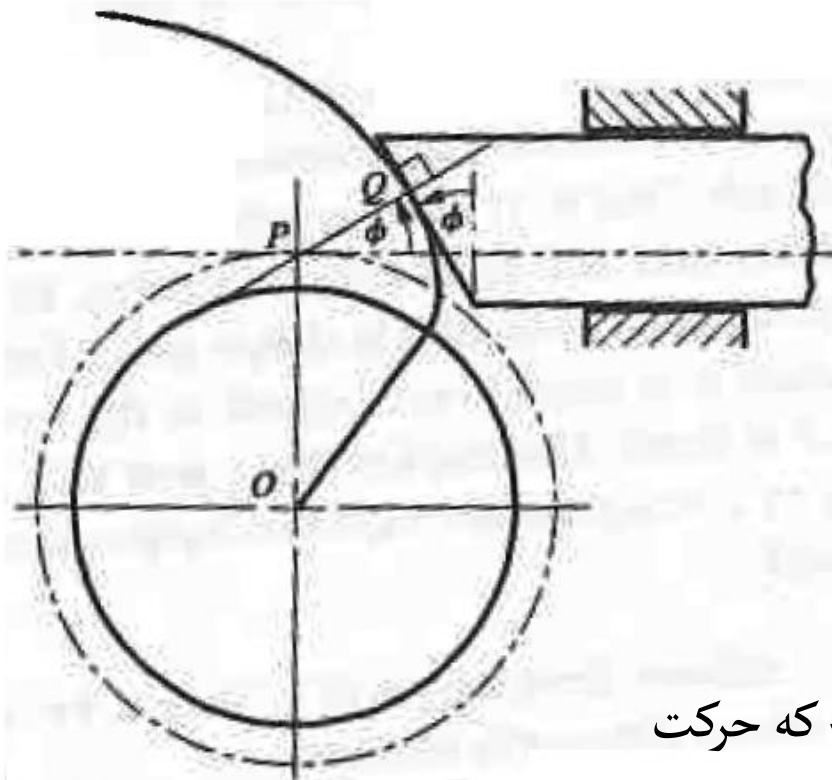
عمود بر پروفیل خطی و مماس بر دایره

پایه خواهد بود.

نقطه P ثابت است لذا می توان با یک

Straight-Sided Rack Cutter که حرکت

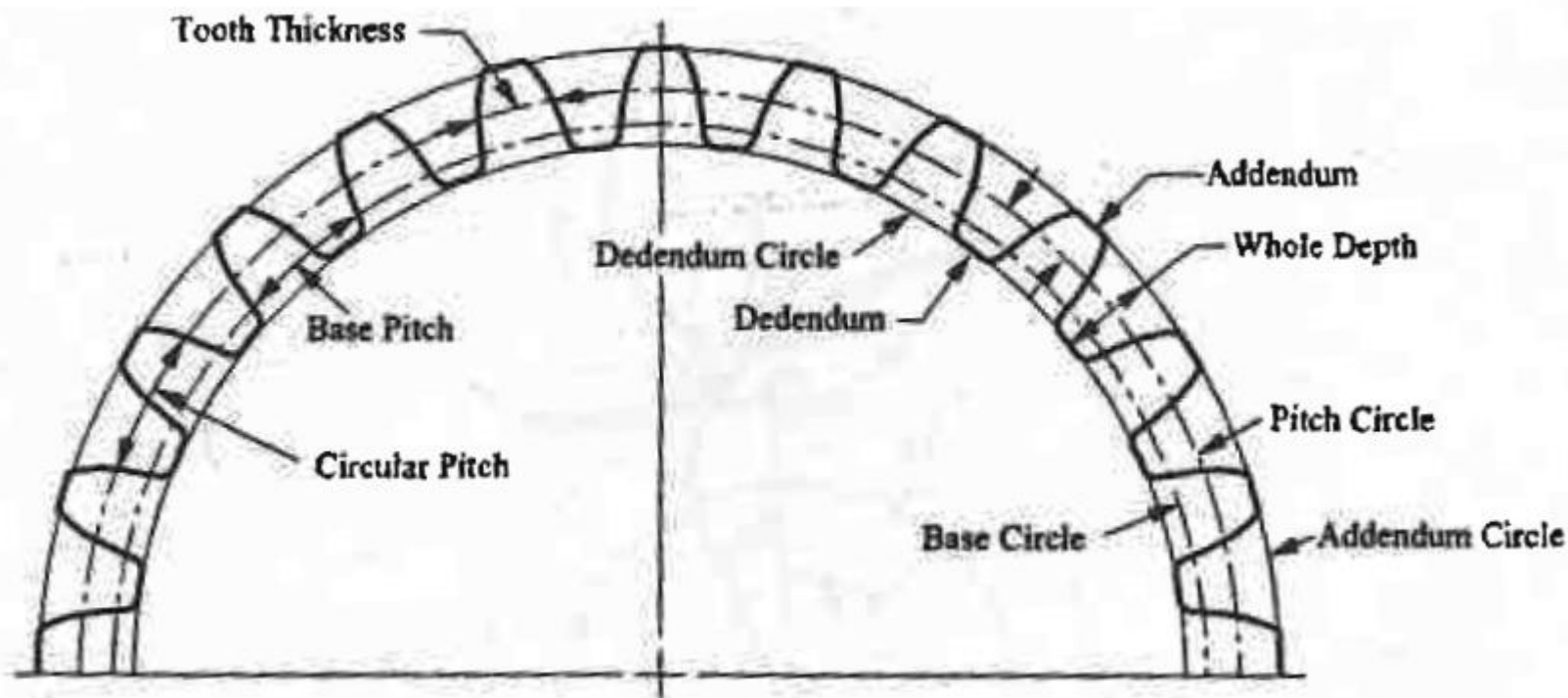
رفت و برگشتی دارد پروفیل involutes را ایجاد کرد.



فصل ۹ چرخنده و انواع آن



- الفاظ استفاده شده در چرخنده ها



Gear tooth in-plane geometry terminology





فصل ۹ چرخنده و انواع آن

- دایره گام در چرخنده های درگیر نسبت بهم غلتش دارند
- اگرچه یک چرخنده طوری طراحی می شود که دایره گام معینی داشته باشد اما دایره گام واقعی بستگی به چرخنده مقابل و فاصله مراکز آنها دارد.

diametral pitch $P_d = N/d_p$

circular pitch $p_c = \pi d_p / N$



فصل ۹ چرخنده و انواع آن



- پارامترهای مهم چرخنده

$$P_d = \pi / p_c$$

$$P_d p_c = \pi$$

$$p_b = \pi d_b / N$$

$$d_p = \frac{d_b}{\cos \phi}$$

$$p_c = \pi d_p / N = \frac{\pi d_b}{N \cos \phi} = \frac{p_b}{\cos \phi}$$

$$p_b = p_c \cos \phi$$

$$m = \frac{d_p}{N}$$

$$p_c = m \pi$$





فصل ۹ چرخنده و انواع آن

- دو چرخنده در گیر باید گامهای یکسانی داشته باشند
گام قطری ، گام دایره ای و مدول یکسان
- چرخنده های که با ابعاد استاندارد ساخته شده باشند ، قابل تعویض می باشند. به عبارت دیگر هر جفت چرخنده ای که گام یکسانی داشته باشند قابل استفاده در مقابل یکدیگرند.
- لذا باید:
 - زاویه فشار یکسان
 - گام قطری یکسان
 - ارتفاع سر و پای دندانه
 - پهنای دندانه
 - undercut

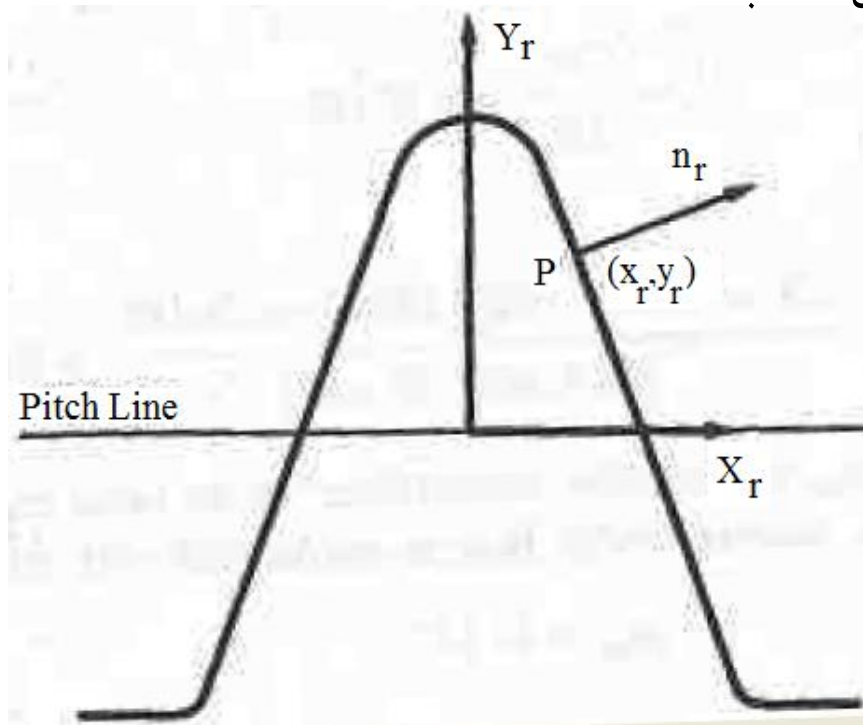




فصل ۹ چرخنده و انواع آن

مختصات یک دندانه involutes تولید شده توسط یک rack

موقعیت نقطه دلخواه مانند P روی rack با مختصات (x_r, y_r) نمایش داده شده که نسبت به دستگاه مختصات ثابت به rack می باشد. بردار نرمال بر سطح نیز با $\mathbf{n}_r = (n_x, n_y)$ نمایش داده می شود. براحتی این مختصات و بردار نرمال قابل محاسبه است.

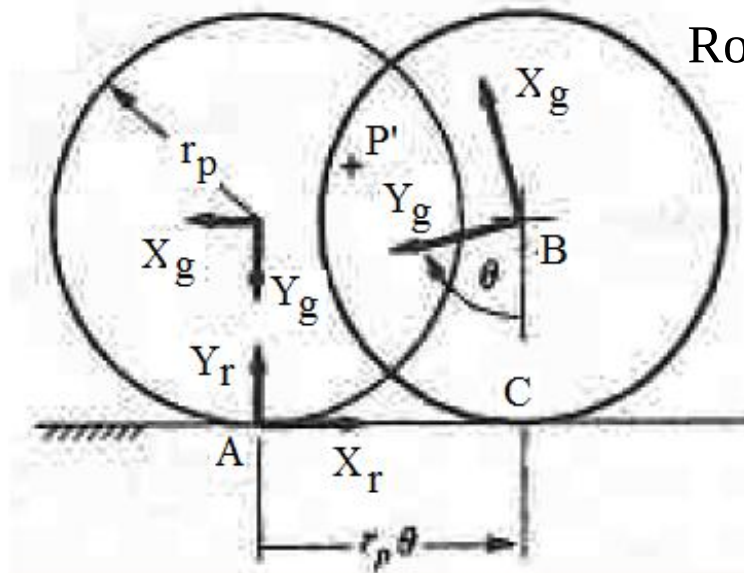


فصل ۹ چرخنده و انواع آن

- دستگاه مختصات اول متصل به rack ثابت فرض می شود (X_r, Y_r)
- دستگاه مختصات دوم متصل به gear و با آن حرکت دورانی خطی دارد (x_g, y_g)
- نقطه p' متعلق به gear متناظر با نقطه P در روی rack است.
- دایره گام چرخنده روی خط گام rack غلتش دارد.
- نقطه P در لحظه تماس با P' تماس لغزشی (direct contact) دارد.

initial position
of gear

Position of the Gear After
Rolling Through an Angle θ

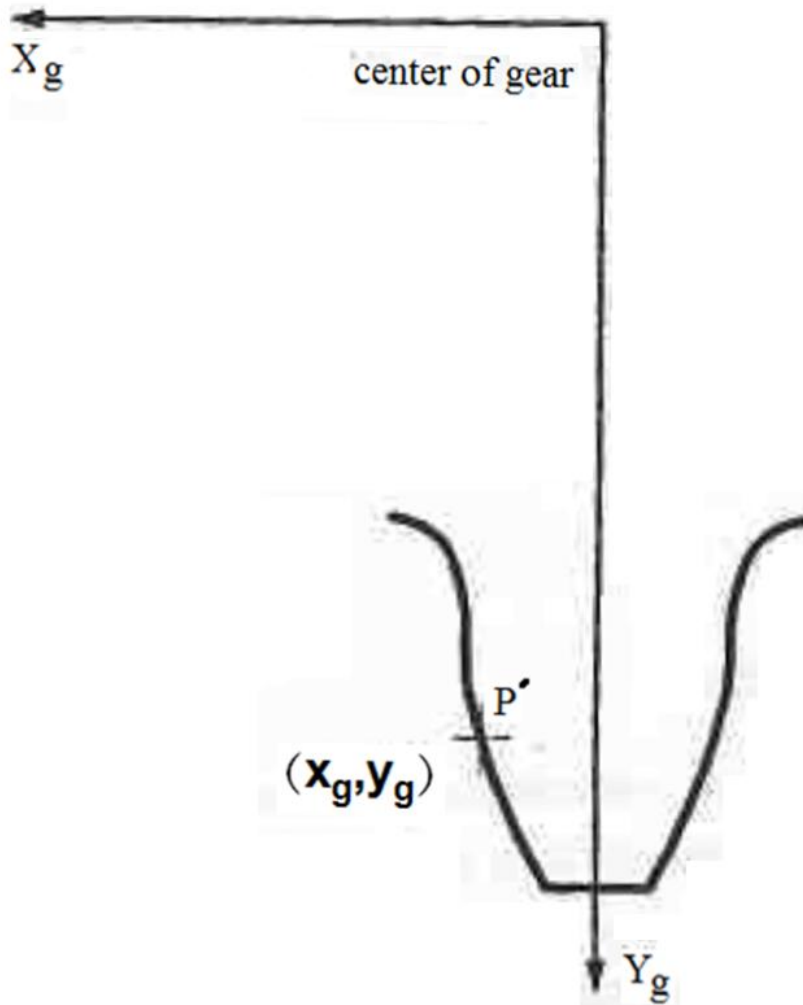


Pitch Circle of gear

pitch line of rack



فصل ۹ چرخدنده و انواع آن

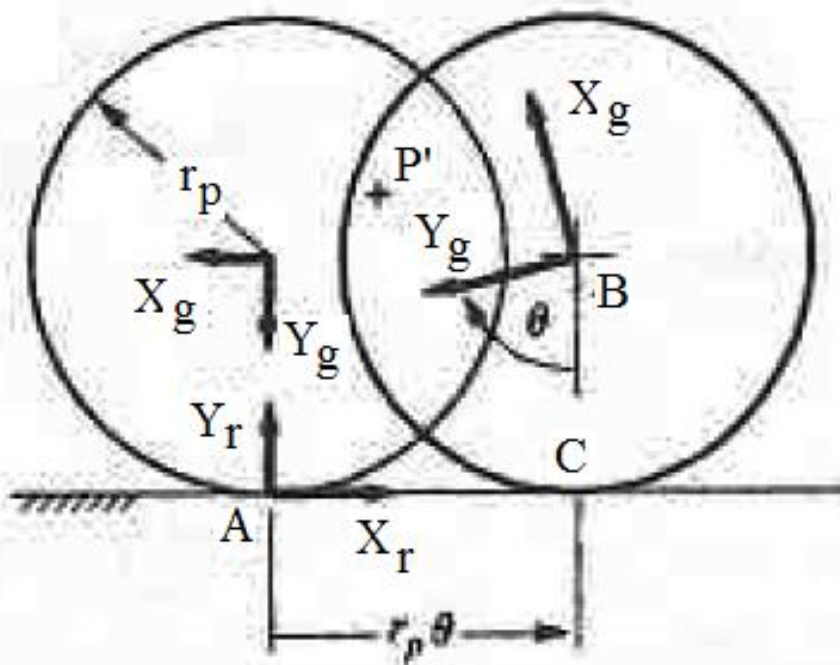


دستگاه مختصات متحرک متصل به
چرخدنده و نقطه p' متعلق به gear
متناظر با نقطه P در روی rack میباشد.



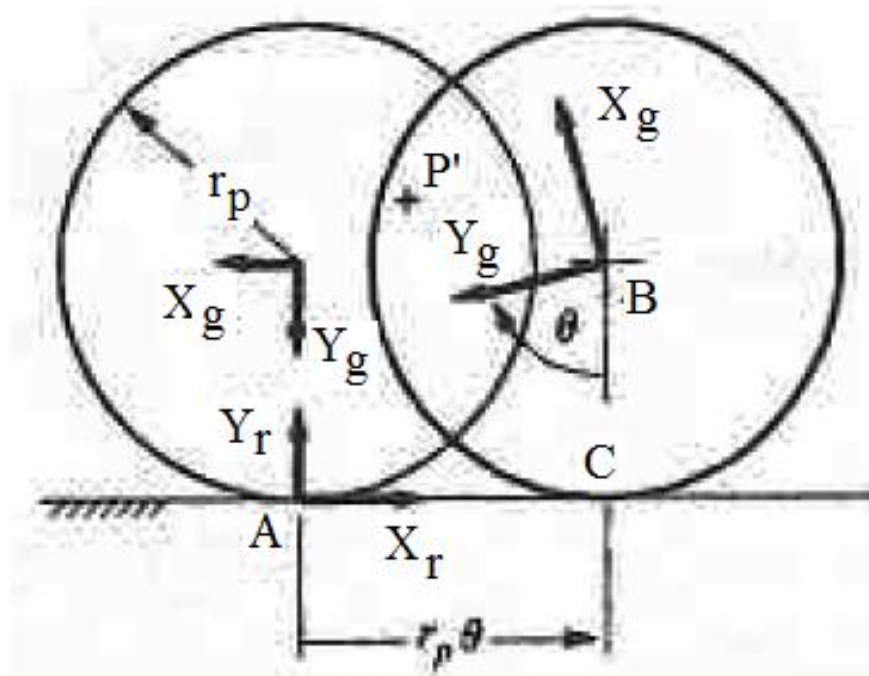
فصل ۹ چرخنده و انواع آن

- در موقعیت دوم در شکل زیر چرخنده به اندازه زاویه θ دوران و به اندازه $r_p \theta$ جابجائی خطی داشته است.
- برای این موقعیت دلخواه ماتریس تبدیل از دستگاه rack به دستگاه چرخنده به صورت زیر بدست می آید:



$$\begin{Bmatrix} x_g \\ y_g \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_r - r_p \theta \\ y_r \end{Bmatrix}$$

فصل ۹ چرخنده و انواع آن



سرعت نسبی نقطه P' نسبت به دستگاه
rack ، نقطه C مرکز آنی است

$${}^r v_P = {}^r v_{B/C} + {}^r v_{P/B}$$

$${}^r v_P = {}^r \omega_g \times r_{B/C} + {}^r \omega_g \times r_{P/B} = {}^r \omega_g \times (r_{B/C} + r_{P/B}) = {}^r \omega_g \times r_{P/C}$$



$${}^r v_P = -{}^r \omega_g \begin{Bmatrix} y_r \\ r_p \theta - x_r \end{Bmatrix}$$



فصل ۹ چرخنده و انواع آن

- توجه نمایید که سرعت نسبی در این نقطه نباید مولفه عمود بر سطح داشته باشد. در نتیجه داریم:

$$\mathbf{r}_P \cdot \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = 0$$

$$-n_x y_r + (x_r - r_p \theta) n_y = 0$$

زاویه دورانی که در آن نقطه **P** با نقطه متناظر در روی چرخنده در تماس است.

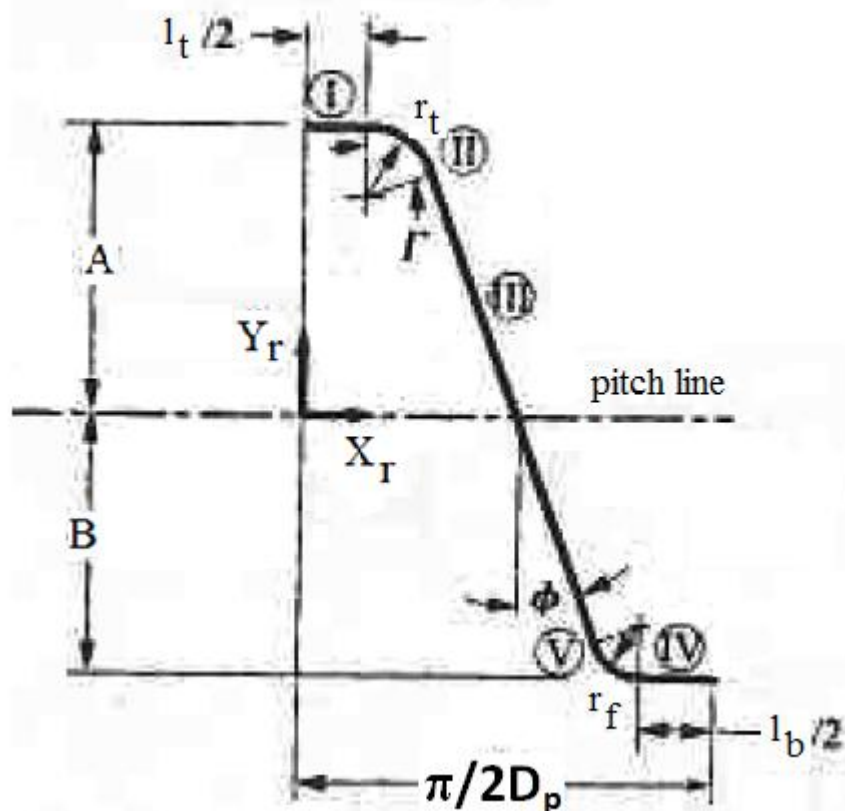
$$\theta = \frac{n_y x_r - n_x y_r}{r_p n_y}$$



فصل ۹ چرخنده و انواع آن



- پروفیل نصف دندانه یک rack در شکل نشان داده شده است.



D_p = diametral pitch

A = addendum of rack

B = dedendum of rack

ϕ = pressure angle

r_t = radius of tip of rack tooth

r_f = radius of fillet of rack tooth





- تعریف پارامترهای مورد استفاده

$$\Gamma = \frac{\pi}{2} - \phi$$

$$\ell_i = \frac{\pi}{2D_p} - 2A \tan \phi - 2r_i \tan \left(\frac{\Gamma}{2} \right)$$

$$\ell_b = \frac{\pi}{2D_p} - 2B \tan \phi - 2r_f \tan \left(\frac{\Gamma}{2} \right)$$

$$r_i = \frac{\frac{\pi}{2D_p} - 2A \tan \phi}{2 \tan \left(\frac{\Gamma}{2} \right)}$$

$$r_f = \frac{\frac{\pi}{2D_p} - 2B \tan \phi}{2 \tan \left(\frac{\Gamma}{2} \right)}$$





- روابط در ناحیه های مختلف

Region I (top land)

$$\begin{Bmatrix} x_r \\ y_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta \ell_t / 2 \\ A \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (0 < \beta \leq 1)$$

Region II (tip radius)

$$\begin{Bmatrix} x_r \\ y_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ell_t / 2 + r_t \sin(\beta \Gamma) \\ A - r_t [1 - \cos(\beta \Gamma)] \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sin(\beta \Gamma) \\ \cos(\beta \Gamma) \end{Bmatrix} \quad (0 < \beta \leq 1)$$

Region III (tooth flank)

$$\begin{Bmatrix} x_r \\ y_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (1 - \beta) \left[\ell_t / 2 + r_t \sin(\Gamma) \right] + \beta \left[\pi / (2 D_p) - \ell_b / 2 - r_t \sin \Gamma \right] \\ (1 - \beta) \left[A - r_t \{ 1 - \cos(\Gamma) \} \right] + \beta \left[-B + r_t (1 - \cos \Gamma) \right] \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{Bmatrix} \quad (0 < \beta \leq 1)$$





- روابط در ناحیه های مختلف

Region IV (root fillet)

$$\begin{cases} x_r \\ y_r \end{cases} = \begin{cases} \pi / (2D_p) - \ell_b / 2 - r_f \sin[(1 - \beta)\Gamma] \\ -B + r_f \{1 - \cos[(1 - \beta)\Gamma]\} \end{cases}, \quad \begin{cases} n_x \\ n_y \end{cases} = \begin{cases} \sin[(1 - \beta)\Gamma] \\ \cos[(1 - \beta)\Gamma] \end{cases} \quad (0 < \beta \leq 1)$$

Region V (bottom land)

$$\begin{cases} x_r \\ y_r \end{cases} = \begin{cases} \pi / (2D_p) - \ell_b / 2 (1 - \beta) \\ -B \end{cases}, \quad \begin{cases} n_x \\ n_y \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad (0 < \beta \leq 1)$$





Assume that the above rack is used to generate a gear. The pressure angle is 20° with a diametric pitch (D_p) of 10 teeth per inch. The tip and root radii are both 0.01 in. The addendum constant for the rack is 1.25, and the dedendum constant is 1.1. There are 15 teeth on the gear, and the addendum constant for the gear is 1.0. Determine the shape of the gear tooth.

mfile : geardr.m





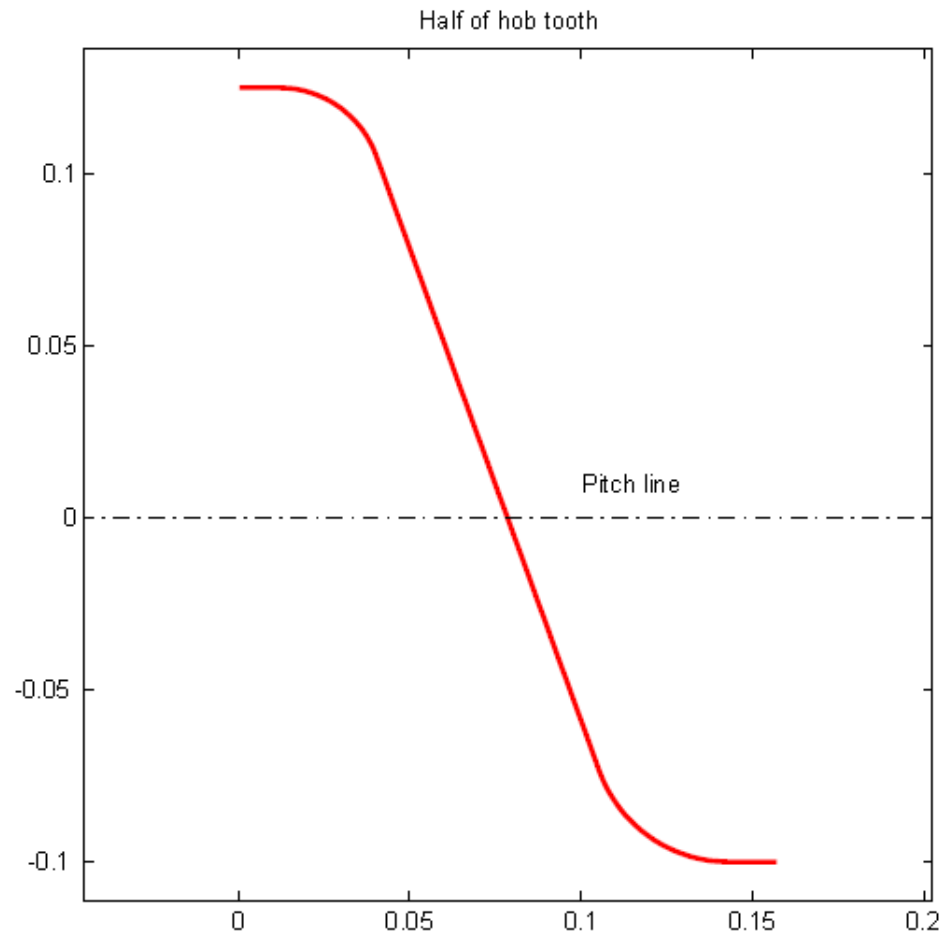
فصل ۹ چرخدنده و انواع آن

- Gear Tooth Generation Program
- Enter 1 for file input and 2 for interactive input [1]: 2
- Enter input file name (geardr.dat): manual.dat
- Enter value of diametral pitch [10]: 10
- Enter value of addendum constant for rack [1.25]: 1.25
- Enter value of dedendum constant for rack [1.0]: 1.0
- Enter value of pressure angle in degrees [20]: 20
- Enter radius of tip of rack tooth [0.02]: 0.03
- Enter radius of fillet of rack tooth [0.04]: 0.04
- Enter number of teeth on gear [10]: 8
- Enter value of addendum constant for gear [1.0]: 1
- Enter number of points in rack tip land [30]: 30
- Enter number of points in rack tip radius [30]: 30
- Enter number of points in rack flank [40]: 40
- Enter number of points in rack base radius [30]: 30
- Enter number of points in rack bottom land [30]: 30





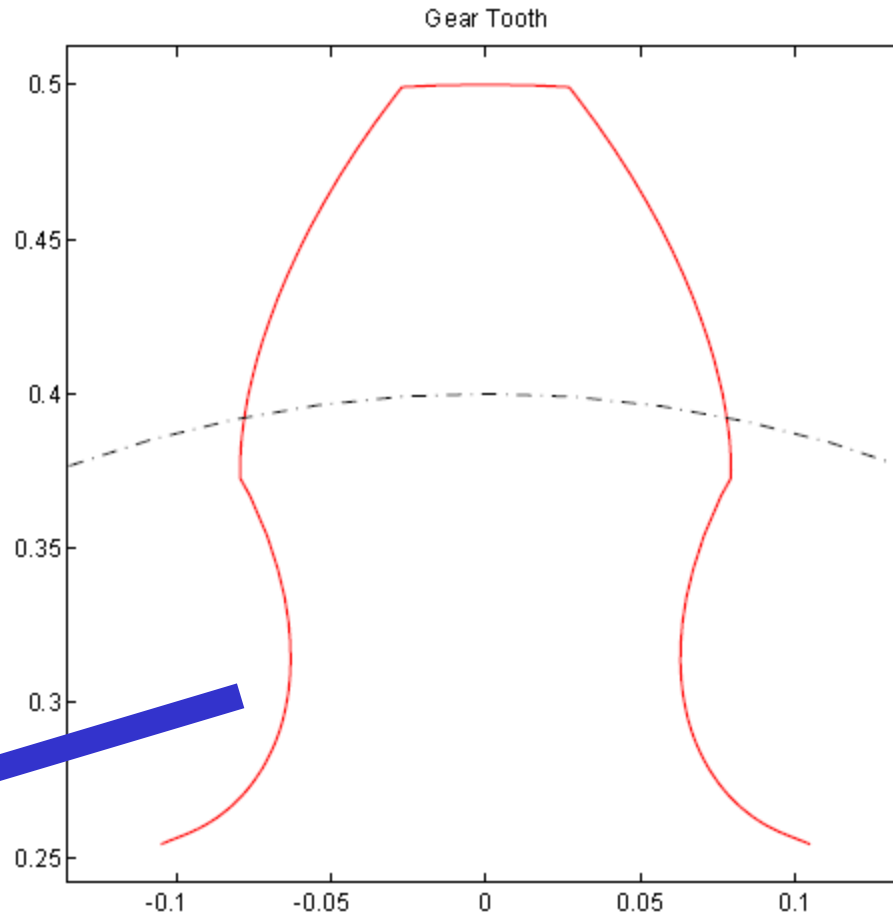
فصل ۹ چرخنده و انواع آن



Drawing of half of rack tooth



فصل ۹ چرخنده و انواع آن



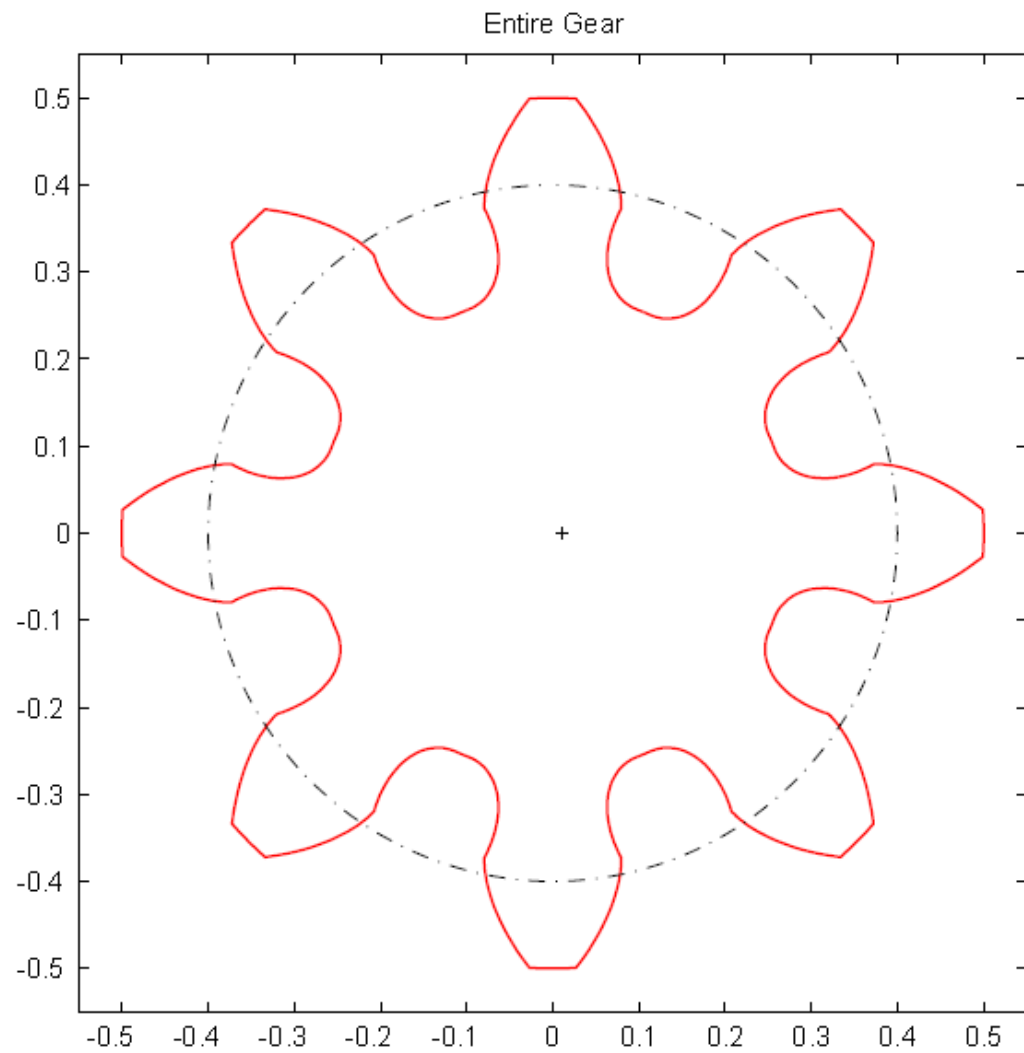
آیا پروفیل درست است

Drawing of one tooth of gear

فصل ۹ چرخنده و انواع آن



Drawing of entire gear



فصل ۹ چرخنده و انواع آن



چند مثال دیگر

Program for Drawing Rack Envelope (*rackmotion.m*)

Conjugate Gear Tooth Generation Program *arb2th.m*





فصل ۹ چرخنده و انواع آن

مجموعه چرخنده ها

از روشهای متعددی می توان جفت چرخنده ها را ترکیب نمود و ارتباط ورودی/خروجی مورد نظر را بدست آورد.

انواع مجموعه چرخنده هایی که در این فصل بررسی می شوند عبارتند از:

- (a) مجموعه چرخنده های ساده Simple Gear Train
- (b) مجموعه چرخنده های مرکب Compound Gear Train
- (c) مجموعه چرخنده های خورشیدی Planetary Gear Train



فصل ۹ چرخنده و انواع آن

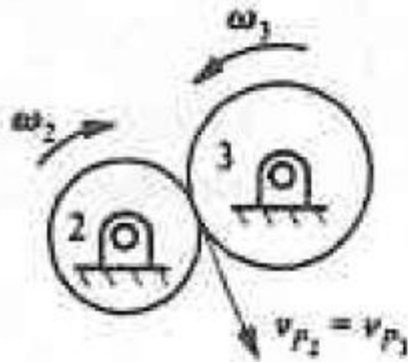
جهت دوران و نسبت سرعت

$$R = \pm \frac{\omega_2}{\omega_3} = \pm \frac{r_3}{r_2} = \pm \frac{N_3}{N_2}$$

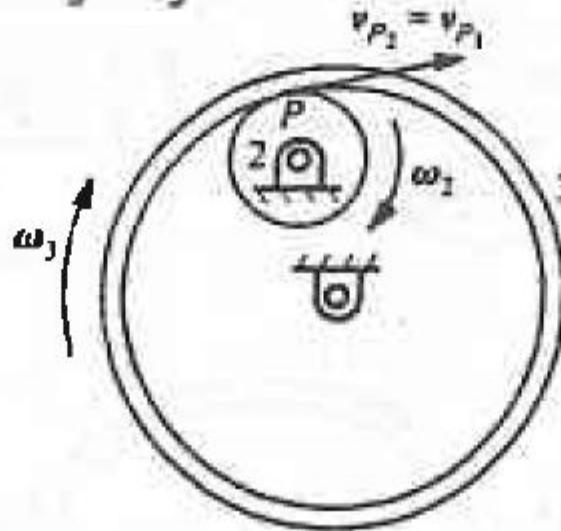
علامت مثبت برای تماس چرخنده داخلی

و خارجی علامت منفی برای تماس خارجی

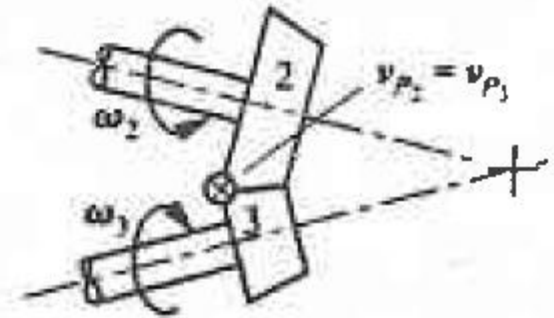
$$v_{P_2} = v_{P_3} = \omega_2 \times r_2 = \omega_3 \times r_3$$



External Gears



Internal Gears



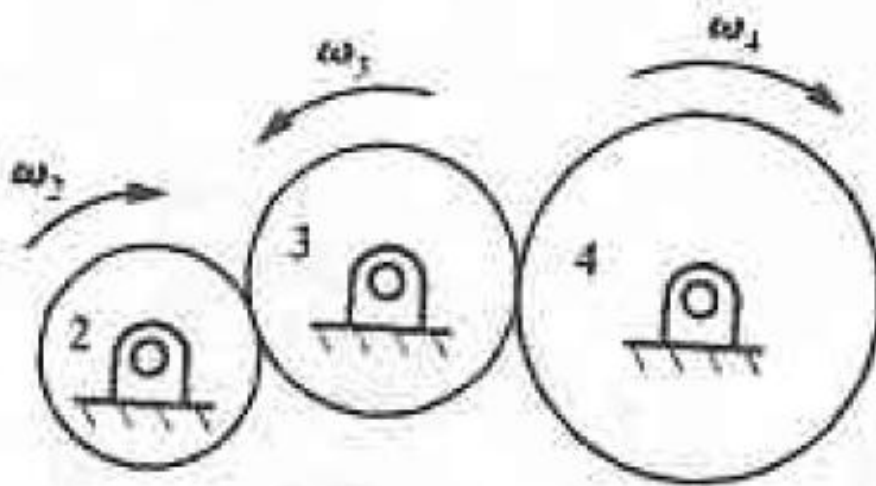
Bevel Gears

فصل ۹ چرخنده و انواع آن

مجموعه چرخنده های ساده

در این مجموعه محور چرخنده ها ثابت می باشد

در مجموعه می تواند چرخنده هرزگرد وجود داشته باشد که برای تغییر جهت دوران و یا به عنوان Spacer استفاده می شود.

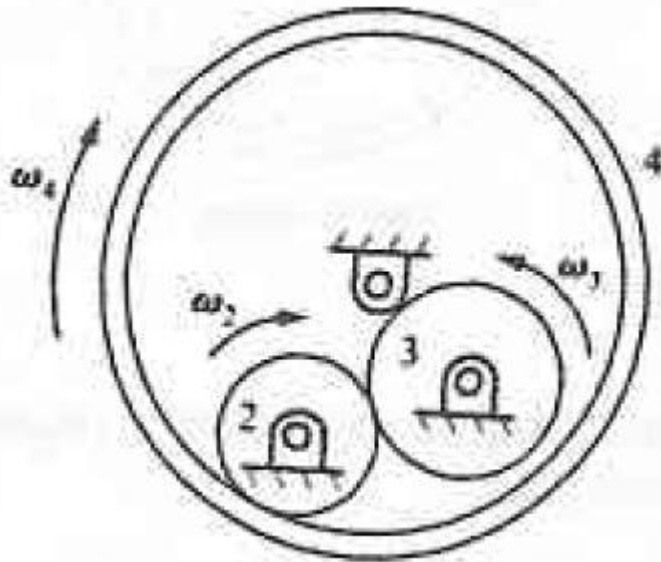


$$\frac{\omega_2}{\omega_3} = -\frac{N_3}{N_2} \quad \frac{\omega_3}{\omega_4} = -\frac{N_4}{N_3}$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_3} \frac{\omega_3}{\omega_4} = \left(-\frac{N_3}{N_2} \right) \left(-\frac{N_4}{N_3} \right)$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_4} = (-1)^2 \frac{N_4}{N_2}$$

فصل ۹ چرخنده و انواع آن



$$\frac{\omega_2}{\omega_4} = (-1)^1 \frac{N_4}{N_2}$$



فصل ۹ چرخنده و انواع آن

مجموعه چرخنده های مرکب

نسبت سرعت در هر تماس محدودیت دارد ، مثلاً برای چرخنده ساده نباید از $1/5$ تجاوز نماید. کاهش بیشتر توسط مجموعه چرخنده های مرکب انجام می شود.

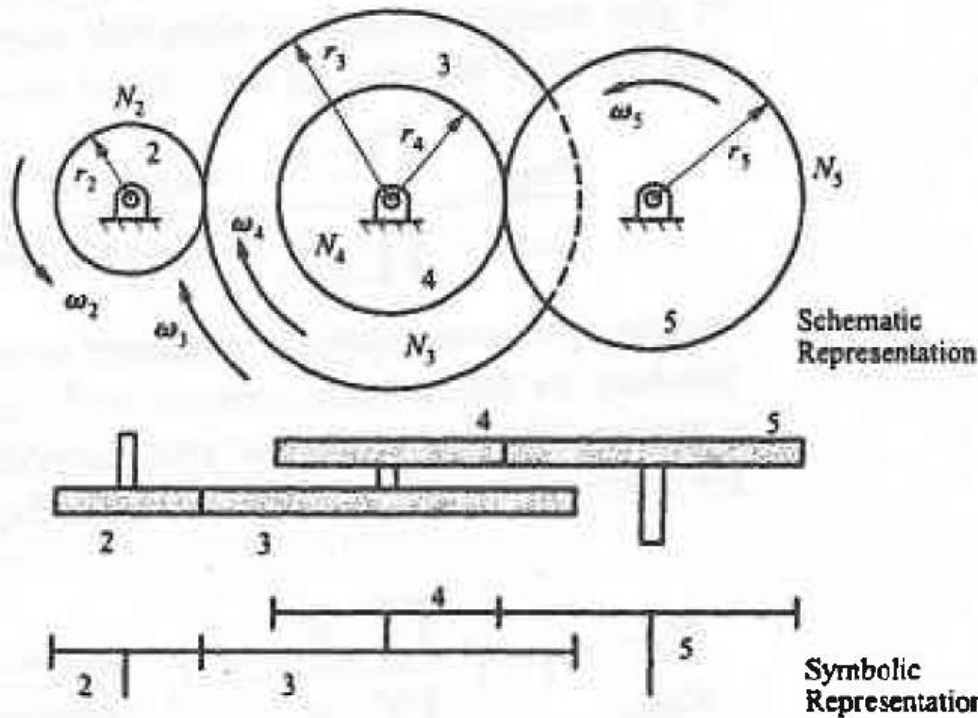
در این نوع مجموعه ها روی یک محور دو یا چند چرخنده متصل است.

بر خلاف مجموعه های ساده ، چرخنده ها در مجموعه مرکب می توانند مدول و یا نوع متفاوتی داشته باشند.



فصل ۹ چرخنده و انواع آن

مجموعه چرخنده مرکب



$$\frac{\omega_2}{\omega_3} = -\frac{N_3}{N_2}$$

$$\frac{\omega_4}{\omega_5} = -\frac{N_5}{N_4}$$

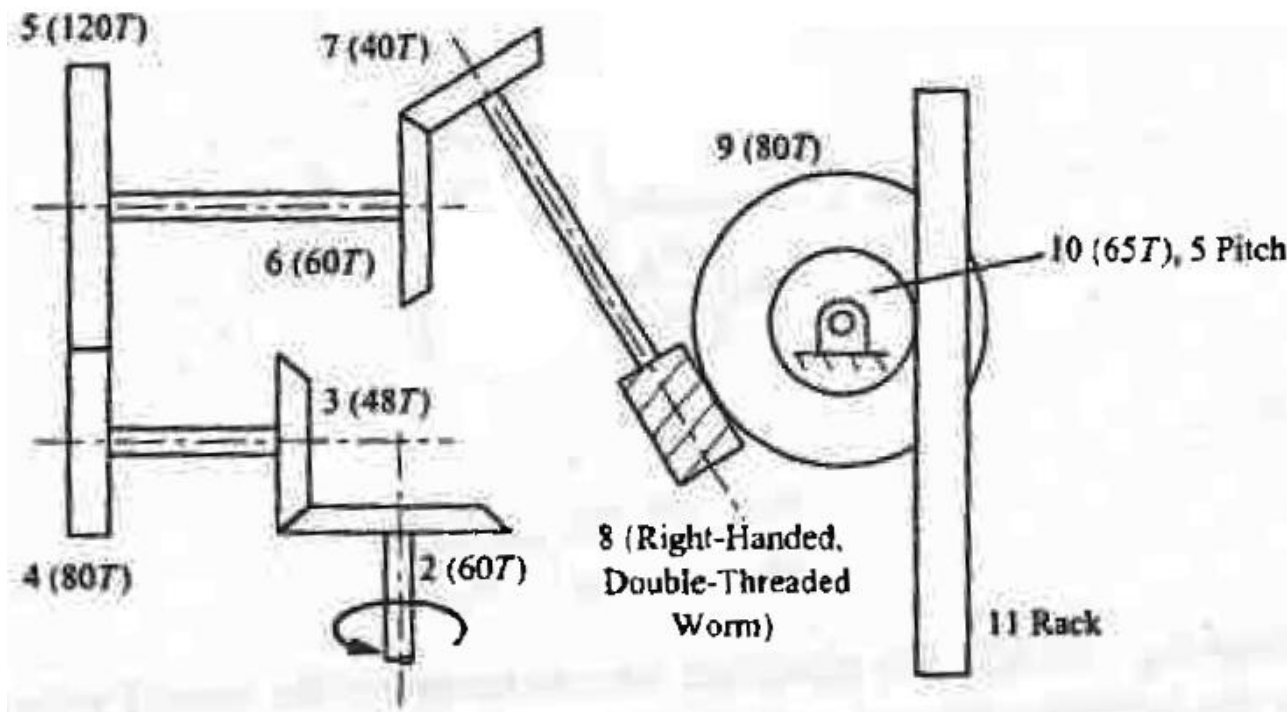
$$\omega_3 = \omega_4$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_5} = \frac{-\omega_3 \left(\frac{N_3}{N_2} \right)}{-\omega_4 \left(\frac{N_4}{N_5} \right)} = \left(\frac{N_3}{N_2} \right) \left(\frac{N_5}{N_4} \right) = \frac{N_3 N_5}{N_2 N_4}$$

$$\frac{\omega_{\text{input}}}{\omega_{\text{output}}} = \frac{\prod_{i=3}^n N_i}{\prod_{i=3}^n N_j} = \frac{\text{product of driven tooth numbers}}{\text{product of driver tooth numbers}}$$

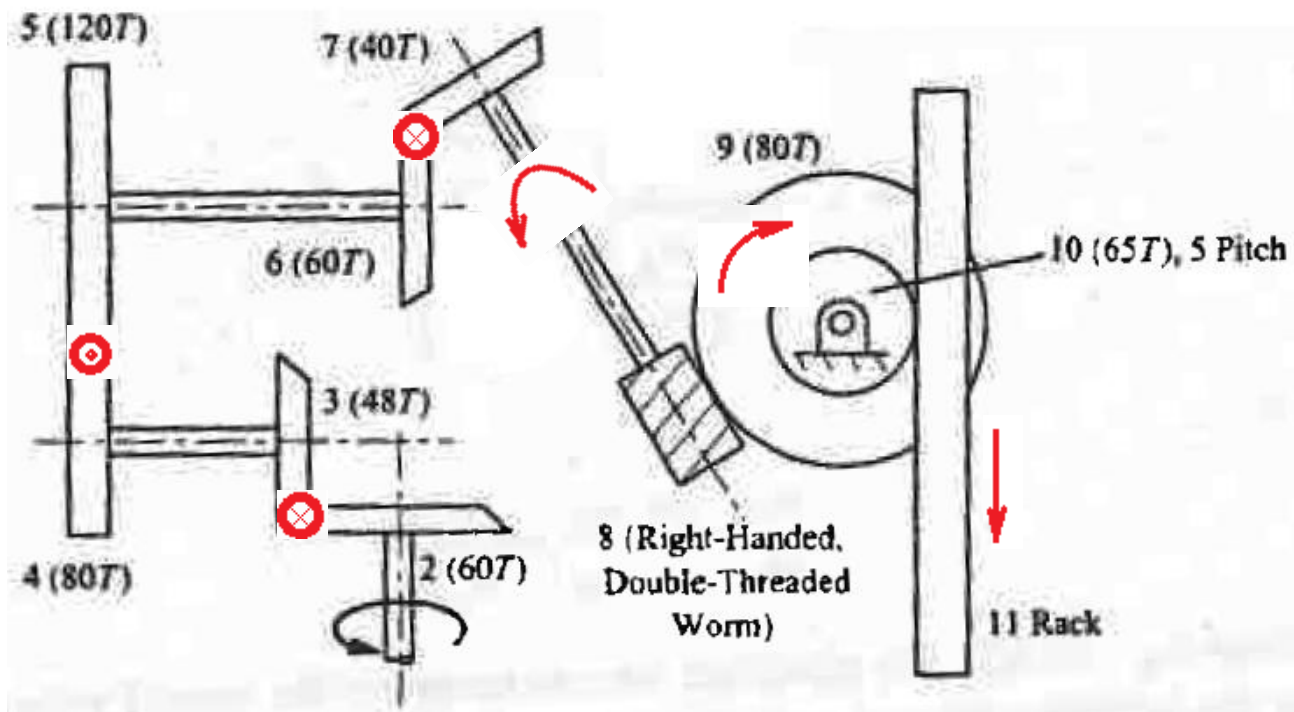
فصل ۹ چرخنده و انواع آن

مثال: سرعت زاویه ای محور ۲ (ورودی) (rpm) ۲۰۰ در جهت نشان داده شده می باشد. سرعت زاویه ای محور ۱۰ و سرعت خطی rack را بدست آورید.



فصل ۹ چرخنده و انواع آن

ابتدا جهت دوران هر محور را معین نمایید

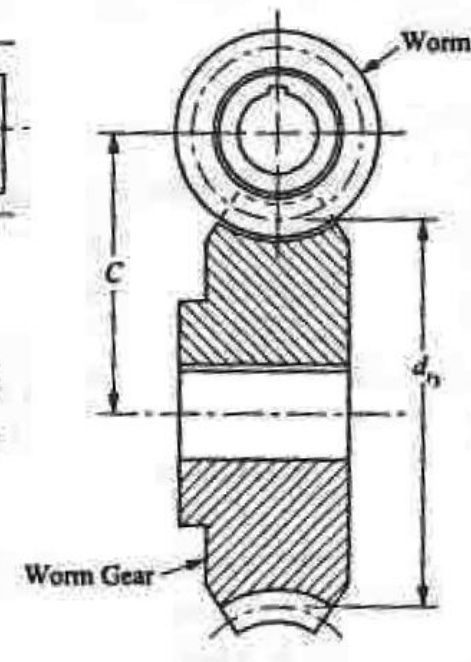
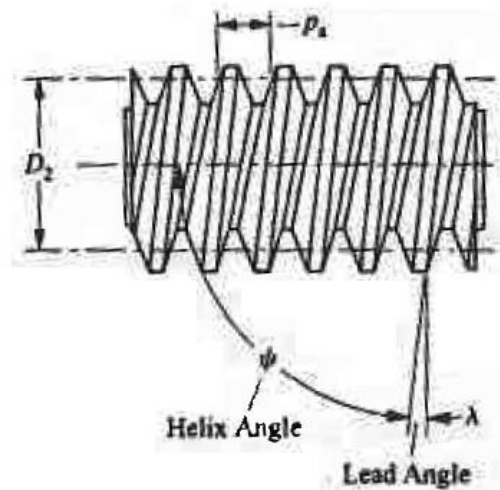
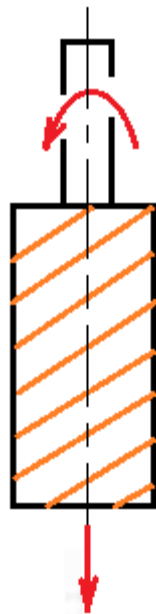


فصل ۹ چرخنده و انواع آن

حلزون راستگرد دو راهه

- پیچ راستگرد

- در صورتی که پیچ حرکت محوری نداشته باشد، جهت حرکت معکوس می شود.





فصل ۹ چرخنده و انواع آن

نسبت سرعت بین چرخنده ۹ و ۲

$$\frac{\omega_9}{\omega_2} = \frac{N_2}{N_3} \frac{N_4}{N_5} \frac{N_6}{N_7} \frac{N_8}{N_9}$$

$$\omega_9 = \omega_{10} = \omega_2 \frac{N_2}{N_3} \frac{N_4}{N_5} \frac{N_6}{N_7} \frac{N_8}{N_9}$$

$$\omega_9 = \omega_{10} = 200 \frac{60}{48} \frac{80}{120} \frac{60}{40} \frac{2}{80} = 6.25 \text{ rpm}$$

سزعت خطی (rack) برابر با سرعت خطی نقطه گام روی چرخنده ۱۰ می باشد.

سرعت زاویه ای چرخنده ۹ و ۱۰ برابر است

جهت حرکت rack را دوباره بررسی نمایید.

$$d_{10} = \frac{N_{10}}{P_{10}} = \frac{65}{5} = 13 \text{ in}$$

$$v = (\omega_{10})(d_{10}/2) = (6.25)(13/2)(2\pi/60) = 4.255 \text{ in/s}$$

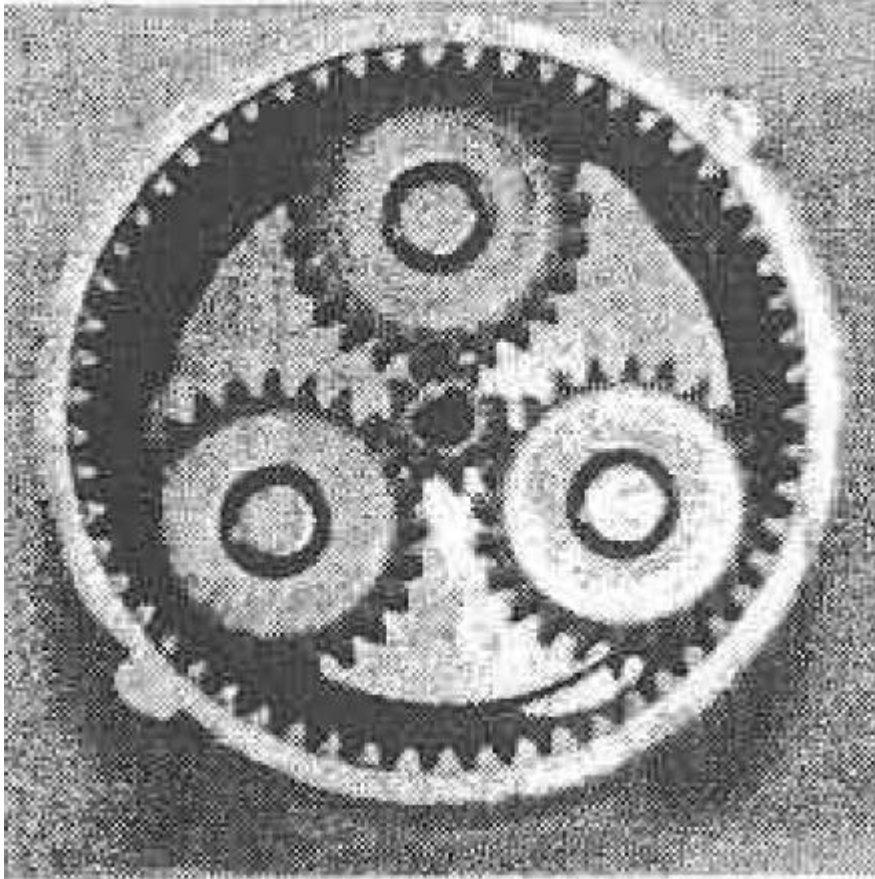


فصل ۹ چرخدنده و انواع آن

مجموعه چرخدنده های خورشیدی

اجزاء این مجموعه عبارتند از:

- (۱) Sun Gear ثابت یا متحرک
- (۲) Planet Gear یک یا چند
- (۳) Planet Carrier یا arm
- (۴) چرخدنده داخلی حلقه ای شکل
(همیشه استفاده نمی شود)

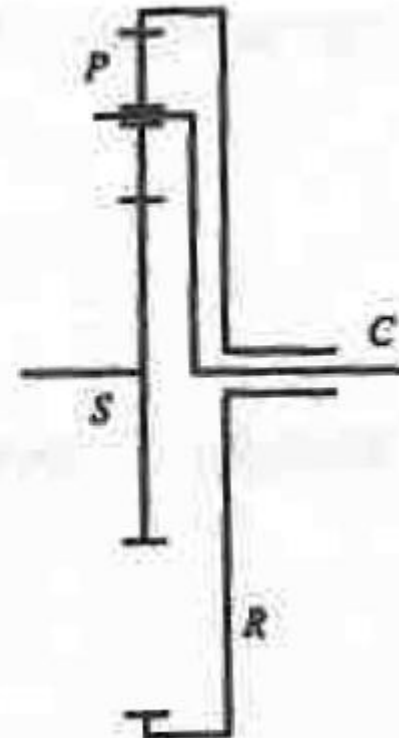
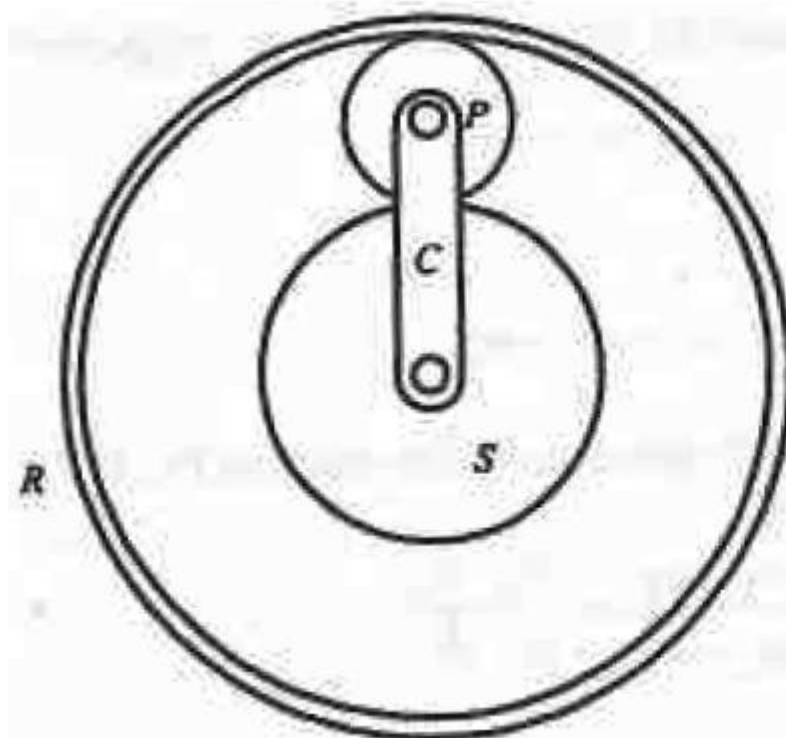




فصل ۹ چرخنده و انواع آن

مجموعه چرخنده خورشیدی ساده

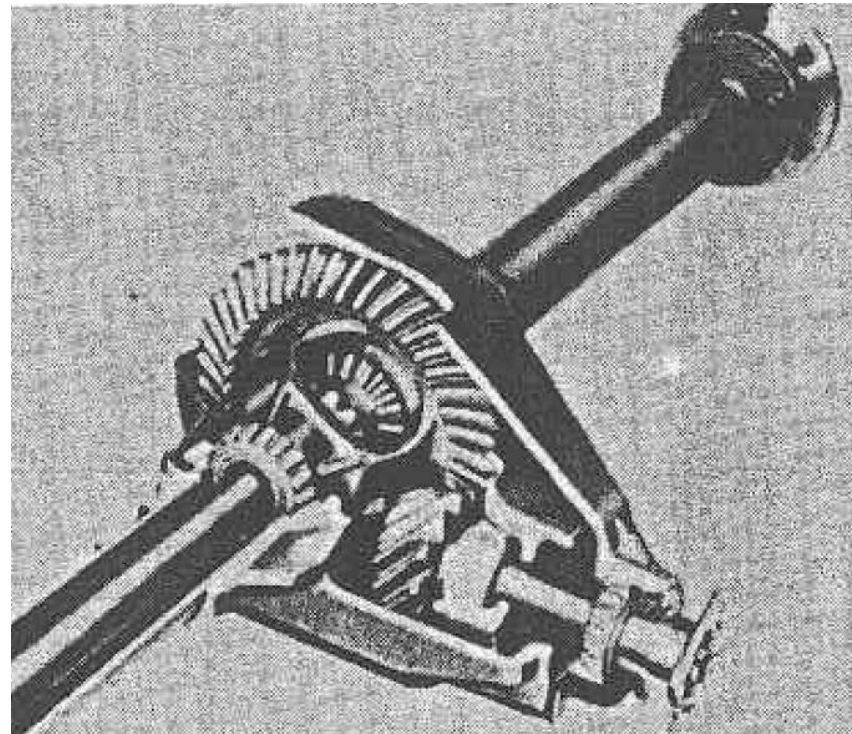
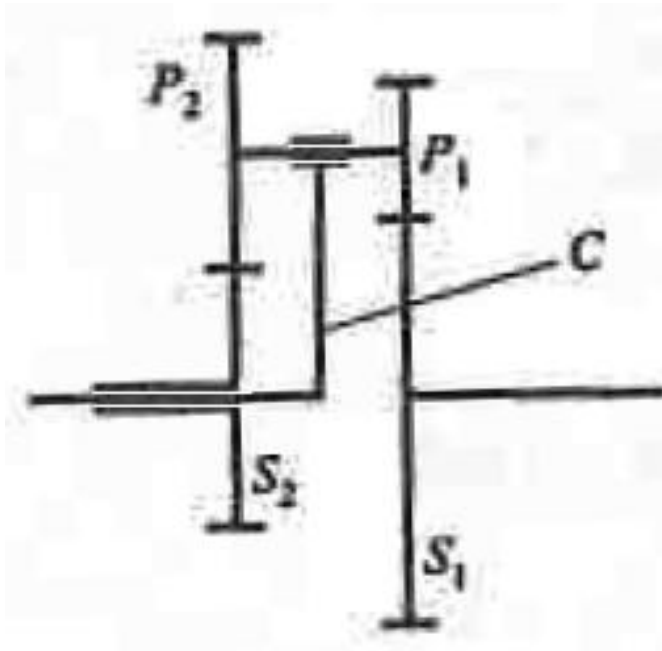
در سیستم سه محور وجود دارد لذا سیستم دارای دو درجه آزادی است



فصل ۹ چرخنده و انواع آن

توسط مجموعه چرخنده خورشیدی مرکب می توان نسبت کاهش شدید سرعت بدست آورد. در مثال زیر دو محور ورودی و یک محور خروجی وجود دارد.

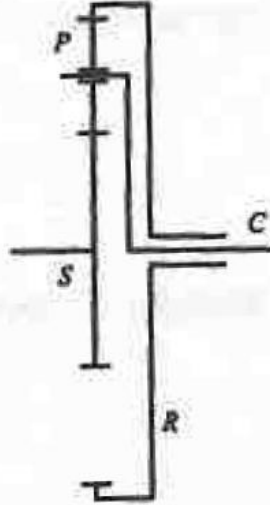
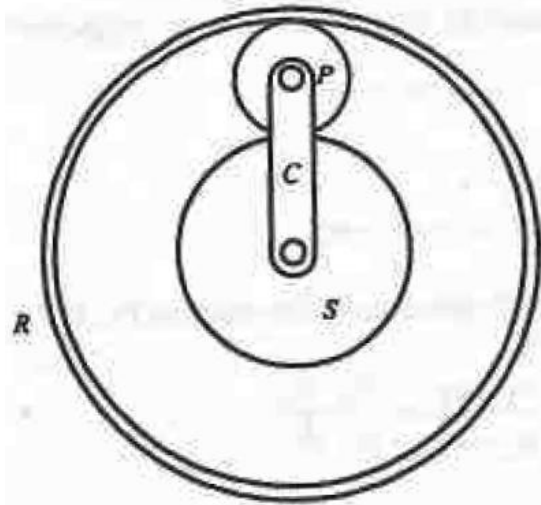
یکی از متداولترین موارد استفاده از چرخنده خورشیدی دیفرانسیل خودرو می باشد.



فصل ۹ چرخنده و انواع آن

تحلیل چرخنده خورشیدی از دو روش معده و جدول انجام می شود.

مثال: اگر چرخنده ۲ ورودی باشد، رابطه ای بین سرعت زاویه ۲ و ۴ و تعداد دندانه ها بدست آورید.



$$\omega_2 = \omega_C + \omega_2^C$$

$$\omega_4 = \omega_C + \omega_4^C$$

$$\frac{\omega_2^C}{\omega_4^C} = -\frac{N_4}{N_2}$$

اگر arm ثابت باشد چرخنده های معمولی

بوده، و چرخنده سیاره ای به صورت هرزگرد عمل می کند

این معادله ارتباط بین سرعت های محور های

۲، ۴ و C را معین می سازد.

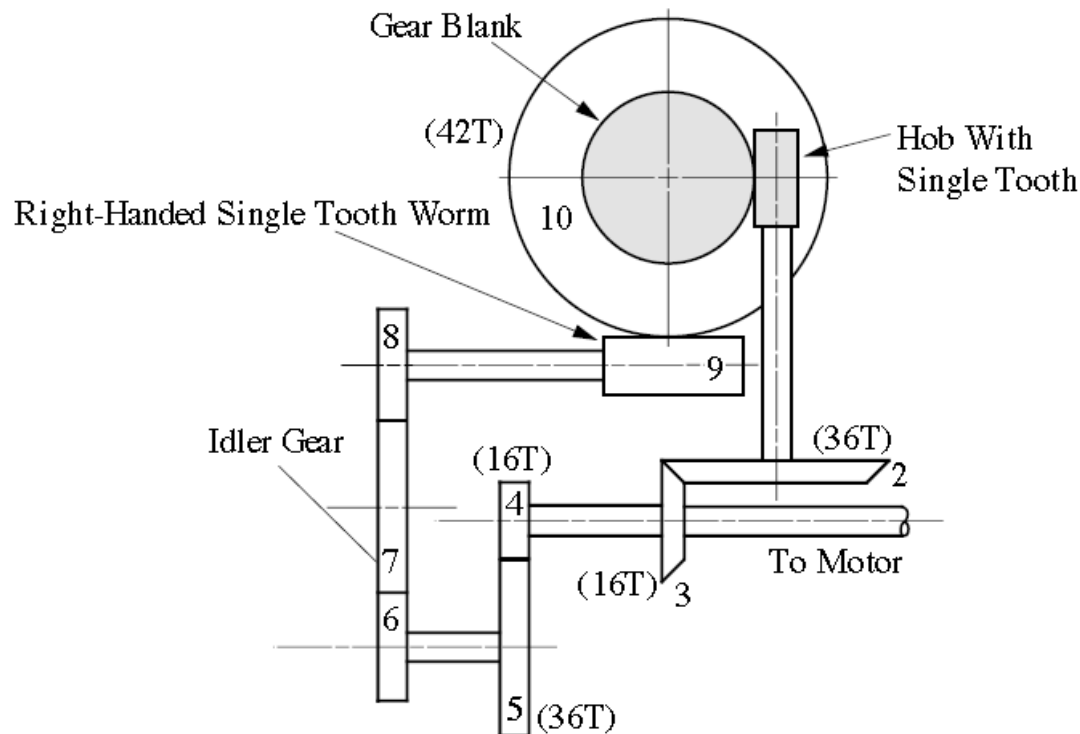


$$\frac{\omega_2 - \omega_C}{\omega_4 - \omega_C} = -\frac{N_4}{N_2}$$

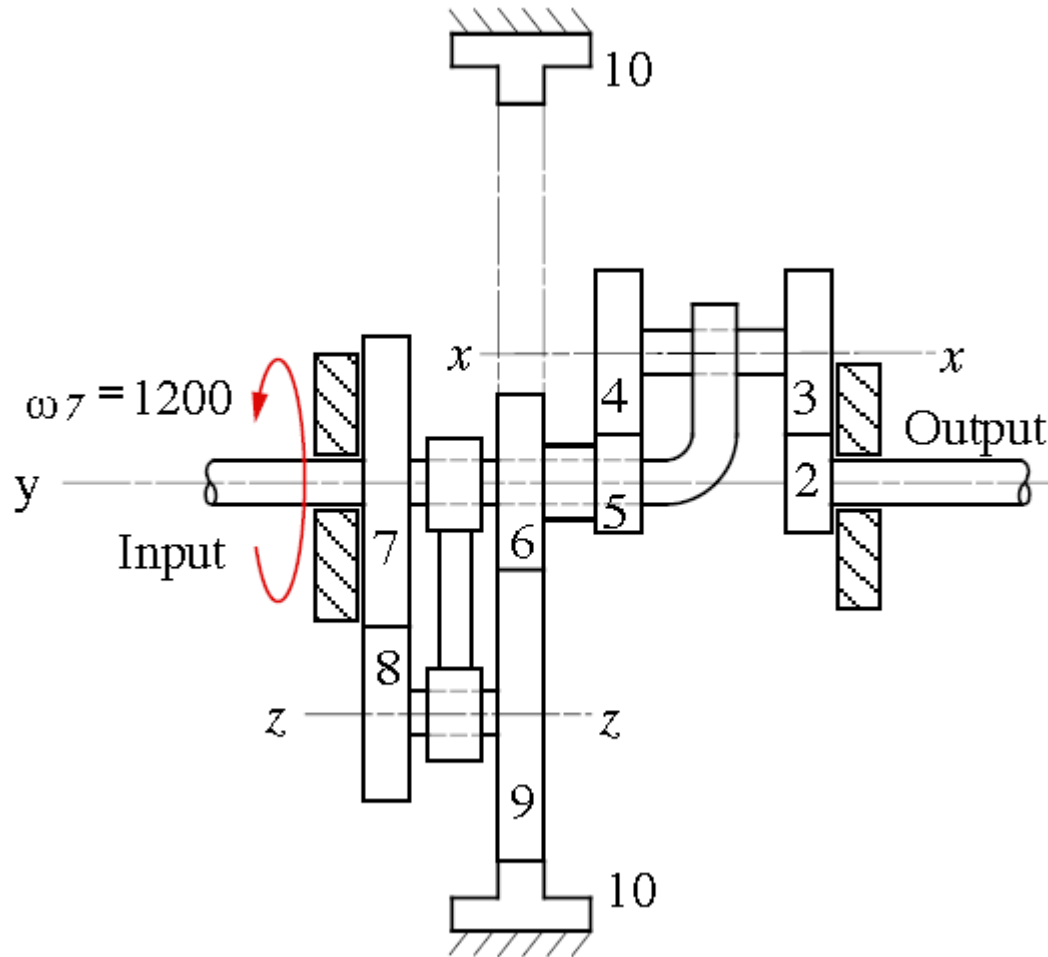
فصل ۹ چرخنده و انواع آن

مسائل

- ۱- مجموعه چرخنده نشان داده شده در شکل برای دستگاه Hob انتخاب شده است. قطعه خام و چرخ حلزون (۱۰) روی یک محور نصب شده و با هم دوران می کنند. اگر قطعه خام ساعتگرد دوران کند ابزار Hob راستگرد است یا چپگرد؟ در صورتیکه روی قطعه خام ۷۲ دندانه مورد نظر باشد، نسبت ω_8/ω_6 را بدست آورید.



فصل ۹ چرخنده و انواع آن



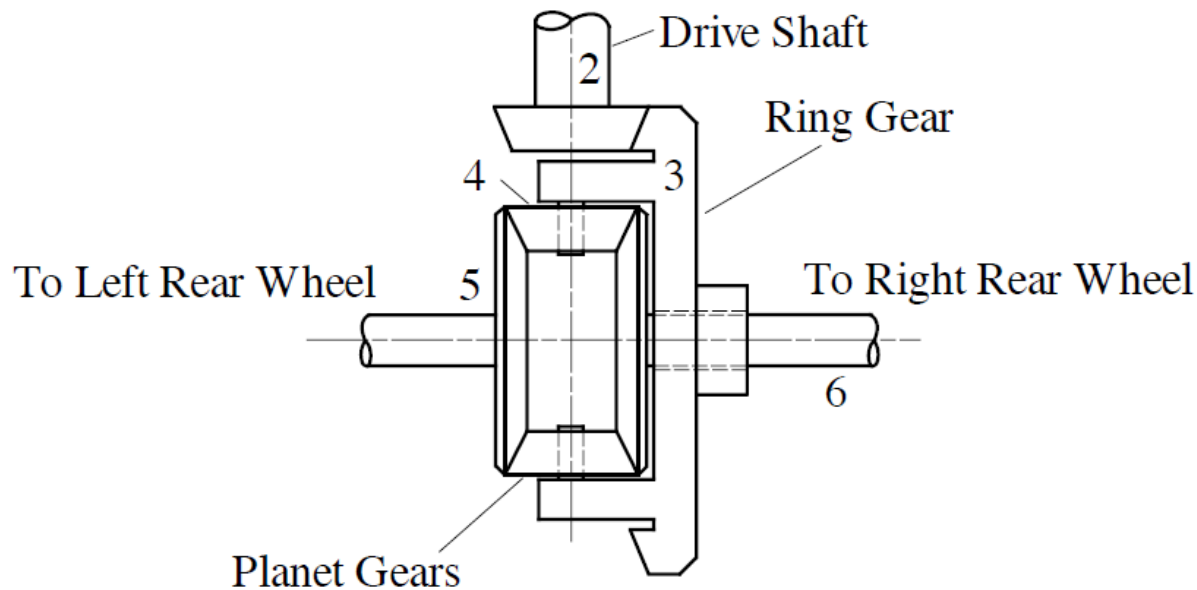
۲- در شکل محور $y-y$ ثابت ، در حالیکه محورهای $x-x$ و $z-z$ با بازو حرکت می کنند. چرخنده های ۷ به بازو ثابت شده است. چرخنده های ۳ و ۴ ، ۵ و ۶ ، ۷ و ۸ ، نسبت بهم صلب می باشند. چرخنده های ۳ و ۴ سیاره ای حرکت می کنند. سرعت و جهت دوران محور خروجی را بدست آورید.

$$\begin{aligned} N_2 &= 16T, N_3 = 20T, N_4 = 22T, \\ N_5 &= 14T, N_6 = 15T, N_7 = 36T, \\ N_8 &= 20T, N_9 = 41T, N_{10} = 97T, \end{aligned}$$



فصل ۹ چرخنده و انواع آن

۳- در شکل دیفرانسیل یک خودرو محور عقب نشان داده شده است. قطر چرخ خودرو ۶۰۹/۶ می باشد. اگر سرعت زاویه محور محرک 900 rpm باشد و هیچیک از چرخها لغزشی نداشته باشند، سرعت خورو را بدست آورید.



$$N_2 = 28T$$

$$N_3 = 92T$$

$$N_4 = 22T$$

$$N_5 = 30T$$

$$N_6 = 30T$$





فصل ۹ چرخنده و انواع آن

۴- در مسئله فوق در نظر بگیرید که چرخ سمت راست در روی یخ قرار گرفته و آزادانه دوران می کند. فرض نزدیک به واقع برای سرعت دورانی چرخ سمت چپ چه مقدار است ، چرا ؟ با این فرض سرعت دورانی چرخ سمت چپ چقدر است ؟ سرعت محور ورودی را 500 rpm در نظر بگیرید.





پایان





فصل ۱۰

تحلیل نیروهای استاتیکی و دینامیکی مکانیزمها





فصل ۱۰ تحلیل نیروهای استاتیکی و دینامیکی مکانیزمها

تعادل استاتیکی

معادله اول نیوتن برای هر عضو سازه، گشتاور حول نقطه دلخواه

$$\sum F = 0$$

$$\sum M_O = 0$$

the equations of *static equilibrium*

اولین گام در حل، رسم دیاگرام جسم آزاد free body diagram

تمام بار گذاری خارجی و نیروی و گشتاورهای عکس العملی داخلی در نظر گرفته شود.

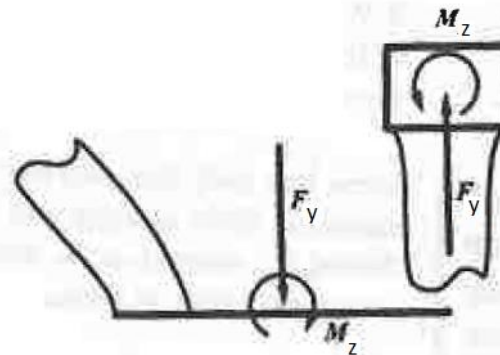
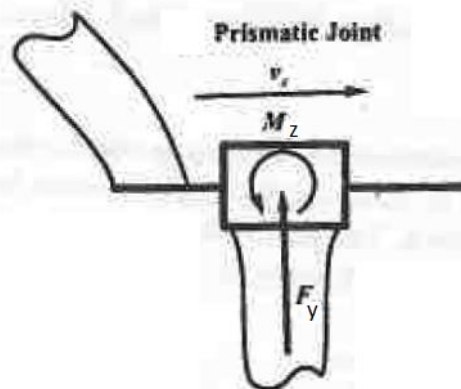
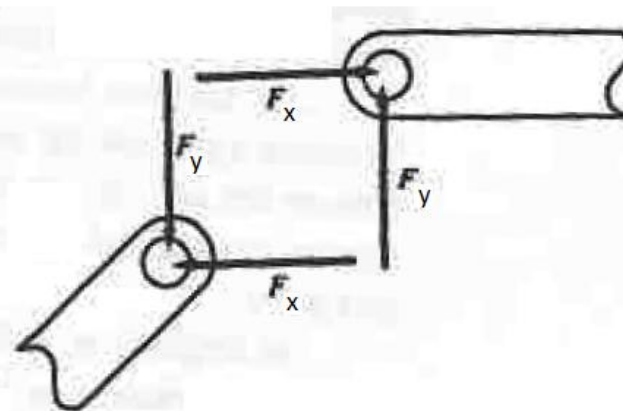
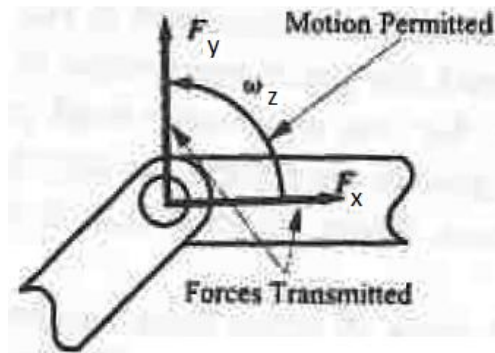


فصل ۱۰ تحلیل نیروهای استاتیکی و دینامیکی مکانیزمها

نیروهای عمل و عکس العمل در انواع اتصالات

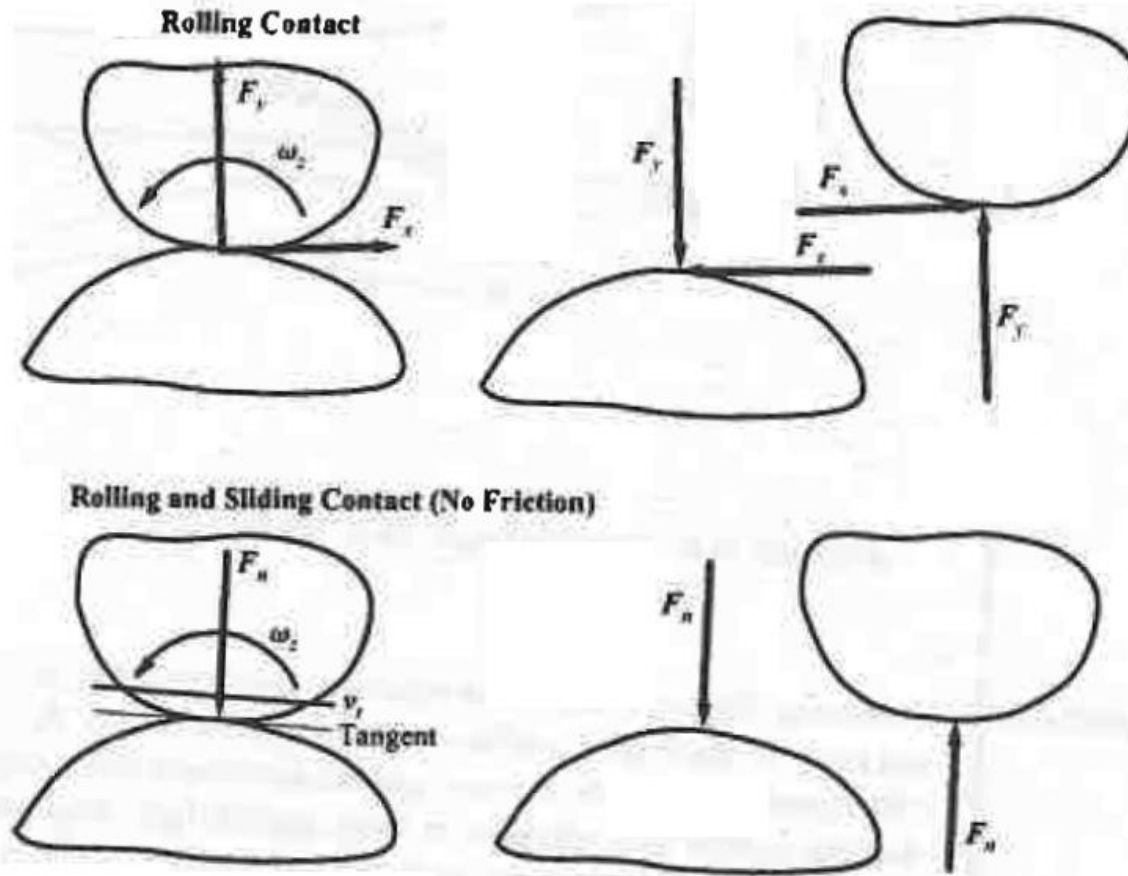
اتصال

دیگرام جسم آزاد



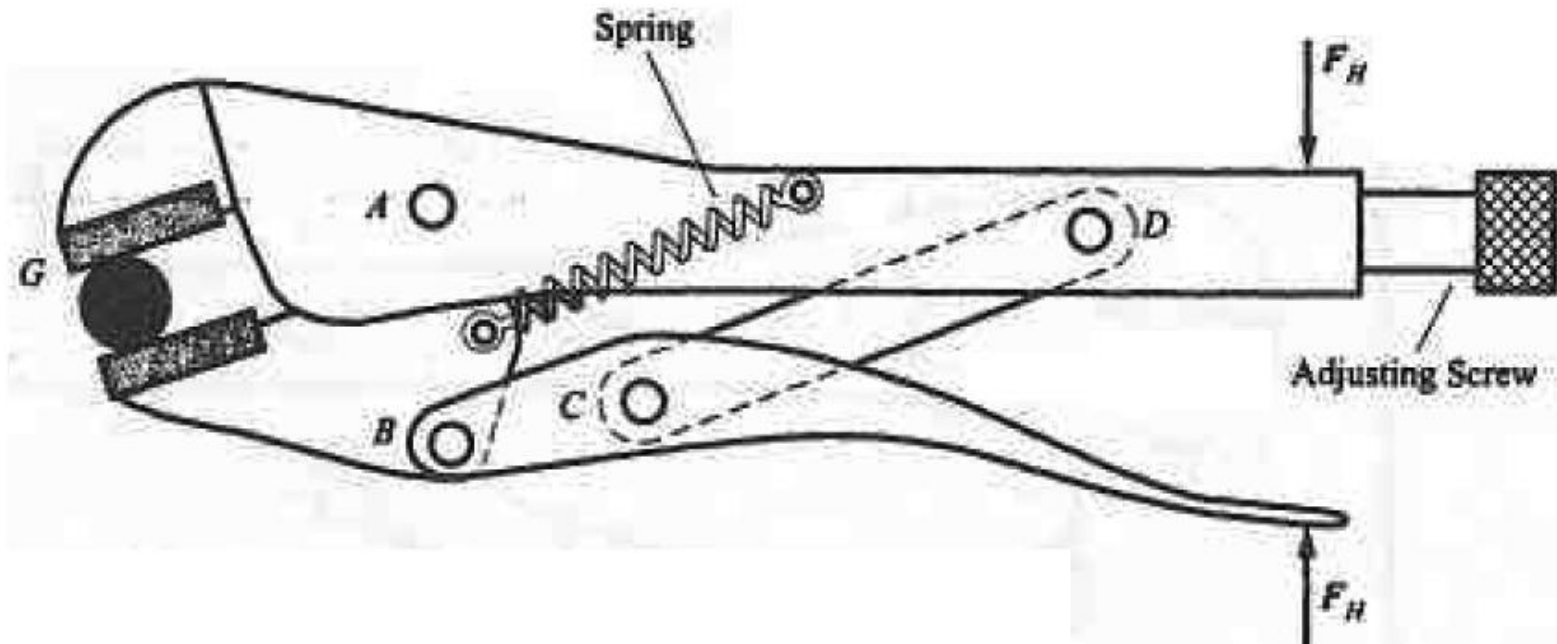
فصل ۱۰ تحلیل نیروهای استاتیکی و دینامیکی مکانیزمها

نیروهای عمل و عکس العمل در انواع اتصالات



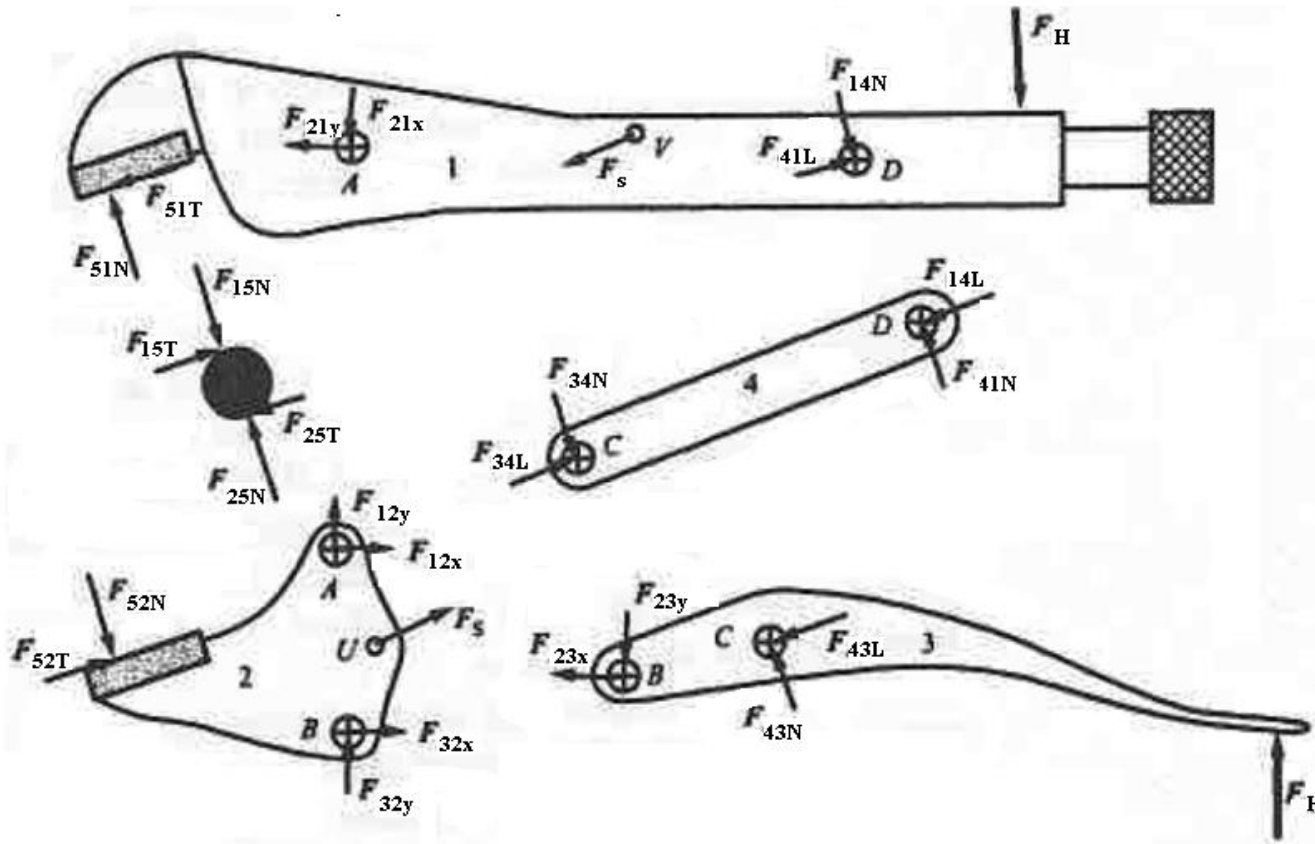
فصل ۱۰ تحلیل نیروهای استاتیکی و دینامیکی مکانیزمها

دیاگرام جسم آزاد کلیه اعضاء مکانیزم زیر را در موقعیت نشان داده شده رسم نمایید. هدف تحلیل، بدست آوردن ارتباط بین نیروی اعمالی F_H و نیروی گیرش قطعه کار F_G می باشد. از نیروی وزن صرف نظر نمایید.



فصل ۱۰ تحلیل نیروهای استاتیکی و دینامیکی مکانیزمها

ادامه دهید





فصل ۱۰ تحلیل نیروهای استاتیکی و دینامیکی مکانیزمها

در مکانیزم زیر گشتاور T_{12} لازم برای غلبه بر نیروی $P = 120 \text{ lb}$ در جهت نشان داده شده را بدست آورید.

$$AB = 6 \text{ in}, EC = 12 \text{ in}, AE = 8 \text{ in}$$

$$BC = 18 \text{ in}, ED = 5 \text{ in}$$

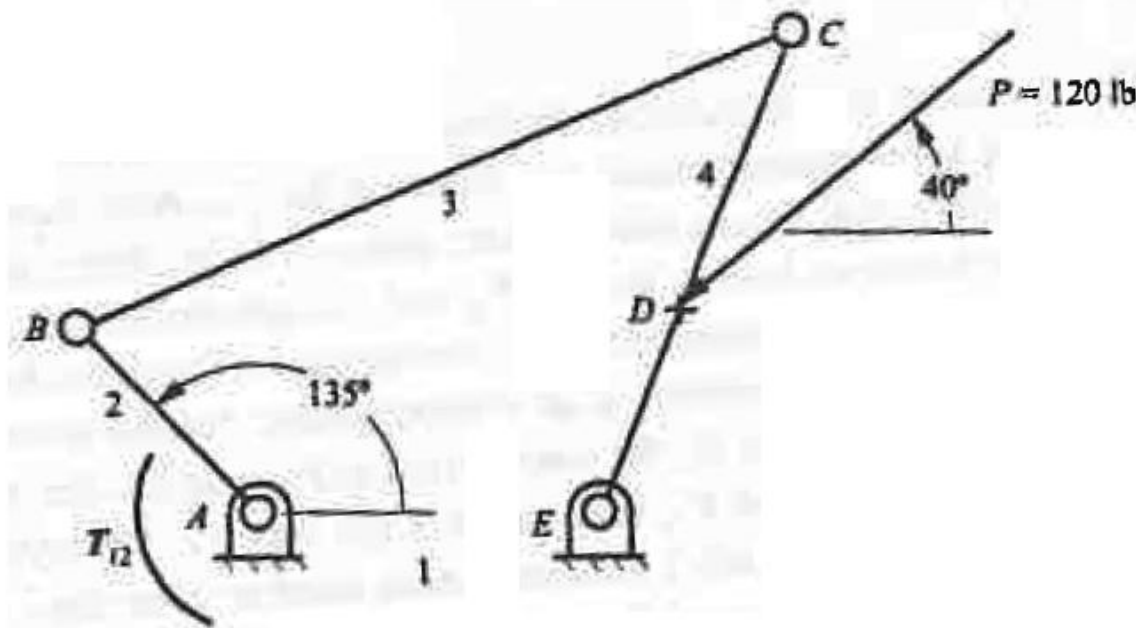




Diagram of a slider-crank mechanism. The piston has a diameter of 6 inches. The connecting rod is 36 inches long. The crank is 8 inches long and is at an angle of 60 degrees to the horizontal. The cross-head moves vertically. The diagram is labeled with 'Piston', 'Gland', 'Cross-Head', 'Connecting Rod', and 'Crank'. Dimensions include 6" D, 36", 8", 3", and 60 degrees. Points A, B, C, and G are marked.



فصل ۱۰ تحلیل نیروهای استاتیکی و دینامیکی مکانیزمها

تحلیل نیروهای دینامیکی

عوامل اصلی شکست اجزاء ماشین عبارتند از: تغییر شکل یا شکست در اثر تنشهای بیش از حد، ارتعاشات و تداخل در اثر خیز الاستیک بیش از حد.

جهت محاسبه تنشهای داخلی اجزاء و خیزهای الاستیک ابتدا باید ارتباط بین نیرو و حرکت تحلیل شوند.

قانون دوم نیوتن برای ذرات

Newton's second law

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$





فصل ۱۰ تحلیل نیروهای استاتیکی و دینامیکی مکانیزمها

اجزاء ماشین معمولاً جرم گسترده ای دارند و لازم است از قانون دوم نیوتن برای اجرام صلب استفاده شود.

$$\Sigma F = ma_G$$

$$\Sigma M_G = I_G \alpha$$

$$\Sigma M_P = I_P \alpha$$





Newton's second law are all that are needed to solve any dynamic force system by the Newtonian method.

Jean le Rond d' Alembert (1717-1783), a French mathematician, rearranged Newton's equations to create a "**quasi-static**" situation from a dynamic one.

D' Alembert's versions of equations Newton's second law:

$$\sum \mathbf{F} - m\mathbf{a} = 0$$

$$\sum \mathbf{T} - I\alpha = 0$$





فصل ۱۰ تحلیل نیروهای استاتیکی و دینامیکی مکانیزمها

اکثر مسائل دینامیکی به دو گروه تقسیم بندی می شوند:

۱- حرکت (motion) هر عضو سیستم معلوم است. لذا شتاب مرکز ثقل و شتاب زاویه ای هر عضو از مکانیزم معلوم بوده یا با استفاده از سینماتیک قابل محاسبه است. بنابر این سمت راست دستگاه معادلات فوق معین بوده و حل جبری آنها جواب مسئله (نیروها و گشتاورهای لازم) خواهد بود.

۲- حرکت (motion) هر عضو سیستم از قبل معلوم نیست و لازم است که شتابها در سمت راست معادلات فوق به عنوان مشتق دوم متغیرهای موقعیت تحلیل شوند. نیروها و گشتاورهای اعمال شده روی یک عضو که در سمت چپ معادلات حرکت وجود دارند در ارتباط با متغیرهای موقعیت بوده و دستگاه معادلات دیفرانسیل بر حسب متغیرهای موقعیت و زمان بیان می شود.





فصل ۱۰ تحلیل نیروهای استاتیکی و دینامیکی مکانیزمها

مسائلی که از طریق سینیتیک ذرات قابل حل می باشند.
در برخی از مسائل اینرسی دورانی وجود ندارد یا قابل صرف نظر کردن است





فصل ۱۰ تحلیل نیروهای استاتیکی و دینامیکی مکانیزمها

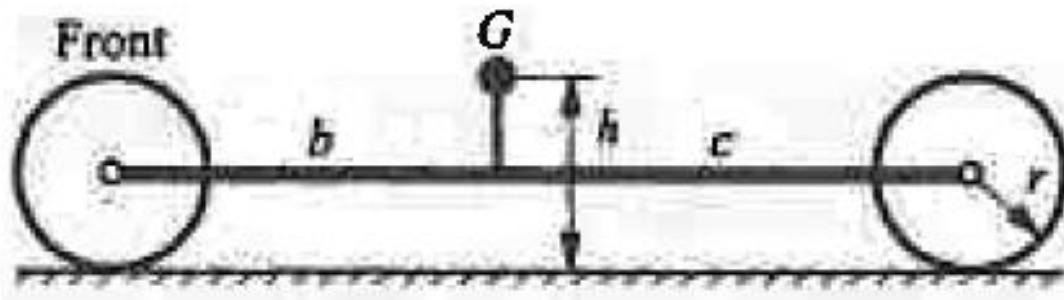
An automobile has a total weight of $W = 4000 \text{ lb}$
distance between the front and rear axle centers $b+c = 90 \text{ in}$,
and its center of mass is $b=40\text{in}$ behind the front axle center.
the center of mass is $h = 25\text{in}$ above the ground.
The wheel radius is $r = 14.5 \text{ in}$, and on a good surface
the coefficient of friction between the tires and road is 0.8 .

نسبت حداکثر شتاب اتومبیل به شتاب ثقل g را بدست آورید در صورتی که

۱- اتومبیل توسط چرخ عقب به حرکت در آید.

۲- اتومبیل توسط چرخ عقب به حرکت در آید.

همچنین حداکثر شتاب قابل دسترس در صورتی که نیروی ترمز بصورت بهینه بین چرخ جلو و عقب تقسیم شود را بدست آورید. درصد نیروی ترمز در روی چرخ جلو چه مقدار است.

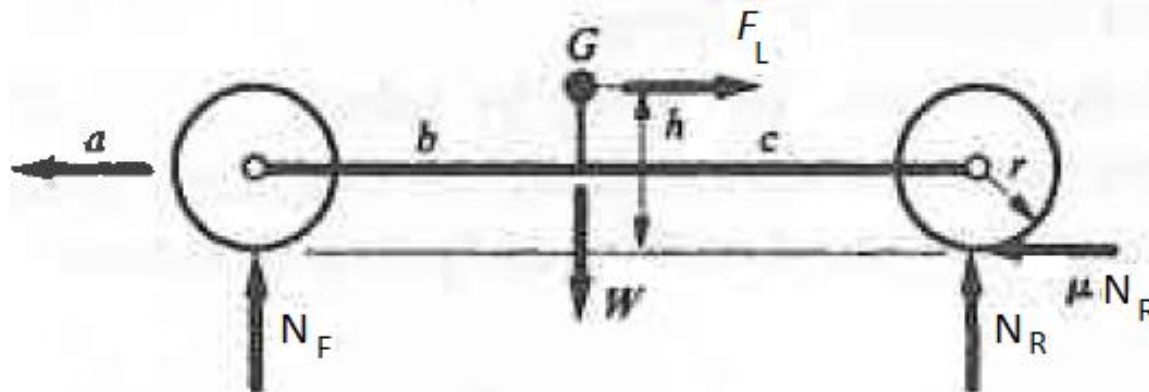




فصل ۱۰ تحلیل نیروهای استاتیکی و دینامیکی مکانیزمها

با توجه به این که جرم سیستم به صورت متمرکز در مرکز ثقل در نظر گرفته می شود ،
دیاگرام جسم آزاد به صورت زیر نشان داده می شود.

حل قسمت اول



$$F_L = \frac{Wa}{g}$$





فصل ۱۰ تحلیل نیروهای استاتیکی و دینامیکی مکانیزمها

Rear-wheel drive

$$F_L = \frac{Wa}{g}$$

$$\sum F_x = 0: -F_L + \mu N_R = 0$$

$$\sum F_y = 0: W = N_R + N_F$$

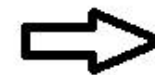
$$N_R = \frac{Wa}{\mu g}$$

$$N_F = W \left(1 - \frac{a}{\mu g} \right)$$

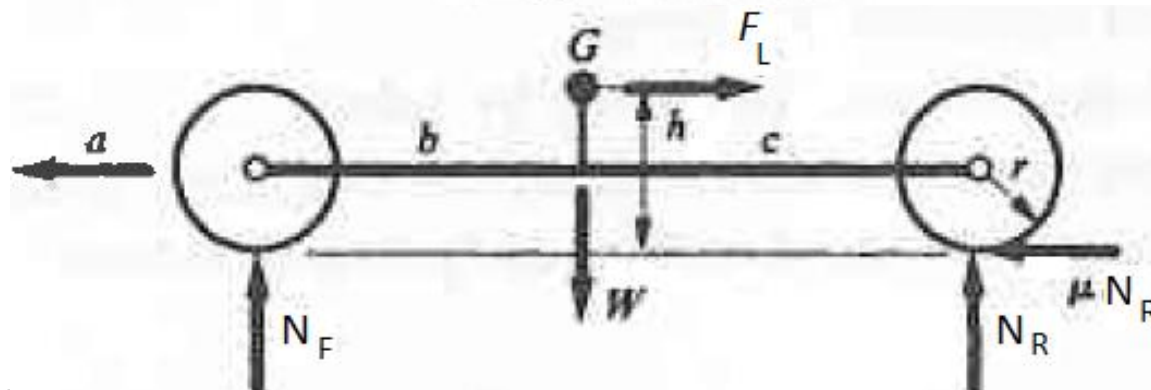
$$\frac{a}{g} \left(\frac{b+c}{\mu} - h \right) = b$$

$$\sum M_G = 0 \quad cN_R = bN_F + h\mu N_R$$

$$A = \frac{a}{g} = \frac{\mu b}{b+c-\mu h}$$



$$A = 0.457$$





فصل ۱۰ تحلیل نیروهای استاتیکی و دینامیکی مکانیزمها

Front-wheel Drive

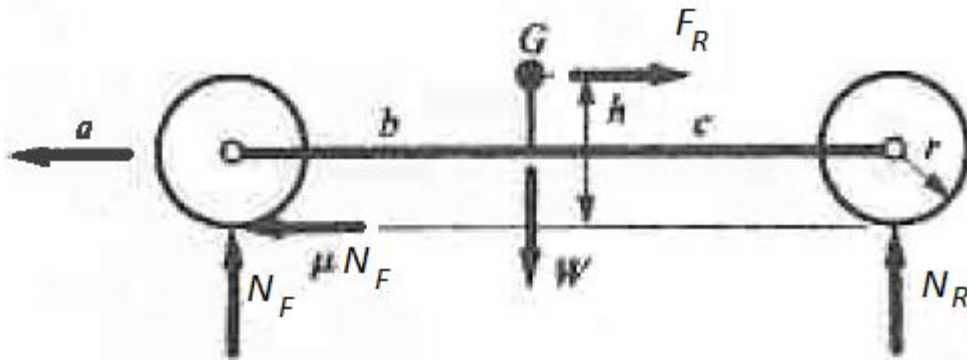
$$\sum F_x = 0: -F_f + \mu N_F = 0$$

$$\sum F_y = 0: W = N_R + N_F$$

$$\sum M_G = 0: cN_R = bN_F + h\mu N_F$$

$$N_F = \frac{Wa}{\mu g} \quad N_R = W \left(1 - \frac{a}{\mu g} \right)$$

$$\frac{a}{g} \left(\frac{b+c}{\mu} + h \right) = c$$



$$A = \frac{a}{g} = \frac{\mu c}{b+c+\mu h} = 0.364$$





فصل ۱۰ تحلیل نیروهای استاتیکی و دینامیکی مکانیزمها

دیاگرام جسم آزاد برای حالت ترمز

بطور بهینه دو چرخ در یک زمان به آستانه لغزش رسیده اند.

$$\sum F_x = 0: -F_L - \mu(N_R + N_F) = 0$$

$$\frac{Wa}{g} = \mu W$$

$$\sum F_y = 0: W = N_R + N_F$$

$$N_F(b + c) = (c + h\mu)W$$

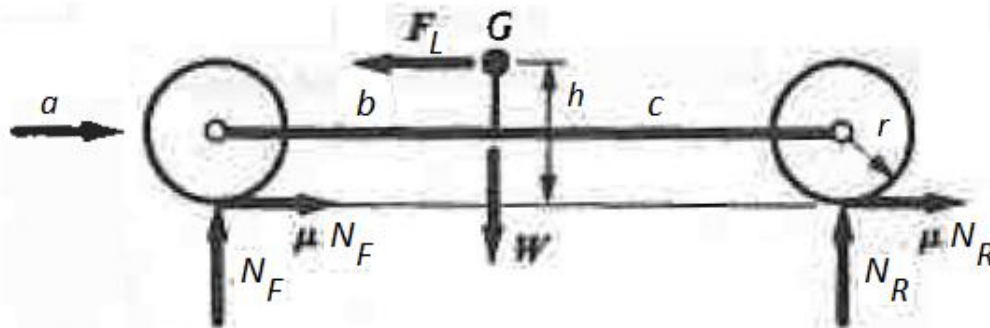
$$\sum M_G = 0: cN_R + h\mu(N_R + N_F) = bN_F$$

$$N_F = W \frac{c + h\mu}{b + c}$$

$$N_F = 0.778 W \text{ and } N_R = 0.222 W$$

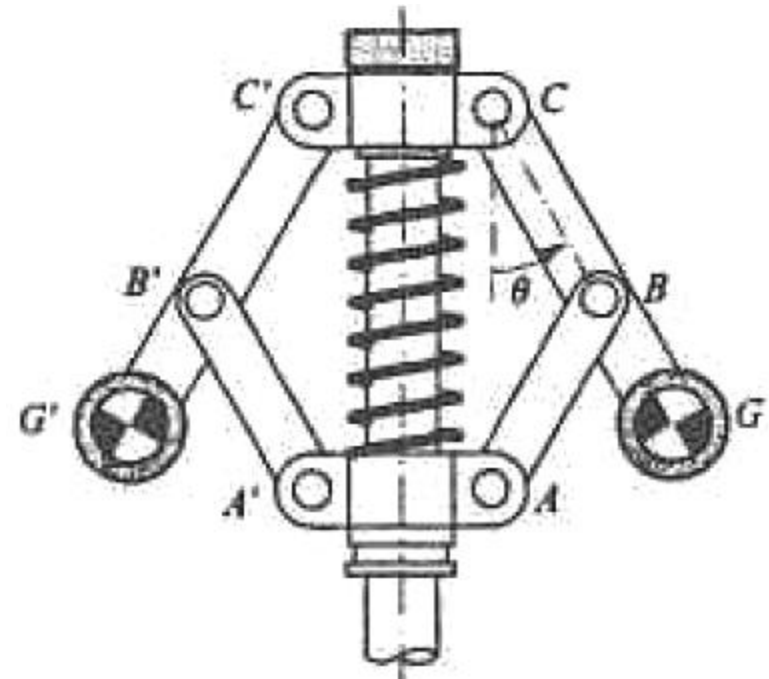
بنابراین ۷۷.۸٪ نیروی ترمز را چرخهای جلو تامین می کند

حداکثر کاهش شتاب در حالت بهینه از حداکثر شتاب افزاینده سرعت بیشتر است



فصل ۱۰ تحلیل نیروهای استاتیکی و دینامیکی مکانیزمها

گاورنر جهت تنظیم سرعت استفاده می شود. نیروی گریز از مرکز روی وزنه ها موجب فشرده شدن فنر و امکان کنترل سرعت را فراهم می کند.



A fly-ball governor



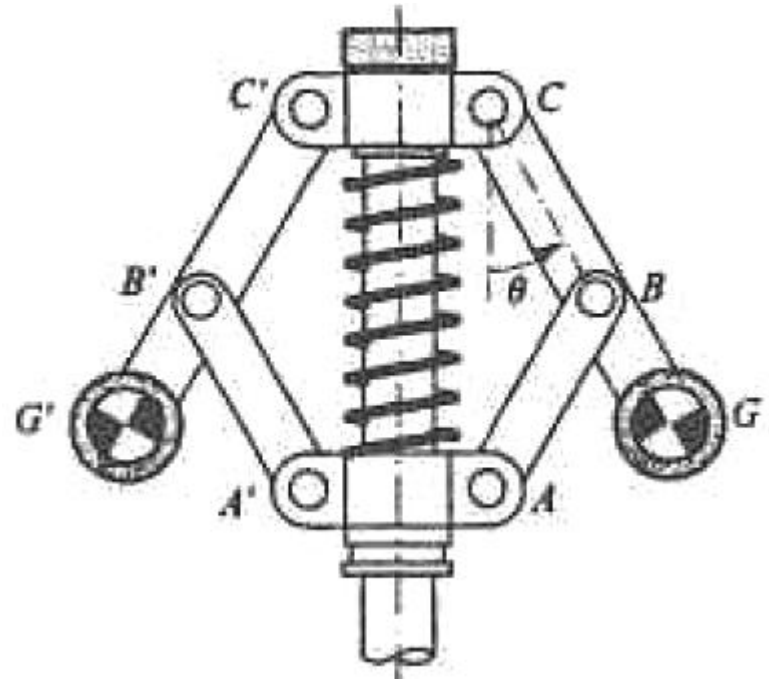
فصل ۱۰ تحلیل نیروهای استاتیکی و دینامیکی مکانیزمها

The valve is fully closed when the angle θ is 75° . **Compute the speed at which the valve is dosed** if the effective centers of mass of the arms are in the locations G and G' and other inertia can be neglected. The weight of each arm is 0.25 lb. The adjusting nut is set so that the spring is at its natural or free length when $\theta = 8^\circ$. The stiffness of the spring is 20 lb/in. The lengths of the links are given.

$$AB = BC = A'B' = B'C' = 1.5 \text{ in.}$$

$$CG = C'G' = 2.438 \text{ in, and } CC' = 1.25 \text{ in.}$$

G and G' are center of mass





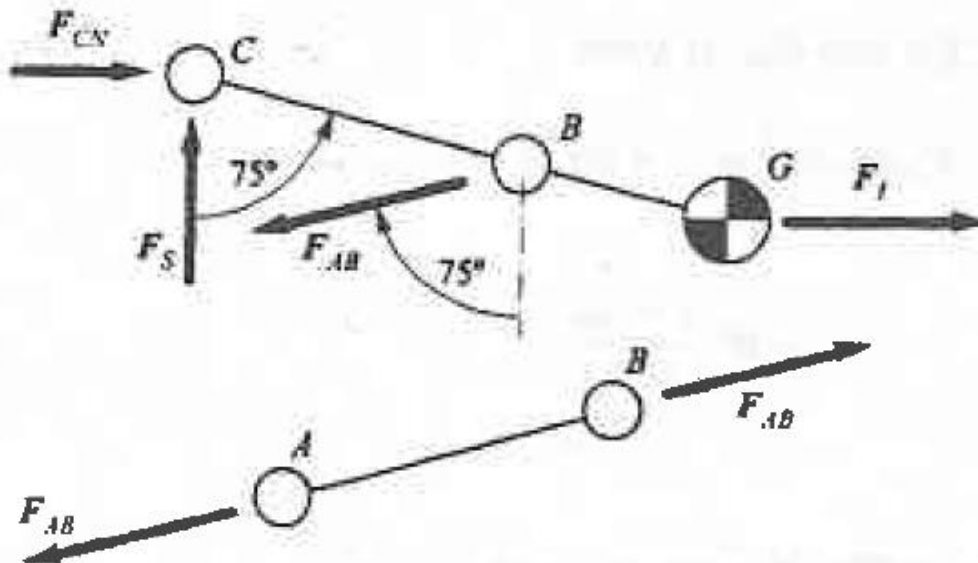
فصل ۱۰ تحلیل نیروهای استاتیکی و دینامیکی مکانیزمها

حل

$$r = 2.438 \sin 75^\circ + 0.625 = 2.979 \text{ in}$$

$$a_G = r\omega^2 = (2.979/12)\omega^2 = 0.248 \omega^2$$

$$F_I = ma_G (0.25/32.2) \times 0.248 \omega^2 = 0.00193 \omega^2$$



$$\sum F_x = 0: F_{CN} + F_I - F_{AB} \sin 75^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0: F_S - F_{AB} \cos 75^\circ = 0$$

$$\sum M_C = 0:$$

$$AC = 2 \times 1.5 \cos 75^\circ = 0.776 \text{ in}$$

$$AC = 2 \times 1.5 \cos 5^\circ = 2.989 \text{ in}$$

$$x = 2.989 - 0.776 = 2.212 \text{ in}$$

$$2F_S = 20 \times 2.212 = 44.24 \text{ lb}$$

$$F_S = 22.12 \text{ lb}$$





فصل ۱۰ تحلیل نیروهای استاتیکی و دینامیکی مکانیزمها

$$F_{AB} = F_S / \cos 75^\circ = 22.12 / \cos 75^\circ = 85.47 \text{ lb}$$

$$F_I = \frac{1.5 \sin 30^\circ}{2.438 \sin 15^\circ} F_{AB} = \frac{1.5 \sin 30^\circ}{2.438 \sin 15^\circ} 85.47 = 101.58 \text{ lb}$$

$$\omega^2 = F_I / 0.00193 = 101.58 / 0.00193$$

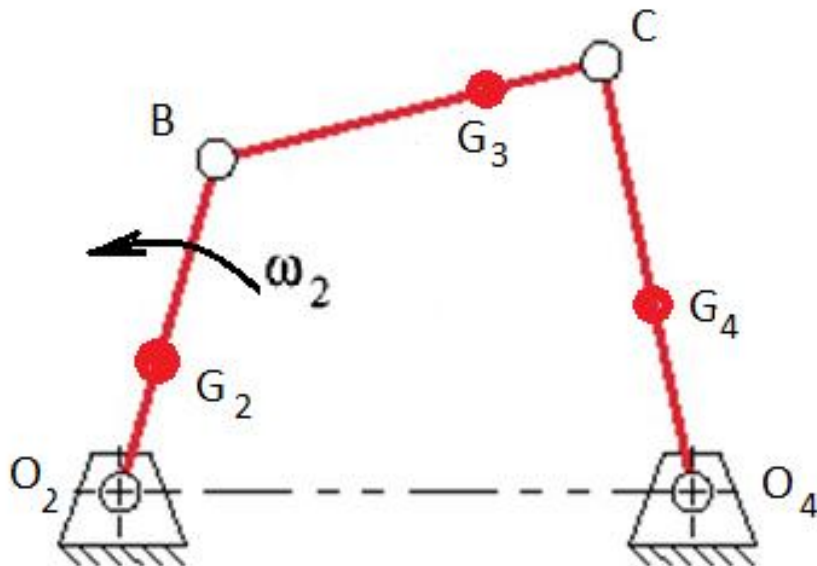
$$\omega = 2191 \text{ rpm}$$

speed at which the governor will close the valve



فصل ۱۰ تحلیل نیروهای استاتیکی و دینامیکی مکانیزمها

تحلیل نیروئی مکانیزمها — روش ترسیمی
 ورودی سرعت زاویه ای ω_2 که ثابت می باشد.
 جرمها و موقعیت مراکز ثقل داده شده اند.
 گشتاور لازم روی پین ۲ که حرکت مورد نظر
 را ایجاد می کنند ، بدست آورید.

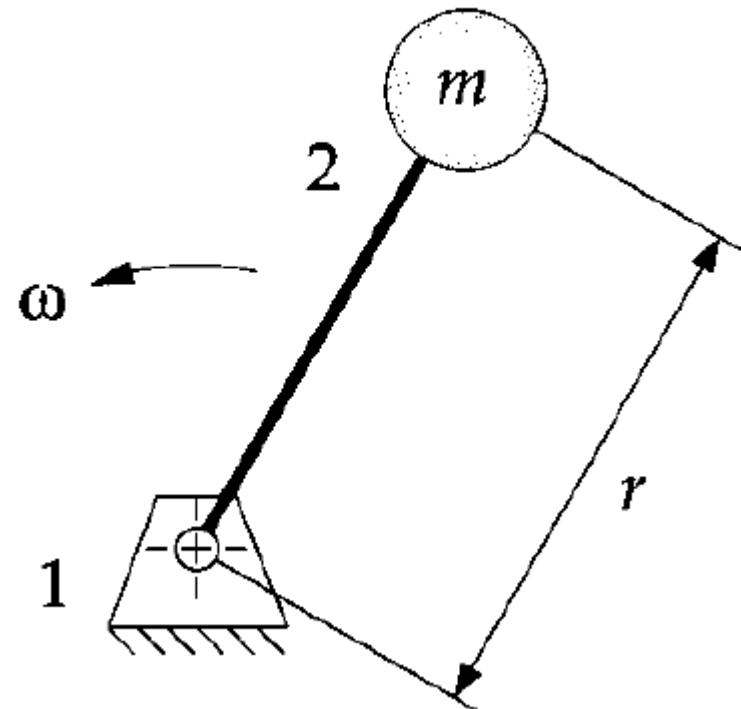




فصل ۱۰ تحلیل نیروهای استاتیکی و دینامیکی مکانیزمها

تحلیل نیروئی مکانیزمها – روش معادلات بازو با دوران خالص

a mass, being rotated at the end of link
at a constant angular velocity ω and
constant radius r .



فصل ۱۰ تحلیل نیروهای استاتیکی و دینامیکی مکانیزمها



"pure" free-body diagrams of both members in this system,
the ground link (1) the rotating link (2).

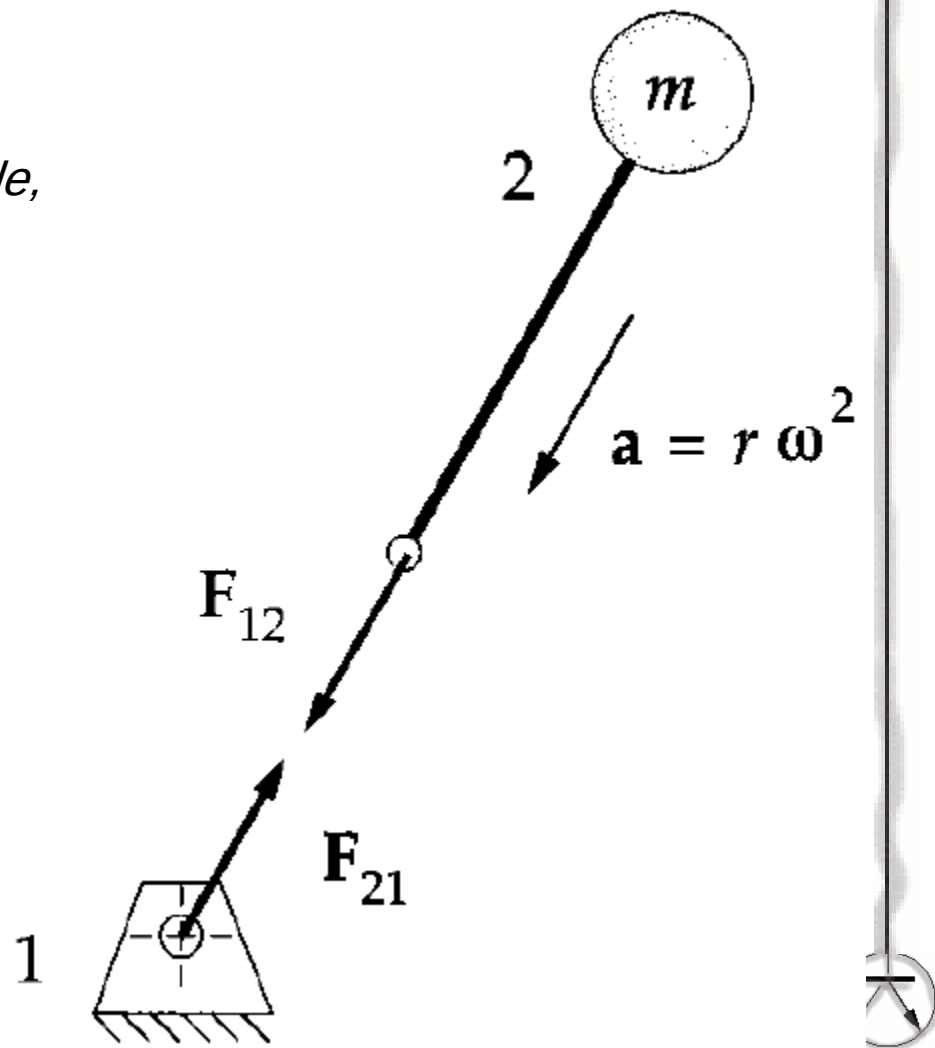
The only real force acting on link 2 is F_{12} .

angular acceleration α is zero in this example,
the acceleration acting on the

link is only the $r\omega^2$ component,

*which is a **centripetal acceleration**,*
*i.e., **directed toward the center**.*

$$F_{12} = mr\omega^2$$

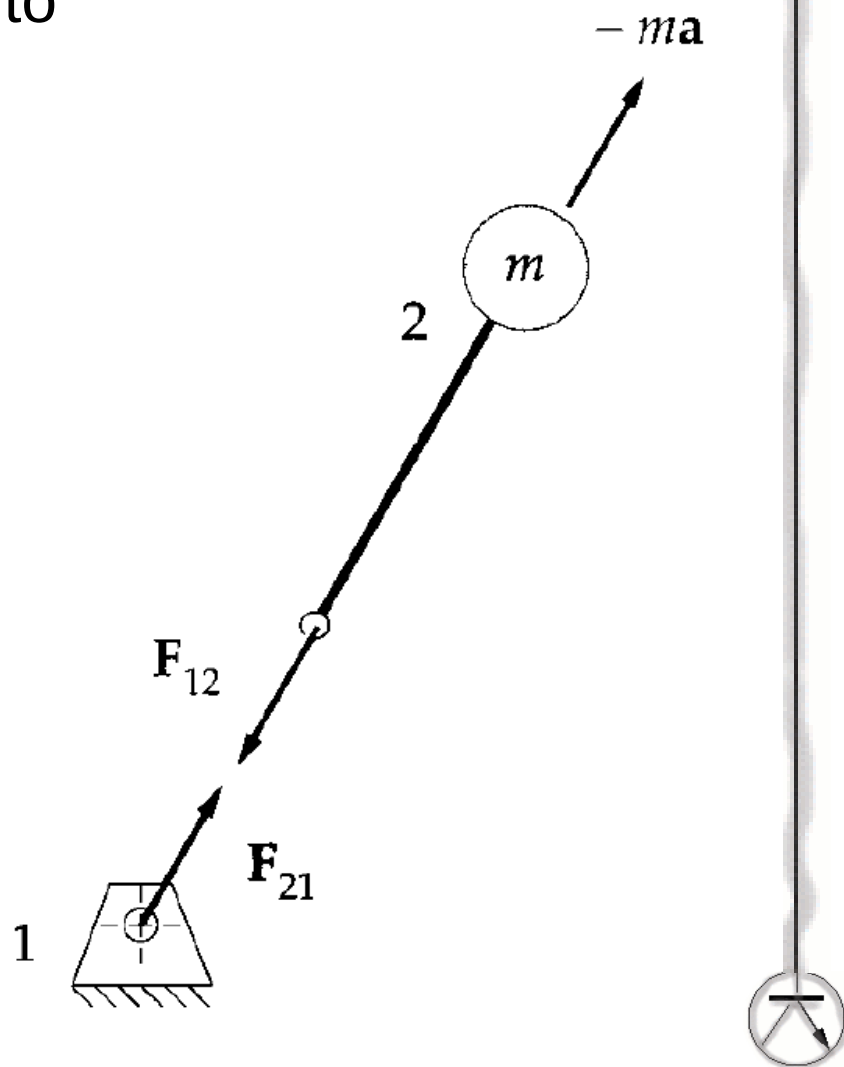




free-body diagrams done according to
the principle of d' Alembert
a negative ***ma*** inertia force
applied to the mass on link 2

$$F_{12} - mr\omega^2 = 0$$

$$F_{12} = mr\omega^2$$

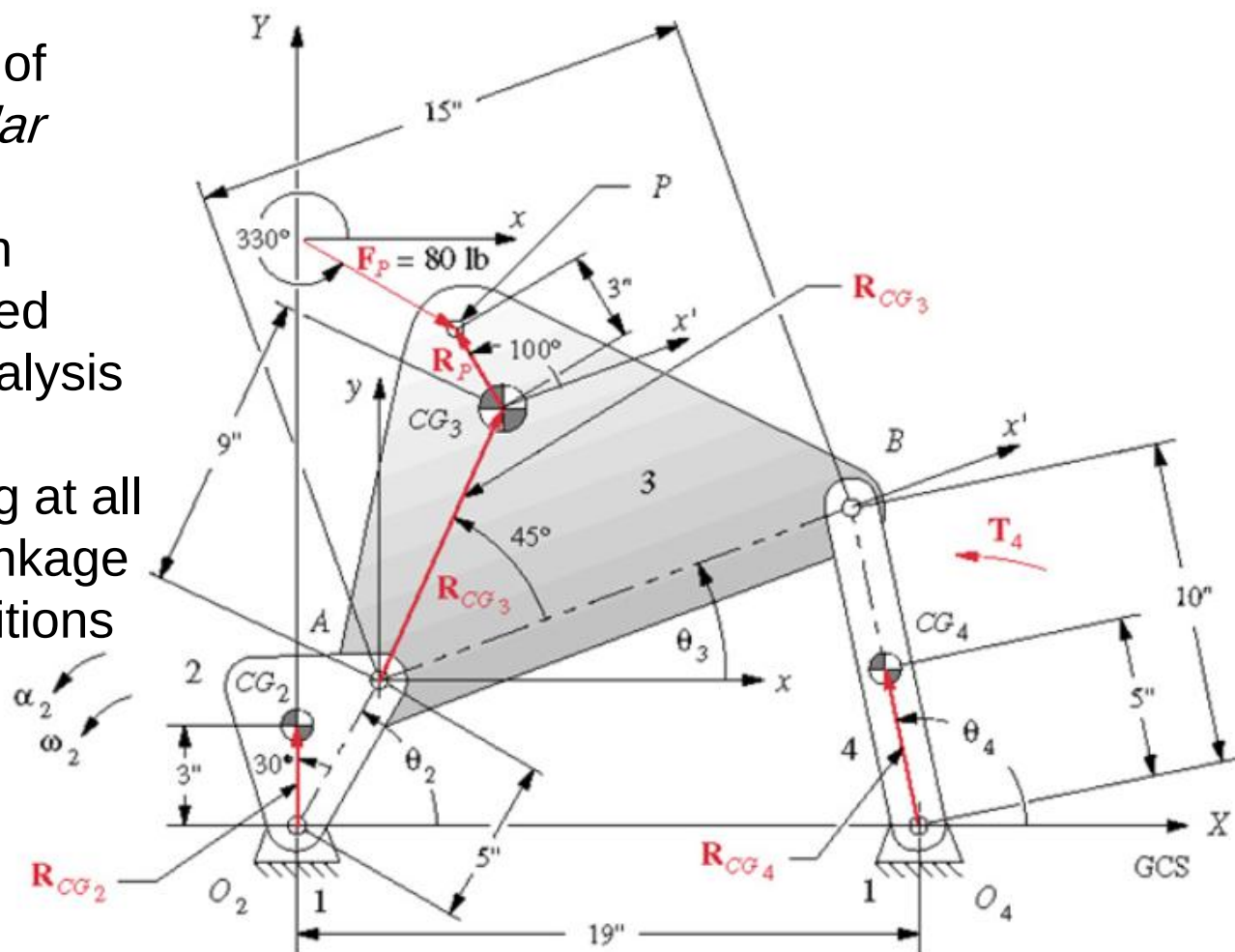




FORCE ANALYSIS OF A FOURBAR LINKAGE

linear accelerations of *CGs*, and *link angular accelerations* and velocities have been previously determined from a kinematic analysis

find the forces acting at all the pin joint of the linkage for one or more positions





فصل ۱۰ تحلیل نیروهای استاتیکی و دینامیکی مکانیزمها

Linkage has three moving links

three equations for any link or rigid body in motion

$$\sum F_x = ma_x$$

$$\sum F_y = ma_y$$

$$\sum T = I_G \alpha$$

expect to have **nine equations in nine unknowns** for this problem

An external force $\mathbf{F}_p$ is shown acting on link 3 at point P. Also an external torque T_4 is shown acting on link 4.

To solve for the pin forces it is necessary that these applied external forces and torques be defined for all positions of interest





The linkage kinematic parameters are defined with respect to a **global XY system (GCS)** whose origin is at the driver pivot O_2 and whose X axis goes through link 4's fixed pivot O_4 .

The CG of each link is initially defined within each link with respect to a local moving and rotating axis system (LRCS) embedded in the link because the CG is an unchanging physical property of the link.

We need to define each link's dynamic parameters and force locations with respect to a local, moving, but nonrotating axis system (LNCS) x,y *located at its CG as shown* on each free-body diagram



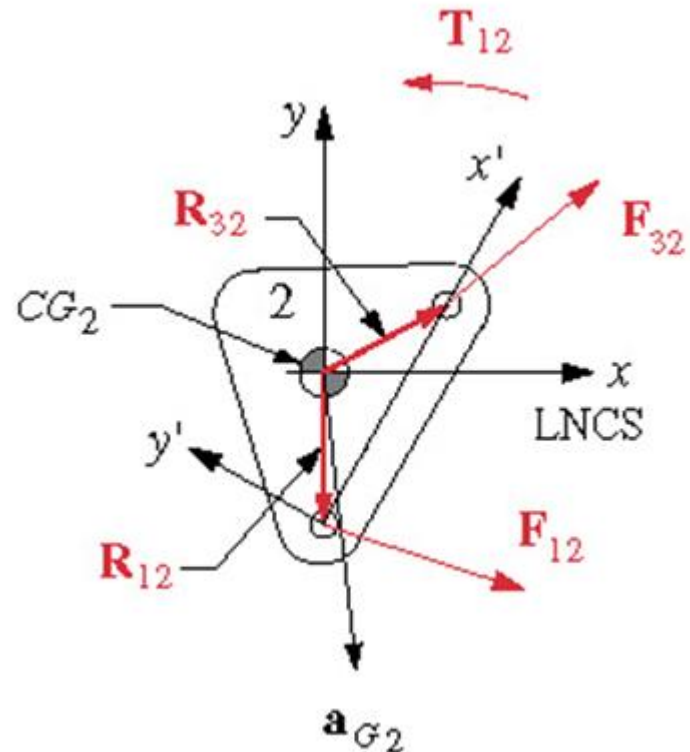


link 2

$$F_{12_x} + F_{32_x} = m_2 a_{G_2_x}$$

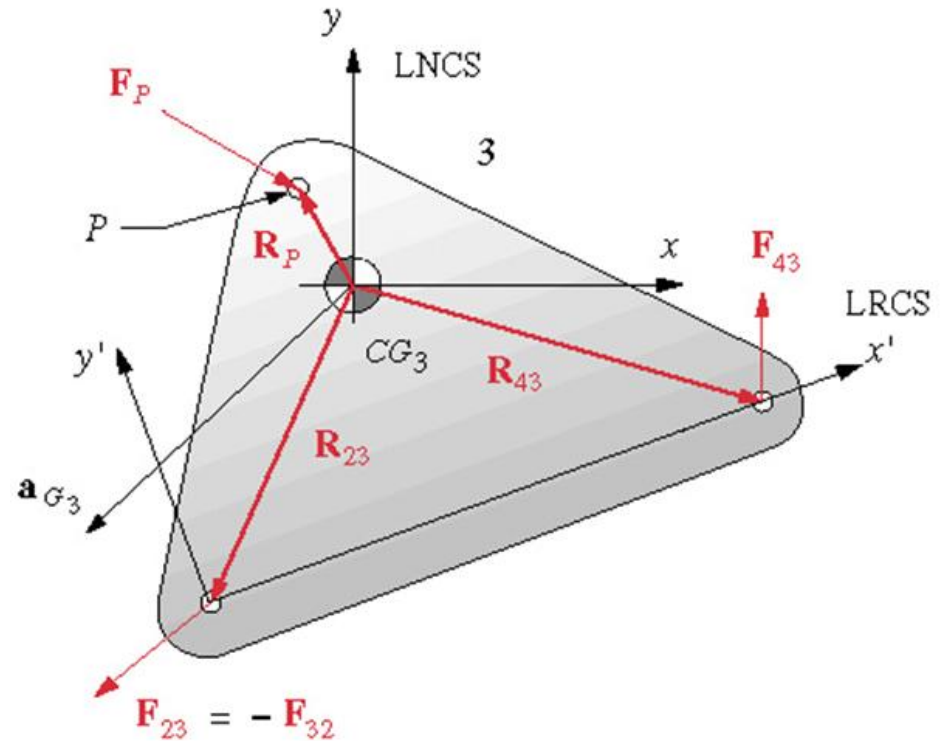
$$F_{12_y} + F_{32_y} = m_2 a_{G_2_y}$$

$$T_{12} + \left(R_{12_x} F_{12_y} - R_{12_y} F_{12_x} \right) + \left(R_{32_x} F_{32_y} - R_{32_y} F_{32_x} \right) = I_{G_2} \alpha_2$$



فصل ۱۰ تحلیل نیروهای استاتیکی و دینامیکی مکانیزمها

link 3



$$F_{43x} - F_{32x} + F_{Px} = m_3 a_{G3x}$$

$$F_{43y} - F_{32y} + F_{Py} = m_3 a_{G3y}$$

$$\left(R_{43x} F_{43y} - R_{43y} F_{43x} \right) - \left(R_{23x} F_{32y} - R_{23y} F_{32x} \right) +$$

$$\left(R_{Px} F_{Py} - R_{Py} F_{Px} \right) = I_{G3} \alpha_3$$

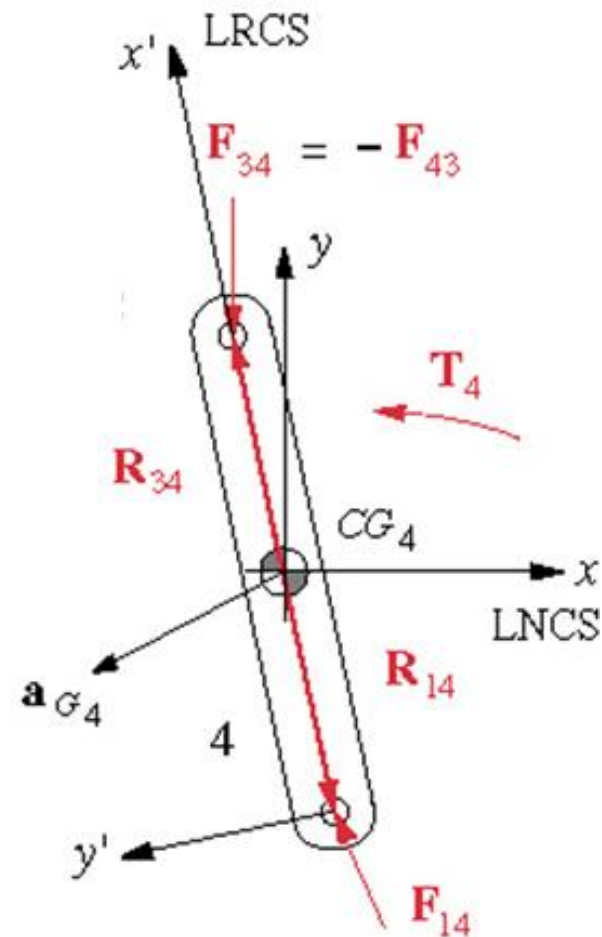
فصل ۱۰ تحلیل نیروهای استاتیکی و دینامیکی مکانیزمها

Link 4

$$F_{14_x} - F_{43_x} = m_4 a_{G_4_x}$$

$$F_{14_y} - F_{43_y} = m_4 a_{G_4_y}$$

$$\begin{aligned} & \left(R_{14_x} F_{14_y} - R_{14_y} F_{14_x} \right) - \\ & \left(R_{34_x} F_{43_y} - R_{34_y} F_{43_x} \right) + T_4 = I_{G_4} \alpha_4 \end{aligned}$$





There are nine unknowns present in these nine equations,

F_{12x} , F_{12y} , F_{32x} , F_{32y} , F_{43x} , F_{43y} , F_{14x} , F_{14y} , and T_{12}
so we can solve them simultaneously.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -R_{12y} & R_{12x} & -R_{32y} & R_{32x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{23y} & -R_{23x} & -R_{43y} & R_{43x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{34y} & -R_{34x} & -R_{14y} & R_{14x} & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_{12x} \\ F_{12y} \\ F_{32x} \\ F_{32y} \\ F_{43x} \\ F_{43y} \\ F_{14x} \\ F_{14y} \\ T_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_2 a_{G_2x} \\ m_2 a_{G_2y} \\ I_{G_2} \alpha_2 \\ m_3 a_{G_3x} - F_{P_x} \\ m_3 a_{G_3y} - F_{P_y} \\ I_{G_3} \alpha_3 - R_{P_x} F_{P_y} + R_{P_y} F_{P_x} \\ m_4 a_{G_4x} \\ m_4 a_{G_4y} \\ I_{G_4} \alpha_4 - T_4 \end{bmatrix}$$





فصل ۱۰ تحلیل نیروهای استاتیکی و دینامیکی مکانیزمها

به جزوه برداشته شده در کلاس مراجعه شود

